PAULETTE LIBERMANN

Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 43-68
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__43_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.43-68

PROBLÈMES D'ÉQUIVALENCE ET GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

par

Paulette LIBERMANN

A mon "vieux" camarade Georges REEB,
en témoignage d'une longue amitié .

Ce travail (qui reprend, en les précisant et en les complétant, des résultats exposés dans des articles antérieurs [14]) traite, dans une première partie, du problème d'équivalence locale dans les variétés symplectiques feuilletées, puis dans une seconde partie, du problème d'équivalence locale des systèmes de Pfaff non complètement intégrables considérés comme sous-variétés du fibré cotangent (muni de sa structure symplectique canonique).

Dans la première partie nous démontrons par des méthodes d'algèbre extérieure des théorèmes classiques (Darboux, Jacobi-Lie-Carathéodory)et celui, peut-être moins classique, d'Elie Cartan qui généralise les précédents : si l'on se donne sur une variété symplectique (M,Ω) un feuilletage $\mathfrak{F}$ tel que

1° le crochet de Poisson de deux intégrales premières soit une intégrale première,

2° la forme induite par Ω sur les feuilles soit de rang constant, il n'existe alors qu'un seul modèle local (le rang de $\mathfrak{F}$ et le rang de la forme induite étant donnés).

Par contre si l'on se donne une paire de feuilletages lagrangiens supplémentaires (G-structure de type fini), on obtient un invariant qui est la courbure de la connexion canonique associée à cette structure.

Dans la deuxième partie nous reprenons (cf [13]) la théorie des systèmes dérivés au sens d'E. Cartan [3] interprétée au moyen du tenseur de structure de J. Martinet [19] . Ceci permet d'aborder le problème d'équivalence des feuilletages $\mathfrak{F}$ sur une variété symplectique qui sont symplectiquement transitifs mais ne vérifient par la propriété 1° ci-dessus.

Ensuite nous montrons qu'étant donné un système de Pfaff S , de rang q , sur une variété N , le rang en $\varphi \in S$ de la forme $d\,\theta_S$ (où θ_S est la forme induite sur S par la forme de Liouville θ) est égal à $2q + \text{rang}\ (\delta\ \varphi)$ (δ étant le tenseur de structure) ; la considération du rang de $d\,\theta_S$ permet d'interpréter l'invariant d'Engel, de trouver de nouveaux invariants pour le problème d'équivalence, de donner une majoration pour la dimension des variétés intégrales de S .

Enfin nous reprenons sous une forme simplifiée l'étude des idéaux basiques [13] permettant de déterminer les "variables indépendantes" ; le sous-fibré engendrant l'idéal basique est appelé polarisation relative par analogie avec l'étude de P. Molino [20] .

Des résultats voisins de ceux de la première partie ont été obtenus par C. Marle [17], dans le cadre des variétés de Poisson ; C. Marle [18] a également traité le problème d'équivalence du voisinage d'une variété de rang constant.

I. Sur les variétés symplectiques feuilletées.

On désignera par M une variété paracompacte, connexe, de dimension m , par 0_M le fibré vectoriel de rang nul, de base M , par TM et T^*M les fibrés tangent et cotangent à M , par $\mathcal{X}^q(M)$ $(q = 1,\dots,m)$ l'ensemble des champs de q-vecteurs, par $\mathcal{a}^k(M)$ $(k = 0,\dots,m)$ l'ensemble des k-formes différentielles et par $\mathcal{a}(M) = \bigoplus_{k=0}^{m} \mathcal{a}^k(M)$ l'algèbre extérieure de M .

1. Formes induites sur les variétés feuilletées.

Soit E un sous-fibré vectoriel de TM , de rang $m-p$; alors son annulateur E^o (ensemble des 1-formes s'annulant sur E) est un sous-fibré vectoriel de T^*M , de rang p .

Toute k-forme différentielle η sur M induit une section η_E de $\overset{k}{\wedge} E^*$ (que nous appelerons <u>E-forme</u>) : η étant considérée comme une section du fibré $\mathcal{L}_a^k(TM\,;\,\mathbb{R})$ des formes k-linéaires alternées, η_E est la restriction de η à $\mathcal{L}_a^k(E\,;\,\mathbb{R})$; la E-forme η_E est la composée de η et de la projection de $\overset{k}{\wedge} T^*M$ sur $\overset{k}{\wedge} E^*$, c'est-à-dire encore, en désignant par $\mathcal{J}$ l'idéal engendré par E^o, la E-forme η_E est la classe de η dans l'algèbre quotient $\mathfrak{A}(M)/\mathcal{J}$.

Le choix d'un sous-fibré vectoriel F, supplémentaire de E dans TM identifie E^* à F^o et η_E à une section de $\overset{k}{\wedge} F^o$: à la décomposition

$$T^*M = F^o \oplus E^o$$

correspond une bigraduation de $\mathfrak{A}(M)$ et η_E s'identifie à la composante $\eta_{(o,k)}$ de bidegré (o,k) de la forme η.
Lorsque E est complètement intégrable (ce que nous supposerons dans la suite de ce paragraphe), η_E est une forme différentielle le long de E au sens de P. Molino [20] et la restriction de η_E à chaque feuille est la forme induite par η sur cette feuille.

Dans ce cas, dans le voisinage U de chaque point x de M, on peut choisir des coordonnées locales $(x^1,\dots,x^p,y^{p+1},\dots,y^m)$ telles que $(x^1,\dots,x^p)$ soient des intégrales premières du feuilletage $\mathcal{E}$ défini par E ; on obtient ainsi, au moyen des dx^i et dy^a une bigraduation de l'algèbre extérieure $\mathfrak{A}(U)$ et une décomposition

$$d = d_1 + d_2 \quad \text{avec} \quad (d_1)^2 = (d_2)^2 = 0 ,$$

où d_1 (resp. d_2) est la différentielle par rapport aux dx^i (resp. dy^a).

Si les traces des feuilles sur U sont contractiles (on dira alors que U est <u>contractile le long des feuilles</u>), un lemme de Poincaré généralisé affirme qu'une forme d_2-fermée est d_2-exacte. Ainsi si $d_2\Psi = 0$, on a :

$$\Psi = d_2\,\mu = d\mu - d_1\mu \quad .$$

On en déduit que si la différentielle d'une forme Ψ appartient à l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par E^o, alors Ψ est la somme d'une forme exacte et d'une forme appartenant à $\mathcal{J}$; en effet si Ψ appartient à $\mathcal{J}$, alors $d\Psi$ appartient à $\mathcal{J}$; si Ψ, de degré k, n'appartient pas à $\mathcal{J}$, cette forme Ψ est de bidegré (o,k) et $d_2\Psi$ est de bidegré $(o,k+1)$; $d\Psi$ appartient alors à $\mathcal{J}$ si et seulement si

$$d_2\Psi = o \quad \text{et} \quad \Psi = d\mu - d_1\mu \quad .$$

Soit φ une forme fermée appartenant à $\mathcal{J}$, de degré $k \geq 2$; si l'ouvert U est contractile, on a $\varphi = d\lambda$; de plus, si U est contractile le long des feuilles, d'après ce qui précède λ est la somme d'une forme exacte et d'une forme ν appartenant à $\mathcal{J}$ c'est-à-dire

$$\lambda = d\mu - \alpha^1 \wedge dx^1 - \dots - \alpha^p \wedge dx^p \quad ;$$

on en déduit :

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> E <u>un sous-fibré complètement intégrable de</u> TM, <u>de rang</u> $m-p$, φ <u>une forme différentielle fermée de degré</u> $k \geq 2$ <u>appartenant à l'idéal</u> $\mathcal{J}$ <u>engendré par</u> E^o ; <u>alors tout point de</u> M <u>admet un voisinage</u> U <u>dans lequel on peut écrire</u> :

$$\varphi|U = dx^1 \wedge d\alpha^1 + \dots + dx^p \wedge d\alpha^p$$

<u>où</u> $x^1,\dots,x^p$ <u>sont des intégrales permières indépendantes du feuilletage et</u> $\alpha^1,\dots,\alpha^p$ <u>sont des</u> $(k-2)$-<u>formes</u>.

Remarquons que dans l'ouvert U la restriction de d_2 aux formes de bidegré (o,k) $(k=o,\dots,m-p-1)$ représente l'opérateur de cohomologie $d_E : \mathcal{C}(M)/\mathcal{J} \to \mathcal{C}(M)/\mathcal{J}$ qui envoie $\overset{k}{\wedge} E^*$ dans $\overset{k+1}{\wedge} E^*$ (cf [20]).

2. <u>Sur quelques propriétés des variétés symplectiques et des variétés de Poisson</u>.

A. Soit (M,Ω) une variété symplectique de dimension $m = 2n$; on désignera par la même lettre b l'isomorphisme : $TM \to T^*M$ (défini pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_xM$ par $b(v) = -i(v)\Omega_x$) et l'isomorphisme de $\mathcal{X}^1(M)$ sur $\mathcal{C}^1(M)$ tel que

$$b(X) = -i(X)\,\Omega \quad ;$$

cet isomorphisme b s'étend à $\mathcal{X}^q(M)$ et son inverse $\#$ s'étend à $\overset{k}{\wedge}(M)$; en particulier on obtient un champ Λ de bivecteurs non dégénérés (ou champ de

Poisson) défini par

$$\Lambda = \# \Omega$$

et l'on a : $\Omega(\# \varphi \, , \, \# \Psi) = \Lambda (\varphi,\Psi)$ pour tout couple (φ,Ψ) de formes de Pfaff.

On définit l'orthogonalité dans TM et $\mathcal{X}^1(M)$ (resp. dans T^*M et $\mathcal{C}^1(M)$) au moyen de Ω((resp. Λ) . Ainsi deux formes de Pfaff orthogonales ($\Lambda(\varphi,\Psi) = 0$) sont encore dites en <u>involution</u>.

Pour tout sous-fibré E de TM , on définit

$$\text{orth } E = \bigcup_{x \in M} \text{orth } E_x \quad ,$$

où $\text{orth } E_x = \{v \in TM \; ; \; \Omega(u,v) = 0 \text{ pour tout } u \in E\}$; $\text{orth } E$ étant de rang constant est un sous-fibré vectoriel de TM .

On définit de même, au moyen de Λ , le sous-fibré vectoriel $\text{orth}(E^\circ)$ de T^*M . On a :

$$b(E) = (\text{orth } E)^\circ \quad , \quad b(\text{orth } E) = E^\circ$$
$$\# E^\circ = \text{orth } E \quad , \quad \# \text{orth}(E^\circ) = E \quad ,$$

d'où

$$\text{orth } (E^\circ) = (\text{orth } E)^\circ$$

l'orthogonalité étant relative à Λ dans le premier membre, relative à Ω dans le deuxième membre.

Rappelons que E est <u>isotrope</u> si $\Omega_E = 0$ c'est-à-dire si $E \subset \text{orth } E$ (ou encore $E^\circ \supset \text{orth } E^\circ$), E est <u>co-isotrope</u> si $\Omega_{\text{orth } E} = 0$ c'est-à-dire si $E \supset \text{orth } E$ (ou encore $E^\circ \subset \text{orth } E^\circ$) ; E est <u>lagrangien</u> s'il est isotrope et co-isotrope (par suite E est de rang n) ; E est <u>symplectique</u> si en tout point Ω_E est non dégénérée (ce qui est équivalent à $E \cap \text{orth } E = 0_M$) ; dans ce dernier cas on a :

$$TM = E \oplus \text{orth } E \; .$$

<u>Remarques</u> : 1°) le sous-fibré E (de rang $2n-p$) est coisotrope si et seulement si son annulateur est engendré localement par une famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ de formes de Pfaff linéairement indépendantes et en involution (c'est-à-dire deux à deux en involution).

2°) Si E_1 et E_2 sont deux sous-fibrés orthogonaux de TM (c'est-à-dire $E_1 \subset \text{orth } E_2$) tels que $E_1 \cap E_2 = 0_M$, on a :

$$\Omega_{E_1 \oplus E_2}(X_1 + X_2, \, Y_1 + Y_2) = \Omega_{E_1}(X_1,Y_1) + \Omega_{E_2}(X_2,Y_2)$$

où X_1,Y_1 (resp. X_2,Y_2) sont des sections de E_1 (resp. E_2) ; en particulier si E est un sous-fibré symplectique de TM , on a :

$$\Omega = \Omega_{(2,0)} + \Omega_{(0,2)}$$

où $\Omega_{(2,0)}$ (resp. $\Omega_{(0,2)}$) est une section de $\overset{2}{\wedge} E^o$ (resp. $\overset{2}{\wedge}$ orth E^o) .

3°) Soit E un sous-fibré vectoriel quelconque de TM ; alors $E \cap \mathrm{orth}\, E$ et $E + \mathrm{orth}\, E$ sont respectivement isotrope et co-isotrope. Si l'on considère les décompositions

$$E = E \cap \mathrm{orth}\, E \oplus F$$

$$\mathrm{orth}\, E = E \cap \mathrm{orth}\, E \oplus H \quad ,$$

on vérifie que $E \cap \mathrm{orth}\, E$, F et H sont deux à deux orthogonaux et d'intersection 0_M ; les sous-fibrés F , H et $F \oplus H$ sont symplectiques.

B. <u>Le crochet de Poisson</u> de deux fonctions f et g est défini par

$$\{f,g\} = \Lambda\,(df,dg) \ ;$$

les fonctions f et g sont dites en <u>involution</u> si df et dg le sont.

En posant : $X_f = \#\, df$, $X_g = \#\, dg$, on a (cf [12]) :

$$[X_f,X_g] = \#\, d\{f,g\} \ .$$

Le crochet de Poisson satisfaisant l'identité de Jacobi définit sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ une structure d'algèbre de Lie.

Plus généralement A. Lichnerowicz [16] a défini sur une variété M <u>une structure de Poisson</u> par la donnée d'un champ Λ de bivecteurs de rang constant $2q$ satisfaisant une condition équivalente à la suivante : le crochet de Poisson $\{f,g\} = \Lambda\,(df,dg)$ vérifie l'identité de Jacobi.

Le noyau de Λ (c'est à dire l'ensemble des 1-formes φ telles que $\Lambda(\varphi,\omega) = 0$ pour toute 1-forme ω) est un sous-fibré vectoriel de T^*M , de rang $m - 2q$ (où m = dimension de M) ; A. Lichnerowicz et C. Marle ont montré que ce noyau est complètement intégrable.

Si $m = 2q$, on démontre que la forme Ω obtenue par dualité est fermée. Inversement C. Marle [17] a montré qu'étant donnée une application

$$\{.,.\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

satisfaisant les trois conditions :

1°) le crochet est antisymétrique

2°) pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, l'application $g \to \{f,g\}$ est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M)$

3°) le crochet vérifie l'identité de Jacobi ,

il existe alors sur M un champ Λ de bivecteurs (de rang non nécessairement constant) tel que :

$$\{f,g\} = \Lambda\,(df,dg) \ .$$

3. Feuilletages symplectiquement complets et symplectiquement réguliers.

A. Soit (M,Ω) une variété symplectique, E un sous-fibré complètement intégrable de TM, de rang $2n-p$. Un système d'intégrales premières indépendantes $(f_1,\ldots,f_p)$ du feuilletage $\mathcal{E}$ défini par E est dit complet [24] si le crochet de Poisson de tout couple (f_i,f_j) d'intégrales permières est une intégrale première (ou est constant). Un feuilletage $\mathcal{E}$, de dimension $2n-p$, sera dit symplectiquement complet, si au voisinage de chaque point x de M, il est défini par un système complet de p intégrales premières indépendantes. Par exemple, d'après la remarque de I.2, un feuilletage co-isotrope est symplectiquement complet.

LEMME FONDAMENTAL. Soit sur une variété symplectique (M,Ω) un sous-fibré vectoriel E de TM, complètement intégrable ; pour que E définisse un feuilletage symplectiquement complet, il faut et il suffit que le fibré vectoriel orth E soit également complètement intégrable.

Démonstration : E est symplectiquement complet si et seulement si au voisinage de tout point de M, il est défini par des intégrales premières $(f_1,\ldots,f_p)$ satisfaisant les conditions :

$$\text{(a)}\quad d\{f_i,f_j\} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{ij}^{k}\, df_k \qquad (i,j=1,\ldots,p)\ ,$$

conditions équivalentes à :

$$\text{(b)}\quad [X_{f_i},X_{f_j}] = \Sigma\, \lambda_{ij}^{k}\, X_{f_k}\ ;$$

d'autre part, comme $\#(E^{o}) = \text{orth } E$, les champs de vecteurs $X_{f_1},\ldots,X_{f_p}$ engendrent orth E localement et (b) exprime que orth E est complètement intégrable.

COROLLAIRE 1. Si le sous-fibré vectoriel E définit un feuilletage symplectiquement complet, il en est de même de orth E.

COROLLAIRE 2. Si E définit un feuilletage coisotrope, alors orth E définit un feuilletage isotrope.

Remarque : Si E définit un feuilletage isotrope, orth E n'est pas nécessairement complètement intégrable.

B. Nous abordons maintenant le cas des feuilletages définis par un sous-fibré vectoriel E tel que Ω_E soit de rang constant ; dans ce cas $E \cap \text{orth } E$ étant de rang constant est un sous-fibré vectoriel et l'on démontre qu'il est complètement intégrable (même si orth E n'est pas complètement intégrable). Pour un feuilletage isotrope ou coisotrope, la forme Ω_E est de rang constant ;

il en est de même pour tout feuilletage <u>symplectiquement transitif</u> c'est-à-dire tel que le pseudogroupe des symplectomorphismes locaux laissant invariant le feuilletage soit transitif.

On dira qu'un feuilletage symplectiquement complet (défini par un sous-fibré vectoriel E de TM) est <u>symplectiquement régulier</u> si la E-forme Ω_E est de rang constant.

PROPOSITION 2. <u>Si un sous-fibré vectoriel</u> E <u>de</u> TM <u>définit un feuilletage</u> $\mathcal{E}$ <u>symplectiquement régulier, il en est de même des sous-fibrés</u> $\operatorname{orth} E$, $E \cap \operatorname{orth} E$ <u>et</u> $E + \operatorname{orth} E$.

<u>Démonstration</u> : le sous-fibré $E + \operatorname{orth} E = \operatorname{orth}(E \cap \operatorname{orth} E)$ est co-isotrope ; en raison du lemme fondamental et de ses corollaires, il suffit de montrer que $E + \operatorname{orth} E$ est complètement intégrable. Pour cela on utilise les propriétés des structures de Poisson énoncées dans le paragraphe 2.

Si le feuilletage $\mathcal{E}$ est régulier au sens de la théorie des feuilletages (c'est-à-dire si l'espace N des feuilles est une variété, la projection $\pi : M \to N$ étant une submersion), alors $\mathcal{E}$ étant symplectiquement régulier induit une structure de Poisson sur N : le crochet de Poisson sur M se projette sur N et induit un champ Λ_N de 2-vecteurs de rang constant ; le noyau K_N de Λ_N est complètement intégrable ; il en est de même de $\pi^*K_N = E^\circ \cap \operatorname{orth} E^\circ = (E+\operatorname{orth} E)^\circ$ qui est le noyau de la restriction de $\Lambda = \#\Omega$ à $E^\circ \times_M E^\circ$.

Dans le cas général, au voisinage de chaque point le feuilletage $\mathcal{E}$ est régulier ; en utilisant une projection locale, on démontre que $E^\circ \cap \operatorname{orth} E^\circ$ est encore le noyau de la restriction de Λ à $E^\circ \times_M E^\circ$ et est complètement intégrable.

<u>Remarques</u> : 1°) l'étude précédente montre que lorsque le feuilletage $\mathcal{E}$ est symplectiquement régulier, la restriction de Λ à $E^\circ \times_M E^\circ$ définit une <u>structure de Poisson transverse</u>

2°) la régularité symplectique, qui implique l'existence de plusieurs feuilletages, impose des conditions topologiques strictes à la variété M ; par exemple nous verrons que si le feuilletage symplectiquement régulier est symplectique, la variété M est localement difféomorphe à un produit de variétés symplectiques. P. Dazord [5] a étudié les feuilletages pour lesquels $[E \cap \operatorname{orth} E, \operatorname{orth} E]$ est contenu dans $E + \operatorname{orth} E$; les feuilletages symplectiquement réguliers vérifient cette condition.

4. <u>Théorèmes de Carathéodory-Lie-Jacobi et théorème de E. Cartan.</u>

En utilisant le lemme fondamental on va démontrer un théorème classique relatif aux feuilletages co-isotropes, ce qui donne notamment une démonstration du théorème de Darboux.

THÉORÈME 1. (Caratheodory-Jacobi-Lie). Soit sur une variété symplectique (M,Ω), de dimension $2n$, une famille $(f_1,\dots,f_p)$ $(p \leq n)$ de fonctions en involution, telle que $df_1,\dots df_p$ soient linéairement indépendantes en $x \in M$. Le point x admet alors un voisinage U dans lequel sont définies des fonctions $(f_{p+1},\dots,f_n, g_1,\dots,g_n)$ telles que la famille $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n)$ constitue un système de coordonnées canoniques c'est-à-dire

$$\Omega \mid U = df_1 \wedge dg_1 + \dots + df_n \wedge dg_n \quad .$$

Démonstration : Les différentielles $df_1,\dots,df_p$ sont linéairement indépendantes dans un voisinage U de x ; elles définissent un feuilletage co-isotrope $\mathcal{E}$ (associé à un sous-fibré vectoriel E de TU') ; on a : orth $E \subset E$, d'où orth $(E^o) \supset E^o$; par suite toute intégrale première du feuilletage défini par orth E (ce fibré étant complètement intégrable d'après le lemme fondamental) est en involution avec $f_1,\dots,f_p$; parmi ces intégrales premières, il y en a au moins une (notée f_{p+1}) telle que $df_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge df_{p+1} \neq 0$ dans un ouvert $U'' \subset U$; en continuant ce processus un nombre fini de fois, on obtient une famille $(f_1,\dots,f_n)$ en involution dans un ouvert $U''' \subset U''$, telle que :

$$\Omega \mid U''' = df_1 \wedge \theta_1 + \dots + df_n \wedge \theta_n \quad .$$

En appliquant la proposition 1 , on obtient le théorème dans un voisinage $U \subset U'''$.

COROLLAIRE. Si $(f_1,\dots,f_p)$ sont des intégrales premières indépendantes d'un feuilletage co-isotrope (de rang $2n-p$), dans un ouvert U', il existe alors un ouvert $U \subset U'$ tel que :

$$\Omega \mid U = df_1 \wedge dg_1 + \dots + df_p \wedge dg_p + \pi \quad ,$$

où la forme π est une forme fermée de rang $2(n-p)$ satisfaisant la relation :

$$\pi^{n-p} \wedge df_1 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge dg_p \neq 0 \quad .$$

Remarque : Si l'on part d'une fonction arbitraire H, sans point critique dans un ouvert U', d'après le théorème 1, il existe $U \subset U'$ tel que :

$$\Omega \mid U = dH \wedge dg_1 + \dots + df_n \wedge dg_n$$

et l'on obtient le théorème de Darboux (une autre démonstration utilisant les techniques d'algèbre extérieure a été donnée dans [11] .

PROPOSITION 3. Soit sur une variété symplectique (M,Ω) de dimension $2n$ un sous-fibré symplectique E de TM, de rang $2n-2k$, définissant un feuilletage symplectiquement régulier. Alors tout point x de M admet un voisinage U dans lequel on peut écrire :

$$\Omega \mid U = \Omega_1 + \Omega_2$$

avec $\Omega_1 = \sum_{s=1}^{k} df_s \wedge dg_s$, $\Omega_2 = \sum_{\ell=k+1}^{n} df_\ell \wedge dg_\ell$,

où $(f_1,\ldots,f_k,g_1,\ldots,g_k)$ sont des intégrales premières du feuilletage défini par E , $(f_{k+1},\ldots,f_n,g_{k+1},\ldots,g_n)$ des intégrales premières du feuilletage défini par orth E .

Démonstration : à la décomposition

$$TM = E \oplus \text{orth } E \quad ,$$

correspond une bigraduation de l'algèbre extérieure $\mathcal{G}(M)$ au moyen des intégrales premières des feuilletages définis par E et orth E et une décomposition $d = d_1 + d_2$ avec $(d_1)^2 = (d_2)^2 = 0$.

Nous avons vu au paragraphe I.2 que Ω se décompose en

$$\Omega = \Omega_{(2,0)} + \Omega_{(0,2)} \quad ;$$

en égalant à 0 chacune des composantes homogènes de $d\Omega$, on vérifie que $\Omega_{(2,0)}$ et $\Omega_{(0,2)}$ sont à la fois d_1-fermées et d_2-fermées. La forme $\Omega_{(2,0)}$ (resp. $\Omega_{(0,2)}$) est donc basique relativement au feuilletage $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) c'est-à-dire appartient à l'algèbre extérieure engendrée par les intégrales premières de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) . Localement $\Omega_{(2,0)}$ (resp. $\Omega_{(0,2)}$) est l'image réciproque d'une 2-forme fermée définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}^{2p}$ (resp. $\mathbb{R}^{2n-2p}$) ; on achève la démonstration en utilisant le théorème de Darboux.

Le théorème 1 et la proposition 3 sont des cas particuliers du théorème suivant, dû à E. Cartan [4 p. 125] .

THÉORÈME 2 (E. Cartan). Soit sur une variété symplectique (M,Ω) , de dimension $2n$, un sous-fibré E de TM définissant un feuilletage symplectiquement régulier $\mathcal{E}$, de rang $2n-p$, tel que la E-forme Ω_E soit de rang $2s$; alors $\Omega_{\text{orth } E}$ est de rang $2q = 2(p+s-n)$. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U admettant des coordonnées locales canoniques $f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_{p-2q},h_1,\ldots,h_{2s}$ telles que $df_1,\ldots,df_p$ engendrent $E^\circ|U$; $df_{2q+1},\ldots,df_p$ engendrent $E^\circ \cap \text{orth}\,(E^\circ)|U$; $df_{2q+1},\ldots,df_p,dh_1,\ldots,dh_{2s}$ engendrent orth $(E^\circ)|U$ c'est-à-dire :

$$\Omega|U = df_1 \wedge df_2 + \ldots + df_{2q-1} \wedge df_{2q} + df_{2q+1} \wedge dg_1 + \ldots + df_p \wedge dg_{p-2q} +$$
$$+ dh_1 \wedge dh_2 + \ldots + dh_{2s-1} \wedge dh_{2s}$$

Démonstration : 1°) Si E est co-isotrope, on utilise le théorème 1 ; si E est isotrope, on applique ce théorème à orth E

2°) Si E est symplectique, on est dans les conditions d'application de la proposition 3

3°) Dans le cas général, d'après la proposition 2, $E + \text{orth } E$ définit un feuilletage co-isotrope de dimension $p - 2q$; en vertu du corollaire du théorème 1, il existe un ouvert U tel que

$$\Omega \,|\, U = df_{2q+1} \wedge dg_1 + \dots + df_p \wedge dg_{p-2q} + \pi \ ,$$

où $f_{2q+1},\dots,f_p$ sont des intégrales premières indépendantes de ce feuilletage co-isotrope et π une forme de rang $2q+2s$.

En restreignant au besoin U, on peut trouver dans cet ouvert des fonctions $F_1,\dots,F_{2q}$ (resp. $H_1,\dots,H_{2s}$) qui sont des intégrales premières du feuilletage $\mathcal{E}$ défini par E (resp. du feuilletage $\mathfrak{F}$ défini par orth E), et telles que $(F_1,\dots,F_{2q},f_{2q+1},\dots,f_p,H_1,\dots,H_{2s},g_1,\dots,g_{p-2q})$ constituent un système de coordonnées locales. Comme π est fermée et vérifie $\pi \wedge df_{2q+1} \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge df_p \wedge dg_{p-2q} \neq 0$, cette forme π est basique relativement au feuilletage de co-dimension $2q+2s$ admettant $F_1,\dots,F_{2q},H_1,\dots,H_{2s}$ comme intégrales premières ; il existe donc une submersion P de U sur un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^{2q+2s}$ et une 2-forme fermée Θ, dans $\tilde{U}$, de rang $2q+2s$, telle que $\pi = P^* \Theta$; les différentielles $dF_1,\dots,dF_{2q}$ (resp. $dH_1,\dots,dH_{2s}$) engendrent un supplémentaire de $(E^\circ \cap \text{orth } E^\circ)|_U$ dans $E^\circ|_U$ (resp. $\text{orth }(E^\circ))|_U$; d'après la troisième remarque du paragraphe I.2, ces supplémentaires sont les annulateurs de deux sous-fibrés symplectiques de $TM \,|\, U$; la projection P induit sur $\tilde{U}$ deux feuilletages symplectiques supplémentaires symplectiquement réguliers et l'on peut appliquer à Θ, puis à π la proposition 3.

Un feuilletage symplectiquement régulier $\mathcal{E}$, de dimension p, tel que le rang de Ω_E soit égal à $2s$ sera dit de <u>genre</u> (p,s).

Du théorème de E. Cartan, on déduit :

COROLLAIRE. <u>La structure définie sur une variété symplectique (M,Ω) par un feuilletage symplectiquement régulier est plate (ou intégrable) c'est-à-dire localement équivalente à la structure type, de même genre, dans $\mathbb{R}^{2n}$ (muni de sa structure symplectique canonique).</u>

Un feuilletage symplectiquement régulier est donc symplectiquement transitif.

<u>Remarques</u> : 1°) Lorsque le rang de la E-forme Ω_E n'est pas constant, on a toutefois : $\text{rang } \Omega_E - \text{rang } \Omega_{\text{orth } E} = 2|n-p|$.

Si le feuilletage $\mathcal{E}$ est encore symplectiquement complet, on obtient localement par projection le long des feuilles une structure de Poisson dont le champ de Poisson n'est pas de rang constant, situation étudiée par C. Marle [17]. Nous reviendrons sur cette question dans un article ultérieur.

2°) Le cas d'un feuilletage symplectiquement transitif qui n'est pas complet sera abordé dans la partie II de ce travail.

3°) Dans [14] , nous avions fait la <u>conjecture</u> suivante : étant donnée une sous-variété W de (M,Ω) telle que le rang de la forme Ω_W induite sur W soit constant, tout point x de W admet-il un voisinage U dans M muni d'un feuilletage symplectiquement régulier tel que la composante connexe de x dans $W \cap U$ soit une feuille ? Cette propriété résultait d'un théorème de Weinstein [23] dans le cas d'une sous-variété lagrangienne et d'un théorème de A. Lichnerowicz [16] dans le cas d'une sous-variété symplectique. Cette conjecture a été démontrée dans toute sa généralité par C. Marle [18] .

5. <u>Sur les couples de feuilletage lagrangiens.</u>

Les résultats précédents peuvent s'interpréter intuitivement de la manière suivante : le pseudogroupe des symplectomorphismes contient suffisamment de transformations pour que deux feuilletages symplectiquement réguliers de même genre soient localement équivalents.

Il n'en est plus de même si l'on se restreint à une G-structure de type fini (où G est un sous-groupe du groupe symplectique). Par exemple si $G = U_n$, on a les structures <u>presque kählériennes</u> ou si $G = \dot{U}_n$ (groupe des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix}$ où $A \in GL(n,\mathbb{R})$ et ${}^tA$ est sa contragrédiente),on a les structures <u>presque parakählériennes</u> [10] définies par la décomposition

$$TM = E_1 \oplus E_2$$

où E_1 et E_2 sont des sous-fibrés lagrangiens.

Alors qu'il existe toujours des structures presque kählériennes subordonnées à une structure symplectique, une variété symplectique peut ne pas admettre de sous-fibré lagrangien (par exemple la sphère S_2) . S'il existe un tel sous-fibré E_1 , il admet des supplémentaires lagrangiens (Weinstein [23]) car en chaque point x l'ensemble des supplémentaires lagrangiens de $(E_1)_x$ est muni d'une structure d'espace affine.

On peut associer canoniquement une connexion à une structure presque kählérienne ou presque parakählérienne [10] ; la torsion est l'obstacle à l'intégrabilité de la structure presque complexe sous-jacente dans le premier cas, à l'intégrabilité des sous-fibrés E_1 et E_2 dans le deuxième cas ; si la torsion est nulle, la courbure est l'obstacle à la platitude. Plus précisemment, dans le cas presque parakählérien , la forme Ω s'écrivant au moyen d'une trivialisation :

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \wedge \omega^{j'}$$

avec la convention $j' = j + n$, on a

$$d\omega^j = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \omega_i^j + T^j$$
$$(j = 1,\dots,n \; ; \; j' = j + n) \; ,$$
$$d\omega^{j'} = \sum_{i'=n+1}^{2n} \omega^{i'} \wedge \omega_{i'}^{j'} + T^{j'}$$

où les formes de connexion ω_i^j et $\omega_{i'}^{j'}$ vérifient les relations

$$\omega_j^i + \omega_{i'}^{j'} = 0 \quad ,$$

les formes de torsion s'écrivant :

$$T^j = \Sigma\, A_{k'l'}^j\, \omega^{k'} \wedge \omega^{l'} \quad , \quad T^{j'} = \Sigma\, A_{kl}^{j'}\, \omega^k \wedge \omega^l \quad .$$

Pour que le champ E_1 soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les T^j s'annulent ; les identités de Bianchi montrent alors que les formes de courbure Ω_i^j induisent des formes nulles sur les variétés intégrales de E_1 : on en déduit que les <u>feuilles d'une feuilletage lagrangien sont localement affines</u> (cf [10]), résultat démontré autrement par Weinstein [23] .

Pour que la forme Ω puisse s'écrire localement

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dx^{j'}$$

il faut et il suffit que la courbure et les formes de torsion T^j , $T^{j'}$ s'annulent. On dira alors, suivant la terminologie d'Arnold, que les deux feuilletages sont <u>canoniquement conjugués</u>.

Si l'on a un couple de feuilletages lagrangiens supplémentaires, avec une courbure non nulle, la forme Ω s'écrit localement au moyen des intégrales premières $(x^1,\dots,x^n)$ et $(y^1,\dots,y^n)$ de ces deux feuilletages :

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, dx^i \wedge dy^j \quad .$$

Il existe alors un ouvert U dans lequel est définie une fonction différentiable S (que l'on peut appeler <u>fonction génératrice</u> du couple (E_1,E_2)) telle que :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} \quad .$$

En effet, soit ω telle que $d\omega = \Omega$; en utilisant la proposition 1 , on a :

$$\omega = dF - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, dx^i = dG - \sum_{j=1}^{n} \eta_j\, dy^j \quad ;$$

on en déduit, en posant $S = F - G$

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dx^i + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \, dy^j \quad ;$$

par identification, on obtient :

$$a_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y^j} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} \quad ;$$

cette propriété est à rapprocher d'une propriété analogue pour les structures kählériennes .

Si les fonctions a_{ij} dépendent seulement des intégrales premières de l'un des feuilletages (de $y^1,\ldots,y^n$ par exemple), alors la courbure est nulle ; en effet on a :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \theta^i \quad \text{avec} \quad \theta^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, dy^j \ .$$

Les formes θ^i vérifient les relations $d_2 \, \theta^i = 0$ (d'après un résultat de Gallissot [8]); d'autre part par hypothèse $d_1 \, \theta^i = 0$; par suite les θ^i sont fermées.

Ce résultat est utile pour obtenir des variables "action-angle" [2] .

II. Sur le problème d'équivalence des systèmes de Pfaff non complètement intégrables.

1. Systèmes dérivés et invariant d'Engel.

A. Soit S un système de Pfaff de rang q sur une variété connexe de dimension n : S est un sous-fibré vectoriel de rang q de T^*N ; le fibré F associé à S est le sous-fibré vectoriel de TN dont S est l'annulateur ; inversement F peut être considéré comme l'annulateur de S dans TN . Par suite le dual du fibré quotient T^*N/S s'identifie à F et T^*N/S s'identifie à F^* .

Dans un article antérieur [13] , pour étudier le problème d'équivalence des systèmes de Pfaff, nous avons rattaché la notion de système dérivé au sens de Elie Cartan à celle de "tenseur de structure" de J. Martinet [19] , obstacle à l'intégrabilité du système S ; ce "tenseur" est le morphisme de fibrés vectoriels

$$\delta : S \to \overset{2}{\wedge} (T^*N/S)$$

où $\delta = P \circ d$, d étant la différentiation extérieure et P la projection de $\overset{2}{\wedge} T^*N$ sur $\overset{2}{\wedge} (T^*N/S)$: pour une section ω de S , $\delta\omega$ est encore la réduction de $d\omega$ mod. l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par S ; comme T^*N/S s'identifie à F^* , $\delta\omega$ est encore une F-forme au sens de I.1 .

Si δ est de rang constant, son noyau S_1 est un fibré vectoriel, système dérivé de S au sens de E. Cartan. On dit que S est totalement régulier si les systèmes dérivés successifs sont de rang constant ; on obtient ainsi une suite strictement décroissante

$$S_o = S \supset S_1 \supset \dots \supset S_r$$

de sous-fibrés vectoriels de T^*N ; le sous-fibré S_r (dont le rang peut éventuellement être nul) est le plus grand sous-fibré vectoriel de S qui soit complètement intégrable.

Pour les sous-fibrés de TN associés aux S_i , on a la suite croissante

$$F_o = F \subset F_1 \subset \dots \subset F_r$$

où pour $i = 1,\dots,r$, F_i est engendré localement par les sections locales de F_{i-1} et les crochets de couples de sections locales de F_{i-1} (cf [22]) .

B. Exemple : Soit M une variété symplectique, de dimension $m = 2p$, E un sous-fibré vectoriel, de rang $m-q$, de TM définissant un feuilletage $\mathcal{E}$ symplectiquement transitif mais pas nécessairement symplectiquement complet (au sens de la partie I) .

L'annulateur S du fibré $F = \text{orth } E$ est totalement régulier en raison de la transitivité ; on a les suites de sous-fibrés vectoriels :

$$F = \text{orth } E \subset F_1 \subset \dots \subset F_r \ ,$$
$$S \supset S_1 \dots \supset S_r \ ,$$
$$E \supset \text{orth } F_1 = \# \ S_1 \supset \dots \supset \text{orth } F_r = \# \ S_r \ .$$

Les sous-fibrés orth $F_1,\dots,$orth F_r sont complètement intégrables et orth F_r définit un feuilletage symplectiquement régulier.

En effet, soit dans un voisinage U de $x \in M$ des coordonnées locales $(f_1,\dots,f_n)$ telles que $f_1,\dots,f_q$ soient des intégrales premières de $\mathcal{E}$. Les formules (a) et (b) de I.3 deviennent

$$(a') \quad d\{f_i,f_j\} = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{ij}^{k} \, df_k + \sum_{\alpha=q+1}^{m} \lambda_{ij}^{\alpha} \, df_\alpha$$

$$(b') \quad [X_{f_i},X_{f_j}] = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{ij}^{k} \, X_{f_k} + \sum_{\alpha=q+1}^{m} \lambda_{ij}^{\alpha} \, X_{f_\alpha} \ .$$

D'après une remarque précédente, le système dérivé F_1 est engendré dans U par les X_{f_i} et les $[X_{f_i},X_{f_j}]$; par suite $b(F_1) = (\text{orth } F_1)^o$ est engendré dans U par les df_i et les $d\{f_i,f_j\}$; ainsi orth F_1 est complètement intégrable ; même raisonnement pour les systèmes dérivés successifs ; comme F_r est complètement intégrable, F_r et orth F_r définissent des feuilletages symplectiquement réguliers.

On obtient ainsi le processus utilisé par E. Cartan [4 p; 125] pour obtenir un feuilletage symplectiquement complet (il suppose implicitement la transitivité) : on "ajoute" aux intégrales premières initiales leurs crochets de Poisson et ainsi de suite jusqu'à ce que les crochets de Poisson ne soient plus indépendants des intégrales premières du dernier système obtenu.

De l'étude précédente on déduit des conditions nécessaires d'équivalence locale pour deux feuilletages symplectiquement transitifs mais non symplectiquement complets.

C. Pour tout système de Pfaff S transitif, on introduit également l'invariant d'Engel (cf [3]) ; c'est le plus petit entier s tel que, $\mathcal{J}$ désignant l'idéal engendré par S, on ait :

$$(d\omega)^{s+1} = 0 \text{ mod. } \mathcal{J}$$

pour toute section locale ω de S. On démontre (voir Gardner [7] et J. Dieudonné [6]), les inégalités :

$$2s \leq c - q \leq (q+1)s ,$$

où q et c sont respectivement le rang et la classe de S. On rappelle que $c-q$ est le rang du plus petit sous-fibré H de T^*N/S tel que $\delta(S)$ soit à valeurs dans $\overset{2}{\wedge} H$.

Dans le cas non transitif, on définit $s(x)$ en chaque point et l'invariant d'Engel est l'entier

$$s = \sup_{x \in M} s(x) .$$

2. <u>Systèmes de Pfaff considérés comme sous-variétés d'une variété symplectique.</u>

A. Soit θ la forme de Liouville sur le fibré cotangent T^*N. Un système de Pfaff S, de rang q, sur la variété N, de dimension n est une sous-variété de dimension $n+q$ de la variété symplectique $(T^*N, d\theta)$.

La considération des formes θ_S et $(d\theta)_S = d\theta_S$ induites par θ et $d\theta$ sur S va permettre une interprétation des notions introduites en II.1 et l'introduction de nouveaux invariants pour le problème d'équivalence (voir l'exemple à la fin du paragraphe).

PROPOSITION 4. *Soit S un système de Pfaff de rang q, sur la variété N. Pour tout $\varphi \in S$, le rang de $d\theta_S$ en φ est égal à*

$$2q + \text{rang}\,(\delta\varphi)$$

(où δ est le tenseur de structure défini en II.1).

Avant de donner une démonstration de cette proposition, nous allons en déduire les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. *Le rang de la forme* $d\theta_S$ *vérifie l'inégalité*

$$\text{rang } d\theta_S \leq 2q + 2s \quad ,$$

(où s *est l'invariant d'Engel de* S*) ; l'ensemble des points* φ *de* S *pour lesquels* $\text{rang } d\theta_S(\varphi) = 2q$ *est le système dérivé de* S .

COROLLAIRE 2. *Pour que le système* S *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que* S *soit une sous-variété co-isotrope de* $(T^*M, d\theta)$.

En effet, S est complètement intégrable si et seulement si δ est de rang nul c'est-à-dire $d\theta_S$ de rang $2q$; or $\dim S = n+q$, la codimension S dans T^*M est égale à $n-q$; on a $\text{rang } d\theta_S = (n+q)-(n-q)$; d'après la partie I, S est co-isotrope.

COROLLAIRE 3. *Pour que le rang de* $d\theta_S$ *soit constant sur le complémentaire de la section nulle de* S *, il est nécessaire que le système dérivé soit de rang nul ou coïncide avec* S *(dans ce dernier cas la condition est suffisante car* S *est complètement intégrable).*

Remarque : sur la section nulle, le rang de $d\theta_S$ est égal à $2q$.

Démonstration de la proposition : Soit $\pi : T^*N \to N$ la projection canonique et π_S la restriction de π à S .

Soit $\Phi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ une trivialisation locale de T^*M définie par un champ $(\omega^1,\dots,\omega^q,\omega^{q+1},\dots,\omega^n)$ de co-repères tel que $(\omega^1,\dots,\omega^q)$ constitue une base du module des sections de S au-dessus de U (d'où une trivialisation $\Phi_S : U \times \mathbb{R}^q \to \pi_S^{-1}(U))$.

L'expression locale de la forme de Liouville θ dans $\pi^{-1}(U)$ est alors :

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \omega^i \quad ,$$

et la forme θ_S induite sur $\pi_S^{-1}(U)$ s'écrit :

$$\theta_S = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, \omega^i \quad ;$$

on a :

$$d\theta_S = \sum_{i=1}^{q} d\lambda_i \wedge \omega^i + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, d\omega^i \quad .$$

On peut écrire :

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{q} \omega^j \wedge \omega^i_j + \sum_{\alpha,\beta=q+1}^{n} a^i_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \qquad (i = 1,\dots,q) \quad ,$$

où les ω^i_j définissent une connexion dans S et les $T^i = \sum a^i_{\alpha\beta}\, \omega^\beta \wedge \omega^\beta$ la torsion de cette connexion (obstacle à l'intégrabilité de S) ; d'où

$$d\theta_S = \Theta_1 + \Theta_2$$

avec

$$\Theta_1 = \sum_{j=1}^{q} (d\lambda_j - \sum_{i}^{q} \lambda_i \, \omega_j^i) \wedge \omega^j$$

$$\Theta_2 = \sum_{1}^{q} \lambda_i \, T^i \quad .$$

Dans $\pi_S^{-1}(U)$, identifié à $U \times \mathbb{R}^q$ au moyen de Φ_S , les formes $d\lambda_j$ sont linéairement indépendantes de $\omega^1,\ldots,\omega^n$ (donc linéairement indépendantes des ω_j^i) ; on en déduit :

$$\begin{aligned} \text{rang } (d\theta_S) &= \text{rang } \Theta_1 + \text{rang } \Theta_2 \\ &= 2q + \text{rang}(\lambda_1 \, d\omega^1 + \ldots + \lambda_q d\omega^q) \text{ mod. } \mathcal{J} \\ &= 2q + \text{rang}(\lambda_1 \delta\omega^1 + \ldots + \lambda_q \, \delta\omega^q) \quad . \end{aligned}$$

Soit $x \in U$ et $\varphi \in S_x = \pi_S^{-1}(x)$; on a : $\varphi = \sum_1^q a_j \, \omega^j(x)$ c'est-à-dire $\lambda_j = a_j$; donc $\delta\varphi = \sum_1^q a_j \, \delta\omega^j(x)$, d'où :

$$\text{rang } d\theta_S(\varphi) = 2q + \text{rang}(\sum_1^q a_j \, \delta\omega^j) = 2q + \text{rang}(\delta\varphi) \quad .$$

B. Cette étude montre que le rang de $d\theta_S(\varphi)$ est égal à $2q + 2(k-1)$ si et seulement si $(d\varphi)^k \in \mathcal{J}$ et $(d\varphi)^{k-1} \notin \mathcal{J}$.

Ceci conduit à considérer les opérateurs δ^k (coïncidant pour $k = 1$ avec le tenseur de Martinet) définis de la manière suivante : le morphisme

$$\delta^k : S \to \overset{2k}{\wedge} (T^*N/S)$$

est le composé $P^k \circ d^k$ où $d^k\varphi = (d\varphi)^k$ et P^k est la projection $\overset{2k}{\wedge}(T^*N) \to \overset{2k}{\wedge}(T^*N/S)$; $\delta^k\varphi$ est encore la classe de $(d\varphi)^k$ dans l'algèbre quotient $\mathcal{C}(N)/\mathcal{J}$.

Le noyau de δ^k est défini par

$$\ker \delta^k = \{\varphi \in S \; ; \; (d\varphi)^k \in \mathcal{J}\} \quad ,$$

d'où

$$\ker \delta^k = \{\varphi \in S \; ; \; \text{rang } d\theta_S(\varphi) \leq 2q + 2(k-1)\} \quad .$$

Ce noyau $\ker \delta^k$ coïncide avec le noyau de l'opérateur $\delta_k : S \to \overset{2k}{\wedge} S$, introduit par Y. Haraguchi [9] , défini localement par

$$\delta_k \omega = (d\omega)^k \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q \quad .$$

Supposons que les δ^k soient de rang constant sur N ; on obtient une suite $S^{(k)} = \ker \delta^k$ de sous-fibrés de S dont les fibres sont des variétés algébriques

$$S^{(1)} = S_1 \subset S^{(2)} \subset \ldots \subset S^{(s+1)} = S \quad ,$$

où S_1 est le premier système dérivé et s l'invariant d'Engel de S.

Pour chacun des systèmes de dérivés S_i (si ceux-ci sont des fibrés vectoriels c'est-à-dire si les tenseurs de structure successifs sont des rang constant), on obtient également des suites

$$S_i^{(1)} = S_{i+1} \subset S_i^{(2)} \subset \ldots \subset S_i^{(s_i+1)} = S_i \quad .$$

Exemples : On considère dans $\mathbb{R}^{7+m}$ les systèmes de Pfaff S et Σ, de rang 5, définis respectivement par les formes $(\omega^1,\ldots,\omega^5)$ et $(\bar{\omega}^1,\ldots,\bar{\omega}^5)$, satisfaisant les relations :

$$(S) \quad \begin{cases} d\omega^1 = \omega^4 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^7 \\ d\omega^2 = \omega^4 \wedge \omega^7 + \omega^3 \wedge \omega^6 \\ d\omega^3 = \omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^4 = \omega^5 \wedge \omega^7 \\ d\omega^5 = \omega^6 \wedge \omega^7 \end{cases} \qquad (\Sigma) \quad \begin{cases} d\bar{\omega}^1 = \bar{\omega}^4 \wedge \bar{\omega}^6 + \bar{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}^7 \\ d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^4 \wedge \bar{\omega}^7 - \bar{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}^6 \\ d\bar{\omega}^3 = \bar{\omega}^5 \wedge \bar{\omega}^6 \\ d\bar{\omega}^4 = \bar{\omega}^5 \wedge \bar{\omega}^7 \\ d\bar{\omega}^5 = \bar{\omega}^6 \wedge \bar{\omega}^7 \end{cases}$$

Pour chacun de ces systèmes, le premier système dérivé est de rang 4 ; S_1 (resp. Σ_1) est engendré par $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ (resp. $\bar{\omega}^1,\bar{\omega}^2,\bar{\omega}^3,\bar{\omega}^4$) ; S_2 (resp. Σ_2) est de rang 2, engendré par ω^1 et ω^2 (resp. $\bar{\omega}^1$ et $\bar{\omega}^2$). On vérifie que S et Σ ainsi que leurs systèmes dérivés sont de classe constante et que pour ces systèmes les invariants d'Engel successifs sont : $s = 1$, $s_1 = 1$, et $s_2 = 2$.

En utilisant l'étude précédente nous allons montrer que ces systèmes ne sont pas localement équivalents ; comme $s = s_1 = 1$, on n'obtient pas de nouveaux invariants pour S et S_1 (resp. Σ et Σ_1) ; par contre si l'on considère S_2 et Σ_2, pour le premier, $d\alpha_{S_2}$ n'est pas de rang constant car

$$(d(\omega^1+\omega^2))^2 = 0 \quad , \quad (d(\omega^1-\omega^2))^2 = 0$$

et $\ker \delta^2$ est le couple de deux droites ; pour le deuxième, $d\alpha_{\Sigma_2}$ est de rang constant sur le complémentaire de la section nulle car l'équation $(\lambda_1\, d\bar{\omega}^1 + \lambda_2\, d\bar{\omega}^2)^2 = 0$ n'a pas de solution réelle non nulle.

Nous reviendrons sur ces exemples.

C. Nous allons déduire de la proposition 4 et des inégalités de Gardner (cf. II (cf. II. 1) :

PROPOSITION 5. Soit sur une variété N, de dimension n, un système de Pfaff S, de rang q, transitif, d'invariant d'Engel s, $\mathcal{N}$ une variété intégrale du système S ; la dimension ν de $\mathcal{N}$ vérifie alors les inégalités :

$$\nu \le n - s - q \le n - q - \frac{c-q}{q+1} \quad ;$$

en particulier si $c = n$, on a (inégalité de Goze [9]) :

$$\nu \leq \frac{q(n-q)}{q+1} .$$

Démonstration : On peut supposer que $\mathcal{N}$ est une sous-variété de N (sinon on se limite à un voisinage U de chaque point de $\mathcal{N}$ pour lequel $\mathcal{N} \cap U$ est une sous-variété de U) .

Comme π_S est une submersion, $\pi_S^{-1}(\mathcal{N})$ est une sous-variété de S , de codimension $n - \nu$; les formes induites sur $\mathcal{N}$ par ω et $d\omega$ (où ω est une section de S) étant nulles, la forme $(d\,\theta_S)_{\mathcal{N}}$ induite par $d\theta_S$ sur $\pi_S^{-1}(\mathcal{N})$ est nulle ; le rang de $d\theta_S$ étant inférieur ou égal à $2q+2s$, on doit avoir $n-\nu \geq q+s$; on achève la démonstration en utilisant les inégalités de Gardner.

3. Systèmes de contact. Polarisations relatives et idéaux basiques.

A. Soient V et W des variétés de dimensions p et q , $N = J^1(V,W)$ la variété des 1-jets réguliers dans V dans W ; la "forme de relèvement" μ sur N s'exprime, au moyen de coordonnées locales (x^i, y^a, y^a_i) dans un ouvert de $J^1(V,W)$ comme la suite des q-formes $\omega^1, \ldots, \omega^q$ où :

$$\omega^a = dy^a - \sum_{j=1}^{p} y^a_j\, dx^j \qquad (a = 1,\ldots,q) ;$$

cette "forme" μ est caractérisée par la propriété suivante : une section σ de N au-dessus d'un ouvert U de V est une application $j^1 f$ (où f est une application de U dans W) si et seulement si $\sigma^*\mu = 0$.

La forme μ définit un système de Pfaff C de rang q , sur N appelé système canonique ou système de contact, engendré localement par les formes ω^a .

On a : $$d\omega^a = \sum_{j=1}^{p} dy^a \wedge dx^j .$$

On vérifie que sur la variété C_o (complémentaire de la section nulle dans C) le rang de la forme $d\theta_C$ (où θ_C est la forme induite par θ sur C) est constant et égal à $2(q+p)$ (car l'invariant d'Engel $s = p$) . Donc le système dérivé S_1 coïncide avec S . D'autre part $\dim C_o = \dim C = (p+q+pq)+q$.

Pour que C_o soit une sous-variété symplectique de T^*M , il faut que $q = 1$. On a alors une structure de contact (au sens usuel) sur N et l'on retrouve les résultats d'Arnold [1] qui désigne par symplectifiée de N la variété C_o . Remarquons qu'alors la projection $C_o \to N$ est une fibration principale.

Pour q quelconque, on a : $\dim N = n = p+q+pq$; les variétés intégrales de dimension maximum sont de dimension $pq = \frac{q(n-q)}{q+1}$; ce sont les fibres de la fibration $\alpha \times \beta : N \to V \times W$, où α et β sont les applications source et but.

Inversement Y. Haraguchi [9] a montré qu'étant donnée une variété N' de dimension $n = p+q+pq$ sur laquelle est défini un système de Pfaff S' de rang q, de classe n, munie d'une feuilletage local de dimension pq dont les feuilles sont des intégrales de S', ce système S' est localement équivalent au système de contact C sur la variété $N = J^1(V,W)$.

B. On définit de même un système de contact d'ordre k sur la variété $N_k = J^k(V,W)$ des k-jets réguliers de V dans W (avec $N_1 = N$) au moyen de la forme de relèvement μ^k ; ce système de contact C^k est défini localement par les "composantes" de cette forme :

$$\omega^a = dy^a - \sum_{j=1}^{p} y^a_j\, dx^j \qquad (a = 1,\dots,q)$$

$$\omega^a_j = dy^a_j - \sum_{s=1}^{p} y^a_{js}\, dx^s \qquad (j, j_1,\dots,j_{k-1} = 1,\dots,p)$$

$$\omega^a_{j_1\dots j_{k-1}} = dy^a_{j_1,\dots,j_{k-1}} - \sum_{s=1}^{p} y^a_{j_1,\dots,j_{k-1}\, s}\, dx^s \ ,$$

les $y^a_{js},\dots,y^a_{j_1,\dots,j_{k-1}\,s}$ étant symétriques par rapport aux indices inférieurs ; on a :

$$d\omega^a = \sum_{j=1}^{p} \omega^a_j \wedge dx^j$$

$$d\omega^a_j = \sum_{s=1}^{p} \omega^a_{js} \wedge dx^s$$

$$\vdots$$

$$d\omega^a_{j_1,\dots,j_{k-1}} = \sum_{s=1}^{p} d\,y^a_{j_1,\dots,j_{k-1}\, s} \wedge dx^s \ .$$

On désigne encore par $\alpha : N_k \to V$ et $\beta : N_k \to W$ les applications source et but et l'on note α^k_{k-i} la projection $N_k \to N_{k-i}$.

Le i-ème système dérivé C^k_i $(i = 1,\dots,k-1)$ est le fibré $(\alpha^k_{k-i})^* C^{k-i}$, image réciproque du fibré C^{k-i}.

Soit $K = \alpha^*(T^*V)$ le sous-fibré de T^*N_k, image réciproque de T^*V et soit dans l'algèbre extérieure $\mathcal{G}(N_k)$ l'idéal $\mathcal{K}$ engendré par K (c'est-à-dire encore par $\alpha^*\mathcal{G}(V)$) ; le sous-fibré K vérifie les propriétés suivantes :

a) $K \cap C^k = 0_{N_k}$ (fibré de rang nul de base N_k),

b) les sous-fibrés K et $C^m \oplus K$ $(m = 1,\dots,k)$ sont des systèmes de Pfaff complètement intégrables.

Remarques : 1°) les variétés intégrales de K, contrairement à celles de $C^k \oplus K$ ne sont pas intégrales de C^k

2°) les variétés intégrales de $C^k \oplus K$ sont les fibres de la fibration $\alpha \times \beta : N_k \to V \times W$. Mais pour $k > 1$, on n'a plus l'équivalent du théorème de Y. Haraguchi.

Un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre k sur V, à valeurs dans W, est défini par une sous-variété R_k de N_k telle que la restriction α_{R_k} de α à R_k soit une submersion ; la forme de relèvement μ^k, induit sur sur R_k une forme de relèvement $\rho^k = i^*\mu^k$ (ou i est l'injection $R_k \to N_k$) ; ρ^k définit un système de Pfaff S^k sur N_k qui vérifie encore les propriétés a) et b).

Une solution f de R_k (c'est-à-dire une application f d'une ouvert U de V à valeurs dans W telle que j^kf soit une section de R_k au-dessus de U, d'où $(j^kf)^*\rho^k = 0$) définit une sous-variété $j^kf(U)$ de R_k ; cette sous-variété (appelée graphe de j^kf) est intégrale du système S^k ; elle est de dimension $p = \dim V$; de plus, elle est transverse aux variétés intégrales de $H = K \cap T^*R_k$, c'est-à-dire aux fibres de la submersion α_{R_k}.

Ceci nous conduit à désigner le sous-fibré H de T^*R_k sous le nom de polarisation relative, par analogie avec la notion de polarisation introduite par P. Molino [21] ; dans la situation étudiée par celui-ci, on associe à l'équation aux dérivées partielles (équation de Korteweg-De Vries) un système différentiel extérieur engendré par des 2-formes ; la polarisation P est un champ d'éléments de contact qui sont à la fois intégraux du système différentiel extérieur et transverses aux graphes des solutions du système d'équations aux dérivées partielles.

C. Plus généralement soit sur une variété N, de dimension n, un système de Pfaff S totalement régulier. On dira que S admet une polarisation relative H s'il existe un sous-fibré vectoriel H de T^*N vérifiant les propriétés

a) $H \cap S = 0_N$

b) les sous-fibrés H, $S \oplus H$ ainsi que $S_i \oplus H$ (pour $i = 1,\dots,r$) sont complètement intégrables

c) H est minimal au sens suivant : tout sous-fibré vectoriel de H possédant les propriétés a) et b) coïncide avec H.

Par définition même, chacun des systèmes dérivés S_i admet H comme polarisation relative.

L'idéal $\mathcal{H}$ engendré par H sera dit basique (dans [13] la notion d'idéal basique ne suppose pas que H soit nécessairement complètement intégrable).

PROPOSITION. Soit $\mathcal{J}_0$ l'idéal engendré par S, $\mathcal{J}_i$ l'idéal engendré par le système dérivé S_i ; on a alors :

$$d\mathcal{J}_j \subset \mathcal{J}_j + \mathcal{H} \qquad (j = 0,1,\dots,r)$$
$$d\mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{i-1} \cap \mathcal{H} \qquad (i = 1,\dots,r) \quad .$$

La première relation résulte de la complète intégrabilité de $S \oplus H$ et $S_i \oplus H$; la seconde se déduit de la relation de $d\mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}_{i-1}$ qui exprime que S_i est le système dérivé de S_{i-1} (cf [13]) .

Remarques : 1°) Comme toute section de S appartient à l'idéal engendré par $S \oplus H$, les feuilles du feuilletage défini par $S \oplus H$ sont des variétés intégrales de S , contrairement à celles de H , ce qui justifie la terminologie. Mêmes remarques pour les systèmes dérivés S_i .

2°) Si pour toute section ω de S , on a : $d\omega \in \mathcal{J} + (\mathcal{H})^2$ (où $(\mathcal{H})^2$ est le carré de l'idéal $\mathcal{H}$), alors le système caractéristique $\hat{S}$ de S coïncide avec $S \oplus H$ et S est de classe constante $q + h$ où $h =$ rang de H . Les inégalités de Gardner (II 1 C) deviennent :

$$2s \le h \le (q+1)s \quad .$$

Pour les systèmes de contact C^k , le système caractéristique est distinct de $C^k \oplus K$ (c'est-à-dire $c - q > h$) .

Question : Pour un système de Pfaff S admettant une polarisation relative H , de rang h , existe-t-il des variétés intégrales de ce système dont la dimension est comprise entre $n-(q+h)$ et $n - q - \frac{c-q}{q+1}$? On a vu que pour le système de contact d'ordre 1 ces deux nombres sont égaux.

La recherche de "variables indépendantes" par rapport auxquelles on peut prolonger un système conduit à la notion de polarisation relative au voisinage d'un point.

Pour qu'un système de Pfaff soit localement équivalent à un système de contact d'ordre $k \ge 1$, ou a un système induit par un système d'équations aux dérivées partielles, il est nécessaire qu'il admette une polarisation relative au voisinage de chaque point.

Remarquons que même dans le cas d'une polarisation relative globale, celle-ci n'est pas nécessairement unique, comme le montre l'exemple de l'équation de Pfaff de $\mathbb{R}^{2n+1}$ définie par la forme $\omega = dx^o + \sum_1^n y^i dx^i = d(x^o + \sum_1^n y^i x^i) - \sum_1^n x^i dy^i$

D. Exemple de système n'admettant pas de polarisation relative (Kumpera Ruiz [25]). On considère le système défini dans $\mathbb{R}^5$ par les formes

$$\omega^1 = dx^1 - x^2 dt \quad , \quad \omega^2 = dx^2 - x^3 dt \quad , \quad \omega^3 = dt - x^4 dx^3 \quad ;$$

on a, en posant $\omega^4 = dx^3$, $\omega^5 = dx^4$:

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge (\omega^3 + x^4 \omega^4) \quad , \quad d\omega^2 = -\omega^4 \wedge \omega^3 \quad , \quad d\omega^3 = -\omega^5 \wedge \omega^4 \quad .$$

Dans [13] , nous avons introduit la notion de <u>tenseur de structure réduit</u> pour un système de Pfaff totalement régulier : pour toute section ω de S_i $(i=1,\dots,r)$, $\delta_i^{red}\,\omega$ est la réduction de $d\omega \bmod \mathcal{J}_i + \mathcal{J}_{i-1} \cap (\mathcal{J}_o)^2$; on vérifie que si S admet une polarisation relative alors δ_i^{red} et δ_i coïncident. Dans l'exemple considéré ici, le tenseur δ_2 est de rang 1 , alors que δ_2^{red} est de rang 1 si $x^4 \neq 0$ et de rang 0 si $x^4 = 0$. On remarque que dans un ouvert tel que $x^4 \neq 0$, le système est engendré par ω^1, ω^2 et $\omega^3 = dx^3 - \frac{1}{x^4}\, dt$: c'est un "système de contact" .

<u>Exemples de systèmes admettant une polarisation relative</u>. Les systèmes S et Σ définis en II 2B admettent une polarisation relative H définie par le système complètement intégrable engendré par ω^6 et ω^7 (resp. $\bar{\omega}^6$ et $\bar{\omega}^7$) ; en effet on a $d(\omega^6 \wedge \omega^7) = 0$ et $d(\bar{\omega}^6 \wedge \bar{\omega}^7) = 0$. Le système caractéristique $\hat{S}$ (resp. $\hat{\Sigma}$ coïncide avec $S \oplus H$ (resp. $\Sigma \oplus H$) .

Par différentiation des relations (S) , on obtient $d\omega^6 \wedge \omega^5 = 0$, $d\omega^7 \wedge \omega^5 = 0$; (d'où $d\omega^6 = \omega^5 \wedge \theta^6$, $d\omega^7 = \omega^5 \wedge \theta^7$) ; de la différentiation des premières relations, on déduit : $\theta^6 = 0$, $\theta^7 = 0$.

Si l'on pose $\omega^6 = -dx^1$, $\omega^7 = -dx^2$, on vérifie que le deuxième système dérivé S_2 est équivalent au système de Pfaff.

$$\omega^1 = dz^1 - p_1^1\, dx^1 - p_2^1\, dx^2$$
$$\omega^2 = dz^2 - p_2^1\, dx^1 - p_1^1\, dx^2$$

induit par le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z^1}{\partial x^1} = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial z^1}{\partial x^2} = \frac{\partial z^2}{\partial x^1} \quad ,$$

ce qui conduit à un système hyperbolique.

On démontre de même que pour le système Σ , on a : $d\bar{\omega}^6 = 0$, $d\bar{\omega}^7 = 0$ le système Σ_2 est équivalent au système de Pfaff induit par les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial z^1}{\partial x^1} = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial z^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial z^2}{\partial x^1} \quad ,$$

conduisant à un système elliptique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM - J. MARSDEN : "Foundations of Mechanics" Benjamin . Second Edition 1978.

[2] V. ARNOLD : 'Méthodes Mathématiques de la Mécanique". Editions Mir-Moscou 1976.

[3] E. CARTAN : "Systèmes de Pfaff à cinq variables". Ann. Sc. Ec. Normale 1910. Oeuvres complètes vol. II, n° 2, p. 927-1011. Gauthier-Villars Paris 1952.

[4] E. CARTAN : "Leçons sur les invariants Intégraux". Hermann Paris 1958, 2ème édition.

[5] P. DAZORD : "Feuilletages en géométrie symplectique". C.R. Acad. Sc. Paris, 294, I. p; 489.

[6] J. DIEUDONNE : "Eléments d'analyse" vol. 4, Gauthier-Villars, Paris 1971.

[7] R. GARDNER : "Invariants of Pfaffian systems". Trans. Amer. Math. Soc 126 (1967) p. 514-533.

[8] C. GODBILLON : "Géométrie différentielle et Mécanique Analytique", Hermann Paris 1969.

[9] Y. HARAGUCHI : "Généralisation des structures de contact"thèse , Mulhouse 1981.

[10] P. LIBERMANN : "Sur le problème d'équivalence ..." Thèse Strasbourg 1953. Annali di Matematica t. 36, 1954.

[11] P. LIBERMANN : "Forme canonique d'une forme différentielle externe". Acad. Roy. de Belgique, Classe des Sciences t. 39 (1953) p. 846-850.

[12] P. LIBERMANN : "Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et de contact". Colloq. Géom. Différentielle Globale. Bruxelles 1958.

[13] P. LIBERMANN : "Sur le problème d'équivalence des systèmes de Pfaff". Publications Paris VII vol. 3, p. 73-110.

[14] P. LIBERMANN : "Sur quelques propriétés des variétés symplectiques". Proc. Conf. on Differential geom. 1980. Univerzita Karlova-Praha 1981. "Sur le problème d'équivalence des variétés symplectiques" Colloq. "Géométrie et Mécanique" Toulouse 1981. "Symplecticly regular foliations". Sympos. on "modern developments in analytical Mechanics". Torino, June 1982.

[15] P. LIBERMANN - C. MARLE : "Géométrie symplectique. Applications à la Mécanique" livre à paraître.

[16] A. LICHNEROWICZ : "Variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées". Journ. of Diff. Geom. 12(1977) 253-300. Lehigh University.

[17] C. MARLE : "Poisson Manifolds in Mechanics" Marseille 1982.

[18] C. MARLE : "Sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique" exposé à ce colloque.

[19] J. MARTINET : "Classes caractéristiques des systèmes de Pfaff". Colloq. Géom. Diff. Santiago de Compostela. Lecture Notes 392(1974) p. 30-37 .

[20] P. MOLINO : "Cohomologie partielle". Publications Université Paris VII, vol. 3 p. 111-120.

[21] P. MOLINO : "Connexions adaptées à un système différentiel extérieur .." Exposé à ce Colloque.

[22] J. PRADINES : "Sur le théorème d'annulation de Bott-Martinet". C.R.Ac. Sc. Paris, 282,1976, A p. 527-529.

[23] A. WEINSTEIN : "Lectures on symplectic manifolds". C.B.M.S. conf. N° 29, A.M.S Providence 1977.

[24] A. WEINSTEIN - J. ROELS : "On functions whose Poisson-Brackets are constant". Journal Math. Phys. 12, 1971, 1482-1486.

[25] A. KUMPERA-RUIZ : C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) p. 241.

Paulette LIBERMANN
U.E.R. de Mathématiques
Université PARIS VII
Tour 45-55 5e étage
75521 PARIS CEDEX 05