PIERRE MOLINO

Connexions adaptées a un système différentiel extérieur et prolongements d'Estabrook-Wahlquist

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 229-241

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__229_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.229-241

CONNEXIONS ADAPTÉES A UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR ET PROLONGEMENTS D'ESTABROOK-WAHLQUIST

Pierre Molino

Introduction. La théorie des systèmes différentiels extérieurs [SDE]d'Elie Cartan [1]fournit une présentation très géométrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles. A ce titre elle permet une utilisation naturelle et extrêmement suggestive de la théorie des connexions.

Notre but ici est de présenter ce genre de techniques à partir de la notion de connexion adaptée à un SDE [5] [6] [9].

L'origine de ces idées se trouve dans un article d'Estabrook-Wahlquist paru en 1975 au Journal of Math Phys [12] ; nous résumons au paragraphe I le contenu de cet article, qui porte sur la recherche des pseudopotentiels pour l'équation de Korteweg-De Vries, en liaison avec les méthodes d'"inverse scattering" et l'étude des transformations de Bäcklund.

En essayant de reformuler de façon intrinsèque les calculs d'Estabrook-Wahlquist, un rapprochement s'est imposé à nous avec les techniques de la quantisation géométrique de Kostant-Souriau [7] [11]. C'est par analogie avec ces techniques que nous introduisons une notion de polarisation d'un SDE. Grâce à cette notion et à l'utilisation des fibrés feuilletés [8] on peut rendre intrinsèques les calculs d'Estabrook-Qahlquist, supprimer leurs hypothèses restrictives ["indépendance des pseudopotentiels par rapport à x et t"] et généraliser leur résultat.

En réalité, il s'agit là seulement d'une esquisse de ce type de méthodes. De nombreux problèmes géométriques apparaissent dans cette direction. En particulier, le rapprochement avec la préquantisation géométrique laisse prévoir des obstructions analogues à la condition d'intégralité du théorème de Weil [7] pour "réaliser" un SDE par une connexion principale.

I - Pseudopotentiels pour l'équation de Korteweg-De Vries d'après Estabrook-Wahlquist.

On considère l'équation de KdV

(1) $$u_t + u_{xxx} + 12u\, u_x = 0$$

La notion de <u>pseudopotentiel</u> introduite par E-W généralise la notion classique de potentiel : un pseudopotentiel y à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ pour KdV sera défini par des équations du type

$$(2) \qquad \begin{cases} y_x = A(x,t,u,u_t,u_x,\dots,y) \\ y_t = B(x,t,u,u_t,u_x,\dots,y) \end{cases}$$

telles que, si l'on remplace dans A et B $u,u_t,u_x,\dots,$ par une solution de KdV et ses dérivées partielles successives, (2) devient complètement intégrable en la fonction inconnue y à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Si $k = 1$, le pseudopotentiel est dit simple.

Cette notion joue un rôle important dans la théorie des transformations de Bäcklund : supposons que (2) définisse un pseudopotentiel simple et que, de plus, il soit possible d'éliminer u et ses dérivées partielles successives à partir de (2) et des équations obtenues par dérivations. On obtiendra alors une nouvelle équation aux dérivées partielles portant sur la fonction inconnue y et, pour chaque solution de KdV, (2) fournira une solution de la nouvelle équation. Nous renvoyons à [9] et [10] pour les détails.

La méthode d'E-W pour obtenir des pseudopotentiels consiste à passer par l'intermédiaire d'un SDE : sur $\mathbb{R}^5$, muni des coordonnées (x,t,u,z,p), on considère le système

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega_1 \equiv du \wedge dt - z\, dx \wedge dt = 0 \\ \omega_2 \equiv dz \wedge dt - p\, dx \wedge dt = 0 \\ \omega_3 \equiv - du \wedge dx + dp \wedge dt + 12\, uz dx \wedge dt = 0 \end{cases}$$

$\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ étant définie par $\pi(x,t,u,z,p) = (x,t)$, soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ une section de π. On notera $s(x,t) = (x,t,u(x,t),z(x,t),p(x,t))$. Ceci étant, l'image de s est une variété intégrale de (3) - c.a.d. $s^*\omega_1 \equiv s^*\omega_2 \equiv s^*\omega_3 \equiv 0$ - si, et seulement si, $u(x,t)$ est solution de KdV avec $z(x,t) = u_x$ et $p(x,t) = u_{xx}$.

Sur $E = \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^k$, muni des coordonnées $(x,t,u,z,p,y^1,\dots,y^k)$, on considère la 1-forme à valeurs dans $\mathbb{R}^k$

$$(4) \qquad \alpha \equiv dy - A(x,t,u,z,p,y)dx - B(x,t,u,z,p,y)dt$$

On observe alors que

$$\begin{cases} y_x = A(x,t,u,u_x,u_{xx},y) \\ y_t = B(x,t,u,u_x,u_{xx},y) \end{cases}$$

définit un pseudopotentiel pour KdV si la condition suivante est vérifiée :

$$(5) \qquad d\alpha = 0 \quad \text{modulo} \quad \alpha,\omega_1,\omega_2,\omega_3$$

E-W font alors l'hypothèse supplémentaire que A,B ne dépendent pas explicitement de x et t ["pseudopotentiels indépendants de (x,t)"]. Moyennant cette hypothèse, ils obtiennent un procédé de calcul explicite de A et B. Le résultat fait intervenir une "algèbre de Lie partielle" dont les réalisations dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^k$ fournissent les pseudopotentiels cherchés.

Notre premier objectif est de formuler de façon intrinsèque les calculs d'E-W, en éliminant l'hypothèse d'indépendance par rapport à x et t. Ceci nous conduit à élargir le problème en utilisant le cadre général des connexions de Cartan-Ehresmann [3].

II - Système différentiels extérieurs et connexions adaptées.

Soit V une variété différentiable de dimension n. Pour simplifier, on travaillera en classe C^∞.

II.1. Rappels élémentaires sur les systèmes différentiels extérieurs [SDE]

Un SDE sur V s'écrira

(6) $I = 0$

où I est un idéal de l'algèbre des formes différentielles de V, que l'on suppose fermé [$dI \subset I$].

Un élément intégral de (6) sera un élément de contact P_x en $x \in V$ sur lequel toutes les formes de I s'annulent. Le système polaire de P_x est le système linéaire que doit vérifier $X_x \in T_xV$ pour que X_x et P_x soient contenus dasn un même élément intégral. Ceci étant, on définit les notions d'élément intégral ordinaire et d'élément intégral régulier par récurrence sur la dimension : si P_x est un élément intégral régulier de dimension p, tout élément intégral P'_x de dimension (p+1) sera dit ordinaire. Si de plus le rang du système polaire de P'_x est maximum, P'_x est régulier. On appelle genre du SDE la dimension maximale des éléments intégraux ordinaires.

Une sous-variété S de V est une variété intégrale du système si l'idéal induit par I sur S s'annule, c.à.d. si, $\forall x \in S$, T_xS est un élément intégral. Si en outre tous ces éléments intégraux sont ordinaires, on dira que S est une variété intégrale ordinaire.

On renvoie à Dieudonné [2] pour une formulation moderne de la théorie des SDE d'E. Cartan, en particulier pour la démonstration du théorème d'existence des variétés intégrales ordinaires dans le cas analytique [Théorème de Cartan-Kähler].

II.2. Connexions adaptées.

Soit $p : E \to V$ une fibration localement triviale de fibre-type F. Une connexion de Cartan-Ehresmann sur E sera un champ d'éléments de contact différentiable $\mathcal{H}$ supplémentaire en chaque point du sous-espace vertical $\operatorname{Ker} p_*$. On supposera en général vérifiée une condition de complétion, à savoir que pour tout champ de vecteurs X complet sur V, son relevé horizontal soit lui-même complet ; ceci garantit l'existence de relevés horizontaux pour les chemins continuement différentiables par morceaux de V.

Si $\mathcal{H}$ est une connexion sur E, notons H^* le module des 1-formes de E qui s'annulent sur $\mathcal{H}$.

On notera $I_{\mathcal{H}}$, et on appellera relevé $\mathcal{H}$-horizontal de I, l'idéal de $\wedge^* E$ engendré par $\{p^*I, H^*\}$. On dira que la connexion $\mathcal{H}$ est adaptée au SDE (6) si l'idéal relevé $I_{\mathcal{H}}$ est fermé. Dans ce cas, le SDE sur E

$$(7) \qquad I_{\mathcal{H}} = 0$$

sera dit prolongement du SDE initial (6) par la connexion $\mathcal{H}$.

Géométriquement, la condition de fermeture

$$(8) \qquad dI_{\mathcal{H}} \subset I_{\mathcal{H}}$$

signifie que toute variété intégrale de (6) se relève en variétés intégrales de (7) horizontales pour la connexion $\mathcal{H}$. Réciproquement, bien entendu, toute variété intégrale de (7) se projette, au moins localement, suivant une variété intégrale de (6).

Si, en outre, l'idéal $I_{\mathcal{H}}$ est engendré par H^*, on dira que la connexion $\mathcal{H}$ réalise le SDE initial (6). On peut alors, pour trouver les variétés intégrales de (6), "oublier" le SDE initial et chercher simplement les sous-variété de E horizontales pour la connexion $\mathcal{H}$.

Le problème qui nous intéresse est la recherche, pour un SDE donné (6) sur V, des couples $(E,\mathcal{H})$ adaptés au SDE, formés d'un fibré E localement trivial de base V et d'une connexion $\mathcal{H}$ sur E adaptée à (6).

Nous avons abordé ce problème de façon générale dans [9]. Ici, on fera les hypothèses simplificatrices suivantes : d'une part on supposera l'idéal I engendré par des 2-formes $\omega_1,\ldots,\omega_k$, linéairement indépendantes en tout point ; d'autre part on se limitera à la recherche des couples adaptés (E,α), où E est un G-fibré principal de base V et α une connexion principale sur E.

Même sous ces hypothèses, la recherche des couples (E,α) adaptés à (6) est un problème difficile, et nous serons amenés à faire sur le SDE (6) une nouvelle hypothèse simplificatrice [existence d'une "polarisation"]. En fait, on se contentera dans ce cas d'indiquer une méthode, et de l'appliquer aux deux exemples suivants :

Exemple I : variétés symplectiques et préquantisation.

La dimension de V est $n = 2p$. L'idéal I est engendré par une forme symplectique ω. Les variétés intégrales de (6) de dimension maximum égale au genre $g = p$ du SDE sont les sous-variétés Lagrangiennes de V. Ce sont toutes des variétés intégrales ordinaires.

La recherche des couples adaptés (E,α) est alors une extension du problème de la préquantisation géométrique [7][11] qui correspond au cas où $G = S^1$ et où la courbure de α coïncide exactement avec le pull-back de ω par $p : E \to V$.

En réalité, dans la suite, on ne traitera explicitement que le cas [trivial du point de vue de la préquantisation] où V est le fibré cotangent T^*M d'une variété M de dimension p, ω étant la forme symplectique canonique.

Exemple II : SDE (3) associé à l'équation de KdV

On a dans ce cas $I = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Le genre du système est 2. On observera que les sous-variétés de $V = \mathbb{R}^5$ images de sections $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ définies par des solutions de KdV sont des variétés intégrales ordinaires de dimension maximale. Au contraire, les fibrés de la projection $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ sont des variétés intégrales "singulières" du système.

III - Polarisations du SDE et feuilletage relevé sur un couple adapté.

V est toujours une variété de dimension $n, I = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ un idéal de Λ^*V engendré par k 2-formes, avec $dI \subset I$.

III.1. Par analogie avec la théorie de la préquantisation géométrique, on appellera polarisation du SDE (6) un champ complètement intégrable P d'éléments intégraux admettant en chaque point comme supplémentaires des éléments intégraux ordinaires maximaux. La codimension de P est donc le genre g du système. On appellera encore polarisation, le feuilletage $\mathfrak{F}$ défini par P. On observera que les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont des variétés intégrales, mais pas nécessairement ordinaires. Par exemple, dans l'exemple II ci-dessus, le feuilletage $\mathfrak{F}$ de $V = \mathbb{R}^5$ par les fibres de la projection π est une polarisation du SDE associé à l'équation de KdV, mais ses feuilles sont des variétés intégrales singulières. Au contraire, dans l'exemple I, une polarisation réelle de la variété symplectique [au sens de la théorie géométrique de la quantisation] définit une polarisation au sens précédent du SDE $\omega = 0$, dont les feuilles sont des variétés intégrales ordinaires.

Revenons au cas général. Si $\mathfrak{F}$ est une polarisation de (6), soient $(y^1,\dots,y^{n-g},x^1,\dots,x^g)$ des coordonnées locales adaptées à $\mathfrak{F}$ $(x^1,\dots,x^g)$ sont alors des "variables indépendantes" au sens d'Elie Cartan : la recherche des variétés intégrales ordinaires de dimension g transverses à $\mathfrak{F}$ équivaut à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles en les fonctions inconnues $y^1(x^1,\dots,x^g),\dots,\ y^{n-g}(x^1,\dots,x^g)$.

III.2. Connexions adaptées et feuilletage relevé.

Soit (E,α) un couple, où $E(V,p,G)$ est un G-fibré principal de base V, et α une connexion principale sur E adaptée au SDE (6). On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe structural.

La condition de fermeture $dI_{\mathcal{H}} \subset I_{\mathcal{H}}$ s'écrit

(9) $\qquad d\alpha \in I_{\mathcal{H}} \otimes \mathfrak{g}$

En fait, si on observe que $[\alpha,\alpha] \in I_{\mathcal{H}} \otimes \mathfrak{g}$, la condition (9) équivaut à

(10) $$\underline{K} = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] \in I_{\mathcal{H}} \otimes \mathfrak{g}$$

Mais, comme la courbure $\underline{K}$ de la connexion est tensorielle, (10) s'écrit

(11) $$\underline{K} \in \{p^*I\} \otimes \mathfrak{g}$$

où l'on a noté p^*I l'idéal de $\wedge(E^*)$ engendré par p^*I.

Enfin, comme $I = \{\omega_1,\dots,\omega_k\}$, (11) équivaut à la condition

(12) $$\underline{K} = \sum_{a=1}^{k} (p^*\omega_a)K^a$$

où les K^a sont des tenseurs sur E à valeurs dans $\mathfrak{g}$ de type adjoint.

Sous cette forme on voit que $\underline{K}$ induit une forme nulle sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$. Donc la connexion α détermine sur E un feuilletage relevé $\mathfrak{F}_E$ horizontal, invariant par les translations à droite, et dont les feuilles sont des revêtements galoisiens de celles de $\mathfrak{F}$. Muni de ce feuilletage relevé, E est un fibré principal feuilleté au-dessus de $(V,\mathfrak{F})$, et α une connexion transverse au sens introduit en [8].

Dans la suite, la recherche des couples adaptés (E,α) pourra donc se limiter aux fibrés principaux feuilletés sur $(V,\mathfrak{F})$ munis d'une connexion transverse.

IV - La recherche des connexions principales asaptées ; exemples.

Dans ce paragraphe on va donner d'abord la philosophie générale des calculs par lesquels on peut effectivement - au moins dans certains cas - déterminer les couples (E,α) adaptés au SDE (6) muni d'une polarisation $\mathfrak{F}$. On traitera ensuite explicitement les deux exemples mentionnés ci-dessus de manière à clarifier d'une part le lien avec la préquantisation géométrique, d'autre part les résultats d'E-W.

IV.1. Le principe de la méthode.

On reprend les notations ci-dessus. Pour commencer, à l'aide d'un champ d'éléments de contact Q sur V supplémentaire de P, on définit une décomposition en somme directe

$$T^*V = Q^* \oplus P^* \tag{13}$$

qui permet de décomposer les formes différentielles sur V en formes pures de type (r,s) où $0 \leq r \leq g$ et $0 \leq s \leq n-g$.

Si η est une forme pure de type (r,s), on note $d_F\eta$ la domposante de type $(r,s+1)$ de sa différentielle. L'opérateur d_F ainsi défini est de carré nul, ce qui permet d'introduire une d_F-cohomologie [8]. d_F représente si l'on veut la différentielle le long des feuilles de $\mathfrak{F}$.

On observera que les hypothèses faites sur la polarisation P nous permettent de choisir pour Q un champ d'éléments intégraux. Par suite, les 2-formes $\omega_1,\ldots,\omega_k$ seront pures de type (1,1).

Considérons maintenant le couple adapté (E,α). Soit U un ouvert de V et $s : U \to E$ une section locale feuilletée [8] de $(E,\mathfrak{F}_E)$, c'est-à-dire une section locale dont l'image est [localement] réunion de feuilles du feuilletage relevé. Le fait que α soit transverse se traduit par la condition

$$s^*\alpha \text{ pure de type } (1,0) \tag{14}$$

Ceci étant, la condition (12) s'écrira :

$$\left\{\begin{aligned} & d_F(s^*\alpha) = \sum_{a=1}^{k} \omega_a(s^*K^a) \\ & (d-d_F)(s^*\alpha) + \tfrac{1}{2}[s^*\alpha,\ s^*\alpha] = 0 \end{aligned}\right. \tag{15}$$

La première des relations (15) détermine les tenseurs K^a en fonction de la variation [le long des feuilles] de la connexion. Dans les "bon cas", compte tenu de la seconde relation, on pourra explicitement déterminer la dépendance de α par rapport aux variables le long des feuilles. De plus, on obtiendra des contraintes portant sur le crochet d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et sur la variation de α dans la direction transverse aux feuilles. C'est essentiellement l'origine des calculs d'E-W.

Les exemples ci-dessous illustreront ces quelques indications ; **on observera** toutefois que, même sous les hypothèses que nous avons faites, on est loin d'obtenir une solution complète du problème... C'est dire que beaucoup reste à faire dans cette direction.

IV.2. Le cas symplectique.

M est une variété de dimension p, $V = T^*M$ son fibré cotangent, θ la 1-forme de Liouville sur V et $\omega = - d\theta$ la forme symplectique canonique. On utilise la polarisation naturelle $\mathfrak{F}$ définie par la fibration $\pi : T^*M \to M$.

Les calculs sont tout à fait élémentaires : soit (E,α) un couple adapté au SDE $\omega = 0$. $E(V,p,G)$ est un G-fibré principal feuilleté par $\mathfrak{F}_E$, α une connexion transverse sur $(E,\mathfrak{F}_E)$. Considérons une section locale feuilletée $s : U \to E$ de E. La première relation (15) donne

$$(16) \qquad d_F(s^*\alpha) = \omega.\ s^*K$$

où K est un tenseur sur E à valeurs dans $\mathfrak{g}$ de type adjoint. De $d_F \circ d_F = 0$ et $d_F\omega = 0$, on déduit

$$(17) \qquad d_F(s^*K) = 0$$

Posant alors globalement

$$(18) \qquad \alpha_0 = \alpha + (p^*\theta)K$$

on vérifie que $s^*\alpha_0$ est pure de type $(1,0)$ et $d_F\alpha_0 = 0$. Autrement dit, la connexion α_0 est localement projetable suivant les feuilles de $\mathfrak{F}_E$. C'est une connexion transverse projetable au sens de [8]. Comme $\alpha = \alpha_0$ au-dessus de la section nulle de T^*M, qui est une variété intégrale, la courbure de α_0 est nulle sur cette section nulle ; donc α_0, étant transverse projetable, est sans courbure.

Notons ∇_0 la différentielle covariante par rapport à α_0. En choisissant la section s horizontale pour α_0, il vient $s^*\alpha = - \theta.s^*K$, et comme $ds^*\alpha + \frac{1}{2}[s^*\alpha,s^*\alpha] = \omega.s^*K$, il vient $\theta \wedge d(s^*K) = 0$, d'où $d(s^*K) = 0$, c'est-à-dire

$$(19) \qquad \nabla_0 K = 0$$

En résumé, si (E,α) est un couple adapté au SDE $\omega = 0$, alors il existe sur E une connexion sans courbure α_o et un tenseur K à valeurs dans $\mathfrak{g}$ de type adjoint tels que $\alpha = \alpha_o - (p^*\theta)K$, θ étant la forme de Liouville sur $V = T^*M$, et $\nabla_o K = 0$, où ∇_o est la différentielle covariante par rapport à α_o.

Bien entendu, pour que α réalise le SDE $\omega = 0$, il faut et il suffit que K soit différent de zéro.

Dans le cas où M est simplement connexe, E est trivial. On retrouve dans cette situation, la propriété classique d'unicité de la préquantisation [11].

IV.3. Cas du système associé à l'quation de KdV.

La méthode précédente fournit dans ce cas une version intrinsèque des calculs d'E-W, conduisant à une généralisation des résultats de ces auteurs.

On note $\mathfrak{F}$ le feuilletage de $V = \mathbb{R}^5$ défini par la projection $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$.

Soit $(E,\mathfrak{F}_E)$ un G-fibré principal feuilleté au-dessus de $(V,\mathfrak{F})$. E est alors [les feuilles de $\mathfrak{F}$ étant simplement connexes] le pull-back par π de sa restriction $E_o(\mathbb{R}^2,p,G)$ au-dessus de la section de π formée des points de coordonnées $(x,t,0,0,0)$.

Soit α une connexion transverse sur E, adaptée au SDE (3). On utilise une section locale s_o de E_o et la section feuilletée s de E obtenue par pull-back à partir de s_o. On aura :

$$s^*\alpha = A dx + B dt \tag{20}$$

où A,B sont des fonctions sur $\mathbb{R}^5$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

(15) donne, en notant en indice les dérivations :

$$\begin{cases} A_z = A_p = 0 & B_p = - A_u \\ [A,B] + B_x - A_t + B_u z + B_z p + 12uz\, A_u = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Afin de poursuivre de manière commode le calcul, on est amené à introduire une astuce technique qui aura un double avantage : elle rendra le calcul entièrement intrinsèque [c'est-à-dire indépendant de la section s choisie], et d'autre part elle permettra de coller de très près aux calculs originaux d'E.W, tout en abandonnant leurs hypothèses restrictives [$E = \mathbb{R}^5 \times G$, A et B indépendants de s,t].

Notons respectivement $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les champs de vecteurs horizontaux se projetant suivant $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Au-dessus d'un point (x,t,u,z,p) de $\mathbb{R}^5$, ces champs définissent, par la projection de E sur E_o suivant le feuilletage $\mathfrak{F}_E$, des champs de vecteurs invariants à droite au-dessus du point (x,t) de R^2. Autrement dit, <u>$\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ peuvent être regardés comme des fonctions de (u,z,p) à valeurs dans les champs invariants à droite</u> de E_o.

La section locale s permet d'identifier localement E à un fibré trivial. Il vient alors [localement]

$$\widetilde{A} = \frac{\partial}{\partial x} - A^- \quad ; \quad \widetilde{B} = \frac{\partial}{\partial t} - B^- \tag{22}$$

où A^- et B^- sont respectivement les champs invariants à droite sur G correspondant aux éléments A et B de $\mathfrak{g}$. Compte tenu du fait que $-[A^-,B^-] = [A,B]^-$, les relations (21) deviennent

$$\begin{cases} \widetilde{A}_z = \widetilde{A}_p = 0 \quad ; \quad \widetilde{B}_p = -\widetilde{A}_u \\ [\widetilde{A},\widetilde{B}] + \widetilde{B}_u z + \widetilde{B}_z p + 12uz\, \widetilde{A}_u = 0 \end{cases} \tag{23}$$

On en tire :

$$\widetilde{B} = -p\, \widetilde{A}_u + \widetilde{B}', \text{ où } \widetilde{B}' \text{ ne dépend plus de } p.$$

Portant dans la seconde équation de (23) et identifiant les termes en p, on obtient

$$\widetilde{B}'_z = z\, \widetilde{A}_{uu} + [\widetilde{A},\widetilde{A}_u]$$

d'où

$$\widetilde{B}' = \frac{z^2}{2} \widetilde{A}_{uu} + z\, [\widetilde{A},\widetilde{A}_u] + \widetilde{B}'', \text{ où } \widetilde{B}'' \text{ ne dépend plus que de } u.$$

En portant à nouveau dans (23), on obtient

$$\frac{z^3}{2} \widetilde{A}_{uuu} + \frac{3z^2}{2} [\widetilde{A},\widetilde{A}_{uu}] + z(\widetilde{B}''_u + [\widetilde{A}, [\widetilde{A},\widetilde{A}_u]] + 12u\, \widetilde{A}_u) + [\widetilde{A},\widetilde{B}''] = 0$$

On en déduit $\widetilde{A}_{uuu} = 0$, d'où

$$\boxed{\widetilde{A} = 2\, \widetilde{X}_1 + 2u\, \widetilde{X}_2 + 3u^2\, \widetilde{X}_3} \tag{24}$$

où les coefficients ont été introduits en concordance avec les conventions d'E-W. $\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\widetilde{X}_3$ sont des champs invariants à droite sur E_o se projetant respectivement suivant $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x},0,0$.

Portant dans les relations précédentes, on obtient finalement

$$\boxed{\widetilde{B} = -2(6u^2+p)\widetilde{X}_2 + 3(-2up+z^2-8u^3)\widetilde{X}_2 - 4z\widetilde{X}_7 + 8u\widetilde{X}_5 + 4u^2\widetilde{X}_6 + 8\widetilde{X}_4} \tag{25}$$

où $\widetilde{X}_4,\widetilde{X}_5,\widetilde{X}_6,\widetilde{X}_7$ sont des champs invariants à droite sur E_o se projetant respectivement suivant $\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial t},0,0,0$.

Finalement, $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_7$ sont des champs invariants à droite sur E_o vérifiant :

$$(26)\quad \begin{cases} \tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\tilde{X}_3,\tilde{X}_4,\tilde{X}_5,\tilde{X}_6,\tilde{X}_7 \text{ se projettent respectivement suivant } \\ \qquad\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x},0,0,\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial t},0,0,0 \\ [\tilde{X}_1,\tilde{X}_3] = [\tilde{X}_2,\tilde{X}_3] = [\tilde{X}_1,\tilde{X}_4] = [\tilde{X}_2,\tilde{X}_6] = 0 \\ [\tilde{X}_1,\tilde{X}_2] = -\tilde{X}_7 \;;\; [\tilde{X}_1,\tilde{X}_7] = \tilde{X}_5 \;;\; [\tilde{X}_2,\tilde{X}_7] = \tilde{X}_6 \\ [\tilde{X}_1,\tilde{X}_5] + [\tilde{X}_2,\tilde{X}_4] = \tilde{X}_7 + [\tilde{X}_3,\tilde{X}_4] + [\tilde{X}_1,\tilde{X}_6] = 0 \end{cases}$$

Les formules (24)(25) explicitent complètement la dépendance de la forme de connexion α par rapport aux variables "le long des feuilles" u,z,p.

Inversement, si $E_o(\mathbb{R}^2,p,G)$ est un G-fibré principal muni de champs de vecteurs invariants à droite $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_7$ satisfaisant (26), considérons le fibré principal $\pi^*E_o = E_o\times\mathbb{R}^3$, où $\mathbb{R}^3$ est l'espace des variables (u,z,p). La projection naturelle $\pi_E : E \to E_o$ munit E d'un feuilletage relevé $\mathcal{F}_E$. Ceci étant, sur $(E,\mathcal{F}_E)$ il existe une unique connexion transverse α pour laquelle les champs de vecteurs $\tilde{A},\tilde{B}$ définis par (24) et (25) sont horizontaux. Par construction, α est adaptée au SDE (3). En résumé :

Proposition : Tout couple (E,α), où E est un G-fibré principal sur $\mathbb{R}^5$ et α une connexion sur E adaptée à (3), peut être construit à partir d'un fibré principal $E_o(\mathbb{R}^2,p,G)$ muni de champs invariants à droite astreints aux conditions (26) : E sera le pull-back de E_o par la projection $\pi : \mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$, muni du feuilletage $\mathcal{F}_E$ défini par la projection $\pi_E : E \to E_o$; α est l'unique connexion transverse sur E pour laquelle les champs $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ définis par (24) et (25) sont horizontaux.

Le cas particulier traité par E-W dans [12] correspond aux hypothèses suivantes : $E_o = \mathbb{R}^2\times G$, les champs $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_7$ étant projetables sur G par la seconde projection. On est ramené dans ce cas, pour trouver un couple adapté, à réaliser $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_7$, astreints aux conditions de crochet dans (26), dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^-$ des champs invariants à droite sur G.

E-W ont donné un exemple ou G est de dimension 8. Cet exemple correspond à une réalisation [au sens introduit en II.2] du SDE (3) par une connexion principale.

V - Conclusion : quelques thèmes de recherche.

Les méthodes esquissées ici suggèrent un certain nombre de problèmes : V étant toujours une variété de dimension n, $I = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ un idéal fermé de $\Lambda^*(V)$ engendré par k 2-formes linéairement indépendantes, on pourra chercher

(i) à quelle condition le SDE $I = 0$ admet une polarisation, au sens que nous avons introduit.

(ii) si une telle polarisation existe, à quelle condition les relations (15) déterminent la dépendance d'une forme de connexion principale adaptée par rapport aux variables le long des feuilles.

(iii) éventuellement, à classifier les couples adaptées.

(iv) à déterminer les obstructions à la réalisation du SDE par une connexion principale.

En un certain sens, (iv) généralise le problème de la préquantisation sous une forme affaiblie [on n'impose ni le groupe structural, ni la valeur exacte de la courbure], et il semble naturel d'attendre que ce problème conduise à des obstructions cohomologiques.

Bien entendu, ces problèmes paraissent difficiles à aborder en toute généralité et il semble donc indiqué de s'attaquer à des SDE particuliers [par exemple $k = 2$ ou 3].

Pierre Molino, Mathématiques
Université des Sc. et Tech. du Languedoc
Place E. Bataillon - 34060 - Montpellier Cedex

Bibliographie

[1] E. CARTAN. "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques" Hermann, Paris (1945).

[2] J. DIEUDONNE. "Traité d'analyse" Tome IV
Gauthier-Villars, Paris (1971).

[3] C. EHRESMANN. "Les connexions infinitésimales"
Colloq. Topologie, Bruxelles (1950). Liège (1951), pp. 29-55.

[4] F.B. ESTABROOK, H.D. WAHLQUIST. "Prolongation structures of non-linear evolution equations II" J. Math. Phys. 17(1976), pp. 1293-7

[5] F.B. ESTRABROOK, H.D. WAHLQUIST. "Prolongation structures, connection theory and Bäcklund Transformations".
In F. Calogero edit. "Non linear evolution equation solvable by the spectral transform". Research notes in Mathematics n°26, Pittman (1978).

[6] R. HERMANN. "Geometric theory of non linear differential equations Bäcklund transformations and solitons" A,B. Vol XII, XIV, Interdisciplinary Mathematics.
Math. Sc. Press, Brookline (1976, 1977).

[7] B. KOSTANT. "Quantization and unitary representations. I. Prequantization" in. Lecture Notes in Math., Vol 170, Springer (1970).

[8] P. MOLINO. "Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projetables" C.R. Ac. Sc, Paris, 272 (1971), pp. 779-781.

[9] P. MOLINO. "Systèmes différentiels extérieurs et équations d'avolution"
Cours de 3^{e} cycle multigraphié, Montpellier (1981).

[10] F. PIRANI, D. ROBINSON, W. SHADWICK. "Local jet bundle formulation of Bäcklund transformations" (1978).

[11] J.M. SOURIAU. "Structure des systèmes dynamiques". Dunod, Paris (1970).

[12] H.D. WAHLQUIST, F.B. ESTABROOK. "Prolongation structures of non-linear evolution equations". Jour. Math. Phys., 16 (1975), pp. 1-7.