CHARLES-MICHEL MARLE

Sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 69-86
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__69_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.69-86

SOUS-VARIÉTÉS DE RANG CONSTANT D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

Charles-Michel Marle

au Professeur Georges Reeb,
en hommage respectueux

1. INTRODUCTION.

1.1. BUT DE CE TRAVAIL ET PRINCIPAUX RÉSULTATS.

Soit (M,Ω) une variété symplectique de dimension $2m$, et N une sous-variété de dimension n de M. On considèrera dans cet exposé le cas où la 2-forme Ω_N induite par Ω sur N, est de rang constant. Si ce rang, nécessairement pair, est $2p$, on conviendra de dire que N est une sous-variété de rang constant $2p$ de la variété symplectique M.

On se propose d'étudier et de classifier les voisinages, dans une variété symplectique, d'une sous-variété de rang constant donné. Le cas des sous-variétés coisotropes sera considéré d'abord, dans le paragraphe 3; puis le cas général sera traité paragraphe 4. On étudiera notamment le problème suivant. Soient (M_1,Ω_1) et (M_2,Ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension $2m$, N_1 et N_2 deux sous-variétés de même dimension n, et de même rang constant $2p$, respectivement de M_1 et de M_2. On désigne par Ω_{N_1} et Ω_{N_2} les 2-formes induites, respectivement, par Ω_1 sur N_1 et par Ω_2 sur N_2. On suppose qu'il existe un difféomorphisme $f : N_1 \to N_2$, tel que :

$$f^\star \Omega_{N_2} = \Omega_{N_1} \quad ,$$

et on cherche à quelle condition f se prolonge en un symplectomorphisme $\hat{f}$, d'un ouvert U_1 de M_1 contenant N_1, sur un ouvert U_2 de M_2 contenant N_2. Une réponse est donnée par le théorème 4.5 : f se prolonge en un symplectomorphisme $\hat{f}$ si et seulement si les deux fibrés vectoriels symplectiques $\operatorname{orth} TN_1 / TN_1 \cap \operatorname{orth} TN_1$ et $\operatorname{orth} TN_2 / TN_2 \cap \operatorname{orth} TN_2$

sont isomorphes, au dessus du difféomorphisme $f : N_1 \to N_2$ de leurs bases. Ce résultat étend un théorème de A. Weinstein [14, 15] relatif à la classification des voisinages des plongements isotropes d'une variété dans une variété symplectique.

Lorsqu'on se restreint à l'étude purement locale du voisinage d'un point d'une sous-variété de rang constant d'une variété symplectique, on peut déduire du théorème précédent l'existence de cartes adaptées (corollaire 4.6). On peut voir ainsi, notamment, que toute sous-variété de dimension n et de rang constant 2p d'une variété symplectique est localement (mais en général pas globalement), une feuille d'un feuilletage local de cette variété symplectique en sous-variétés de rang constant 2p.

On étudie ensuite le cas particulier où la sous-variété de rang constant est une orbite N de l'action d'un groupe de Lie de symplectomorphismes de la variété symplectique (M,Ω). Moyennant certaines hypothèses restrictives (et, notamment, en supposant l'action du groupe de Lie G hamiltonienne), on construit dans le paragraphe 5 un modèle d'un voisinage de l'orbite N, dans la variété symplectique (M,Ω); on montre en effet qu'il existe un symplectomorphisme d'un ouvert de M contenant N, sur un ouvert de l'espace total F^* d'un certain fibré vectoriel de base N, dont la restriction à N est la section nulle de F^*; le groupe de Lie G agit sur le fibré vectoriel F^*, et le symplectomorphisme dont on établit l'existence est équivariant, pour les actions de G sur M et sur F^*. On peut d'autre part expliciter entièrement, en termes ne faisant intervenir que les propriétés du groupe G et de son algèbre de Lie, la 2-forme symplectique sur F^* (ou plus exactement, sur un ouvert de l'espace total de ce fibré), et le moment de l'action du groupe de Lie G sur F^*. Ces résultats peuvent, en un certain sens, être considérés comme une généralisation du théorème d'existence des variables actions-angles [2, 3] pour les systèmes hamiltoniens complètement intégrables.

Les démonstrations reposent sur une généralisation de la forme de Liouville, présentée dans le paragraphe 2, et surtout sur les théorèmes de Weinstein [14, 15].

Le présent travail est à rapprocher de celui de P. Libermann [7]. La formulation de certains des problèmes traités ici, et plusieurs idées jouant un rôle important dans les démonstrations, ont d'ailleurs été suggérées par P. Libermann; l'auteur lui exprime sa très vive gratitude. D'autre part, l'auteur a également été fortement influencé

par le travail de P. Dazord [4, 5]; il le remercie chaleureusement, pour plusieurs discussions qui l'ont beaucoup éclairé.

1.2. HYPOTHÈSES GÉNÉRALES ET NOTATIONS.

Les variétés considérées sont à base dénombrable, différentiables de classe C^∞. Une même lettre (par exemple, E), sera utilisée pour désigner un fibré vectoriel et son espace total; si x est un point de la base, on notera E_x la fibre de E en x.

La terminologie et les notations concernant les variétés symplectiques sont celles de l'ouvrage d'Abraham et Marsden [1] .

2. FORMES DE LIOUVILLE GÉNÉRALISÉES.

2.1. Soit N une variété différentiable de dimension n, et F un sous-fibré vectoriel de rang k du fibré tangent TN. On appellera projecteur de TN sur F, un morphisme λ du fibré vectoriel TN sur le fibré vectoriel F, tel que la restriction de λ à F soit l'application identique. Il existe toujours de tels projecteurs: il suffit en effet de munir la variété N d'une métrique riemannienne g; TN est alors somme directe de F et de son orthogonal $F^\perp$, relativement à g; cette décomposition définit un projecteur ayant $F^\perp$ pour noyau.

2.2. DÉFINITION. Soit $\lambda : TM \to F$ un projecteur (2.1). On appelle forme de Liouville généralisée associée au projecteur λ, la 1-forme α_λ sur l'espace total du dual $F^\star$ de F :

$$\alpha_\lambda = ({}^t\lambda)^\star \alpha ,$$

où ${}^t\lambda : F^\star \to T^\star M$ est le morphisme transposé de λ, et où α désigne la 1-forme de Liouville sur le fibré cotangent $T^\star M$.

2.3. PROPOSITION. La forme de Liouville généralisée associée au projecteur λ vérifie les propriétés suivantes.

1°) Pour tout $v \in TF^\star$, on a si $p : TF^\star \to F^\star$ et $\pi : F^\star \to N$ désignent les projections canoniques :

$$\alpha_\lambda(v) = \langle\ p(v)\ ,\ \lambda \circ T\pi(v)\ \rangle\ .$$

2°) Pour toute section β du fibré vectoriel $F^\star$, on a :

$$\beta^{\star}\alpha_{\lambda} = {}^{t}\lambda \circ \beta ,$$

<u>et</u> α_{λ} <u>est l'unique 1-forme sur</u> $F^{\star}$ <u>vérifiant cette propriété</u>.

En effet 1°) est une conséquence immédiate de la définition, et 2°) se démontre comme la propriété correspondante de la forme de Liouville d'un fibré cotangent (voir par exemple [1]).

3. VARIÉTÉS PRÉSYMPLECTIQUES ET SOUS-VARIÉTÉS COISOTROPES.

3.1. Soit (N,Ω_N) une variété présymplectique (Souriau [13]), c'est-à-dire une variété différentiable N, de dimension n, munie d'une 2-forme fermée Ω_N de rang constant 2p. On pose :

$$n = 2p + k .$$

Le noyau $F = \ker \Omega_N$ de la 2-forme Ω_N est un sous-fibré vectoriel de rang k, complètement intégrable, du fibré tangent TN. Soit un projecteur $\lambda : TN \to F$; on note α_{λ} la forme de Liouville généralisée correspondante sur le dual $F^{\star}$ de F (2.2), et $\pi : F^{\star} \to N$ la projection canonique.

3.2. PROPOSITION. <u>Avec les hypothèses précisées en 3.1</u>, <u>la 2-forme</u> :

$$\Omega_{F^{\star}} = \pi^{\star}\Omega_N + d\alpha_{\lambda}$$

<u>est fermée</u>, <u>et l'ensemble</u> W <u>des points de</u> $F^{\star}$ <u>où elle est non dégénérée est un ouvert contenant l'image de la section nulle</u>. <u>La variété</u> N, <u>identifiée grâce à la section nulle à une sous-variété de</u> W, <u>est une sous-variété coisotrope de la variété symplectique</u> $(W,\Omega_{F^{\star}})$, <u>et la 2-forme induite sur</u> N <u>par</u> $\Omega_{F^{\star}}$ <u>n'est autre que</u> Ω_N.

<u>Démonstration</u>. D'après le théorème de Darboux, tout point de la variété N possède un voisinage U, domaine d'une carte de coordonnées locales $x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p}$, telle que Ω_N ait pour expression :

$$\Omega_N = \sum_{i=1}^{p} dy^{p+i} \wedge dy^i .$$

Soient $x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p}, p_1, \dots p_k$ les coordonnées locales dans la carte correspondante de $F^{\star}$. Un champ de vecteurs Z tangent à $F^{\star}$ s'exprime dans cette carte sous la forme :

$$Z = \sum_{i=1}^{k} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{2p} Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_{s=1}^{k} P_s \frac{\partial}{\partial p_s} ,$$

où X^i, Y^j, P_s sont fonctions de $(x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p}, p_1, \dots p_k)$. On a :

$$T\pi \circ Z = \sum_{i=1}^{k} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{2p} Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} ;$$

$$\lambda \circ T\pi \circ Z = \sum_{i=1}^{k} (X^i + \sum_{j=1}^{2p} A^i_j Y^j) \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

où les A^i_j sont des fonctions de $(x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p})$. On a donc, d'après 2.3, 1°) :

$$\langle \alpha_\lambda , Z \rangle = \sum_{i=1}^{k} p_i (X^i + \sum_{j=1}^{2p} A^i_j Y^j) .$$

Ceci montre que la forme de Liouville généralisée α_λ est :

$$\alpha_\lambda = \sum_{i=1}^{k} p_i (dx^i + \sum_{j=1}^{2p} A^i_j dy^j) .$$

Par conséquent :

$$d\alpha_\lambda = \sum_{i=1}^{k} \Big[dp_i \wedge (dx^i + \sum_{j=1}^{2p} A^i_j dy^j)$$
$$+ p_i (\sum_{j=1}^{2p} (\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial A^i_j}{\partial x^s} dx^s + \sum_{r=1}^{2p} \frac{\partial A^i_j}{\partial y^r} dy^r) \wedge dy^j) \Big] .$$

On en déduit l'expression locale de $\Omega_{F^\star}$:

$$\Omega_{F^\star} = \sum_{i=1}^{p} dy^{p+i} \wedge dyi + \sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge (dx^i + \sum_{j=1}^{2p} A^i_j dy^j)$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} p_i (\sum_{j=1}^{2p} (\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial A^i_j}{\partial x^s} dx^s + \sum_{r=1}^{2p} \frac{\partial A^i_j}{\partial y^r} dy^r) \wedge dy^j) .$$

La 2-forme $\Omega_{F^\star}$ est évidemment fermée, et on voit immédiatement qu'elle est non dégénérée sur l'image de la section nulle de $F^\star$, car celle-ci est, dans la carte considérée, définie par les équations $p_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. On voit aussi que $\Omega_{F^\star}$ induit sur N (identifiée grâce à la section nulle, à une sous-variété de $F^\star$), la 2-forme Ω_N, et que N est coisotrope.

3.3. REMARQUE. On convient, comme en 3.2, d'identifier, grâce à la section nulle de $F^\star$, N à une sous-variété coisotrope de la variété symplectique $(W, \Omega_{F^\star})$. Soit x un point de N. Le noyau ker λ_x du projecteur λ au point x, est un sous-espace vectoriel de T_xN, donc aussi de T_xW. On peut vérifier que ker λ_x est un sous-espace vectoriel symplectique, de dimension 2p, de l'espace vectoriel symplectique T_xW. Avec les notations de la démonstration de 3.2, ker λ_x est en effet engendré par les 2p vecteurs, valeurs au point x des champs :

$$\frac{\partial}{\partial y^j} - \sum_{i=1}^{k} A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad , \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2p) \quad .$$

L'orthogonal symplectique (relativement à $\Omega_{F^\star}$) orth(ker λ_x) de ker λ_x, est donc un sous-espace vectoriel symplectique, de dimension 2k, de T_xW; il est engendré par les 2k vecteurs, valeurs au point x des champs :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \; , \; (1 \leqslant i \leqslant k) \qquad ; \qquad \frac{\partial}{\partial p_i} \; , \; (1 \leqslant i \leqslant k) \quad .$$

On voit ainsi que F_x (fibre en x du sous-fibré vectoriel F de TN) et $T_x(F^\star_x)$ (espace tangent en x à la fibre de $F^\star$ au point x), sont deux sous-espaces lagrangiens supplémentaires de l'espace vectoriel symplectique orth(ker λ_x), engendrés respectivement par les valeurs en x des champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et $\frac{\partial}{\partial p_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

3.4. PROPOSITION. <u>Toute variété présymplectique</u> (N,Ω_N) <u>peut être plongée, en tant que sous-variété coisotrope, dans une variété symplectique</u> (M,Ω), <u>la 2-forme symplectique</u> Ω <u>induisant sur</u> N <u>la 2-forme</u> Ω_N.

Cette proposition est en effet une conséquence immédiate de 3.2, puisqu'on peut prendre $(M,\Omega) = (W,\Omega_{F^\star})$.

3.5. En vue d'applications développées dans le paragraphe 4, on va généraliser la proposition 3.2; on conserve les hypothèses et notations précisées en 3.1, et de plus on considère un fibré vectoriel H, de base N et de rang 2q $(q \in \mathbb{N})$. On suppose donné un morphisme bilinéaire antisymétrique :

$$\omega_H : H \oplus H \to \mathbb{R}$$

qui fait de H un fibré vectoriel symplectique.

Un théorème d'extension, dû à A. Weinstein [15], permet d'affirmer qu'il existe une 2-forme différentielle fermée Ω_H, définie sur l'espace total du fibré vectoriel H, vérifiant les propriétés suivantes:

i) pour tout point x de N, et tous $v \in T_xN$, $w \in T_xH$, on a

$$\Omega_H(x)\ (v\ ,\ w) = 0 \quad ;$$

ii) pour tout point x de N, et tout couple (v,w) d'éléments de la fibre H_x , on a :

$$\Omega_H(x)\ (v\ ,\ w) = \omega_H(x)\ (v\ ,\ w)\quad .$$

Dans le membre de gauche, le point x de N est considéré comme un point de H (l'origine de la fibre H_x), car N est identifiée à l'image de la section nulle; on a également identifié H_x avec le sous-espace vectoriel T_xH_x de T_xH ; v et w sont donc, dans ce membre, considérés comme deux éléments de T_xH.

3.6. PROPOSITION. Les hypothèses et notations étant celles précisées en 3.1, 3.2 et 3.5, on définit, sur l'espace total du fibré vectoriel $H \oplus F^{\star}$, une 2-forme fermée $\Omega_{H\oplus F^{\star}}$ en posant :

$$\Omega_{H\oplus F^{\star}} = \pi_1^{\star}\Omega_H + \pi_2^{\star}\Omega_{F^{\star}}\quad ,$$

π_1 et π_2 désignant les projections de $H \oplus F^{\star}$, respectivement sur H et sur $F^{\star}$.

Alors l'ensemble V des points de $H \oplus F^{\star}$ où la 2-forme fermée $\Omega_{H\oplus F^{\star}}$ est non dégénérée, est un ouvert contenant l'image de la section nulle. La variété N, identifiée grâce à la section nulle à une sous-variété de V, est une sous-variété de rang constant 2p de la variété symplectique $(V,\Omega_{H\oplus F^{\star}})$, et la 2-forme induite sur N par $\Omega_{H\oplus F^{\star}}$ n'est autre que Ω_N.

Démonstration. Les propriétés indiquées sont des conséquences directes de 3.3, 3.5, et de la décomposition en somme directe de l'espace tangent en un point x de N à l'espace total $H \oplus F^{\star}$:

$$\begin{aligned} T_x(H \oplus F^{\star}) &= T_xN \oplus T_x(H_x) \oplus T_x(F^{\star}_x) \\ &= T_xF^{\star} \oplus T_x(H_x)\quad . \end{aligned}$$

La proposition 3.6 admet un corollaire, qui généralise 3.4 :

3.7. COROLLAIRE. Soit (N,Ω_N) une variété présymplectique de dimension $n = 2p + k$, munie d'une 2-forme fermée Ω_N de rang 2p. Pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, la variété N se plonge, en tant que sous-variété de rang constant 2p, dans une variété symplectique (M,Ω) de dimension $2(p+k+q)$, la 2-forme symplectique Ω induisant sur N la 2-forme Ω_N.

Il existe en effet un fibré vectoriel symplectique H de base N et de rang 2q : par exemple le fibré trivial $N \times \mathbb{R}^{2q}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3.6, et de faire $(M,\Omega) = (V,\Omega_{H\oplus F^\star})$.

4. SOUS-VARIÉTÉS DE RANG CONSTANT D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE.

4.1. Soit (M,Ω) une variété symplectique de dimension 2m, N une sous-variété de dimension n et de rang constant 2p (définition en 1.1) de la variété M, et Ω_N la 2-forme induite par Ω sur N. On a toujours :

$$n = 2p + k \quad ; \quad 2m = 2p + 2k + 2q ,$$

avec k et $q \in \mathbb{N}$. On a considéré dans le paragraphe précédent le cas où N est coisotrope, c'est-à-dire le cas où $q = 0$. On va maintenant traiter le cas général $q \geqslant 0$.

On désigne par T_NM le fibré vectoriel symplectique, restriction de TM à N. Le fibré TN, tangent à la sous-variété N, en est un sous-fibré vectoriel. On note orth(TN) l'orthogonal symplectique de TN dans T_NM, et on pose :

$$F = \ker \Omega_N = TN \cap \text{orth}(TN) .$$

Comme en 3.1, F est un sous-fibré vectoriel de rang k, complètement intégrable, de TN.

4.2. LEMME. <u>Avec les hypothèses et notations précisées en 4.1, le fibré vectoriel symplectique T_NM se décompose (de manière non unique) en une somme directe</u> :

$$T_NM = F \oplus G \oplus H \oplus K ,$$

<u>où</u> G <u>et</u> H <u>sont des supplémentaires de</u> F, <u>respectivement dans</u> TN <u>et dans</u> orth(TN); G, H <u>et leur somme directe</u> $G \oplus H$ <u>sont des sous-fibrés vectoriels symplectiques de</u> T_NM, <u>de rangs respectifs</u> 2p, 2q <u>et</u> 2(p+q); <u>l'orthogonal symplectique</u> orth$(G \oplus H)$ <u>de</u> $G \oplus H$ <u>dans</u> T_NM <u>est un sous-fibré vectoriel symplectique de</u> T_NM, <u>et</u> F <u>en est un sous-fibré lagrangien; enfin</u> K <u>est un supplémentaire lagrangien de</u> F <u>dans</u> orth$(G \oplus H)$. <u>La 2-forme</u> Ω <u>établit alors un isomorphisme</u> j <u>de</u> K <u>sur le dual</u> $F^\star$ <u>de</u> F, <u>si l'on pose pour tous</u> $x \in N$, $v \in K_x$, $w \in F_x$:

$$\langle j(v) , w \rangle = \Omega(x) (v , w) .$$

<u>Démonstration</u>. L'énoncé même de ce lemme donne le schéma de la

démonstration: on choisit, d'une manière quelconque (par exemple en utilisant l'orthogonalité relativement à une métrique riemannienne auxiliaire), des supplémentaires G et H de F, respectivement dans TN et dans $\mathrm{orth}(TN)$; les rangs de G et de H sont respectivement $2p$ et $2q$ et, puisque $F = TN \cap \mathrm{orth}(TN)$, les restrictions de Ω aux sous-fibrés G et H sont non dégénérées; G et H sont donc bien des sous-fibrés vectoriels symplectiques de $T_N M$, ainsi que leur somme directe $G \oplus H$. L'orthogonal symplectique $\mathrm{orth}(G \oplus H)$ de $G \oplus H$ dans $T_N M$, est donc aussi un sous-fibré vectoriel symplectique de $T_N M$. D'autre part, on a:

$$\mathrm{orth}\, F = TN + \mathrm{orth}(TN) = F \oplus G \oplus H \quad ,$$

donc :

$$\mathrm{orth}\, F \supset G \oplus H \quad ,$$

$$F \subset \mathrm{orth}(G \oplus H) \quad .$$

Comme la restriction de la 2-forme Ω à F est nulle, et que les rangs de F et de $\mathrm{orth}(G \oplus H)$ sont respectivement k et $2k$, on voit que F est un sous-fibré lagrangien de $\mathrm{orth}(G \oplus H)$. Un théorème de Weinstein [14] permet alors d'ffirmer l'existence d'un supplémentaire lagrangien K de F dans $\mathrm{orth}(G \oplus H)$. Enfin puisque la restriction de Ω à $\mathrm{orth}(G\oplus H)$ est non dégénérée, la formule indiquée dans l'énoncé définit un isomorphisme j de K sur $F^\star$.

4.3. Dans les hypothèses et avec les notations du lemme 4.2, on choisit pour projecteur $\lambda : TN = F \oplus G \to F$, le morphisme de fibrés vectoriels dont la restriction à F est l'identité, et dont le noyau est G. Soit $\Omega_{F^\star}$ la 2-forme sur $F^\star$ qui lui est associée, et Ω_H une 2-forme fermée définie sur l'espace total du fibré vectoriel symplectique H, obtenue comme indiqué en 3.5. La 2-forme fermée $\Omega_{H\oplus F^\star}$ définie dans la proposition 3.6 est, d'après cette même proposition, non dégénérée sur un ouvert V de $H \oplus F$ contenant l'image de la section nulle, et elle induit sur N (identifiée, grâce à la section nulle, à une sous-variété de V), une 2-forme égale à Ω_N.

4.4. LEMME. Avec les hypothèses et notations précisées en 4.3, il existe un symplectomorphisme φ d'un ouvert U, contenant N, de la variété symplectique (M,Ω), sur un ouvert $\varphi(U)$ de la variété symplectique $(V,\Omega_{H\oplus F^\star})$, dont la restriction à N est la section nulle de $H \oplus F^\star$.

Démonstration. Puisque $H \oplus K$ est un supplémentaire du sous-fibré vectoriel TN de $T_N M$, il existe un voisinage tubulaire de la sous-variété N de M, à valeurs dans $H \oplus K$, c'est-à-dire un difféomorphisme ψ d'un ouvert W de M contenant N, sur un ouvert $\psi(W)$ de $H \oplus K$, dont la restriction à N est la section nulle de $H \oplus K$. On impose de plus à ψ de vérifier, pour tout point x de N et tout élément v du sous-espace vectoriel $H_x \oplus K_x$ de $T_x M$:

$$(\star) \qquad T_x\psi(v) = v \quad .$$

On a convenu d'identifier $H_x \oplus K_x$ avec le sous-espace vertical de $T_{\psi(x)}(H \oplus K)$, ensemble des vecteurs tangents à la fibre $H_x \oplus K_x$ en son origine $\psi(x)$; au second membre de l'expression ci-dessus, v est donc considéré comme un élément de $T_{\psi(x)}(H \oplus K)$. On pose :

$$(\star\star) \qquad \tilde{\psi} = (\mathrm{id}_H \oplus j) \circ \psi \quad ,$$

où $j : K \to F^\star$ est l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini dans le lemme 4.2.

En restreignant si nécessaire W, on peut supposer $\tilde{\psi}(W)$ contenu dans l'ouvert V. On a alors sur l'ouvert W de M deux formes symplectiques, Ω et $\tilde{\psi}^\star(\Omega_{H\oplus F^\star})$. Afin de vérifier que ces deux formes sont égales sur la sous-variété N, on considère un point x de N, et deux éléments v et w de $T_x M$. On a :

$$\tilde{\psi}^\star(\Omega_{H\oplus F^\star})(x)(v,w) = \Omega_{H\oplus F^\star}(\tilde{\psi}(x))(T_x\tilde{\psi}(v) \; , \; T_x\tilde{\psi}(w)) \quad .$$

Si v et w appartiennent tous deux à $T_x N = F_x \oplus G_x$, le second membre de cette expression est égal à $\Omega(x)(v,w)$, car la 2-forme induite par $\Omega_{H\oplus F^\star}$ sur N (identifiée à l'image de la section nulle) n'est autre que Ω_N.

Si v appartient à H_x, la propriété $(\star)$ de ψ, et la définition $(\star\star)$ de $\tilde{\psi}$, montrent que $T_x\tilde{\psi}(v)$ est égal à v; si de plus w est élément de $T_x N \oplus K_x$, on voit compte tenu de la définition de $\Omega_{H\oplus F^\star}$ (3.6) et des propriétés de Ω_H (3.5), que le second membre de l'expression ci-dessus est nul; $\Omega(x)(v,w)$ est nul aussi, puisque $T_x N \oplus K_x$ est l'orthogonal symplectique de H_x.

Si v et w appartiennent tous deux à H_x, $T_x\tilde{\psi}(v)$ et $T_x\tilde{\psi}(w)$ sont égaux, respectivement, à v et w, et le second membre de l'égalité ci-dessus est égal à $\Omega(x)(v,w)$.

Si v appartient à K_x, $T_x\tilde{\psi}(v)$ est égal à $j(v)$, d'après $(\star)$ et $(\star\star)$; si de plus w appartient à $G_x \oplus K_x$, les propriétés de la 2-forme

$\Omega_{F^\star}$ établies en 3.3 montrent que le second membre de l'expression ci-dessus est nul; $\Omega(x)(v,w)$ est nul aussi car l'orthogonal symplectique de K_x est $G_x \oplus H_x \oplus K_x$.

Enfin si v appartient à K_x et w à F_x, on a d'après les propriétés de $\Omega_{F^\star}$:

$$\Omega_{H\oplus F^\star}(\tilde{\psi}(x))(T_x\tilde{\psi}(v) \quad , \; T_x\tilde{\psi}(w)) = \langle \; j(v) \quad , \; w \rangle \quad = \Omega(x)(v,w) \quad .$$

En utilisant la bilinéarité des deux 2-formes considérées, et la décomposition en somme directe de T_xM, on voit que Ω et $\tilde{\psi}^\star(\Omega_{H\oplus F^\star})$ sont égales sur la sous-variété N. Un théorème de Weinstein [14, 15] montre alors qu'il existe un difféomorphisme χ d'un ouvert U de W contenant N, sur un autre ouvert $\chi(U)$ de W contenant N, dont la restriction à N est l'identité, vérifiant :

$$\chi^\star(\tilde{\psi}^\star(\Omega_{H\oplus F^\star})) = \Omega \quad .$$

On voit ainsi que :

$$\varphi = \tilde{\psi} \circ \chi$$

possède les propriétés désirées.

4.5. THÉORÈME. <u>Soient</u> (M_1,Ω_1) <u>et</u> (M_2,Ω_2) <u>deux variétés symplectiques de même dimension</u> 2m, N_1 <u>et</u> N_2 <u>deux sous-variétés</u>, <u>de dimension</u> n <u>et de rang constant</u> 2p, <u>respectivement de</u> M_1 <u>et de</u> M_2, Ω_{N_1} <u>et</u> Ω_{N_2} <u>les formes induites</u>, <u>respectivement par</u> Ω_1 <u>sur</u> N_1 <u>et par</u> Ω_2 <u>sur</u> N_2. <u>On suppose qu'il existe un difféomorphisme</u> $f : N_1 \to N_2$, <u>tel que</u> :

$$f^\star\Omega_{N_2} = \Omega_{N_1} \quad .$$

<u>Le difféomorphisme</u> f <u>se prolonge en un symplectomorphisme</u> $\hat{f}$ <u>d'un ouvert</u> U_1 <u>de</u> M_1 <u>contenant</u> N_1, <u>sur un ouvert</u> U_2 <u>de</u> M_2 <u>contenant</u> N_2, <u>si et seulement si les deux fibrés vectoriels symplectiques</u> :

$$\mathrm{orth}(TN_1) \;/\; TN_1 \cap \mathrm{orth}(TN_1) \quad , \; \underline{\text{et}} \quad \mathrm{orth}(TN_2) \;/\; TN_2 \cap \mathrm{orth}(TN_2) \quad ,$$

<u>sont isomorphes</u>, <u>au dessus du difféomorphisme</u> $f : N_1 \to N_2$ <u>de leurs bases</u>.

<u>Démonstration</u>. Si le symplectomorphisme $\hat{f}$ prolongeant f existe, les deux fibrés vectoriels symplectiques $\mathrm{orth}(TN_i) \;/\; TN_i \cap \mathrm{orth}(TN_i)$, $(i = 1$ ou $2)$, sont évidemment isomorphes. Réciproquement, on suppose ces deux fibrés isomorphes. On pose $F_1 = \ker \Omega_{N_1}$, $F_2 = \ker \Omega_{N_2}$. On

choisit un supplémentaire G_1 de F_1 dans TN_1, et on pose :

$$G_2 = Tf(G_1) \quad .$$

G_2 est alors un supplémentaire de F_2 dans TN_2. En appliquant le lemme 4.2, on obtient les décompositions en sommes directes :

$$T_{N_1}M_1 = F_1 \oplus G_1 \oplus H_1 \oplus K_1 \quad ,$$

$$T_{N_2}M_2 = F_2 \oplus G_2 \oplus H_2 \oplus K_2 \quad .$$

Le fibré vectoriel symplectique H_1, supplémentaire de $TN_1 \cap \mathrm{orth}(TN_1)$ dans $\mathrm{orth}(TN_1)$, est isomorphe au fibré symplectique quotient $\mathrm{orth}(TN_1) / TN_1 \cap \mathrm{orth}(TN_1)$. De même, H_2 est isomorphe à $\mathrm{orth}(TN_2) / TN_2 \cap \mathrm{orth}(TN_2)$. D'après l'hypothèse faite, H_1 et H_2 sont deux fibrés vectoriels symplectiques isomorphes, au dessus du difféomorphisme $f : N_1 \to N_2$ de leurs bases. D'après le lemme 4.2, les 2-formes Ω_1 et Ω_2 définissent des isomorphismes j_1 et j_2, respectivement de K_1 sur $F_1^\star$, et de K_2 sur $F_2^\star$. Mais la restriction de Tf à F_1 est un isomorphisme de F_1 sur F_2; le transposé de $(Tf|_{F_1})^{-1}$ est un isomorphisme de $F_1^\star$ sur $F_2^\star$. On obtient donc ainsi un isomorphisme, noté $\tilde{f}$, de $H_1 \oplus F_1^\star$ sur $H_2 \oplus F_2^\star$, au dessus du difféomorphisme $f : N_1 \to N_2$. Les deux 2-formes fermées $\Omega_{H_1 \oplus F_1^\star}$ et $\Omega_{H_2 \oplus F_2^\star}$ non dégénérées respectivement sur un ouvert V_1 de $H_1 \oplus F_1^\star$ et sur un ouvert V_2 de $H_2 \oplus F_2^\star$, obtenues grâce à la proposition 3.6, peuvent être choisies de telle sorte qu'elles vérifient :

$$\tilde{f}^\star(\Omega_{H_1 \oplus F_1^\star}) = \Omega_{H_2 \oplus F_2^\star} \quad .$$

Soient d'autre part φ_i ($i = 1$ ou 2) les symplectomorphismes d'un ouvert U_i de (M_i, Ω_i) sur un ouvert $\varphi_i(U_i)$ de $(V_i, \Omega_{H_i \oplus F_i^\star})$, obtenus par application du lemme 4.4. En restreignant convenablement les ouverts U_1 et U_2, on peut faire en sorte que l'application :

$$\hat{f} = \varphi_2^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_1$$

soit un symplectomorphisme de U_1 sur U_2, possédant les propriétés désirées.

On peut déduire du théorème précédent une propriété purement locale, présentée dans le corollaire :

4.6. COROLLAIRE. Soit N une sous-variété de dimension n et de rang constant $2p$, d'une variété symplectique (M,Ω) de dimension $2m$. On pose

$n = 2p + k$, $m = 2(p + k + q)$. Tout point x de N possède un voisinage ouvert U dans M, domaine d'une carte de M dont les coordonnées locales sont notées $(x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p}, z_1, \dots z_k, w^1, \dots w^{2q})$, telle que la forme symplectique Ω ait pour expression :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} dy^{i+p} \wedge dy^i + \sum_{j=1}^{k} dz_j \wedge dx^j + \sum_{r=1}^{q} dw^{r+q} \wedge dw^r \quad ,$$

et que $N \cap U$ soit défini par les équations :

$$z_j = 0 \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant k) \quad ; \qquad w^r = 0 \quad , \quad (1 \leqslant r \leqslant 2q) \quad .$$

Démonstration. Soit M_1 un ouvert de M, contenant le point x, Ω_1 la restriction de Ω à M_1, et $N_1 = N \cap M_1$. En restreignant si nécessaire M_1, on peut supposer N_1 contractile; tous les fibrés vectoriels de base N_1 rencontrés dans l'application du théorème 4.5 sont alors triviaux. Soit Ω_{N_1} la 2-forme induite par Ω_1 sur N_1. Le théorème de Darboux, appliqué à la variété présymplectique (N_1, Ω_{N_1}), montre qu'il existe sur N_1 un système de coordonnées locales $(x^1, \dots x^k, y^1, \dots y^{2p})$ tel que Ω_{N_1} ait pour expression :

$$\Omega_{N_1} = \sum_{i=1}^{p} dy^{i+p} \wedge dy^i \quad .$$

On prend alors $M_2 = N_1 \times \mathbb{R}^{k+2q}$, et on désigne les coordonnées locales usuelles sur le facteur $\mathbb{R}^{k+2q}$ par $(z_1, \dots z_k, w^1, \dots w^{2q})$. On prend pour sous-variété N_2 de M_2 :

$$N_2 = N_1 \times \{0\} \quad ,$$

et pour forme symplectique Ω_2 sur M_2 :

$$\Omega_2 = \sum_{i=1}^{p} dy^{i+p} \wedge dy^i + \sum_{j=1}^{k} dz_j \wedge dx^j + \sum_{r=1}^{q} dw^{r+q} \wedge dw^r \quad .$$

Le fibré vectoriel symplectique $\operatorname{orth}(TN_1) / TN_1 \cap \operatorname{orth}(TN_1)$, de rang $2q$, est trivial; il s'identifie au produit $N_1 \times \mathbb{R}^{2q}$, muni d'un morphisme bilinéaire de $N_1 \times \mathbb{R}^{2q} \times \mathbb{R}^{2q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(n_1 \; , \; v \; , \; v') \mapsto \omega(n_1)(v \; , \; v') \quad ,$$

(avec $n_1 \in N_1$, v et $v' \in \mathbb{R}^{2q}$; $n_1 \mapsto \omega(n_1)$ est une application différentiable de N_1 dans l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées sur $\mathbb{R}^{2q}$).

Mais puisque N_1 est contractile, on peut en utilisant un automorphisme convenable du fibré vectoriel trivial $N_1 \times \mathbb{R}^{2q}$, se ramener au cas où $\omega(n_1)$ est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée fixe sur $\mathbb{R}^{2q}$, indépendante du point n_1 de N_1 considéré.

On voit ainsi que les deux fibrés vectoriels symplectiques $\mathrm{orth}(TN_1) / TN_1 \cap \mathrm{orth}(TN_1)$ et $\mathrm{orth}(TN_2) / TN_2 \cap \mathrm{orth}(TN_2)$ sont isomorphes. Le théorème 4.5 donne alors le résultat désiré.

4.7. REMARQUES.

1°). Le théorème 4.5 et son corollaire 4.6 permettent de retrouver certains résultats dûs à Lichnerowicz [8], concernant les hamiltoniens adaptés à une sous-variété, et à Sniatycki [12], concernant les sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique. Le lecteur pourra pour cela se reporter à [9].

2°). Avec les notations de 4.6, les sous-variétés d'équations :

$$z_j = a_j \quad , (1 \leqslant j \leqslant k) \quad ; \quad w^r = b^r \quad , \quad (1 \leqslant r \leqslant 2q) \quad ,$$

où les a_j et b^r sont des constantes, forment un feuilletage local de la variété symplectique M, en sous-variétés de dimension n et de rang constant 2p, dont $N \cap U$ est une feuille.

5. VOISINAGE D'UNE ORBITE D'UNE ACTION HAMILTONIENNE.

5.1. Soit (M,Ω) une variété symplectique connexe, de dimension 2m, et G un groupe de Lie de dimension n agissant à gauche sur M par symplectomorphismes. On note cette action :

$$(g \ , \ x) \mapsto g.x \quad ,$$

et on la suppose hamiltonienne : cela signifie qu'il existe une application J de M dans le dual $\mathcal{G}^\star$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, appelée moment (Souriau [13]), telle que pour tout $X \in \mathcal{G}$, on ait :

$$i(X_M)\Omega = - d \langle J \ , \ X \rangle \ .$$

On a désigné par X_M le champ de vecteurs fondamental sur M associé à X, défini par :

$$X_M(x) = \frac{d}{dt} (\exp(-tX).x) \Big|_{t=0} \quad , \qquad (x \in M).$$

On sait [13] qu'il existe une action affine a de G sur $\mathcal{G}^\star$, dont la partie linéaire est l'action coadjointe, qui rend le moment J équivariant. Cette action s'exprime par :

$$a(g \ , \ \mu) = \mathrm{Ad}^\star_g \, \mu + \theta(g) \qquad (g \in G \ , \ \mu \in \mathcal{G}^\star) \ ,$$

où $\theta : G \to \mathfrak{g}^\star$ est un 1-cocycle symplectique. On a noté $Ad^\star$ la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^\star$, contragrédiente de la représentation adjointe :

$$\langle Ad^\star_g \mu \, , X \rangle = \langle \mu \, , Ad_{g^{-1}} X \rangle \quad , \quad (\mu \in \mathfrak{g}^\star, \; g \in G, \; X \in \mathfrak{g}) \; .$$

5.2. Soit $\xi \in \mathfrak{g}^\star$ une valeur régulière de J, telle que $J^{-1}(\xi)$ soit non vide. On pose :

$$\mathcal{O}_\xi = \{a(g \, , \xi) \mid g \in G\} \quad ; \quad G_\xi = \{g \in G \mid a(g \, , \xi) = \xi\};$$

$$M_\xi = J^{-1}(\xi) \quad ; \quad N_\xi = J^{-1}(\mathcal{O}_\xi) \quad .$$

L'orbite $\mathcal{O}_\xi$ est une sous-variété immergée (pas nécessairement plongée) de $\mathfrak{g}^\star$. D'après le théorème de Kirillov-Kostant-Souriau [6], elle possède une structure symplectique. Sa dimension, nécessairement paire, sera notée 2p.

M_ξ est une sous-variété de dimension 2m-n de M. Pour tout point x de M_ξ, on montre (Marsden et Weinstein [11]) que l'orthogonal symplectique de $T_x M_\xi$ est :

$$\operatorname{orth}(T_x M_\xi) = \{X_M(x) \mid X \in \mathfrak{g}\} \; .$$

Ce résultat permet de montrer que l'action de G sur M est localement libre au voisinage de N_ξ. On vérifie également que N_ξ est une sous-variété coisotrope (en général immergée, pas nécessairement plongée), de dimension 2m+2p-n, de la variété symplectique (M,Ω).

5.3. Outre les hypothèses déjà indiquées en 5.1 et en 5.2, on fera pour simplifier les hypothèses additionnelles suivantes :

i) le groupe G, et son sous-groupe G_ξ, sont connexes;

ii) l'action de G sur N_ξ est simplement transitive;

iii) N_ξ est une sous-variété fermée de M.

On choisit, une fois pour toutes, un point x_o de M . L'application:

$$g \mapsto g.x_o$$

est alors un difféomorphisme de G sur N_ξ, appliquant le sous-groupe G_ξ sur M_ξ, et l'élément neutre sur x_o. On conviendra dans la suite d'identifier G à N_ξ au moyen de ce difféomorphisme. D'autre part, l'orbite $\mathcal{O}_\xi$ s'identifie à l'espace homogène G/G_ξ, et la restriction de J à N_ξ s'identifie alors à la projection canonique de G sur G/G_ξ.

5.4. Puisqu'on a convenu d'identifier G à la sous-variété coisotrope N_ξ de M, on note Ω_G la 2-forme induite par Ω sur G, et F le noyau de Ω_G. Comme en 3.1, on choisit un projecteur λ de TG sur F; mais dans le cas présent, le groupe G agit sur lui-même par translation à gauche, en laissant Ω_G invariante; le relèvement canonique de cette action à TG laisse le sous-fibré vectoriel F invariant, et on doit choisir le projecteur λ de telle sorte qu'il soit équivariant. Puisque le point x_o s'identifie à l'élément neutre e de G, la fibre F_{x_o} s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\xi$ du sous-groupe G_ξ de G. Le choix d'un projecteur (également noté λ) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (considérée comme un espace vectoriel) sur son sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\xi$, détermine donc le projecteur λ à l'élément neutre; sa valeur en tout point de G s'en déduit par équivariance.

D'après la proposition 3.2, on peut alors définir sur l'espace total du dual $F^\star$ de F, une 2-forme fermée $\Omega_{F^\star}$, et l'ensemble W des points de $F^\star$ où $\Omega_{F^\star}$ est non dégénérée est un ouvert contenant G (identifié à une sous-variété de $F^\star$ au moyen de la section nulle).On a vu que G agit sur le fibré vectoriel F. Par dualité, on en déduit une action de G sur $F^\star$, qui relève l'action de G sur lui-même par translation à gauche. On vérifie que la 2-forme $\Omega_{F^\star}$, et l'ouvert W, sont invariants par cette action. On peut même voir que l'action de G sur la variété symplectique $(W,\Omega_{F^\star})$ est hamiltonienne, et déterminer un moment $\hat{J} : W \to \mathfrak{g}^\star$ de cette action.

L'action de G sur $F^\star$ permet de trivialiser ce fibré vectoriel et de l'identifier à $G \times \mathfrak{g}_\xi^\star$, où $\mathfrak{g}_\xi^\star$ désigne le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\xi$ du groupe G_ξ. On note :

$$\pi : F^\star \to G \qquad ; \qquad \chi : F^\star \to \mathfrak{g}_\xi^\star$$

les applications correspondantes. La 2-forme $\Omega_{F^\star}$, et le moment $\hat{J}$, sont alors donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega_{F^\star}(\mu)\ (Z_1\ ,\ Z_2) = \langle \xi - {}^t\lambda\beta\ ,[TL_{g^{-1}} X_1\ ,\ TL_{g^{-1}} X_2]\rangle \\ - \Theta(TL_{g^{-1}} X_1\ ,\ TL_{g^{-1}} X_2) \\ + \langle \eta_1 , \lambda \circ TL_{g^{-1}} X_2\rangle - \langle \eta_2 , \lambda \circ TL_{g^{-1}} X_1\rangle\ ;\end{aligned}$$

$$\hat{J}(\mu) = Ad^\star_g\ (\xi - {}^t\lambda\beta) + \theta(g) \quad .$$

On a désigné par μ un élément de $F^\star$, par Z_1 et Z_2 deux vecteurs tangents à $F^\star$ en μ; $\Theta = T_e\theta$ est considéré ici comme une forme bilinéaire sur $\mathfrak{G}$; on a posé :

$$\pi(\mu) = g \in G \quad ; \quad \chi(\mu) = \beta \in \mathfrak{G}_\xi^\star \quad ;$$

$$T\pi(Z_i) = X_i \in T_g G \quad ; \quad T\chi(Z_i) = \eta_i \in \mathfrak{G}_\xi^\star \quad ; \quad (i = 1 \text{ ou } 2).$$

5.5. La variété présymplectique (G,Ω_G), identifiée à N_ξ, apparaît comme une sous-variété coisotrope, d'une part de (M,Ω), d'autre part de $(W,\Omega_{F^\star})$. On peut lui appliquer le théorème 4.5. Si de plus on suppose qu'il existe sur M une connexion linéaire invariante par l'action de G (ce qui est en particulier le cas lorsque G est compact), on peut construire un voisinage tubulaire de N_ξ, dont la rétraction sur N_ξ (par homothétie sur les fibres) commute avec l'action de G. En utilisant une version équivariante des théorèmes de Weinstein [15], on peut préciser le résultat obtenu par le théorème 4.5, et prouver l'équivariance du symplectomorphisme dont il affirme l'existence. On obtient ainsi :

5.6. THÉORÈME. Dans les hypothèses précisées ci-dessus, il existe un symplectomorphisme ψ, équivariant pour les actions de G, respectivement sur M et sur $F^\star$, d'un ouvert U de M contenant G (identifié à N_ξ), sur un ouvert $\psi(U)$ de $F^\star$ contenant l'image de la section nulle et contenu dans l'ouvert W de $F^\star$ sur lequel $\Omega_{F^\star}$ est une 2-forme symplectique, dont la restriction $\psi|_G$ à G est la section nulle de $F^\star$.

5.7. Le théorème 5.6 peut, en un certain sens, être considéré comme une généralisation du théorème d'existence des variables actions-angles (Arnold et Avez [3], Arnold [2]), auquel il se réduit lorsque le groupe de Lie G est le tore T^n, avec n = m. Ce point de vue est développé dans [10].

BIBLIOGRAPHIE.

1. Abraham (R.), and Marsden (J. E.). Foundations of mechanics. Second edition, Benjamin-Cummings, Reading 1978.

2. Arnold (V.). Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. Editions Mir, Moscou 1974.

3. Arnold (V. I.), et Avez (A.). Problèmes ergodiques de la mécanique classique. Gauthier-Villars, Paris 1967.

4. Dazord (P.). Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème série, 13, 4, 1981,1-16.

5. Dazord (P.). Feuilletages en géométrie symplectique. C. R. Acad. Sc. Paris, 1982, à paraître.

6. Kirillov (A. E.). Eléments de la théorie des représentations. Editions Mir, Moscou 1974.

7. Libermann (P.). Problèmes d'équivalence en géométrie symplectique. Séminaire de géométrie du Schnepfenried, 1982, dans ce volume.

8. Lichnerowicz (A.). Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. J. Differential Geometry 12, 1977, 253-300.

9. Marle (C.-M.). Sous-variétés de rang constant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectique. C. R. Acad. Sc. Paris, 1982, à paraître.

10. Marle (C.-M.). A propos des systèmes hamiltoniens complètement intégrables et des variables actions-angles. Journées relativistes, Lyon, 23 au 25 avril 1982.

11. Marsden (J. E.), and Weinstein (A.). Reduction of symplectic manifolds with symmetry. Reports on Mathematical Physics 5, 1974, 121-130.

12. Sniatycki (J.). Dirac brackets in geometric dynamics. Ann. Inst. Henri Poincaré, A, XX, 4, 1974, 365-372.

13 Souriau (J.-M.). Structure des systèmes dynamiques. Dunod, Paris 1969.

14. Weinstein (A.). Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. Advances in Mathematics 6, 1971, 329-346.

15. Weinstein (A.). Lectures on symplectic manifolds. C.B.M.S. Regional conferences series n° 29, American Mathematical society, Providence 1977.

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05