W. T. VAN EST

Quelques questions de géométrie en rétrospective

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 13-30
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__13_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p. 13-30

QUELQUES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE EN RÉTROSPECTIVE

par

W.T. van Est

Cette conférence ne prétend que passer en revue, de manière très incomplète, quelques développements en géométrie, qui, à mon avis, font ressortir clairement qu'en histoire de mathématiques, on peut tracer certaines lignes d'évolution, pour ainsi dire des "fils rouges", qui relient des travaux anciens aux travaux plus récents. Souvent des mathématiciens d'orientations les plus diverses y ont apporté leur contribution sans qu'ils aient toujours été conscients des racines lointaines du problème envisagé.

Certes le thème n'est pas nouveau. Les mathématiciens prennent de plus en plus conscience de la valeur de l'histoire des mathématiques comme complément souhaitable à côté des mathématiques artisanales. Mais en même temps une telle prise de conscience ne peut se faire que si les mathématiciens eux-mêmes s'occupent de l'histoire de leur science. *) A cet égard le livre de Felix Klein [30] sur l'histoire des mathématiques au dix-neuvième siècle est l'un des exemples les plus célèbres.

Cependant mon but est beaucoup plus modeste. J'ai choisi un thème qui me semble revêtir une importance centrale dans les mathématiques du dernier siècle et du nôtre, notamment celui du "passage du local au global", dans le but d'y apporter quelques illustrations prises du domaine de la géométrie, thème général de ces Journées.

Tout d'abord je vous rappelle qu'une bonne partie de l'analyse et de la géométrie différentielle du dix-neuvième siècle est d'une nature locale en ce sens que tel ou tel résultat n'est vrai qu'en restreignant convenablement le domaine envisagé. De telle nature est la plupart des résultats qu'on trouve par exemple dans les livres de Goursat sur les équations aux dérivées partielles et le problème de Pfaff ([20], [21], [22]). Tels sont les résultats sur les groupes de transformations dits de Lie, d'ailleurs intimement liés aux EDP du premier ordre ([33]). Tels sont beaucoup de résultats en géométrie différentielle classique qu'on trouve dans "Darboux" ([8]).

Bien sûr, on savait fort bien à l'époque qu'il fallait recoller les morceaux

*) Voir p.ex. le texte de la conférence de André Weil lors du congrès de Helsinki [55].

locaux pour dresser le tableau global, et des résultats globaux ne manquent pas tout à fait, mais dans le souci d'analyser en premier lieu une situation générique on fut souvent amené à se restreindre au local.

Peu à peu vers le terme du siècle on commence à franchir les limites du local dans le désir d'obtenir une vue d'ensemble de tel ou tel phénomène. C'est par exemple l'objectif clairement avoué de Poincaré lorsqu'il écrit [38]: "*... Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée dans le voisinage d'un de ses points du plan. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction dans toute l'étendue du plan. ...*"

A présent cette tendance se poursuit toujours très activement accompagnée de deux phénomènes satellites, à savoir une profusion d'études sur toutes sortes de singularités, et le développement des méthodes dites de topologie algébrique. Quant à la topologie algébrique elle se définit, à mon sens, comme l'art de décrire une structure globale obtenue par recollement de morceaux simples de manière à ne plus faire intervenir le choix particulier de l'assemblage. Et l'emploi des méthodes combinatoires, loin d'être une maladresse de la part des premiers chercheurs, est plutôt profondément fondé dans la nature du problème. De plus on peut s'attendre à ce que tout domaine de mathématiques où l'on rencontre des problèmes de passage du local au global comporte sa propre topologie algébrique. L'exemple simple suivant pourra élucider ceci.

Une surface compacte de Riemann peut se concevoir comme un assemblage de disques unitaires qui sont des "morceaux simples" tant du point de vue de la théorie d'une variable complexe que du point de vue de la topologie différentielle réelle. Cependant pour le topologue différentiel la surface se caractérise complètement en tant que surface compacte orientable par son premier nombre de Betti. L'analyste en variables complexes, tout en constatant que la moitié de ce nombre n'est autre que la dimension complexe de l'espace des formes de Pfaff holomorphes, a besoin, en plus, de la connaissance des périodes de ces formes pour aboutir à une caractérisation du point de vue complexe. Cela montre que la topologie algébrique complexe est plus compliquée que la topologie algébrique des variétés réelles.

Pour en venir au thème de mon discours, je voudrais commencer par discuter un problème de la géométrie différentielle *) que j'ai baptisé pour la circonstance problème de Serret-Frenet, bien que cette dénomination soit un peu abusive.

Comme on sait un trièdre de Serret-Frenet glissant le long d'une courbe gauche permet de définir la courbure $\kappa(s)$ et la torsion $\tau(s)$ en fonction de la longueur d'arc s. Le problème se pose dans quelle mesure la courbe est déterminée par ces deux fonctions.

*) Ici on se met dans la catégorie C^∞.

De même en théorie des surfaces le problème se pose dans quelle mesure une surface est déterminée par la première et la seconde forme quadratique.

On connait la réponse: Dans les deux cas la courbe respectivement la surface est entièrement déterminée par ces données à un déplacement près. Cette réponse affirmative repose sur le théorème d'existence locale des solutions d'un système différentiel intégrable et comporte en plus un passage du local au global qui se fait ici sans difficulté.

Néanmoins le problème n'est pas épuisé. Pour cela reprenons le problème dans la réformulation due à Elie Cartan en tant que problème en théorie des groupes de Lie, et passons en revue, à cet effet, très brièvement la théorie élémentaire des algèbres et groupes de Lie en dimension finie.

Rappelons qu'une structure d'algèbre de Lie sur un espace vectoriel L peut se donner ou bien par un crochet de Lie $[\ ,\ ]$ sur $L \times L$ ou bien par un opérateur de cobord d sur l'algèbre extérieure $L^{*\wedge}$ de son dual, le lien entre d et $[\ ,\ ]$ étant donné par la formule $d\omega(x,y) = \omega([x,y])$, $\omega \in L^*$, $x,y \in L$.

A tout sous-espace $M \subset L$ on associe l'idéal extérieur $I_M := A_M \wedge L^{*\wedge}$ où A_M désigne l'annullateur de M dans L^*. Réciproquement tout idéal $I = A \wedge L^{*\wedge}$, où $A \subset L^*$ est un sous-espace, n'est autre que I_M où $M \subset L$ est l'espace des zéros de A.

Pour que M soit un idéal il faut et il suffit que $dA_M \subset A_M \wedge A_M$. Dans ce cas $(A_M^\wedge, d)$ s'identifie à $((L/(M)^{*\wedge}, d)$.

Pour formuler le troisième théorème de Lie (ou plutôt sa réciproque) en termes de $L^{*\wedge}$, définissons pour la circonstance la notion de L-<u>variété</u> comme un couple (V,φ) où V est une variété connexe, L est une algèbre de Lie et $\varphi : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$ *) est un morphisme d'algèbres différentielles, tel que pour tout $v \in V$ on ait $\dim L^* = \dim (\varphi(L^*))_v = \dim T_v^*$. **) Autrement dit, en choisissant une base $\omega_1,\dots,\omega_n$ de L^* et en posant $\varphi(\omega_i) = \tau_i$, on exige qu'en tout $v \in V$ les formes de Pfaff $\tau_1,\dots,\tau_n$ définissent une base pour l'espace cotangent T_v^*, et que de plus $d\tau_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_i^{jk} \tau_j \wedge \tau_k$ où les coefficients c_i^{jk} sont les constantes de structure qui interviennent dans les équations de Maurer-Cartan

$$d\omega_i = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} c_i^{jk}\, \omega_j \wedge \omega_k .$$

La définition de L-<u>morphisme</u> de Lie-Cartan se définit de manière évidente, et l'on constatera que tout L-morphisme est automatiquement une application étale.

Réciproquement, étant donnée une application étale $f : W \to V$, V étant munie d'une structure de L-variété $\varphi : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$, $(W, f^* \circ \varphi)$ est une L-variété,

---

*) Comme d'habitude $\Omega^*(V)$ désigne l'algèbre des formes différentielles sur V.

**) La formulation en termes de L est évidente. Cependant nous insistons par la suite sur la formulation-ci.

et f est un L - morphisme. En particulier il en est ainsi si f est un revêtement ou un plongement ouvert.

Les L - isomorphismes locaux $f : U \to U'$ où U et U' sont des ouverts de V, constituent un pseudogroupe Γ_V simplement transitif, i.e. tout germe d'un élément de Γ_V est entièrement déterminé par le couple (source, but) et tout couple $(v_0, v_1) \in V \times V$ est un couple (source,but) pour un tel germe.

Une L - variété V sera dite <u>transitive</u> si le groupe G_V des L - isomorphismes $V \to V$ agit transitivement sur V ; dans ce cas l'action de G_V est simplement transitive.

En choisissant un point d'origine v_0 dans une L - variété transitive V, on obtient un paramétrage du groupe abstrait G_V par l'application bijective $g \to g(v_0)$, ce qui rend G_V de Lie; dans ce cas $\varphi(L^{*\wedge})$ s'identifie à l'algèbre de Maurer-Cartan des formes invariantes à gauche sur G_V .

Le troisième théorème de Lie sous forme locale n'affirme que l'existence d'une L - variété pour toute algèbre de Lie L , tandis que la version globale du théorème affirme l'existence d'une L - variété transitive.

Avant de continuer la discussion du problème de Serret-Frenet constatons qu'on a ici un premier exemple du passage du local au global qui comporte de la topologie algébrique non-triviale.

En effet E. Cartan a montré comment on peut passer de la version locale à la version globale grâce au fait que le second nombre de Betti d'un groupe de Lie simplement connexe est nul (voir § VI de [5]). *)

Revenons maintenant à la discussion du problème de Serret-Frenet. Le choix d'un repère orthonormé le long d'une courbe ou d'une surface établit un plongement ρ de la courbe/surface V dans l'espace R des repères orthonormés de l'espace euclidien. Or R est une L - variété transitive, où L représente ici l'algèbre de Lie du groupe des déplacements euclidiens. En identifiant $L^{*\wedge}$ à l'algèbre de Maurer-Cartan sur R des formes G_R - invariantes, on obtient une représentation $\rho^* : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$. Comme Cartan a fait remarquer le problème de Serret-Frenet se ramène pour une bonne partie au problème dans quelle mesure le plongement ρ est déterminé par le morphisme ρ^* .

Cela donne lieu au problème suivant un peu plus général.

---

*) Cette démonstration géométrique semble être tombée dans l'oubli, du moins les textes courants sur les groupes de Lie (même Bourbaki) n'en font aucune mention. On se sert d'habitude du théorème d'Ado qui est démontré par voie algébrique. Cependant la démonstration géométrique de Cartan fournit en même temps une base d'une démonstration géométrique d'Ado ([13]) sans utiliser la décomposition de Levi, ingrédient indispensable dans toutes les démonstrations algébriques.

Etant données une L-variété transitive R associée à une algèbre de Lie L, et une représentation $\varphi : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$ où $L^{*\wedge}$ est identifiée à l'algèbre de Maurer-Cartan sur R des formes G_R-invariantes, et V est une variété abstraite, dans quelles conditions existe-t-il une application $f : V \to R$ telle que $\varphi = f^*$, et dans quelle mesure une solution éventuelle f est-elle déterminée par φ?

Pour discuter en détail ce problème choisissons une base $\omega_1,\ldots,\omega_n$ de L^* et posons $\tau_i := \varphi(\omega_i)$. Dans $V \times R$ on considère maintenant le système d'équations de Pfaff

(1) $\quad \tau_i = \omega_i \qquad i = 1,\ldots,n$.

Puisque φ est un morphisme d'algèbres différentielles, les équations dérivées

(1a) $\quad d\tau_i = d\omega_i$

sont une conséquence de (1). C'est dire que (1) est un système complètement intégrable et définit, de ce fait, un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n transverse aux fibres verticales $v \times R$, $v \in V$. Autrement dit, pour toute feuille F la projection p_V sur V induit une application étale $F \to V$, et les applications locales $f : U \xrightarrow{p_U^{-1}} F \xrightarrow{p_R} R$, $U \subset V$, p_R étant la projection sur R, satisfont à l'équation $f^* = \varphi$. Réciproquement toute solution locale f du problème définit une plaque de $\mathcal{F}$.

Observons que le groupe G_R induit dans $V \times R$ un groupe de translations verticales, noté G, qui conserve les formes ω_i et τ_i et, par conséquent, le feuilletage $\mathcal{F}$.

Puisque G_R opère de manière simplement transitive sur R, il s'ensuit que pour une plaque donnée P les G-transformées de P constituent une partition de $p_V^{-1}(p_V(P))$. De cela il découle que $V \times R$ dans la topologie feuilletée est un revêtement galoisien de V (par rapport à p_V), dont les feuilles sont les composantes connexes. Par conséquent pour chaque feuille F, $F \xrightarrow{p_V} V$ est encore un revêtement galoisien de V à groupe de Galois $G(F) \subset G$.

Puisque G permute transitivement les feuilles entre elles, $G(F)$ subit une conjugaison en passant à une autre feuille.

Evidemment les applications locales $f : U \to R$, U étant un ouvert de V, définies par F se recollent en une application globale $f : V \to R$ ssi $F \xrightarrow{p_V} V$ est un homéomorphisme, ou, autrement dit, ssi $G(F)$ est trivial.

En choisissant un point de base v_0 dans V, et un point x au dessus v_0, tout lacet λ basé à v_0 se relève en un chemin $\tilde{\lambda}_x$ à point initial x qui est situé dans la feuille F_x passant par x. L'opérateur η_λ qui associe à x l'autre extrémité de λ_x ne dépend que de la classe d'homotopie $[\lambda]$ de λ, et $\eta : [\lambda] \to \eta_\lambda$ est un homomorphisme de $\pi_1(V,x_0)$ dans le groupe H de toutes les permutations de la fibre $v_0 \times R$ qui commutent à G.

η sera appelé <u>morphisme de périodes</u> et $\eta(\pi_1(V,x_0)) \subset H$ sera dit le <u>groupe des périodes</u>. Un raisonnement simple bien connu montre que $\eta(\pi_1(V,x_0))$ est isomorphe à $G(F)$ (bien qu'il n'existe pas en général d'isomorphisme canonique, l'indétermination étant une conjugaison éventuelle), d'où l'on obtient le critère:

<u>L'équation $f^* = \varphi$ a une solution $f : V \to R$ ssi le groupe des périodes $\eta(\pi_1(V,x_0))$ est trivial. Dans ce cas la solution f est déterminée à un facteur à gauche $\in G_R$ près.</u>

En prenant pour R la droite réelle et pour $L^{*\wedge}$ l'algèbre différentielle engendrée par la forme $\omega = d\xi$ invariante par rapport aux translations, l'image $\varphi(\omega)$, pour tout morphisme $\varphi : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$, est une forme fermée. Réciproquement toute forme de Pfaff fermée sur V est l'image de ω par rapport à un morphisme convenable φ. Dans ce cas le critère ci-dessus se réduit au critère pour l'exactitude d'une forme fermée.

Par analogie, dans le cas général, un morphisme $\varphi : L^{*\wedge} \to \Omega^*(V)$ sera appelé <u>cocycle de Serret-Frenet à valeurs dans l'algèbre de Lie</u> L.

Une fois reconnu ce que c'est qu'un cocycle de Serret-Frenet, des exemples foisonnent.

Prenons le tore T^2 privé d'un point ∞ et muni d'un point d'origine 0. Soient τ_1, τ_2 deux formes de Pfaff fermées dont les classes de cohomologie constituent une base pour la cohomologie de de Rham $H^1_{dR}(T^2 - \{\infty\})$. Alors le couple τ_1, τ_2 constitue un cocycle de Serret-Frenet à valeurs dans l'algèbre de Lie commutative de dimension 2. Cela fournit un morphisme $\eta : \pi_1(T^2 - \{\infty\}, 0) \to \mathbf{R}^2$, et les périodes forment un réseau P_1 dans $\mathbf{R}^2$.

Puisque $T^2 - \{\infty\}$ a cohomologie triviale en dimension 2, il existe une forme de Pfaff τ_3 telle que $d\tau_3 = \tau_1 \wedge \tau_2$. Maintenant le triple τ_1, τ_2, τ_3 définit un cocycle de Serret-Frenet à valeurs dans l'algèbre de Lie dite de Heisenberg. Il en résulte un homéomorphisme de périodes $\eta : \pi_1(T^2 - \{\infty\}, 0) \to \mathbf{H}$, où $\mathbf{H}$ désigne le groupe de Heisenberg. Le groupe des périodes P_2 se projette sur P_1 par le morphisme $\mathbf{H} \to \mathbf{R}^2$ associé à l'inclusion $\{\omega_1,\omega_2\} \subset \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. D'autre part P_2 est déterminé à une conjugaison près. Par conséquent l'intersection P_{20} de P_2 avec le centre de $\mathbf{H}$ est bien déterminée par le choix de τ_1,τ_2,τ_3 ; c'est le groupe des périodes secondaires.

$\tau_1 \wedge \tau_3$ et $\tau_2 \wedge \tau_3$ étant des formes fermées on trouve des formes τ_4,τ_5 telles que $d\tau_4 = \tau_1 \wedge \tau_3$, $d\tau_5 = \tau_2 \wedge \tau_3$, ce qui fournit un cocycle de Serret-Frenet à valeurs dans une algèbre de Lie nilpotente de dimension 5. En bref on retrouve la théorie d'homotopie réelle de Sullivan pour le groupe fondamental [53].

Le même raisonnement se tient pour une courbe algébrique de genre 2 où l'on a choisi une base τ_1,τ_2 pour les formes holomorphes, tandis qu'on peut choisir $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$, $\tau_5 = 0$, etc. On retrouve les périodes quadratiques ([23]) et les périodes d'ordre supérieur.

La théorie des feuilletages qui intervient dans l'analyse du problème de Serret-Frenet, fournit un autre exemple du passage du local au global.

Rappelons que sur une variété de dimension n la solution d'un système complètement intégrable d'équations de Pfaff de rang constant se présente localement, en choisissant des convenables coordonnées locales, comme une lamination d'une n - cube ouvert par des $(n-q)$ - plans parallèles à une de ses faces. Là le problème se pose de décrire une structure globale qui résulte d'un recollement respectant la lamination de telles "briques laminées".

Le problème comporte deux aspects. D'une part il y a l'aspect purement géométrique où l'on cherche à relier la géométrie de V à la géométrie du feuilletage. D'autre part, si le feuilletage est donné par un système de Pfaff complètement intégrable, il y a le problème de relier les propriétés analytico-algébriques du système à la géométrie du feuilletage.

Comme on sait ce sont Ehresmann et Reeb ([11], [40]) qui ont abordé ce problème les premiers, problème qui s'est avéré depuis de dimensions gigantesques.

Ce n'est pas l'occasion ici de passer en revue tout le développement de cette théorie - à cet égard on pourra consulter [16] et [31] - mais plûtot d'indiquer quelques problèmes de base qui sont illustratifs pour le thème que nous discutons.

Alors qu'une brique laminée est fibrée par les feuilles, il n'en est pas ainsi pour une variété feuilletée comme des exemples de trajectoires de systèmes dynamiques montrent clairement.

Cependant regardons la question de plus près dans le cas le plus simple, celui du plan. La figure 1 suggère deux exemples classiques de feuilletage qui ne sont pas des fibrations

a b

fig. 1.

L'importance de ces exemples a été méconnue longtemps. Je vous signale en curiosité que ces exemples ont mis Brouwer [3] sur la bonne voie pour formuler la version correcte de son théorème de translation (dont la première version était erronnée).

En se rendant compte pourquoi ces exemples ne sont pas des fibrations on est amené à considérer l'espace de base, i.e. l'espace des feuilles, qui s'avère une variété non séparée de dimension 1. Or dans la théorie ordinaire des variétés fibrées on ne considère que des variétés de Hausdorff. Néanmoins comme Whitney [57] a fait remarquer les exemples indiqués sont toujours des fibrations localement triviales si l'on admet des variétés non séparées sur le même pied que celles de Hausdorff. En effet tout feuilletage du plan n'est autre qu'une fibration au-dessus d'une variété simplement connexe de dimension 1 (éventuellement non séparée).

Ce point de vue a été repris dans [18] et [28] pour discuter certains phénomènes d'un plan feuilleté.

Voilà une situation simple qui montre déjà que la théorie des feuilletages comporte sa propre topologie algébrique (tant qu'on range les fibrations dans ce domaine).

Dans l'analyse du problème de Serret-Frenet le feuilletage qui intervient est transverse à une fibration. Puisque tout feuilletage du plan admet un feuilletage orthogonal, il en est ainsi pour les feuilletages du plan. Cependant la fibration de Hopf de S^3 n'admet pas de feuilletage transverse, d'où la question s'il existe un feuilletage sur S^3. C'est Reeb, comme on sait, qui s'est rendu compte clairement comment la partie centrale de la figure 1a fournit la clef pour la construction du feuilletage de S^3 dit de Reeb [40].

L'importance de l'exemple réside surtout dans son caractère révélateur pour la géométrie des feuilletages. En effet peu d'exemples en mathématiques ont suscité tant de travaux qui s'occupent de tel ou tel aspect de l'exemple.

Tout d'abord on a le fait remarquable que l'exemple n'admet pas de version analytique, d'où la question: Est-ce une coïncidence ou une nécessité? Le théorème de Haefliger [24] qu'un feuilletage analytique de codimension 1 sur une variété compacte entraîne pour celle-ci un groupe fondamental d'ordre infini, montre que les feuilletages analytiques comportent leur propre topologie algébrique.

Deuxièmement, l'exemple de Reeb possède une feuille compacte alors que les autres feuilles sont des plans, d'où la question: faut-il qu'il y ait une feuille compacte? Le résultat de Novikov [37] que tout feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte simplement connexe à trois dimensions comporte une "composante de Reeb" apporte la réponse. Cependant il reste toujours des choses à mieux comprendre à cet égard. On y reviendra plus loin.

Les feuilles non compactes ne sont qu'à un seul bout, d'où la question: Comment la structure de l'ensemble des bouts des feuilles non-compactes, est-elle liée à la structure de l'ensemble des feuilles compactes? C'est Reeb lui-même qui a apporté une première réponse à la question [44] en montrant que si les feuilles non-compactes d'un feuilletage de codimension 1 sont toutes propres *) et à un seul bout

*) Rappelons qu'une feuille est dite propre si la topologie induite coïncide avec sa topologie de variété et est dite exceptionnelle si elle n'est ni propre ni localement dense.

alors la réunion des feuilles compactes constitue un ensemble connexe. Malgré des généralisations ultérieures ([10], [43]) la question est loin d'être épuisée comme témoignent des travaux qui continuent toujours de paraître.

De toute façon pour le cas général les questions suivantes se posent tout naturellement. Quelle est la position d'une feuille dans la variété ambiante? Dans quelles conditions existe-t-il une feuille compacte? Comment la topologie de la variété ambiante détermine-t-elle la topologie des feuilles?

Quant à la première question c'est le phénomène de feuille exceptionnelle *) qui a attiré l'attention, surtout pour les feuilletages de codimension 1 transverses à une fibration ([45], [49]) et dans ce cas un tel phénomène (dans la catégorie C^∞!) semble être lié à la nature du groupe fondamental de la variété. Pour le cas général des feuilletages de condimension 1, un résultat de Rosenberg-Roussarie [48] montre que le phénomène de feuille exceptionnelle est moins rare qu'on ne pourrait croire.

Quant à l'existence de feuilles compactes on ne dispose que de peu de théorèmes généraux dont le théorème de stabilité de Reeb avec ses généralisations et raffinements ([40], [12], [54]) et le théorème de Novikov sur l'existence d'une composante de Reeb sur une variété compacte simplement connexe de dimension 3 sont les plus connus. Le phénomène décrit par ce dernier théorème constitue en même temps un exemple de l'influence de la variété ambiante sur la topologie des feuilles.

Passons maintenant à la question de quelle manière les propriétés analytiques géométriques d'un système d'équations de Pfaff pour un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété W sont liées à la géométrie de $\mathcal{F}$.

Restreignons-nous au cas de codimension réelle 1. Dans ce cas, en supposant que $\mathcal{F}$ soit transversalement orientable, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est donné par une seule équation de Pfaff $\omega = 0$, où ω est une forme partout non-nulle.

Observons qu'on a ici encore un exemple du passage du local au global. En effet localement un feuilletage de codimension 1 se décrit par une équation du type $dz = 0$, où z est une coordonnée locale. L'hypothèse de l'orientabilité transversale permet de choisir les équations locales de telle façon que l'on passe de l'une à l'autre en multipliant par une fonction réelle positive. En prenant le logarithme, les multiplicateurs de transition définissent un cocycle à valeurs dans le faisceau des fonctions C^∞ (pour le cas C^∞) ou celui des fonctions analytiques pour le cas analytique. La nullité du premier groupe de cohomologie de W à valeurs dans chacun des deux faisceaux (voir [6]) permet de recoller les équations locales.

*) cf. la note précédente.

Réciproquement si le feuilletage est donné par une équation $\omega = 0$, il est forcément transversalement orientable.

La condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ implique l'existence d'une forme globale ω_1 telle que $d\omega = \omega_1 \wedge \omega$. Ici, comme précédemment, ω_1 se construit par recollement des formes locales, toujours en s'appuyant sur la nullité du groupe de cohomologie signalé ci-dessus. La relation $d\omega = \omega_1 \wedge \omega$ donne lieu à l'équation $d\omega_1 \wedge \omega = 0$, ou bien $d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega$. Cela montre que la restriction de ω_1 à une feuille F est une form fermée. Comme Reeb a fait remarquer [40] la classe de cohomologie de $\omega_1|F$ ne dépend que du couple $(\mathcal{F}, F)$. Le multiplicateur de l'holonomie linéaire associée à un lacet λ dans F s'avère $e^{\pi(\lambda)}$ avec $\pi(\lambda) := \int_\lambda \omega_1$, ce qui donne pour ω_1 une interpretation comme un invariant géométrique du feuilletage.

De plus $d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega$ montre que $\gamma := \omega_1 \wedge d\omega_1$ est une forme fermée, et Godbillon-Vey ont montré que la classe de cohomologie $[\gamma]$ de γ ne dépend que de $\mathcal{F}$. L'interprétation de $[\gamma]$ semble se clarifier de plus en plus. Par exemple s'il n'y a pas de feuille ressort, $[\gamma] = 0$ ([29]); $[\gamma]$ mesure l'holonomie "diffuse" concentrée dans les feuilles ressort ([9]).

En dérivant de nouveau l'équation $d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega$, on établit l'existence d'une forme globale ω_2 telle que

$$d\omega_2 = \omega_3 \wedge \omega + \omega_2 \wedge \omega_1 .$$

En continuant, on obtient toute une suite $\omega_4, \omega_5, \ldots$ de formes de Pfaff telle que

$$\begin{aligned}
d\omega_3 &= \omega_4 \wedge \omega + 2\omega_3 \wedge \omega_1 \\
d\omega_4 &= \omega_5 \wedge \omega + 3\omega_4 \wedge \omega_1 + 2\omega_3 \wedge \omega_2 \\
d\omega_5 &= \omega_6 \wedge \omega + 4\omega_5 \wedge \omega_1 + 5\omega_4 \wedge \omega_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\omega_k &= \sum_{\substack{i<j \\ i+j=k+1}} a_{ij} \quad \omega_i \wedge \omega , \quad a_{ij} := \frac{k!}{i!j!} \quad (i-j) \qquad \text{(voir [19])}.
\end{aligned}$$

D'autre part soit $M_\infty^{*\wedge}$ l'algèbre de Maurer-Cartan engendrée par les éléments $\tau_0, \tau_1, \ldots$ assujettis aux relations

$$\begin{aligned}
d\tau_0 &= \tau_1 \wedge \tau_0 \\
d\tau_1 &= \tau_2 \wedge \tau_0 \\
d\tau_2 &= \tau_3 \wedge \tau_0 + \tau_2 \wedge \tau_1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
d\tau_k &= \sum_{\substack{i>j \\ i+j=k+1}} a_{ij} \quad \tau_i \wedge \tau_j
\end{aligned}$$

L'algèbre de Lie M_∞ associée à $M_\infty^{*\wedge}$ est celle des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}$ [19].

Le morphisme $\varphi : M_\infty^{*\wedge} \to \Omega^*(W)$ défini par $\varphi : \tau_i \to \omega_i$ est donc un cocycle de Serret-Frenet à valeurs dans M_∞ .

Considérons tout d'abord le cas où $\ker \varphi$ est de codimension finie et est engendré, en tant qu'idéal, par ses éléments de degré 1. Cela répond au cas où φ est en effet un cocycle à valeurs dans une sous-algèbre $L \subset M_\infty$ de dimension finie. Il n'y a essentiellement que trois cas, et la L-variété transitive simplement connexe V s'identifie alors à l'espace $G_V =: G$ de l'un des trois groupes $G\ (:= G_V)$ suivants:

le groupe des translations de $\mathbb{R}$;

le groupe affine de $\mathbb{R}$ qui conserve l'orientation;

le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$.

Dans chacun de ces groupes $\tau_0 = 0$ définit une fibration de G suivant les classes à gauche d'un sous-groupe analytique B, l'espace G/B étant une droite réelle.

En remontant au revêtement universel $\widetilde{W}$ de W, le morphisme $\varphi : M_\infty^{*\wedge} \to \Omega^*(W)$. se relève en un morphisme $\widetilde{\varphi} : M_\infty^{*\wedge} \to \Omega^*(\widetilde{W})$, et l'on obtient un application $\widetilde{f} : \widetilde{W} \to V$ telle que $\widetilde{f}^* = \widetilde{\varphi}$. De plus $\widetilde{f}$ est une application d'entrelacement par rapport d'une part à l'action du groupe fondamental H, et à l'action de G_V d'autre part. C'est-à-dire, il existe un morphisme $\Psi_{\widetilde{f}} : H \to G_V$, tel qu'on ait $\widetilde{f} \circ h = \Psi_{\widetilde{f}}(h) \circ \widetilde{f}$ pour tout $h \in H$.

Puisque $\widetilde{f}^*(\tau_0) = \widetilde{\varphi}(\tau_0) = \widetilde{\omega}$, et que ω est non-nul partout, il s'ensuit que les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (le relevé de $\mathcal{F}$) sont les images réciproques par rapport à $\widetilde{f}$ des fibres gB. De plus $\widetilde{f}$ induit une application étale de la structure transverse de $\widetilde{\mathcal{F}}$ dans la droite réelle G/B, d'où il s'ensuit que la structure transverse est celle d'une variété. Autrement dit: l'espace des feuilles $\widetilde{W}/\widetilde{\mathcal{F}}$ est une variété de dimension 1, éventuellement non séparée, et $\widetilde{f}$ induit une application étale $\widetilde{f}/\widetilde{\mathcal{F}} : \widetilde{W}/\widetilde{\mathcal{F}} \to G/B$, qui commute aux actions respectives de H et de G sur $\widetilde{W}/\widetilde{\mathcal{F}}$ et G/B.

Supposons que la feuille $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ soit invariante par rapport à $h \in H$, et soit λ un lacet dans la feuille correspondante F qui se relève en un chemin $\widetilde{\lambda}$ dans $\widetilde{F}$ de manière que $h(\widetilde{\lambda}(0)) = \widetilde{\lambda}(1)$. Alors localement dans un voisinage du point $\widetilde{F}/\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{V}/\widetilde{\mathcal{F}}$, l'action de h^{-1} s'identifie (par projection de la structure transverse) à l'holonomie du lacet λ. D'autre part l'action de h^{-1} sur $\widetilde{V}/\widetilde{\mathcal{F}}$ correspond par $\widetilde{f}/\widetilde{\mathcal{F}}$ à l'action de $\Psi_{\widetilde{f}}(h^{-1})$ sur G/B. Donc en remontant à $\widetilde{W}$ et en appliquant $\widetilde{f}/\widetilde{\mathcal{F}}$, <u>l'holonomie du lacet λ correspond à l'action d'isotropie de $\Psi_f(h)$, où $h \in H$ représente un élément qui correspond à λ</u> .

D'autre part les formes $\widetilde{\omega}_1/\widetilde{F}$, $\widetilde{\omega}_2/\widetilde{F}$, ... permettent de "développer" le chemin $\widetilde{\lambda}$ dans la fibre gB qui correspond à $\widetilde{F}$, i.e. de trouver le chemin $\widetilde{f} \circ \widetilde{\lambda}$. $\Psi_{\widetilde{f}}(h)$ est alors l'élément de G qui porte $\widetilde{f} \circ \widetilde{\lambda}\ (0)$ sur $\widetilde{f} \circ \widetilde{\lambda}\ (1)$. Autrement dit, les restrictions à $\widetilde{F}$ des formes $\widetilde{\omega}_i$, $i \geq 1$, et par conséquent la restriction des formes ω_i à F, permettent de reconstruire l'holonomie de la feuille F.

Cela soulève la question dans quelle mesure on peut trouver, dans le cas général, un M_∞-espace V tel que $\widetilde{\mathcal{F}}$ soit l'image réciproque d'une fibration principale de V par rapport à un sous-groupe $B \subset G_V$. De toute façon le cas particulier ci-dessus laisse entrevoir que les formes ω_i $(i \geq 1)$ permettront de reconstruire l'holonomie dans une certaine mesure. Nous revenons sur cette question plus tard.

En observant qu'en général le pull-back d'une forme de Pfaff non-nulle partout peut avoir des singularités, tandis que la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ est conservée, la théorie des feuilletages conduit de manière tout à fait naturelle à étudier des formes de Pfaff à singularités qui satisfont à la condition d'intégrabilité. Il est donc peu étonnant que la thèse de Reeb contienne des résultats à cet égard. Ceux-ci ont servi de base pour des recherches ultérieures, et des conférences à ce colloque témoignent de l'activité dans ce domaine.

D'autre part la même observation a conduit Haefliger [24] à introduire la notion de Γ-structure justement pour inclure les "feuilletages à singularités".

Faut-il encore dire que la condition $\omega \wedge d\omega = 0$ conduit aussi à envisager le cas opposé $\omega \wedge d\omega \neq 0$ partout, qui est celui de contact pour la dimension 3, et d'autres structures ([34], [47]) ?

Après avoir fait ce petit tour d'horizon de quelques problèmes en théorie globale des feuilletages, je voudrais revenir à une question qui s'est déjà posée au début: Dans quelle mesure un feuilletage est-il une fibration, ou, plus modestement, quelle est la bonne notion d'objet de base tel qu'on puisse considérer les feuilles comme les "fibres" d'une "projection" ?

Pour l'instant cela paraît comme une préoccupation d'ordre philosophique plutôt que d'intérêt pratique. Quoi qu'il en soit, l'histoire des mathématiques semble apporter évidence que l'introduction d'une convenable notion de quotient permet souvent de distinguer les propriétés du "quotient" de celles du "diviseur" et de les relier aux propriétés de l'objet "factorisé". Un exemple classique pourra suggérer qu'une telle préoccupation n'est pas entièrement dépourvue d'intérêt.

Rappelons à cet effet une méthode de Poincaré pour montrer l'existence d'une orbite fermée dans le cas d'un système dynamique, et mettons-nous dans le cas le plus simple où les trajectoires constituent une famille régulière de courbes qui admet une section globale P, i.e. une section connexe qui rencontre chaque trajectoire au moins une fois. Soit $\tau : P \to P$ l'application de retour, alors la recherche des trajectoires closes se réduit à l'étude des points fixes et périodiques de τ. Or le couple $(P;\tau)$ constitue en quelque sorte un atlas qui peut servir de description pour la structure transverse.

Cependant dans la plupart des cas on ne dispose que des sections locales, comme c'est déjà le cas pour les feuilletages du plan. Néanmoins en faisant correspondre les points de section d'une même trajectoire, on obtient un atlas qui décrit la variété de base (en général non séparée). L'article de Haefliger et Reeb [28] utilise cette structure transverse pour lire là-dessus des propriétés du feuilletage. De même la structure transverse d'un feuilletage du 2-tore se décrit comme la variété de base V d'un feuilletage du plan munie d'un groupe abélien G d'homéomorphismes à deux générateurs, cela détermine dans une large mesure le type de V et l'action de G ([2]).

Ces exemples élémentaires montrent qu'une bonne notion de quotient pourra s'avérer utile dans des questions concrètes.

Le théorème de Seifert [52] sur l'existence d'une trajectoire close dans un perturbé du feuilletage de Hopf (= fibration de Hopf) sur S^3 fournit un autre exemple intéressant.

Dans ce cas là il n'existe pas de section globale non plus. Procédons néanmoins dans la fausse hypothèse qu'il en existe une. La perturbation étant supposée assez petite, la section peut être choisie en sorte qu'elle soit à la fois une section du feuilletage de Hopf et son perturbé. En conséquence elle est une sphère S^2 et l'application τ pour le perturbé est proche de l'identité. Selon Lefschetz, τ aura un point fixe, et, par conséquent, la perturbation laisse subsister une trajectoire close.

Malheureusement le raisonnement s'effondre complètement à cause de la fausseté de l'hypothèse. Cependant cet échec devrait inciter d'autant plus à se construire la bonne notion de structure transverse pour sauvegarder autant que possible l'idée de Poincaré. C'est exactement ce qu'a fait Reeb [46] sans pour autant définir formellement la notion de structure transverse. Il se construit deux disques transverses aux deux feuilletages et tels qu'il forment une section complète. Pour le feuilletage de Hopf τ est l'identité. Pour le second feuilletage l'écart de τ de l'identité se mesure grosso modo par un champ de vecteurs sur chacun des disques. *) L'hypothèse qu'il n'y ait pas de trajectoire close dans le perturbé s'exprime par la non-nullité de l'écart. Dans ce cas on obtient l'identité $\chi(S^2) + I = 0$ où $\chi(\ )$ désigne la caractéristique d'Euler et I désigne l'index de Seifert (voir aussi [41], [42]). En montrant que $I = 0$ on aboutit au résultat.

Signalons entre parenthèses une remarque de Reeb dans ce papier sur la différence entre la notion de "petite perturbation" en théorie des perturbations singulières et celle qui intervient dans le théorème de Seifert. C'est peut-être un premier signe avant-coureur de l'intérêt au non-standard - thème important de ces Journées - qui se développera plus tard.

Revenons à notre sujet. Les exemples font constater que, dans le cas général, il vaut mieux remplacer la notion de section globale connexe munie de l'application

*) En général la seconde application τ n'est définie que sur un sous-ensemble ouvert de chacun des deux disques.

de retour par celle d'atlas transverse. C'est un "atlas" dont les cartes sont des sections partielles, leur réunion étant une section complète, et dont le pseudo-groupe des changements de carte est celui de l'holonomie. C'est de nouveau une situation où l'on se construit un objet global à partir de morceaux élémentaires. Tout naturellement on est amené à définir une notion d'équivalence d'atlas, et l'objet global associé ne devrait pas changer essentiellement en passant à un atlas équivalent. Une précision de ces idées, éventuellement sous des hypothèses supplémentaires, a été entreprise par toute une série d'auteurs ([1], [2], [36], [39], [26], [27]). De toute façon la description d'un tel objet devrait comporter une topologie algébrique convenable.

Un premier pas dans cette direction a été fait par Godbillon dans sa thèse [17] où il introduit le complexe singulier quotient par rapport à une feuilletage. A une légère modification près sa construction se traduit en termes d'un atlas transverse. Dans l'hypothèse supplémentaire de "relèvement d'homotopies" cela lui permet de relier l'homologie de base et celle de l'espace total.

Plus tard une notion de cohomologie de de Rham, dite cohomologie basique, pour l'atlas transverse d'un feuilletage a été introduite et discutée par plusieurs auteurs (voir p.ex. [35], [50]); c'est toujours un domaine d'études qui retient l'attention.

Dans une autre optique, notamment celle d'une discussion de phénomènes d'"intégrabilité homotopique" Haefliger a été amené à introduire la notion d'espace classifiant $B\Gamma$ pour un groupoïde topologique Γ ([25], [4]). En particulier le groupoïde Γ_A des germes des changements de carte d'un atlas généralisé A admet un classifiant $B\Gamma_A$. Ce qui importe, c'est que son type d'homotopie ne change pas si l'on passe à un atlas équivalent ([27], [51]). Cela fournit des invariants du type de topologie algébrique pour l'objet global.

Dans une approche plus naïve on a introduit une notion de groupe fondamental et de groupes d'homotopie d'ordre 2, qui s'avèrent identiques à ceux de $B\Gamma_A$ ([14], [15]).

Quoi qu'il en soit, les approches mentionnées contribuent tous à une topologie algébrique de l'objet global associé à un atlas.

Souvent des propriétés de nature analytique se reflètent dans la topologie algébrique. Tel est le cas par exemple pour l'atlas transverse d'un feuilletage de codimension 1 qui admet une mesure transverse (voir p.ex. la conférence de Godbillon); Hector m'a esquissé, il y a quelques mois, une approche du théorème de Novikov dans ce cadre; les travaux de Connes (voir p.ex. [7]) établissent des liens étroits entre la topologie et l'analyse de la structure transverse. Tel est aussi le cas pour un atlas analytique de dimension 1 ; on retrouve pour son groupe fondamental des théorèmes à la Haefliger par des arguments intrinsèques qui ne font intervenir aucun feuilletage.

Comme conséquence de ces théorèmes, on trouve que la droite réelle $\mathbb{R}$, munie du pseudo-groupe P_1^ω des difféomorphismes locaux analytiques, est une sous-variété d'une variété analytique connexe et simplement connexe A qui admet un groupe transitif G_A d'automorphismes, tel que tout élément maximal $\tau \in P_1^\omega$ s'obtient comme la trace sur $\mathbb{R}$ d'un $g \in G_A$ à la propriété $g(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Remarquons que le passage de P_1^ω à G_A peut-être envisagé comme un exemple du passage du local au global analogue au passage d'un groupe de Lie local à un groupe global. *) Une fois de plus il s'avère qu'il faut faire appel à une propriété d'acyclicité en dimension 2 signalée par Cartan dans sa démonstration géométrique du troisième théorème de Lie, bien que cette propriété soit cachée cette fois dans un critère de Malcev qu'on utilise.

Cela donne l'occasion de revenir une dernière fois sur les cocycles de Serret-Frenet sous forme d'une question.

Le groupe G_A admet une structure analytique dans le sens qu'on peut définir de manière tout à fait classique la notion d'une famille analytique d'éléments de G_A à un nombre fini de paramètres. Dans ce sens la multiplication dans G_A s'avère analytique. Cela permettra probablement d'interpréter l'algèbre M_∞^* comme l'algèbre de Maurer-Cartan sur G_A, d'où la question: Dans quelle mesure peut-on interpréter un feuilletage de codimension 1 sur une variété simplement connexe comme le pull-back de la fibration de G_A suivant les classes à gauche du sous-groupe d'isotropie de l'origine de $\mathbb{R}$?

Le feuilletage de Reeb n'admettra pas une telle description (autrement sa structure transverse serait une variété). Cependant peut-on espérer que les feuilletages analytiques de codimension 1 admettent une telle description ?

Voilà revenus les mots clef du début, cocycle de Serret-Frenet, démonstration de Cartan, feuilletage de Reeb. Mon discours est bouclé.

En terminant je constate que, fortuitement ou non, j'ai souvent puisé dans l'oeuvre de Reeb pour illustrer le thème un peu vague de mon discours. Qu'il m'excuse, et ce d'autant plus que c'était l'occasion de parler géométrie plûtot que "philosophie". En effet peu de l'esprit géométrique Reebien a transpiré. Qu'il trouve néanmoins dans ce colloque l'expression de l'estime de tous ceux qui le connaissent en géomètre et en ami!

---

*) En effet l'analogie correcte serait celle du passage d'un pseudo-groupe de Lie de type fini à un groupe global de transformations. Ce passage a été discuté en détail par Mlle Paulette Libermann [32].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BARRE - De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 227-312.

[2] L.G. BOUMA, W.T. van EST - Manifolds and foliations on the 2-torus and the Klein bottle, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A, 81 (1978), 313-347.

[3] L.E.J. BROUWER - Collected Works vol. 2, p. 220, North-Holland Publ. Cy, 1976.

[4] J.-Ph. BUFFET et J.-C. LOR - Une construction d'un universel pour une classe assez large de Γ-structures, CRAS 270 (1970), A640-A642.

[5] E. CARTAN - Sur la topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, Oeuvres I, 2, 1307-1330.

[6] H. CARTAN - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. SMF 85 (1957), 77-99.

[7] A. CONNES - Feuilletages et algèbres d'opérateurs, Sém. Bourbaki 1979-80, Exp. 551, 139-155, Lecture Notes 842.

[8] G. DARBOUX - Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Chelsea, New York 1972.

[9] G. DUMINY - L'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage se localise dans les feuilles ressort, preprint UER de Mathématiques, Univ. de Lille, 1982.

[10] C. EHRESMANN - Structures feuilletées, Proc. 5th Can. Math. Congr. 109-172, Montreal 1961.

[11] C. EHRESMANN et G. REEB - Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables, CRAS 218 (1944), 995.

[12] C. EHRESMANN, SHIH WEISHU - Sur les espaces feuilletés. Théorème de stabilité, CRAS 243 (1956) 344-346.

[13] W.T. van EST - On Ado's theorem, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., A, 69 (1966), 176-191.

[14] W.T. van EST - Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété à une dimension, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 45-77.

[15] W.T. van EST - Rapport sur les S-atlas, Toulouse 1982, à paraître dans Astérisque.

[16] D.B. FUKS - Foliations, Journal of Soviet Mathematics 18 (1982), 255-291.

[17] C. GODBILLON - Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, Ann. Inst. Fourier 17 (1967), 219-260.

[18] C. GODBILLON et G. REEB - Fibrés sur le branchement simple, L'Ens. Math. (II), 12 (1966), 277-287.

[19] C. GODBILLON et J. VEY - Un invariant des feuilletages de codimension 1, CRAS 273 (1971), A92-A95.

[20] E. GOURSAT - Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2ème éd., Hermann, Paris 1921.

[21] E. GOURSAT - Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, Hermann, Paris 1896.

[22] E. GOURSAT - Leçons sur le problème de Pfaff, Hermann, Paris 1922.

[23] R.C. GUNNING - Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties, Mathematical Notes 12, Princeton U.P., 1972.

[24] A. HAEFLIGER - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv. 32 (1958) 248-329.

[25] A. HAEFLIGER - Homotopy and integrability. Manifolds-Amsterdam 1970, 133-175, Lecture Notes 197.

[26] A. HAEFLIGER - Some remarks on foliations with minimal leaves, J. of Diff. Geometry 15 (1980), 269-284.

[27] A. HAEFLIGER - Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Journées sur les structures transverses, Toulouse 1982, à paraître dans Astérisque.

[28] A. HAEFLIGER et G. REEB - Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, L'Ens. Math. (II), 3 (1957), 107-125.

[29] G. HECTOR and J.L. HEITSCH - The Godbillon-Vey class of a codimension one foliation without resilient leaves is zero, preprint UER de Mathématiques, Univ. de Lille, 1982.

[30] F. KLEIN - Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Chelsea, New York 1956.

[31] H.B. LAWSON - Foliations, Bull. AMS 80 (1974), 369-418.

[32] P. LIBERMANN - Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie, Bull. SMF 87 (1959), 409-425.

[33] S. LIE - Theorie der Transformationsgruppen I, II, III, Chelsea, New York 1970.

[34] J. MARTINET et G. REEB - Sur une généralisation des structures feuilletées de codimension un, Salvador Symp. on Dyn. Systems, Ed. M.M. Peixoto, Acad. Press 1973.

[35] P. MOLINO - Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projetable, Topology 12 (1973), 317-325.

[36] P. MOLINO - Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 279-284.

[37] S.P. NOVIKOV - Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc. 14 (1965), 268-304.

[38] H. POINCARÉ - Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, J. de Math., 3e série, 7 (1881), 375-342, Oeuvres, tome 1.

[39] J. PRADINES et J. WOUAFO-KAMGA - La catégorie des QF - variétés, CRAS 288 (1979), A717-A719.

[40] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris 1952.

[41] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Acad, Roy. Belg., Cl. Sci. Mém. Coll. 27, no 9 (1952).

[42] G. REEB - Sur les solutions périodiques de certains systèmes différentiels, Can. J. of Math. 3 (1951), 339-362.

[43] G. REEB - Sur la théorie générale des sytèmes dynamiques, Ann. Inst. Fourier 6 (1955/56), 89-115.

[44] G. REEB - Remarques sur les structures feuilletées, Bull. SMF 87 (1959), 445-450.

[45] G. REEB - Sur les structures feuilletées de co-dimension un et sur un théorème de M. A. Denjoy, Ann. Inst. Fourier 11 (1961), 185-200.

[46] G. REEB - Sur un théorême de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs, Int. Symp. on nonlinear diff. eq. and nonlinear mechanics, Eds J.P. LaSalle and S. Lefschetz, Acad. Press, 1963.

[47] G. REEB - Feuilletages, résultats anciens et nouveaux (Painlevé, Hector et Martinet), Les Presses de l'Université de Montréal, 1972.

[48] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE - Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles, Comm. Math. Helv. 45 (1970), 517-523.

[49] R. SACKSTEDER - On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one, Ann. Inst. Fourier 14 (1964), 221-226.

[50] K. SINGH SARKARIA - The de Rham cohomology of foliated manifolds, Ph.D. thesis, State University of New York, 1974.

[51] G. SEGAL - Classifying spaces and spectral sequences, Publ. Math. IHES 34 (1968), 105-112.

[52] H. SEIFERT - Closed integral curves and isotopic two-dimensional deformations, Proc. AMS 1 (1950), 287-302.

[53] D. SULLIVAN - Infinitesimal computations in topology, Publ. Math. IHES 47 (1977), 269-331.

[54] W. THURSTON - A generalization of the Reeb stability theorem, Topology 13 (1974), 347-352.

[55] A. WEIL - History of Mathematics, Why and How, Proc. ICM, Helsinki 1978, vol. 1, 227-236.

[56] H. WHITNEY - Regular families of curves, Ann. of Math. 34 (1933), 244-270.

W.T. van EST

Mathematisch Instituut
Universiteit van Amsterdam
Roetersstraat 15
AMSTERDAM - 1018 WB , Pays-Bas