Astérisque

C. SABBAH

Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescent

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 286-319
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__286_0>

MORPHISMES ANALYTIQUES STRATIFIÉS SANS ÉCLATEMENT
ET CYCLES ÉVANESCENTS

par

C. SABBAH

Introduction

On considère dans ce travail un morphisme analytique $f : X \to Y$, propre ou non, entre deux espaces analytiques réduits. Si $\dim Y > 1$, même si ce morphisme est plat, on ne peut pas, en général, définir les cycles évanescents de f en tout point de X par la méthode de Milnor. Considérons l'exemple suivant :

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \quad \text{défini par } f(x,y,z) = (x^2 - y^2 z, y).$$

Le morphisme f est plat, et pourtant on n'a pas de "fibration de Milnor" à l'origine de $\mathbb{C}^2$, et si, par analogie au cas d'une singularité isolée, on considère, pour $0 < \eta << \varepsilon$, le morphisme :
$f : B_\varepsilon \cap f^{-1}(B_\eta \setminus \{0\}) \to B_\eta \setminus \{0\}$, où B_ε (resp. B_η) est une boule de rayon ε assez petit (resp η) centrée à l'origine de $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^2$), on remarque que ce n'est pas une fibration, puisque certaines fibres sont connexes et d'autres pas. L'ensemble des points de $B_\eta \setminus \{0\}$ où la fibre (qui est lisse) de ce morphisme n'est pas transverse à ∂B_ε est donc non vide, et de plus n'est pas analytique complexe. Le germe de cet ensemble à l'origine dépend aussi de ε. On remarque enfin que si $\underline{\mathbb{C}}$ est le faisceau constant sur $U_{\varepsilon,\eta} = B_\varepsilon \cap f^{-1}(B_\eta)$, le faisceau $(f|_{U_{\varepsilon,\eta}})_* \underline{\mathbb{C}}$ n'est pas analytiquement constructible sur B_η.

Lê D. T. a remarqué ([L]) que si un morphisme analytique f admet une stratification de Whitney analytique complexe, qui vérifie la propriété A_f de Thom (cf.[Th],[H_3], ou § 1), on peut, à l'aide du premier lemme d'isotopie de Thom-Mather, définir les cycles évanescents de f en tout point de X . Plus précisément, si $\{(X_\alpha),(Y_\beta)\}$ est une telle stratification, et si $x_0 \in X$, il existe ε_0, et pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour chaque strate Y_β de Y, le morphisme $B_\varepsilon \cap f^{-1}(Y_\beta \cap B_\eta) \to Y_\beta \cap B_\eta$ soit une fibration topologique localement triviale (B_ε et B_η sont des boules ouvertes centrées en x_0 et $f(x_0)$). De plus , si on pose $U_{\varepsilon,\eta} = B_\varepsilon \cap f^{-1}(B_\eta)$, les faisceaux $R^i(f|_{U_{\varepsilon,\eta}})_* \underline{\mathbb{C}}$ sont analytiquement constructibles sur B_η, et si $\varepsilon' < \varepsilon$, alors, pour $\eta' < \eta$ assez petit, on a

$$R^i(f|_{U_{\varepsilon',\eta'}})_*\mathbb{C} = R^i(f|_{U_{\varepsilon,\eta}})_*\mathbb{C}|_{B_{\eta'}} .$$

Ceci résulte du deuxième lemme d'isotopie de Thom-Mather.

Quand un morphisme satisfait ces dernières propriétés en tout point de X, on dit, suivant [D], qu'il admet une théorie des cycles évanescents. On voit donc que si un morphisme admet une stratification analytique complexe vérifiant les conditions de Whitney et de Thom, il donne lieu à une théorie des cycles évanescents.

Nous répondons ici positivement à un problème posé par P. Deligne ([D]) :

Supposons le morphisme $f : X \to Y$ propre. Il existe une modification $\pi : \tilde{Y} \to Y$ telle que le morphisme $\tilde{f} : X \underset{Y}{\times} \tilde{Y} \to \tilde{Y}$, image inverse de f par π, admette en tout point de X une théorie des cycles évanescents.

En fait, nous répondons à la question reformulée dans le cadre des stratifications par Lê D. T.

<u>Définition</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique entre espaces réduits, muni d'une stratification analytique complexe $\mathcal{S}$. Nous dirons que $(f,\mathcal{S})$ est sans éclatement si la stratification de Y satisfait les conditions de Whitney, celle de X satisfait la condition A_f de Thom, et si de plus la restriction de celle-ci au-dessus de chaque strate de Y satisfait les conditions de Whitney.

Cette terminologie recouvre une situation un peu différente de celle envisagée par R. Thom ([Th]), dans la mesure où nous ne supposons pas tout à fait que la stratification de X satisfait les conditions de Whitney. Par contre, nous verrons que la condition que nous utilisons est stable par changement de base. Bien entendu, un morphisme analytique stratifié sans éclatement défini comme ci-dessus est passible du deuxième lemme d'isotopie, et par conséquent admet une théorie des cycles évanescents.

<u>Théorème 1</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre espaces analytiques réduits de dimension finie, et soit $\mathcal{S}$ une stratification $\mathbb{C}$-analytique de f. Il existe un morphisme $\pi : \tilde{Y} \to Y$, composé d'une suite propre d'éclatements, et une stratification $\mathbb{C}$-analytique de $\tilde{f} : X \underset{Y}{\times} \tilde{Y} \to \tilde{Y}$, image inverse de f par π, compatible avec $\mathcal{S}$, et tels que $(\tilde{f},\tilde{\mathcal{S}})$ soit sans éclatement.

La démonstration de ce théorème, qui peut être considéré comme un théorème de finitude, repose de manière essentielle sur le théorème d'aplatissement d'Hironaka ([H_1]) et le critère donné par Hironaka pour la condition de Thom

([H_2] Th.1 § 5, voir aussi § 1).

Quand le morphisme n'est pas propre, on utilise les résultats de [H_3] et [H.L.T.] pour démontrer la conjecture formulée pour un morphisme non propre :

Théorème 2 : Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, y_o un point de Y et L un compact de $f^{-1}(y_o)$. Soit $\mathcal{S}_X$ (resp. $\mathcal{S}_Y$) une stratification $\mathbb{C}$-analytique de X (resp. Y). Il existe une famille finie de morphismes $\pi_i : Y_i \to Y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, chacun étant composé d'un nombre fini d'éclatements locaux, complète au-dessus d'un voisinage U de y_o, un voisinage V de L dans X, et, pour chaque i, une stratification $\mathbb{C}$-analytique $\mathcal{S}_i$ de $f_i : V_i \to Y_i$, image inverse de $f|_V$ par π_i, compatible avec $\mathcal{S}_X$ et $\mathcal{S}_Y$, tels que, pour chaque i, $(f_i, \mathcal{S}_i)$ soit sans éclatement.

La démonstration du théorème 2 est analogue à celle du théorème 1.

Reprenons l'exemple donné plus haut : si (u,v) sont les coordonnées de $\mathbb{C}^2$, l'image inverse par f de la parabole $u = \lambda v^2$ est un parapluie de Whitney (complexe) d'équation $x^2 - y^2(z + \lambda) = 0$. Le manche est l'axe des z, et le sommet le point de cet axe de coordonnée $z = -\lambda$. On voit alors que pour stratifier f avec la condition de Thom, il faut que chaque point de l'axe des z soit une strate, ce qui est impossible. On a un phénomène d'éclatement caché. Considérons alors l'éclatement $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ de l'idéal (u,v^2) dans $\mathbb{C}^2$, de sorte que les transformées strictes des paraboles $u = \lambda v^2$ coupent le diviseur exceptionnel en des points distincts. Le morphisme $\tilde{f}$, image inverse de f par π , admet alors une stratification qui en fait un morphisme sans éclatement.

Je tiens à remercier particulièrement Lê D. T. pour son aide et ses encouragements; de même B. Teissier, M. Merle, M. Giusti, J. P. G. Henry, D. Trotman pour les nombreuses conversations que j'ai eues avec eux. Je remercie aussi P. Deligne pour les remarques qu'il m'a faites. Je remercie enfin Michèle Lavallette pour la frappe du manuscrit.

Remarque : Nous avons annoncé dans une note (cf.[S]) des résultats analogues avec une condition plus forte que la condition A_f, la condition W_f. La démonstration que nous avions donnée du critère analogue à celui de [H_2] est incorrecte. Les résultats que nous donnons ici sont donc un peu plus faibles que ceux annoncés dans [S].

1. La modification de Nash relative

(1.1) Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre espaces analytiques complexes réduits, tel qu'il existe un ouvert de Zariski dense de X où la fibre de f est de dimension d. Soit X^o l'ouvert de Zariski dense de X où le faisceau Ω_f^1 des 1-formes différentielles relatives est localement libre de rang d, et soit $G_d\,(\Omega_f^1)$ la grassmannienne des d-plans dans le tangent de Zariski de la fibre de f ([G]). On a un morphisme propre et surjectif $g : G_d(\Omega_f^1) \to X$, et $g : g^{-1}(X^o) \to X^o$ est un isomorphisme. Soit ν_f la restriction de g à $X' = \overline{g^{-1}(X^o)} \subset G_d(\Omega_f^1)$. C'est une modification propre de X qui a la propriété universelle suivante : un morphisme $h : T \to X$ se factorise par ν_f si et seulement s'il existe un morphisme surjectif $h^*\Omega_f^1 \to \mathcal{L} \to 0$ dans un faisceau localement libre de rang d, dont le noyau a un support nulle part dense dans T.

Remarque : On peut montrer que pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x dans X et un idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_U$, tels que le morphisme $\nu_f : \nu_f^{-1}(U) \to U$ soit l'éclatement de l'idéal $\mathcal{I}$ dans U (cf.[T_3]).

Fixons maintenant $x_o \in X$, et choisissons un plongement local relatif du germe de f en x_o :

$$\begin{tikzcd}
(X,x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & (Y,y_o) \times (\mathbb{C}^{N+1},0) \arrow[dl] \\
(Y,y_o) &
\end{tikzcd}$$

On fixe aussi des représentants assez petits de ces germes. On définit, suivant une suggestion de M. Merle et J. P. Henry, le morphisme conormal :

$$\tau_f : C_f(X) \to X \quad \text{de la manière suivante :}$$

Soit $\mathbb{P}^\vee(\mathbb{C}^{N+1})$ le projectif des hyperplans de $\mathbb{C}^{N+1}$. Soit $C_f(X^o) \subset X^o \times \mathbb{P}^\vee(\mathbb{C}^{N+1})$ l'ensemble des couples (x,H) tels que $H \supset T_x f^{-1}(f(x))$.
On pose $C_f(X) = \overline{C_f(X^o)} \subset X \times \mathbb{P}^\vee(\mathbb{C}^{N+1})$ et τ_f est la restriction de la première projection.

Remarque : Contrairement à la modification de Nash, le morphisme τ_f n'est pas une modification, sa fibre au-dessus de X^o étant de dimension N-d. De plus, il n'est pas intrinsèque et dépend de l'installation choisie.

(1.2) Variétés polaires locales relatives

Si D_{d-k} est un plan de codimension d-k+1 dans $\mathbb{C}^{N+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant d)$, $P_k(f,x_o,D_{d-k})$ est par définition l'adhérence dans X de l'ensemble des points $x \in X^o$ où $\dim[T_x[f^{-1}(f(x)) \cap X] \cap D_{d-k}] \geqslant k$, et on note de la même manière le germe de cet ensemble en x_o. On note $P_k(f,x_o)$ un germe de variété polaire obtenue pour un plan "générique" (cf [L.T] ,$[T_1]$,$[T_2]$). On peut montrer que

$P_k(f,x_o)$ est de codimension k dans X, ou vide.

En fait, seuls nous intéressent les ensembles suivants :

$$\Sigma_k(f) = \{x \in X/P_k(f,x) \neq \emptyset\} \qquad 0 \leqslant k \leqslant d.$$

On remarque que $\Sigma_o(f) = X$.

Ces ensembles sont bien définis, car la multiplicité en x de $P_k(f,x)$ ne dépend que du morphisme $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ (cf.$[T_3]$). Ils sont analytiques fermés dans X.

On a alors (voir $[T_3]$) :

1) $x \in \Sigma_k(f) \Rightarrow \dim \nu_f^{-1}(x) \geqslant k$

2) $x \in \Sigma_k(f) \Longleftrightarrow \dim \tau_f^{-1}(x) \geqslant N-d+k$.

(1.3) La condition A_f de Thom

Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre espaces réduits, où X est équidimentionnel, et f génériquement à fibres de dimension d. Soit M un ouvert de Zariski dense de X, lisse, tel que $f|_M$ soit de corang constant d. Soit N une sous-variété analytique localement fermée de X, contenue dans $X \setminus M$, sur laquelle f est de corang constant. On dit que (M,N) satisfait la condition A_f de Thom en $x \in N$, si pour toute suite de points $x_n \in M$, avec $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$, on a, quand les limites existent

$$\lim_{n \to \infty} T_{x_n}[f^{-1}(f(x_n)) \cap M] \supset T_x[f^{-1}(f(x)) \cap N].$$

On dira que le morphisme f admet une bonne stratification s'il existe une stratification analytique complexe (X_α) de $X \setminus M$, telle que, pour tout α , (M,X_α) vérifie la propriété A_f.

Exemples :

- Si Y est une courbe lisse, f admet une bonne stratification ([H_2])
- Par contre, si $\dim Y \geqslant 2$, et même si f est plat, f n'admet pas nécessairement une bonne stratification :

Lê D. T. a donné l'exemple du germe de morphisme suivant :

$$f : (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C}^2,0) \quad \text{avec} \quad f(x,y,z) = (x^2-y^2z,y)$$

P. Deligne ([D]) a donné un exemple de morphisme propre et plat :
$F : X \times X \to \mathbb{C}^2$, avec $F(x_1,x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ où $f : X \to \mathbb{C}^2$ est l'éclatement de l'origine.

- H. Hironaka a donné ([H_2]) une condition suffisante pour que f admette une bonne stratification.

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une bonne stratification et retrouver le critère de H. Hironaka. La démonstration est essentiellement identique à celle de [H_2] th. 1 § 5.

1.3.1) Théorème : Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre espaces analytiques réduits On suppose X équidimensionnel, et f génériquement à fibres de dimension d. On a les conditions équivalentes :

1) le morphisme f admet une bonne stratification
2) Pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant d$, les fibres du morphisme $f|_{\Sigma_k}$ sont de dimension $\leqslant d - k$.

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$ Si le morphisme f admet une bonne stratification, il est à fibres de dimension pure d. Soit $(M,(X_\alpha))$ une bonne stratification de f. Si k_α = corang $f|_{X_\alpha}$, et si $k \geqslant d - k_\alpha + 1$, alors pour $x \in X_\alpha$, on a $P_k(f,x) = \emptyset$. En effet, si D est un plan assez général de codimension $d - k+1 \leqslant k_\alpha$, D est transverse à $T_x[f^{-1}(f(x)) \cap X_\alpha]$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$ (on a considéré un plongement local de X dans un ouvert de $\mathbb{C}^{N+1}$) et donc transverse à $T_y[f^{-1}(f(y)) \cap M]$ pour $y \in M$ voisin de x, d'après A_f. Par suite $P_k(f,x) = \emptyset$. Autrement dit, on a $\Sigma_k \cap X_\alpha = \emptyset$ si $k \geqslant d - k_\alpha+1$; et l'ensemble Σ_k ne coupe au plus que des strates X_α où le corang de f est $\leqslant d-k$, ce qui prouve 2).

$2 \Rightarrow 1$ Supposons la condition 2) satisfaite. Il suffit, pour montrer que le morphisme f admet une bonne stratification, de montrer que pour tout sous-ensemble analytique fermé N de X, il existe un sous-ensemble analytique fermé S nulle part dense dans $\bar{N}$ tel que $(M,N\setminus S)$ vérifie A_f.

On remarque d'abord que l'ensemble des points de N au voisinage desquels (M,N) satisfait A_f est un ouvert de Zariski de $\bar{N}$. Il suffit donc de montrer que cet ensemble est non vide. Le problème est alors local sur N.

Fixons comme plus haut une installation au voisinage de $x_o \in N$. On suppose que $(f(N),x_o)$ est un germe de sous-variété lisse de Y. Puisque les fibres de f sont toutes de dimension d (car $X = \Sigma_o$), on peut choisir des représentants des germes X et Y de sorte que f(X) soit analytique fermé et équidimensionnel dans Y. On choisit alors un morphisme fini $q : (f(X),y_o) \to (\mathbb{C}^p,0)$ où $p = \dim f(X)$, de sorte que $q|_{f(N)}$ soit de rang maximum en y_o.

Remarquons alors que :

- le couple (M,N) satisfait A_f si et seulement s'il satisfait $A_{q\circ f}$
- On a l'égalité $\tau_f = \tau_{q\circ f}$
- l'hypothèse 2) est satisfaite pour $q\circ f$.

Ceci nous permet finalement de supposer que Y est lisse et f est ouvert, ce que nous ferons dans la suite. On supposera aussi N fermé dans X.

<u>Lemme</u> : Avec cette hypothèse, si de plus $\operatorname{codim}_Y f(N) \leqslant 1$, et si toute composante irréductible de $\tau_f^{-1}(N) \subset C_f(X)$ se surjecte sur N, le couple (M,N) satisfait la condition A_f.

En effet, notons $C_f(N) = \{(x,H) \in N \times \mathbb{P}^\vee(\mathbb{C}^{N+1})/H \supset T_x N_{f(x)}\}$.
Alors le couple (M,N) satisfait la condition A_f si et seulement si $\tau_f^{-1}(N) \subset C_f(N)$.
H. Hironaka a montré ([H_2]) que si $\operatorname{codim}_Y f(N) \leqslant 1$, il existe un ouvert de Zariski dense N^o de N tel que le couple (M,N^o) satisfasse la condition A_f. Soit Γ une composante de $\tau_f^{-1}(N)$. Comme Γ se surjecte sur N, l'ensemble $\Gamma^o = :\Gamma \cap \tau_f^{-1}(N^o)$ est dense dans Γ, et on sait que $\Gamma^o \subset C_f(N)$.

Par suite on a $\Gamma \subset C_f(N)$, ce qui prouve le lemme. □

<u>Lemme</u> : Supposons l'hypothèse 2) satisfaite. Si toute composante de $\tau_f^{-1}(N)$ se surjecte sur N, le couple (M,N) satisfait la condition A_f .

L'hypothèse 2) est équivalente au fait que, quitte à oublier un ensemble quasi-fini sur Y (= $\Sigma_d(f)$), les fibres du morphisme $f\circ\tau_f : C_f(X) \to Y$ sont toutes de dimension N.

Soit $\pi : \tilde{Y} \to Y$ l'éclatement de $f(N)$ dans Y. On a $\pi^{-1}(f(N) = f(N) \times \mathbf{P}^{r-1}$ si $r = \operatorname{codim}_Y f(N)$. Le diagramme des transformés stricts par π

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{C_f(X)} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_f} & \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\omega}_c} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\omega}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ C_f(X) & \xrightarrow[\tau_f]{} & X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

est aussi celui des produits fibrés réduits, puisque les morphismes f et $f \circ \tau_f$ sont ouverts.

De plus on a $\tilde{\tau}_f = \tau_{\tilde{f}}$ et $\widetilde{C_f(X)} = C_f(\tilde{X})$, et aussi

$$\bar{\omega}^{-1}(N) = N \times \mathbf{P}^{r-1}, \qquad \bar{\omega}_c^{-1}(\tau_c^{-1}(N)) = \tau_f^{-1}(N) \times \mathbf{P}^{r-1} .$$

Si toute composante de $\tau_f^{-1}(N)$ se surjecte sur N, toute composante de $\bar{\omega}_c^{-1}(\tau_{\tilde{f}}^{-1}(N))$ se surjecte donc sur $\bar{\omega}^{-1}(N)$, et le lemme précédent montre que le couple $(\bar{\omega}^{-1}(M), \bar{\omega}^{-1}(N))$ satisfait la condition $A_{\tilde{f}}$. Par suite le couple (M,N) satisfait la condition A_f, ce qui prouve le lemme. □

Le théorème (1.3.1) se déduit maintenant du lemme précédent. □

(1.3.2) <u>Corollaire</u> (Hironaka) : Supposons que la condition suivante soit réalisée : 3) Il existe un sous-ensemble analytique F de X, à fibres de dimension nulle, tel que, pour tout point $x \in X \setminus F$, et tout point $x' \in \nu_f^{-1}(x)$, on ait $\dim_{x'} (f \circ \nu)^{-1}(f(x)) = d$.

Alors le morphisme f admet une bonne stratification.

En effet, si on note $\Sigma'_k = \{x \in X \mid \dim \nu_f^{-1}(x) \geq k\}$, la condition 3) implique que les fibres de $f|_{\Sigma'_k}$ sont de dimension $\leq d - k$ pour $0 \leq k \leq d$. On a remarqué plus haut que $\Sigma_k \subset \Sigma'_k$ et la condition 2) du théorème est satisfaite. □

<u>Remarque</u> : La condition 2) s'avère plus aisée à vérifier dans la pratique.

<u>Exemples</u> :

- Pour le morphisme $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ avec $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 z, y)$, la variété polaire $P_1(f,0,D)$ a pour équation $2ax + by^2 = 0$, pour a et b généraux, si D est un plan d'équation $aX + cY + bZ = 0$. Pour tout plan D, l'ensemble $P_1(f,0,D)$ contient l'axe $\{x = y = 0\}$. Ceci montre qu'en tout point x de cet axe $P_1(f,x)$ n'est pas vide. L'ensemble Σ_1 a donc une fibre de dimension 1.

\- Pour le morphisme $F : X \times X \to \mathbb{C}^2$ décrit plus haut, on peut voir que l'ensemble Σ_2 contient la diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, où $\mathbb{P}^1 \subset X$ est l'exceptionnel. L'ensemble Σ_2 n'est donc pas fini sur $\mathbb{C}^2$, et le morphisme F n'admet pas de bonne stratification.

\- Si X et Y sont deux variétés lisses connexes, dim Y = n et dim X = n+1, si f est propre et surjectif, et si le lieu critique de f est de codimension 2 dans X, le morphisme f admet une stratification de Thom (tout couple de strates incidentes satisfait la condition de Thom) si et seulement s'il est de type singulier fini, c'est-à-dire si et seulement si le lieu critique est fini sur Y. En effet, dans ce cas d = 1, et l'ensemble Σ_1 est égal au lieu critique.

(1.4) <u>Changement de base</u>

(1.4.1) <u>Lemme</u> : Soit $\pi : \tilde{Y} \to Y$ une modification, et soit $f : X \to Y$ un morphisme génériquement de dimension relative d.

Le transformé strict $\hat{f}$ de f est génériquement de dimension relative d, et la moditifcation de Nash $\nu_{\hat{f}}$ relative à $\hat{f}$ n'est autre que le transformé strict $\hat{\nu}_f$ de ν_f par π .

<u>Démonstration</u> : Il existe par hypothèse un ouvert de Zariski dense $\tilde{Y}_1$ de $\tilde{Y}$ et un ouvert Y_1 de Y tels que le morphisme $\pi : Y_1 \to Y_1$ soit un isomorphisme. On considère le diagramme commutatif des transformés stricts

$$\begin{tikzcd} \hat{X}' \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\nu}"'] & X' \arrow[d, "\nu_f"] \\ \hat{X} \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "\pi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{X} = X \times_Y \tilde{Y}$ et $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ le morphisme induit par la deuxième projection. Alors on a $G_d(\Omega^1_{\tilde{f}}) = G_d(\Omega^1_f) \times_X \tilde{X}([G])$. D'autre part on a un morphisme surjectif $\Omega^1_{\tilde{f}} \to \Omega^1_{\hat{f}}$ donné par l'application cotangente à l'injection $i : \hat{X} \to \tilde{X}$. On a donc une immersion fermée au-dessus de $\hat{X}$:

$$\begin{tikzcd} G_d(\Omega^1_{\hat{f}}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & G_d(\Omega^1_{\tilde{f}})|_{\hat{X}} \arrow[dl] \\ & \hat{X} & \end{tikzcd}$$

L'espace $\hat{X}'$ est l'adhérence dans $\hat{X} \times_X X'$ de $\hat{X}_1 \times_X X'$ où on pose $\hat{X}_1 = \hat{\tilde{f}}^{-1}(\hat{Y}_1)$. Mais $\hat{X} \times_X X'$ est fermé dans $\hat{X} \times_X G_d(\Omega^1_f) = G_d(\Omega^1_{\tilde{f}})|_{\hat{X}}$. Posons $X'_o = \nu_f^{-1}(X_o)$, où X_o est l'ouvert de Zariski dense de X où ν_f est un isomorphisme. L'ensemble $\hat{X}_1 \times_X X'_o$ est alors un ouvert de Zariski dense de X' contenu dans $G_d(\Omega^1_{\hat{f}})$, ce qui montre le lemme. □

<u>Conséquence</u> : Supposons par exemple le morphisme f propre. Il existe alors une suite propre d'éclatements de Y, notée $\pi : \tilde{Y} \to Y$, telle que le transformé strict $\hat{f}$ de f admette une bonne stratification. On a en effet

(1.4.2) <u>Théorème</u> ($[H_1]$, th. 4.4) : Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. On suppose l'espace Y réduit. Il existe une suite propre d'éclatements $\pi : \tilde{Y} \to Y$, qui est un isomorphisme en dehors de $S_1(f)$, fermé de non platitude de f dans Y, tel que le transformé strict $\hat{f}$ de f par π soit plat.

On rappelle qu'une suite propre d'éclatements est une famille totalement ordonnée (éventuellement infinie) d'éclatements au-dessus de Y, finie au-dessus de tout compact de Y.

Si on choisit la modification $\pi : \tilde{Y} \to Y$ telle que le transformé strict de $f \circ \nu_f$ soit plat, on voit que $\hat{f} \circ \nu_{\hat{f}}$ est à fibres de dimension pure d, d'après (1.4.1). On peut appliquer le théorème (1.3.1), qui montre que $\hat{f}$ admet une bonne stratification. Dans les paragraphes 2, 3 et 4, nous montrerons qu'il existe une modification π de sorte que le morphisme $\tilde{f}$ admette une stratification vérifiant la propriété $A_{\tilde{f}}$ (pour <u>tout</u> couple de strates incidentes).

(1.4.3 <u>Lemme</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique entre espaces analytiques réduits, où X est équidimensionnel, et $f \circ \nu_f$ à fibres de dimension pure d. Soit $T \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé, partout de dimension relative d. Soit $|\nu_f^{-1}(T)|_1$ la réunion des composantes irréductibles de $|\nu_f^{-1}(T)|$ dont l'image par ν_f est une composante de T. Alors la restriction $\nu_f : |\nu_f^{-1}(T)|_1 \to T$ est la modification de Nash relative à $f|_T$.

<u>Démonstration</u> : On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\nu_{f|_T}"'] & G_d(\Omega^1_{f|_T}) \arrow[r, hook] & G_d(\Omega^1_f)|_T & {|\nu_f^{-1}(T)|} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\nu_f"] \\
 & & T &
\end{tikzcd}$$

Soit $U = T \setminus (F_1 \cup F_2)$, où F_1 désigne le fermé de T au-dessus duquel $\nu_{f|_T}$ n'est pas un isomorphisme, et F_2 l'image des composantes de $|\nu_f^{-1}(T)|$ qui ne sont pas dans $|\nu_f^{-1}(T)|_1$. L'ouvert U est un ouvert de Zariski dense de T, et l'assertion de [H_2], th. 1 § 5, se traduit ici par $|\bar{\nu}_f^{-1}(U)| = \nu_{f|_T}^{-1}(U)$. On en déduit le lemme. □

Remarque : Soit $h : Z \to Y$ un morphisme analytique entre espaces réduits. Sous les hypothèses de (1.4.3), on obtient : dans le diagramme commutatif des produits fibrés réduits

$$\begin{tikzcd}
|X' \underset{Y}{\times} Z| \arrow[r] \arrow[d, "\nu_Z"'] & X' \arrow[d, "\nu_f"] \\
|X \underset{Y}{\times} Z| \arrow[r] \arrow[d, "f_Z"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

le morphisme $\nu_Z : |X \underset{Y}{\times} Z|_1 \to |X \underset{Y}{\times} Z|$ est la modification de Nash relative au morphisme $f_Z : |X \underset{Y}{\times} Z| \to Z$. Il suffit en effet d'appliquer le lemme (1.4.3) à $X \times Z$, $Y \times Z$, $f \times Id_Z$ et $T = |X \underset{Y}{\times} Z|$.

(1.4.4) Définition : Soit $f : X \to Y$ un morphisme génériquement de dimension relative d. Nous dirons que f satisfait la propriété H si :

a) le morphisme f est ouvert,

b) les fibres du morphisme $f \circ \nu_f : X' \to Y$ sont toutes de dimension d.

La propriété H est universelle :

(1.4.5) Corollaire : Si le morphisme f vérifie la propriété H, et si $h : Z \to Y$ est un morphisme analytique, Z étant réduit, alors le morphisme $f_Z : |X \underset{Y}{\times} Z| \to Z$ vérifie aussi la propriété H.

Démonstration : Si $(Y_i)_{i \in I}$ désignent les composantes irréductibles de Y, l'espace $X|_{Y_i}$ est équidimensionnel, puisque f est ouvert, à fibres de dimension d. Si f_i est la restriction de f à $X|_{Y_i}$, le morphisme $f_{i,Z}$ vérifie la propriété H d'après ce qui précède, et le fait que $f_{i,Z}$ est aussi ouvert.

Remarque : Le fait que le morphisme f soit ouvert sera utilisé avec le lemme suivant :

(1.4.6) Lemme : Soit $f : X \to Y$ un morphisme ouvert entre espaces analytiques réduits. Soit X_o un ouvert de Zariski dense de X tel que, si $Y_o = f(X_o)$, pour tout $y \in Y_o$, $f^{-1}(y) \cap X_o$ soit dense dans $f^{-1}(y) \cap X$ (propriété I). Pour tout morphisme analytique $h : S \to Y$, S étant réduit, et tout sous-ensemble analytique fermé Z de S, pour lequel il existe un ouvert de Zariski dense Z_o contenu dans $h^{-1}(Y_o)$, on a

$$\overline{X_o \underset{Y}{\times} Z_o} = (X \underset{Y}{\times} Z)_{red}.$$

En effet, la propriété I montre que $\overline{X_o \underset{Y}{\times} Z_o}\Big|_{Z_o} = (X \underset{Y}{\times} Z)_{red}\Big|_{Z_o}$, puisque $Z_o \subset h^{-1}(Y_o)$. Par suite, toute composante irréductible de $(X \underset{Y}{\times} Z)_{red}$ autre que $\overline{X_o \underset{Y}{\times} Z_o}$ a une image contenue dans $Z \setminus Z_o$. Comme Z_o est dense dans Z, et que le morphisme $f_Z : X \underset{Y}{\times} Z \to Z$ est ouvert, on en déduit que $\overline{X_o \underset{Y}{\times} Z_o} = (X \underset{Y}{\times} Z)_{red}$. □

Remarque : Si h est une modification de Y, le lemme montre que le transformé strict $\tilde{f}$ de f par h est encore ouvert.

2. C-partitions et C-stratifications d'un morphisme analytique propre.

Dans ce paragraphe, $f : X \to Y$ désignera un morphisme propre entre espaces analytiques complexes réduits de dimension finie. Tous les espaces seront munis de leur structure réduite.

(2.0) Remarques préliminaires

Soit $\mathcal{S} = \{(X_\alpha), (Y_\beta)\}$ une stratification analytique de f : pour toute strate X_α de X, il existe une strate Y_β de Y telle que $f(X_\alpha) = Y_\beta$ et $f : X_\alpha \to Y_\beta$ est une submersion. Soit $h : S \to Y$ un morphisme analytique, et soit (S_λ) une stratification de S, compatible avec celle de Y, c'est-à-dire que pour tout β, $h^{-1}(Y_\beta)$ est une union de S_λ. On peut construire une partition naturelle de $X \underset{Y}{\times} S$, formée des parties $X_\alpha \underset{Y}{\times} S_\lambda$, pour $S_\lambda \subset h^{-1}(f(X_\alpha))$.

Comme $f : X_\alpha \to f(X_\alpha)$ est une submersion, ces parties sont des sous-variétés de $X \underset{Y}{\times} S$. Est-ce que cette partition est une stratification de $X \underset{Y}{\times} S$? La réponse peut être négative, comme le montre l'exemple suivant :

Soit $f : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'éclatement de l'origine de $\mathbb{C}^2$, stratifié par $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^1$ à la source, et $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et $\{0\}$ au but. Le morphisme h est l'identité de $\mathbb{C}^2$, et on raffine la stratification de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2 \setminus D$, $D \setminus \{0\}$, $\{0\}$, où D est une droite passant par l'origine. Alors $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus f^{-1}(D \setminus \{0\})$, $f^{-1}(D \setminus \{0\})$ et $\mathbb{P}^1$ ne forment pas une stratification de $\mathbb{C}^2$.

Cependant, il résulte facilement du lemme (1.4.6) que si la restriction de f à l'adhérence de chaque strate est ouverte sur son image, et si la stratification vérifie la propriété I donnée dans ce lemme, la partition naturelle précédente est encore une stratification de $X \underset{Y}{\times} S$. Comme la démonstration du théorème 1 utilise beaucoup de changements de base, il est utile d'introduire ces deux propriétés dans la récurrence. Cependant, on doit aussi, dans cette démonstration, rendre une stratification compatible avec une famille de fermés. Il se peut alors que certaines composantes connexes de $X_\alpha \underset{Y}{\times} S_\lambda$ définissent des strates différentes. Malheureusement, il n'est pas vrai que si un morphisme $f : X \to Y$ est ouvert, la restriction à une composante irréductible de X sa restriction, $f_i : X_i \to f(X_i)$, le soit aussi. C'est pourquoi dans la suite, nous introduisons la notion technique de C-stratification, qui se comporte bien par changement de base et par raffinement.

(2.1) On appellera C-partition ($\mathbb{C}$-analytique) de X (par rapport à f) une famille localement finie (X_α) de parties de X telle que :

- Toute partie X_α est localement une sous-variété analytique fermée de X, $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ sont analytiques fermés dans X.
- Les composantes connexes de X_α ont la même dimension.
- L'image $f(X_\alpha)$ est un ouvert de Zariski lisse et connexe de $f(X_\alpha)$ (qui est donc irréductible).
- $f(X_\alpha)$ est un ouvert de Zariski lisse et connexe de $f(\overline{X}_\alpha)$ (qui est donc irréductible).
- l'application $f : X_\alpha \to f(X_\alpha)$ est une submersion.
- La famille des composantes connexes des parties X_α est une partition de X.

Remarquons que deux parties X_α et X_β peuvent avoir des composantes connexes en commun. Une partition (analytique) de X est une C-partition de X telle que la famille (X_α) soit aussi une partition de X.

Une C-stratification de X est une C-partition de X pour laquelle on a la condition de C-incidence suivante : étant donnés deux parties X_α et X_β , si $X_{\beta,i}$ est une composante connexe de X_β, et si $X_{\beta,i} \cap \overline{X}_\alpha \neq \emptyset$, alors $X_{\beta,i} \subset \overline{X}_\alpha$. Pour Y, on utilisera uniquement la notion de stratification analytique complexe (cf[H_2],[V] par exemple), et on supposera les strates connexes. Une C-partition de f est alors la donnée d'une C-partition (X_α) de X et d'une stratification (Y_β) de Y telle que, pour tout X_α , il existe Y_β avec $f(X_\alpha) = Y_\beta$. On a de même la notion de C-stratification de f. Enfin, on dira qu'une C-partition (X_α) est C-compatible avec un sous-ensemble Z de X si ce sous-ensemble est réunion de composantes connexes des parties X_α .

On introduit les propriétés suivantes pour une C-partition (X_α) de X :

I. Pour toute partie X_α, et tout $y \in f(X_\alpha)$, $f^{-1}(y) \cap X_\alpha$ est dense dans $f^{-1}(y) \cap \bar{X}_\alpha$ (cf. lemme (1.4.6)).

II_k: Pour toute partie X_α de dimension relative $\geq k$., et toute partie X_γ, si $X_{\gamma,i}$ est une composante connexe de X_γ, et si $X_{\gamma,i} \cap \bar{X}_\alpha \neq \emptyset$, alors $X_{\gamma,i} \subset \bar{X}_\alpha$.

H_{f_k}: Pour toute partie X_α de dimension relative $\geq k$,

a) le morphisme $f|_{\bar{X}_\alpha} : \bar{X}_\alpha \to f(\bar{X}_\alpha)$ est ouvert.

b) le morphisme $f \circ \nu_\alpha : \bar{X}'_\alpha \to f(\bar{X}_\alpha)$ a toutes ses fibres de dimension $\dim_f X_\alpha$.

A_{f_k} : Pour toute partie X_α, telle que $\dim_f X_\alpha \geq k$, et toute partie X_γ, si $X_{\gamma,i}$ est une composante connexe de X_γ, et si on a $X_{\gamma,i} \subset X_\alpha$, alors le couple $(X_\alpha, X_{\gamma,i})$ satisfait la condition A_f.

On dira enfin qu'une C-partition du <u>morphisme f</u> satisfait la propriété W'_k si, pour toute partie X_α, avec $\dim_f X_\alpha \geq k$, et toute partie X_γ, avec $\dim_f X_\gamma \geq k$, si on a $f(X_\gamma) = f(X_\gamma)$, et $X_{\gamma,i} \subset X_\alpha$, alors le couple $(X_\alpha, X_{\gamma,i})$ satisfait les conditions de Whitney.

<u>Remarques</u> :

. Si une C-partition (X_α) de X vérifie I, et si $X_{\alpha,i}$ est une <u>composante</u> connexe X_α, on a $f(X_{\alpha,i}) = f(X_\alpha)$ et pour tout $y \in f(X_{\alpha,i})$, $f^{-1}(y) \cap \bar{X}_{\alpha,i} = \overline{f^{-1}(y) \cap X_{\alpha,i}}$.
En effet, puisque $f(\bar{X}_\alpha)$ est irréductible, et $f(X_{\alpha,i})$ est ouvert dans $f(X_\alpha)$, on a $f(\bar{X}_{\alpha,i}) = f(\bar{X}_\alpha)$. Le morphisme $f : \bar{X}_{\alpha,i}|_{f(X_\alpha)} \to f(X_\alpha)$ est donc surjectif, et ses fibres sont toutes de dimension $\dim_f X_\alpha$ d'après I. S'il existe $y \in f(X_\alpha)$ tel que $f^{-1}(y) \cap X_{,i}$ soit vide, c'est que $X_{\alpha,i} \cap X_{\alpha,\gamma}$ n'est pas vide pour une autre composante $X_{\alpha,\gamma}$ de X_α. Ceci est impossible, puisque X_α est localement une sous-variété fermée de X.

. Une C-partition satisfaisant II_o est une C-stratification.

(2.2) <u>Raffinements d'une C-partition</u>

Soit $h : S \to Y$ un morphisme analytique entre espaces réduits, soit (X_α) une C-partition de X, et (S_β) une stratification de S compatible avec les fermés $f(\bar{X}_\alpha)$ et $f(\bar{X}_\alpha) \backslash f(X_\alpha)$ (c'est-à-dire que l'image inverse de chacun de ces fermés par h est une union de strates de S).

(2.2.1) <u>Lemme</u> : On suppose que la C-partition (X_α) vérifie I.

1) Les sous-ensembles $X_\alpha \times_Y S_\beta$ et la famille (S_β) forment une C-partition de f_S vérifiant I (où $f_S : X \times_Y S \to S$ est l'image inverse de f par h).

2) Si de plus (X_α) vérifie II_k et H_{f_k} a), il en est de même de cette C-partition

3) Si de plus (X_α) vérifie H_{f_k} b) (resp. A_{f_k}), il en est de même de cette C-partition.

1) D'après la compatibilité de la famille (S_β), les sous-ensembles $X_\alpha \times_Y S_\beta$ sont des sous-variétés analytiques lisses de $|X \times_Y S|$, d'adhérence et de frontière analytiques fermés dans $|X \times_Y S|$.

On voit de même que le morphisme $f_S : X_\alpha \times_Y S_\beta \to S_\beta$ est une submersion, et que la famille des composantes connexes des parties $X_\alpha \times_Y S_\beta$ est une partition de $|X \times_Y S|$.

On a $f_S(\overline{X_\alpha \times_Y S_\beta}) = \bar{S}_\beta$, car c'est un ensemble analytique fermé dans l'ensemble irréductible $\bar{S}_\beta$ et qui contient un ouvert de S_β à cause de la propriété de submersion.

On a aussi $f_S(X_\alpha \times_Y S_\beta) = S_\beta$. En effet $f_S(X_\alpha \times_Y S_\beta)$ est un ouvert de S_β.

Si $z \in S_\beta$ et si on a $X_\alpha \times_Y S_\beta \cap f_s^{-1}(z) = \emptyset$, alors, en posant $y = h(z)$, $f^{-1}(Y) \cap X_\alpha$ est vide ce qui est contradictoire avec le fait que y appartient à $h(S_\beta)$. De même, la propriété I est satisfaite, car I pour (X_α) implique que $f_s^{-1}(z) \cap X_\alpha \times_Y S_\beta$ est dense dans $f_s^{-1}(z) \cap \bar{X}_\alpha \times_Y S_\beta$ donc dans $f_s^{-1}(z) \subset \overline{X_\alpha \times_Y S_\beta}$.

2) Si la famille (X_α) vérifie II_k et H_{f_k} a), le morphisme $f : X_\alpha \to f(X_\alpha)$ est ouvert pour $\dim_f X_\alpha \geqslant k$. Par suite on a $X_\alpha \times_Y S_\beta = X_\alpha \times_Y S_\beta$ (1.4.6). Mais on a

$X_\alpha = \bigcup_{\gamma,i} X_{\gamma,i}$ pour $X_{\gamma,i} \cap X_\alpha \neq \emptyset$, et $S_\beta = \bigcup_\delta S_\delta$ pour $S_\delta \cap S_\beta \neq \emptyset$. L'ensemble $X_{\gamma,i} \times_Y S_\delta$ est une union de composants connexes de $X_\gamma \times_Y S_\delta$, et par suite la propriété II_k est vérifiée. De même la propriété H_{f_k} a) est vérifiée.

3) La propriété H_{f_k} b) est satisfaite grâce à (1.4.5).

On considère un plongement local

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & Y \times B^{N+1} \arrow[dl] \\ Y & \end{tikzcd}$$

On a un plongement local

$$\begin{tikzcd} X \times_Y S \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_S"'] & S \times B^{N+1} \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

et on voit que la condition A_{f_S} est satisfaite puisque c'est une condition relative qui s'exprime dans $\mathbb{C}^{N+1}$. $\square$

(2.2.2) Lemme : Soit $\{(X_\alpha), (Y_\beta)\}$ une C-partition de f satisfaisant les propriétés I, II_k, H_{f_k} a), et W'_k. Soit $h : S \to Y$ un morphisme analytique, et (S_λ) une stratification de S compatible avec la stratification de Y. La C-partition naturelle de f_S satisfait encore les mêmes propriétés.

Démonstration : On utilise le fait (cf.[V] remarque 3.7) que les conditions de Whitney se conservent par un changement de base transverse à la restriction de f à chaque strate. □

(2.2.3) Lemme : Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre espaces analytiques réduits de dimension finie. Soit (Z_μ) une famille localement finie de sous-espaces analytiques fermés de X. Il existe une partition $\mathcal{S}$ de X, compatible avec (Z_μ), et vérifiant I.

Démonstration : Soit X_i une composante irréductible de X, et $C_i(f)$ le lieu critique de $f|_{X_i}$. Soit F_1 le fermé analytique de $f(X_i)$ formé des points tels que la fibre de $f|_{X_i}$ soit de dimension $\geqslant d_i + 1$, avec $d_i = \dim X_i - \dim f(X_i)$.
Soit F_2 le fermé analytique de $f(X_i)$ formé des points tels que la fibre de $C_i(f) \cup [X_i \cap \mathrm{Sing}\, X]$ soit de dimension $\geqslant d_i$. F_2 est d'intérieur vide dans $f(X_i)$.
Soit F_μ, pour tout μ tel que $X_i \not\subset Z_\mu$, le fermé de $f(X_i)$ formé des points tels que la fibre de $Z_\mu \cap X_i$ soit de dimension $\geqslant d_i$.
Soit $U = f(X_i) \setminus [\mathrm{sing}\, f(X_i) \cup F_1 \cup F_2 \cup (\bigcup_\mu F_\mu)]$, et soit

$$X_{i,o} = f^{-1}(U) \cap [X_i \setminus (C_i(f) \cup (X_i \cap \mathrm{sing}\, X) \cup (\bigcup_\mu X_i \cap Z_\mu))].$$

On pose $X' = X \setminus (\cup X_{i,o})$, qui est un fermé analytique de X, et on a $\dim X' \subset \dim X$. On applique le lemme par récurrence à X' et à la famille $(Z_\mu \cap X')$, et on a le résultat en considérant les parties de X', et les parties $X_{i,o}$. □

On dira qu'une C-partition de X est C-compatible avec une famille localement finie de fermés (Z_μ) de X si la partition de X associée (formée des composantes connexes des X_α) est compatible avec (Z_μ), autrement dit $X_{\alpha,i} \cap Z_\mu \neq \emptyset \Rightarrow X_{\alpha,i} \subset Z_\mu$.

(2.2.4) Lemme : Soit $f : T \to Y$ un morphisme analytique propre entre espaces réduits de dimension finie. On suppose qu'il existe une famille localement finie (T_λ) de fermés analytiques de T, telle que $T = \cup T_\lambda$, et que, pour chaque λ , T_λ soit partout de dimension relative k. On suppose aussi que le morphisme $f : T_\lambda \to f(T_\lambda)$ vérifie la propriété H. Soit (Z_μ) une famille localement finie de sous-ensembles analytiques fermés de T.

Il existe une C-partition $\mathcal{C}$ de T, C-compatible avec (Z_μ), et vérifiant les propriétés I, II_k , H_{f_k} et A_{f_k} .

Démonstration : Par récurrence sur dim T.
On peut supposer que pour $\lambda \neq \lambda'$, $T_\lambda \not\subset T_{\lambda'}$. On peut supposer aussi que $f(T_\lambda)$ est irréductible. Par suite, T_λ est équidimensionnel. Soit $\Lambda = \{\lambda \,/ \dim T_\lambda$ est maximum$\}$. Pour $\lambda \in \Lambda$, et $T_{\lambda,i}$ une composante irréductible de T_λ, soit $C_{\lambda,i}(f)$ le lieu critique de $f|_{T_{\lambda,i}}$. Soit $F_{\lambda,i}$ le fermé de $f(T_\lambda)$ $(= f(T_{\lambda,i}))$ formé des points tels que la fibre de $C_{\lambda,i}(f) \cap (T_{\lambda,i} \cap \operatorname{sing} T)$ soit de dimension $\geqslant k$. $F_{\lambda,i}$ est d'intérieur vide dans $f(T_\lambda)$.

Pour chaque $T_{\lambda,i}$ non contenu dans $Z_\mu (\lambda \in \Lambda)$, soit $F_{\lambda,i,\mu}$ le fermé de $f(T_\lambda)$ formé des points tels que la fibre de $T_{\lambda,i} \cap Z_\mu$ soit de dimension $\geqslant k$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit :

$$U_\lambda = f(T_\lambda) \setminus [\operatorname{sing} f(T_\lambda) \cup [\bigcup_{\lambda',j} (F_{\lambda',j} \cup (\bigcup_\mu F_{\lambda',j,\mu})) \cup (\bigcup_{\lambda''} f(T_\lambda) \setminus f(T_{\lambda''}))]]$$

la réunion étant prise pour les λ' tels que $f(T_{\lambda'}) = f(T_\lambda)$, et pour les λ'' tels que $f(T_{\lambda''}) \neq f(T_\lambda)$.

On voit donc que si on a $f(T_\lambda) = f(T_{\lambda'})$, on a aussi $U_\lambda = U_{\lambda'}$, et sinon $U_\lambda \cap f(T_{\lambda''}) = \emptyset$.

On pose $T_{\lambda,o} = \bar{f}^1(U_\lambda) \cap [T_\lambda \setminus [(T_\lambda \cap \operatorname{sing} T) \cup C_\lambda(f) \cup (\bigcup_{i,\mu} (Z_\mu \cap T_{\lambda,i})]]$ pour $\lambda \in \Lambda$.

$T_{\lambda,o}$ est un ouvert de Zariski dense et lisse de T_λ, C-compatible avec (Z_μ), et le morphisme $f : T_{\lambda,o} \to U_\lambda$ est une submersion. D'autre part, pour tout $y \in U_\lambda$, $\bar{f}^1(y) \cap T_{\lambda,o}$ est dense dans $\bar{f}^1(y) \cap T_\lambda$, puisque $\bar{f}^1(y) \cap (T_\lambda \setminus T_{\lambda,o})$ est de dimension $< k$.
On pose $T' = T \setminus (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_{\lambda,o})$.
Les composantes connexes des $T_{\lambda,o}$, $\lambda \in \Lambda$, forment une partition de $T \setminus T'$: si on a $T_{\lambda,i,o} \cap T_{\lambda',j,o} \neq \emptyset$ pour λ et $\lambda' \in \Lambda$, alors aussi $T_{\lambda,i} = T_{\lambda',j}$.

Par suite $U_\lambda = U_{\lambda'}$, et on voit que $T_{\lambda,i,o} = T_{\lambda,o} \cap T_{\lambda,i} = T_{\lambda',o} \cap T_{\lambda',j} = T_{\lambda',j,o}$.
On considère sur T' une partition $\mathcal{P}$ (par rapport à $f|_{T'}$) vérifiant I, compatible avec les fermés $T_\lambda \setminus T_{\lambda,o}$ ($\lambda \in \Lambda$), avec les fermés $f^{-1}(R_\lambda)$ où $R_\lambda = f(T_\lambda) \setminus U_\lambda$, et telle que pour toute partie $\Gamma \subset T_\lambda \setminus T_{\lambda,o}$, le couple $(T_{\lambda,o}, \Gamma)$ vérifie A_f. Ceci est possible, d'après l'hypothèse faite sur $f \circ \nu_\lambda : T'_\lambda \to f(T_\lambda)$, et (1.3.2) pour A_f et d'après (2.2.3) pour I.

Soit $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. On a $T'|_U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T_\lambda \setminus T_{\lambda,o})|_U$, puisque si $\lambda'' \notin \Lambda$, $f(T''_\lambda) \cap U = \emptyset$. On pose $T'' = T|_R$, où $R = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = f(T) \setminus U$.
T" est une union de parties de $\mathcal{P}$, par construction, ainsi que $T'|_U$, et toute partie contenue dans $T'|_U$ est de dimension relative < k.

On considère sur T" la famille des $T_\lambda|_R$, et les $T_{\lambda''}$ ($\lambda'' \notin \Lambda$), qui vérifie les propriétés du lemme d'après (1.4.5). On applique la récurrence à T", muni de cette famille, et de la famille de fermés $Z_\mu \cap T''$ et $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, pour toute partie Γ de $\mathcal{P}|_{T''}$, et on obtient le lemme. □

(2.2.5) <u>Corollaire</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique propre, entre espaces réduits de dimension finie, et soit (T_λ) une famille localement finie de fermés analytiques de X, telle que, pour tout λ, T_λ soit partout de dimension relative k, et $f : T_\lambda \to f(T_\lambda)$ vérifie la propriété H.

Soit $\mathcal{S} = \{(X_\alpha), (Y_\beta)\}$ une C-partition de f vérifiant les propriétés I, II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$, W'_{k+1}. On suppose de plus que toute partie X_α de dimension relative k est contenue dans un fermé T_λ.

Il existe alors une C-partition de f, C-compatible avec $\mathcal{S}$, et vérifiant les propriétés I, II_k, H_{f_k}, A_{f_k} et W'_k.

<u>Démonstration</u> : On pose $T = \bigcup_\lambda T_\lambda$.

<u>Assertion</u> : Pour toute partie X_α, avec $\dim_f X_\alpha \geq k+1$, il existe une partition de $\bar{X}_\alpha \cap T_\lambda$ en parties telles que, si $\dim_f \Gamma \geq k$, le couple $(X_\alpha \cap f^{-1}(f(\Gamma)), \Gamma)$ satisfait les conditions de Whitney.
Si cette assertion est montrée, on considère sur T les fermés suivants :

- $\bar{X}_\alpha \cap T_\lambda$ et $(\bar{X}_\alpha \setminus X_\alpha) \cap T_\lambda$, si $\dim_f X_\alpha \leq k$
- les fermés $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, pour toute partie Γ construite dans l'assertion.

Il existe, d'après le lemme précédent, une C-partition de T compatible avec les fermés, et vérifiant I, II_k, H_{f_k} et A_{f_k} .

On considère sur X la C-partition suivante $\mathcal{C}'$:

- sur T , c'est la C-partition précédente
- Pour toute partie X_α avec $\dim_f X_\alpha \geqslant k+1$, $X_\alpha \setminus T$ est une partie de $\mathcal{C}'$.

(on remarque que $X_\alpha \cap T$ est d'intérieur vide dans X_α , et que $f(X_\alpha \setminus T) = f(X_\alpha))$.

- Pour toute partie X_α avec $\dim_f X_\alpha < k$, et X_α non contenue dans T, il existe, d'après (2.2.2) une partition de $\bar{X}_\alpha$, compatible avec les fermés $\bar{X}_\alpha \cap T, \bar{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ et $(\bar{X}_\alpha \setminus X_\alpha) \cap T$, vérifiant I. X_α est alors une union de parties : elles sont par définition dans $\mathcal{C}'$.

On vérifie que $\mathcal{C}'$ satisfait les propriétés I, II_k, H_{f_k} , A_{f_k} .

On considère une C-partition $\mathcal{C}$ de f construite par raffinement de la stratification de Y à partir de $\mathcal{C}'$ (voir lemme (2.2.1)).

La C-partition $\mathcal{C}$ satisfait les mêmes propriétés. Montrons qu'elle satisfait W'_k.

. W'_{k+1} est satisfaite : une partie de dimension relative $\geqslant k+1$ de $\mathcal{C}$ s'écrit

$$(X_\alpha \setminus T) \cap f^{-1}(Y'_\lambda) \quad \text{avec } \dim_f X_\alpha \geqslant k+1 \text{ et } Y'_\lambda \subset f(X_\alpha).$$

Donc si $\Gamma \in \mathcal{C}$, $\Delta \in \mathcal{C}$, $\dim_f \Gamma \geqslant k+2$ et $\dim_f \Delta \geqslant k+1$, si $f(\Gamma) = f(\Delta)$, et si $\Delta_j \subset \bar{\Gamma}$, Δ_j étant une composante de Δ , on pose

$$\Gamma = (X_\alpha \setminus T) \cap f^{-1}(Y'_\lambda), \quad \Delta = (X_\gamma \setminus T) \cap f^{-1}(Y'_\lambda).$$

On a donc $f(X_\gamma) = f(X_\gamma)$ et si $\Delta_j \subset X_{\gamma,j}$, on a $X_{\gamma,j} \subset \bar{X}_\alpha$.

Par suite $(X_\alpha, X_{\gamma,j})$ satisfait les conditions de Whitney par hypothèse, et (Γ, Δ_j) satisfait W d'après le lemme (2.2.2).

. Il reste à considérer le cas où $\dim_f \Gamma \geqslant k+1$ et $\dim_f \Delta = k$, $f(\Gamma) = f(\Delta)$, et $\Delta_j \subset \bar{\Gamma}$. On a encore $\Gamma = (X_\alpha \setminus T) \cap f^{-1}(Y'_\lambda)$, avec $\dim_f X_\alpha \geqslant k+1$. Comme $\Delta \subset T$, il existe une partie Λ construite dans l'assertion 1, telle que $\Delta_j \subset \Lambda$.
Comme $((X_\alpha \setminus T) \cap f^{-1}(f(\Lambda)),\Lambda)$ satisfait les conditions de Whitney, il en est de même de $((X_\alpha \setminus T) \cap f^{-1}(f(Y'_\lambda)), \Lambda \cap f^{-1}(Y'_\lambda))$ d'après le lemme (2.2.2), et donc aussi de (Γ, Δ_j), puisque $\Delta_j \subset \Lambda \cap f^{-1}(Y'_\lambda)$, ce qui finit la preuve du corollaire.

<u>Démonstration de l'assertion</u> :

Nous allons montrer qu'il existe une C-partiion de T_λ , C-comptatible avec les parties $\bar{X}_\alpha \cap T_\lambda (\dim_f X_\alpha \geqslant k+1)$,vérifiant la propriété I, telle que, pour toute partie Γ de dimension relative k contenue dans $\bar{X}_\alpha \cap T$, et toute composante connexe Γ_j de Γ , le couple $(X_\alpha \cap f^{-1}(f(\Gamma)), \Gamma_j)$ vérifie les conditions de Whitney.

La démonstration se fait par récurrence sur dim T_λ .
On construit U_λ comme dans le lemme (2.2.4), et on sait qu'il existe un fermé nulle part dense S de $X_\alpha \cap T_\lambda$ tel que $(X_\alpha \cap f^{-1}(U_\lambda), X_\alpha \cap T \setminus S)$ vérifie les conditions de Whitney.

Soit F le fermé de $f(T_\lambda)$ formé des points tels que la fibre de S soit de dimension $\geqslant k$.

On pose $\Gamma = (T_{\lambda,o} \setminus S) \cap f^{-1}(U_\lambda \setminus F)$ et on continue la récurrence comme dans le lemme (2.2.4). □

3. Démonstration du théorème 1

Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique propre comme au § 2, et soit $\mathcal{S}$ une stratification analytique de f.

(3.1) Proposition : Il existe une suite propre d'éclatements $\pi : \tilde{Y} \to Y$ et une C-stratification $\tilde{\mathcal{S}}$ de $\tilde{f} : X \underset{Y}{\times} \tilde{Y} \to \tilde{Y}$, image inverse de f par π , C-compatible avec $\mathcal{S}$, et satisfaisant les propriétés I, $H_{\tilde{f}}$, $A_{\tilde{f}}$ et W'.

Remarque : Il résulte du lemme (2.2.1) que pour tout morphisme $h : S \to \tilde{Y}$ et toute stratification de S compatible avec celle de $\tilde{Y}$, la C-partition naturelle de $\tilde{f}_S : \tilde{X} \underset{Y}{\times} S \to S$ est une C-stratification vérifiant les mêmes propriétés.

(3.2) Démonstration de la proposition (3.1)

On montre que si f admet une C-partition vérifiant les propriétés I, II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$ $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}, il existe une suite propre d'éclatement de Y, et une C-partition de l'image inverse $\tilde{f}$ de f, C-compatible avec la précédente, et qui vérifie I, II_k, H_{f_k} A_{f_k} et W'_k . Il suffit pour cela de montrer que les hypothèses du corollaire (2.2.5) peuvent être satisfaites après éclatement de Y. Si k = O, on obtient la proposition, et si k = dim X , les propriétés II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$,$A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1} sont vides. La propriété I est vérifiée à l'aide de (2.2.3) et (2.2.1).

Soit $\mathcal{S}$ une C-partition de f vérifiant les propriétés I, II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1} .

(3.2.1) On peut raffiner la stratification de Y, de sorte que la C-partition naturelle obtenue vérifie de plus :

III_k : Pour toute partie X_α de dimension relative k, il existe deux espaces analytiques F_α et F'_α (non nécessairement réduits) et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}'_\alpha & \hookrightarrow & F'_\alpha \\ \nu_\alpha \downarrow & & \downarrow \lambda_\alpha \\ \bar{X}_\alpha & \hookrightarrow & F_\alpha \subset X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ f(\bar{X}_\alpha) & = & f(F_\alpha) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions fermées, avec $\bar{X}_\alpha|_{f(X_\alpha)} = (F_\alpha|_{f(X_\alpha)})_{red}$ et $\bar{X}'_\alpha$ est réunion de composantes irréductibles de $F'_{\alpha,red}$, et tel que $f\circ\lambda_\alpha$ soit plat, à fibres de dimension pure k au-dessus de $f(X_\alpha)$.

Pour réaliser III_k, on considère les sous-espaces analytiques suivants :

$S_{\alpha,o} = f(\bar{X}_\alpha)$ $T_{\alpha,o} = \bar{X}_\alpha$.

Plus généralement, si on a défini $S_{\alpha,i}$ et $T_{\alpha,i}$, qui sont réduits, avec $S_{\alpha,i} = f(T_{\alpha,i})$, et $T_{\alpha,i}$ de dimension relative générique k, on pose :

$\nu_{\alpha,i} : T'_{\alpha,i} \to T_{\alpha,i}$ est la modification de Nash relative à $f|_{T_{\alpha,i}}$.

$S'_{\alpha,i+1}$ est le fermé de non-platitude de $f\circ\nu_{\alpha,i} : T'_{\alpha,i} \to F(T_{\alpha,i}) = S_{\alpha,i}$, et

$S_{\alpha,i+1} = \overline{f(X_\alpha) \cap S'_{\alpha,i+1}}$, $T_{\alpha,i+1} = \overline{X_\alpha \cap f^{-1}(S_{\alpha,i})}$.

Soit (Z_λ) une stratification de Y, compatible avec les fermés $S_{\alpha,i}$ ($\dim_f X_\alpha = k$), et compatible avec la stratification de Y.

Pour tout λ, il existe α et i tel que $Z_\lambda \subset f(X_\alpha) \cap (S_{\alpha,i} \setminus S_{\alpha,i+1})$.

On pose $S = f(X_\alpha) \cap (S_{\alpha,i} \setminus S_{\alpha,i+1})$, qui est un ouvert de Zariski dense de $S_{\alpha,i}$.

$T_{\alpha,i}|_S$ est réduit, et $f\circ\nu_{\alpha,i} : T'_{\alpha,i}|_S \to T_{\alpha,i}|_S \to S$ est plat, à fibres de dimension pure k.

On pose $F_{\alpha,\lambda} = T_{\alpha,i}|\bar{Z}_\lambda$.

Alors $F_{\alpha,\lambda}|_{Z_\lambda} = T_{\alpha,i}|_{Z_\lambda}$, et $\bar{X}_{\alpha,\lambda}|_{Z_\lambda} = (\bar{X}_\alpha \cap f^{-1}(Z_\lambda))_{red}$ d'après la propriété I. Par suite $\bar{X}_{\alpha,\lambda}|_{Z_\lambda} = (\bar{X}_\alpha \cap f^{-1}(S)|_{Z_\lambda})_{red} = (\overline{X_\alpha \cap f^{-1}(S)}|_{Z_\lambda})_{red} =$ $(T_{\alpha,i}|_{Z_\lambda})_{red} = (F_{\alpha,\lambda}|_{Z_\lambda})_{red}$, d'après I.

On pose aussi $F'_{\alpha,\lambda} = T'_{\alpha,i}|_{\bar{Z}_\lambda}$ et $\lambda_\alpha = \nu_{\alpha,i}|_{F'_{\alpha,\lambda}}$.

D'après (1.4.1), $\bar{X}'_{\alpha,\lambda}$ est réunion de composantes irréductibles de $(F'_{\alpha,\lambda})_{red}$, et par construction $f\circ\lambda_\alpha$ est plat à fibres de dimension pure k au-dessus de Z_λ .

(3.2.2) La propriété III_k étant satisfaite, soit $Y^{(\ell)}$ la réunion des strates de Y de dimension $\leqslant \ell$. On considère la suite propre d'éclatements de Y suivante : $\pi_o = Id_Y$.

Si on a défini $\pi_\ell : \tilde{Y}_\ell \to Y$, qui est une suite propre d'éclatements, tous centrés au-dessus de $Y^{(\ell-1)}$, on considère toutes les parties X_α de X avec $\dim_f X_\alpha = k$, et $\dim f(X_\alpha) = \ell+1$.

On considère les transformés strictes par π_ℓ : ${}_\ell F_\alpha$ et ${}_\ell \bar{X}_\alpha$, ${}_\ell F'_\alpha$ et ${}_\ell \bar{X}'_\alpha$. Ils vérifient encore III_k puisque π_ℓ est un isomorphisme en dehors de $\pi_\ell^{-1}(Y^{(\ell-1)})$. Il existe, d'après (1.4.2) une suite propre d'éclatements $\pi_{\ell+1,\ell} : \tilde{Y}_{\ell+1} \to \tilde{Y}_\ell$, tous centrés au-dessus de $\pi_\ell^{-1}(Y^{(\ell)})$, telle que le transformé strict par $\pi_{\ell+1,\ell}$ de $\tilde{f}_\ell \circ \lambda_{\alpha,\ell}$ noté $\tilde{f}_{\ell+1} \circ \lambda_{\alpha,\ell+1} : {}_{\ell+1}F'_\alpha \to \tilde{f}_{\ell+1}({}_{\ell+1}\bar{X}_\alpha)$ soit plat (et à fibres de dimension pure k).

D'après le diagramme commutatif de III_k, et d'après (1.4.4),

$$\tilde{f}_{\ell+1} : {}_{\ell+1}\bar{X}'_\alpha \longrightarrow \tilde{f}_{\ell+1}({}_{\ell+1}\bar{X}_\alpha)$$

vérifie la propriété H. On pose $\pi_{\ell+1} = \pi_\ell \circ \pi_{\ell+1,\ell}$ et $\pi : \tilde{Y} \to Y$ sera π_ℓ pour $\ell = \dim Y$.

(3.2.3) Soit (Z_λ) une stratification de $\tilde{Y}$, compatible avec celle de Y, et avec l'image inverse de tous les centres d'éclatements.

On considère la C-partition naturelle de $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, qui vérifie I, II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}. Nous allons montrer qu'elle vérifie aussi les hypothèses du corollaire (2.2.4). On considère une partie de dimension relative k de $\tilde{X}$. Par construction, il existe une partie X_α de X et une strate $Z_\lambda \subset \pi^{-1}(f(X_\alpha))$ telle que cette partie soit $X_\alpha \underset{Y}{\times} Z_\lambda$. On suppose que $\dim f(X_\alpha) = \ell$. Posons $\tilde{X}_\ell = X \underset{Y}{\times} \tilde{Y}_\ell$. On note $\bar{\omega}_\ell : \tilde{X}_\ell \to X$ le morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_\ell & \xrightarrow{\bar{\omega}_\ell} & X \\ {\scriptstyle \tilde{f}_\ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{Y}_\ell & \xrightarrow[\pi_\ell]{} & Y \end{array} \qquad \text{et} \qquad q_\ell = \bar{\omega}_{\dim Y,\ell} : \tilde{X} \to \tilde{X}_\ell .$$

Alors on a $\overline{X_\alpha \underset{Y}{\times} Z_\lambda} \subset q_\ell^{-1}({}_\ell\bar{X}_\alpha)_{red}$, car $Z_\lambda \subset \pi^{-1}(f(X_\alpha))$.

Remarquons l'égalité $q_\ell^{-1}({}_\ell\bar{X}_\alpha)_{red} = ({}_\ell\bar{X}_\alpha \underset{Y_\ell}{\times} \bar{Y})_{red}$. Par construction, le morphisme $\tilde{f}_\ell : {}_\ell\bar{X}_\alpha \to \tilde{f}_\ell({}_\ell\bar{X}_\alpha)$ vérifie la propriété H. D'après (1.4.4), si on pose $T_\alpha = q_\ell^{-1}({}_\ell\bar{X}_\alpha)_{red}$, le morphisme $\tilde{f} : T_\alpha \to \tilde{f}(T_\alpha)$ vérifie aussi la propriété H.

On peut donc utiliser (2.2.5) avec cette famille (T), ce qui prouve la proposition.

Remarque : Soit $f : X \to Y$ un morphisme C-stratifié sans éclatement.
On peut, comme dans le démonstration du deuxième lemme d'isotopie de Thom-Mather ([M]), construire une famille de tubes sur X contrôlée au-dessus d'une famille de tubes contrôlés sur Y. On en déduit la trivialité topologique locale du morphisme f le long des composantes connexes des C-strates de X.

On en déduit aussi que la partition de X formée des composantes connexes des C strates de S, et la stratification de Y forment une stratification de f . Ceci prouve le théorème 1.

4. Le cas local

La différence avec le cas propre consiste dans le fait que l'image d'un ensemble analytique n'est pas en général analytique. Nous utiliserons le théorème d'aplatissement local de [H.L.T] pour réaliser la condition H, et aussi pour rendre analytique l'image d'un ensemble analytique.

(4.1) Les définitions de (2.1) doivent être un peu modifiées.Dans la suite, $f : X \to Y$ désignera un morphisme analytique entre espaces analytiques réduits (de dimension finie).

On appellera C-partition (analytique) de X (par rapport à f) une famille localement finie (X_α) de parties de X telle que :
- Toute partie X_α est une sous-variété analytique localement fermée de X, et $\bar{X}_\alpha$ et $\bar{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ sont analytiques fermés dans X.
- les composantes connexes de X_α ont la même dimension
- $f|_{X_\alpha}$ est de corang constant
- la famille des composantes connexes des parties X est une partition de X.

Les notions de partition de X, ou de C-stratification de X sont alors inchangées. Une C-partition de f est la donnée d'une C-partition (X_α) de X, d'une stratification (Y_β) de Y telles que : pour tout α, il existe β avec $f(X_\alpha) \subset Y_\beta$

Nous considérons les propriétés suivantes pour une C-partition de X :

II_k : Pour toute partie X_α , avec $\dim_f X_\alpha \geqslant k$,

a) $f(\bar{X}_\alpha)$ est un fermé analytique de Y, et $f(X_\alpha)$ est un ouvert de Zariski dense, et lisse de $f(\bar{X}_\alpha)$.

b) $\forall y \in f(X_\alpha)$, $f^{-1}(y) \cap \bar{X}_\alpha = \overline{f^{-1}(y) \cap X_\alpha}$

c) Pour toute partie X_γ, si $X_{\gamma,i} \cap \bar{X}_\alpha \neq \emptyset$, $X_{\gamma,i} \subset \bar{X}_\alpha$.

H_{f_k} et A_{f_k} sont comme en (2.1). Pour une C-partition de f, $\{(X_\alpha),(Y_\beta)\}$, on aura

II_k : la C-partition (X_α) vérifie II_k a),... d) et de plus

a)$_{bis}$: si $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, il existe Y_β tel que $f(X_\alpha) = Y_\beta$.

W'_k est comme en (2.1).

(4.2) Remarque

- Soit (X_α) une C-partition de X vérifiant II_k. Soit $y_o \in Y$, et L un compact de $f^{-1}(y_o)$. Soit V un voisinage ouvert de L dans X. Si V est assez petit, il existe un voisinage ouvert U de y_o dans Y, tel que la trace de la C-partition (X_α) sur l'ouvert $V \cap f^{-1}(U)$ soit une C-partition vérifiant II_k pour le morphisme $f : V \cap f^{-1}(U) \to U$.

En effet, on choisit V assez petit pour que $X_\alpha \cap V \neq \emptyset$ pour un nombre fini de X_α. Il suffit alors de montrer l'existence de U pour chaque partie X_α. Si $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, $f(V \cap \bar{X}_\alpha)$ est un ouvert de $f(\bar{X}_\alpha)$, et $f(V \cap X_\alpha)$ est un ouvert de $f(X_\alpha)$, d'après II_k a). Soit U un voisinage ouvert de y_o tel que

$$U \cap f(\bar{X}_\alpha) \subset f(V \cap \bar{X}_\alpha) \quad \text{et} \quad U \cap f(X_\alpha) \subset f(V \cap X_\alpha).$$

Alors II_k a) est vérifiée pour $X_\alpha \cap V \cap f^{-1}(U)$. Si $y \in U \cap f(X_\alpha)$, $f^{-1}(y) \cap \bar{X}_\alpha = f^{-1}(y) \cap X_\alpha$, et donc $f^{-1}(y) \cap X_\alpha \cap V$ est dense dans $f^{-1}(y) \cap \bar{X}_\alpha \cap V$. Ceci donne II_k b). II_k C) est alors évidente. La remarque est aussi valable pour les autres propriétés de (4.1).

(4.3) Raffinements d'une C-partition

Soit (X_α) une C-partition de X, vérifiant II_k et H_{f_k} a), et soit $h : S \to Y$ un morphisme analytique, S étant réduit. Si $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, $f(\bar{X}_\alpha)$ et $f(\bar{X}_\alpha) \setminus f(X_\alpha)$ sont analytiques fermés dans Y. Soit (S_β) une stratification analytique de S, compatible avec les fermés $h^{-1}(f(\bar{X}_\alpha))$ et $h^{-1}(f(\bar{X}_\alpha) \setminus f(X_\alpha))$ pour $\dim_f X_\alpha \geqslant k$. Si $\dim_f X_\alpha < k$, $X_\alpha \underset{Y}{\times} S_\beta$ est une sous-variété de $X \underset{Y}{\times} S$. Si $\dim_f X_\alpha < k$, on stratifie chacun des $X_\alpha \underset{Y}{\times} S_\beta$. On obtient ainsi une C-partition naturelle de $X \underset{Y}{\times} S$.

(4.3.1) Lemme : Dans ces conditions,"la"C-partition naturelle de $X \underset{Y}{\times} S$ vérifie encore II_k et H_{f_k} a) et avec (S_β), c'est une C-partition de $f_S : X \underset{Y}{\times} S \to S$ vérifiant II_k et H_{f_k} a).Si de plus (X_α) vérifie A_{f_k} (resp. H_{f_k} b)), il en est de même de cette C-partition.

La démonstration est la même que celle de (2.2.1). □

(4.3.2) <u>Lemme</u> : Soit $f : T \to Y$ un morphisme analytique, entre espaces réduits de dimension finie. On suppose qu'il existe une famille finie (T_λ) de fermés analytiques de T telle que $T = \cup T_\lambda$, et que pour chaque λ , T_λ soit partout de dimension relative k et $f(T_\lambda)$ soit analytique fermé dans Y . On suppose que le morphisme $f : T_\lambda \to f(T_\lambda)$ vérifie la propriété H. Soit (Z_μ) une famille finie de sous-ensembles analytiques fermés de T. Soit $y_o \in Y$ et L un compact de $f^{-1}(Y_o)$. Il existe un voisinage U de y_o dans Y, un voisinage $V \subset f^{-1}(U)$ de L dans T, et une C-partition $\mathcal{C}$ de $T \cap V$, C-compatible avec $(Z_\mu \cap V)$ qui vérifie les propriétés II_k, H_{f_k} et A_{f_k}.

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme (2.2.4) si on utilise le résultat ci-dessous :

(4.3.3) <u>Lemme</u> : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique, $y_o \in Y$ et L un compact de $f^{-1}(y_o)$. On suppose que $\dim_x f^{-1}(y_o) \leqslant k$ en tout point $x \in L$.

Pour tout voisinage assez petit U de y_o, tout voisinage assez petit V de L, l'ensemble F des points de U où la fibre de $f|_{V \cap f^{-1}(U)}$ est de dimension $\geqslant k$ est contenu dans un fermé analytique de U. Si f est génériquement de dimension relative $< k$, ce fermé est d'intérieur vide dans U.

<u>Démonstration</u> : Soit V_o un voisinage ouvert de L tel que pour tout x dans V, $\dim_x f^{-1}(f(x)) \leqslant k$. Soit U_o un voisinage ouvert de y_o tel qu'il existe des ouverts V_i dans V, et des morphismes finis

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f"'] & U_o \times B^{\ell_i} \arrow[dl] \\ U_o & \end{tikzcd}$$

les ouverts V_i étant en nombre fini, et B^{ℓ_i} est un polydisque de $\mathbb{C}^{\ell_i}$ avec $\ell_i = \dim f^{1}(y_o) \cap V_i$. Soit $I = \{i/\ell_i = k\}$. Si U et V sont assez petits pour que $f^{1}(U) \cap V \subset \bigcup_i f^{1}(U) \cap V_i$, alors pour $y \in U$ si $f^{1}(y) \cap V$ est de dimension $\geqslant k$ il existe $i \in I$ tel que $f^{1}(y) \cap V_i$ soit de dimension $\geqslant k$. Mais, i étant fixé, $F_i = \{y \in U_o / \dim f^{1}(y) \cap V_i \geqslant k\}$ est analytique fermé dans U_o et $F \subset (\bigcup_i F_i) \cap U$.

Si de plus f est génériquement de dimension relative $< k$, alors, pour U_o et V_o assez petits, les sous-ensembles F_i sont d'intérieur vide . □

(4.3.4) Corollaire : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique, entre espaces réduits, $y_o \in Y$ et L un compact de $\overset{-1}{f}(y_o)$. Soit (T_λ) une famille finie de fermés analytiques de X, telle que pour tout λ, T_λ soit partout de dimension relative k, $f(T_\lambda)$ soit analytique fermé dans Y, et $f : T_\lambda \to f(T_\lambda)$ vérifie la propriété H.

Soit $\mathcal{S} = \{(X_\alpha),(Y_\beta)\}$ une C-partition de f vérifiant les propriétés II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}. On suppose de plus que toute partie X_α de dimension relative k est contenue dans un fermé T_λ.

Il existe alors un voisinage ouvert V de L, un voisinage ouvert U de y_o, et une C-partition $\mathcal{T}$ de $f|_{V \cap \overset{-1}{f}(U)}$, C-compatible avec $\mathcal{S}|_{V \cap \overset{-1}{f}(U)}$, vérifiant les propriétés II_k, H_{f_k}, A_{f_k} et W'_k.

Démonstration : Elle est analogue à celle de (2.2.5).

(4.4) Démonstration du théorème 2

(4.4.1) Proposition : Soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique entre espaces analytiques complexes réduits, $y_o \in Y$ et L un compact de $\overset{-1}{f}(y_o)$. Soit (X_α) (resp (Y_β)) une stratification analytique de X (resp. Y). Il existe une famille finie de morphismes $\pi_i : Y_i \to Y$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, chacun composé d'un nombre fini d'éclatements locaux, complète au-dessus d'un voisinage U de y_o dans Y, un voisinage V de L dans X, et pour chaque i, une C-stratification analytique $\mathcal{S}_i$ de $f_i : V_i \to L_i$, image réciproque de $f|_V$ par π_i, C-compatible avec (X_α) et (Y_β), et vérifiant les propriétés I, H_{f_i}, A_{f_i} et W'.

Remarques :

- Dans ce paragraphe, on renvoie à $[H_3]$ et [H.L.T] pour les définitions. Rappelons qu'un éclatement local est le composé $\sigma \circ i$, où i est l'inclusion d'un ouvert dans Y, et σ l'éclatement d'un fermé analytique de cet ouvert. On dit que la famille (π_i) est complète au-dessus de U si pour tout compact K de U il existe un compact K_i de Y_i, pour chaque i, tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i(K_i)$.
- Nous montrerons comme au § 3 l'existence d'une C-partition vérifiant II_o, H_{f_o}, A_{f_o} et W'_o, ce qui impliquera la proposition.
- On a comme au § 3 la stabilité des propriétés par changement de base
- Bien que les morphismes f_i ne soient pas propres, les stratifications obtenues sont analytiques complexes, et pas seulement sous-analytiques.
- Nous supposerons que les stratifications (X_α) et (Y_β) sont finies.

(4.4.2) Démonstration de la proposition (4.4.1)

On montrera que si f admet une C-partition vérifiant II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}, on peut trouver les π_i et $\mathcal{S}_i$ de (4.4.1) tels que $\mathcal{S}_i$ soit une C-partition de f_i satisfaisant II_k, H_{f_k}, A_{f_k} et W'_k. Soit donc $f : X \to Y$, $y_o \in Y$, L un compact de $f^{-1}(y_o)$, et $\mathcal{S}$ une C-partition de f, finie, et satisfaisant les propriétés II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}.

Fixons une étoile e au-dessus de Y, de point marqué y_o dans Y (cf.[H_3]). Nous dirons qu'une suite d'éclatements locaux $(W_{i+1}, \pi_i, U_i, E_i)_{i \geqslant o}$, contenue dans e, où $\pi_i : W_{i+1} \to U_i$ est l'éclatement de E_i, fermé analytique de U_i, et U_i est un voisinage de y_i dans W_i, y_i étant le point marqué e dans W_i, est k-permise si :

1) $|E_i|$ est nulle part dense dans U_i

2) si on note E^i l'image inverse dans U_i des centres E_k, pour $k < i$, $\pi^i = \pi_o \circ \ldots \circ \pi_{i-1}$, $\tilde{X}_i = X \underset{Y}{\times} Y_i$, $\bar{\omega}^i : \tilde{X}_i \to X$ le morphisme au-dessus de π^i, alors, quitte à remplacer $\tilde{X}_i$ par un voisinage ouvert assez petit de $L_i = L \underset{Y}{\times} \{y_i\}$, pour toute partie X_α de dimension relative k de $\mathcal{S}$, on a une des deux possibilités :

. Notons $\bar{X}_{\alpha,i}$ le transformé strict de $\bar{X}_\alpha$ par π^i.
Alors $f_i(\bar{X}_{\alpha,i})$ est analytique fermé dans U_i et $f_i : \bar{X}_{\alpha,i} \to f_i(\bar{X}_{\alpha,i})$ vérifie la propriété H.

. Si ce n'est pas le cas, soit $F_{i,\alpha} = \overline{\bar{\omega}^{i-1}(X_\alpha)\big|_{|E_i \setminus E^i|}}$.
Alors, si $F_{i,\alpha}$ n'est pas vide, $f_i(F_{i,\alpha})$ est analytique fermé dans $|E_i|$ et le morphisme $f_i : F_{i,\alpha} \to f_i(F_{i,\alpha})$ vérifie la propriété H. Remarquons que la première propriété s'énonce comme la deuxième , si on fait $E_i = U_i$.

(4.4.3) Lemme : Il existe une suite finie d'éclatements locaux k-permis, contenue dans e, notée $(W_{i+1}, \pi_i, U_i, E_i)_{O \leqslant i \leqslant m}$, telle que 2) soit satisfait avec $E_{m+1} = U_{m+1}$.

Avant de démontrer le lemme, voyons comment on obtient la proposition (4.4.1). On a, pour chaque étoile e, un morphisme $\pi^e : Y_e \longrightarrow Y$ (noté π^{m+1} dans le lemme). Il existe un voisinage V_e de L_e dans $\tilde{X}_e$, tel que, pour tout $i \leqslant m+1$, et tout α, le morphisme de gauche dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_{i,\alpha} \underset{Y_i}{\times} Y_e & \longrightarrow & F_{i,\alpha} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f_i \\ (\pi_i^e)^{-1}(f_i(F_{i,\alpha})) & \xrightarrow[\pi_i^e]{} & f_i(F_{i,\alpha}) \end{array}$$

vérifie la propriété H (d'après (1.4.4)). Un argument analogue à celui de [H.L.T.] th 4, permet de ne considérer qu'un nombre fini d'étoiles pour obtenir une famille complète.

Pour une telle étoile e, considérons une stratification de Y_e compatible avec celle de Y et avec les images inverses de tous les centres d'éclatements, et considérons une C-partition de f_e obtenue à partir de $\mathcal{S}$ comme dans (4.3.1). Elle vérifie encore II_{k+1}, $H_{f_{k+1}}$, $A_{f_{k+1}}$ et W'_{k+1}.

Montrons qu'elle vérifie aussi les autres hypothèses du corollaire (4.3.4) : une partie Γ de dimension relative k est contenue dans un sous-ensemble $X_\alpha \underset{Y}{\times} Z_\lambda$, si (Z_λ) est la stratification de Y_e, et on a $\dim_f X_\alpha = k$. Soit i tel que Z_λ soit contenu dans l'image inverse de E_i, et pas dans celle de E_k pour $k < i$. Alors $X_\alpha \underset{Y}{\times} Z_\lambda$ est contenu dans l'image inverse de $\bar{\omega}^{i^{-1}}(X_\alpha)|_{|E_i \setminus E^i|}$, et $\overline{X_\alpha \underset{Y}{\times} Z_\lambda}$ est contenu dans l'image inverse de $F_{i,\alpha}$, qui n'est autre que $|F_{i,\alpha} \underset{Y_i}{\times} Y_e|$.

On choisit donc comme famille (T_λ) la famille des images inverses de $F_{i,\alpha}$ et les hypothèses de (4.3.4) sont satisfaites, ce qui montre la proposition.□

Démonstration du lemme (4.4.3) : Elle suit essentiellement celle de [H.L.T] th.3. On fixe une étoile e de point marqué y_o dans Y. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ les parties de dimension relative k de $\mathcal{S}$ dans X. On va définir, par récurrence sur i, une suite d'éclatements locaux dans e, $(W_{i+1}, U_i, \pi_i, E_i)_{i \geqslant o}$. On suppose qu'on a défini la suite pour $o \leqslant i' < i$. On a donc un diagramme du transformé strict

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\bar{\omega}^i} & X \\ f_i \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ W_i & \xrightarrow[\pi^i]{} & Y \end{array}$$

Soit y_i le point marqué de e dans W_i. Pour définir U_i et E_i, on considère d'abord les espaces suivants :

Pour tout $\alpha \in A$, $T^{o}_{\alpha,i}$ est le transformé strict de $\overline{X}_\alpha$ par π^{i}. Si on note E^{i} l'image inverse dans W_i de tous les centres d'éclatements $E_{i'}$, pour $i' < i$, $T^{o}_{\alpha,i} = \overline{\varpi^{i-1}(X_\alpha)|_{W_i}\setminus E^{i}}$. Soit L_i le compact $f_i^{-1}(y_i) \cap (L \underset{Y}{\times} W_i)$.
Si $T^{o}_{\alpha,i}$ n'est pas vide, c'est un sous-ensemble analytique de X_i, à fibres de dimension générique k. Soit $\nu^{o}_{\alpha,i}$ la modification de Nash relative à $f_i|_{T^{o}_{\alpha,i}}$, et $L^{o}_{\alpha,i} = \nu^{o\,-1}_{\alpha,i}(L_i \cap T^{o}_{\alpha,i}) \subset T^{o'}_{\alpha,i}$.

Soit $P^{o}_{\alpha,i}$ le germe (en y_i) de platificateur de $f_i \circ \nu^{o}_{\alpha,i}$ au voisinage du compact $L^{o}_{\alpha,i}$ (cf.[H.L.T]) . On choisit un ouvert U_i de sorte que $P^{o}_{\alpha,i}$ soit représenté par un sous-espace analytique fermé de U_i .
Soit $P^{o}_i = \bigcap_{\alpha\in A} P^{o}_{\alpha,i}$ et $Q^{o}_i = \overline{(U_i \setminus P^{o}_i)} \cap P^{o}_i$.

Si on a défini ces sous-espaces jusqu'à l'indice j-1, on pose $T^{j}_{\alpha,i} = \overline{\varpi^{i-1}(X_\alpha)|_{(|Q^{j-1}_i|\setminus E^{i})}}$, $\nu^{j}_{\alpha,i}$ est la modification de Nash relative à $f_i|_{T^{j}_{\alpha,i}} : T^{j}_{\alpha,i} \to |Q^{j-1}_i|$, et $P^{j}_{\alpha,i}$ est le (germe en y_i de) platificateur de $f_i \circ \nu^{j}_{\alpha,i}$ au voisinage du compact $L^{j}_{\alpha,i} = \nu^{j\,-1}_{\alpha,i}(L_i \cap T^{j}_{\alpha,i})$. On pose $P^{j}_i = \bigcap_{\alpha\in A} P^{j}_{\alpha,i}$, et $Q^{j}_i = \overline{(|Q^{j-1}_i| \setminus P^{j}_i)} \cap P^{j}_i$.

On a les propriétés suivantes :

a) $P^{j}_i \subset |Q^{j-1}_i|$, et $|Q^{j}_i|$ est d'intérieur vide dans $|Q^{j-1}_i|$.

b) Posons $Q^{-1}_i = U_i$. Soit j(i) l'entier tel que $|Q^{j(i)}_i| \neq \emptyset$ et $|Q^{j(i)+1}_i| = \emptyset$. On a $-1 \leqslant j(i) \leqslant \dim Y$. Si $Q^{j(i)+1}_i = \emptyset$, et si $P^{j(i)+1}_i \neq \emptyset$, alors $P^{j(i)+1}_i = |Q^{j(i)}_i|$,et pour tout α dans A ~~le morphisme~~ le morphisme $T^{j(i)+1}_{\alpha,i} \to |Q^{j(i)}_i|$ est plat en tout point de $L^{j(i)+1}_{\alpha,i}$, et dans un voisinage de ce compact, est à fibres de dimension pure k.

Si $P^{j(i)+1}_i = \emptyset$, alors il existe α dans A tel que $P^{j(i)+1}_{\alpha,i} = \emptyset$, donc $L^{j(i)+1}_{\alpha,i} = \emptyset$, et $T^{j(i)+1}_{\alpha,i} \cap L_i = \emptyset$. Si on choisit un voisinage V_i assez petit de L_i dans X_i, on voit donc que pour tout espace $E_i \subset U_i$ de support $|Q^{j(i)}_i|$, l'éclatement de E_i dans U_i est k-permis , pourvu que $j(i) \neq -1$, c'est-à-dire que $|E_i|$ soit d'intérieur vide dans U_i .

c) si $j(i) = -1$, soit $\alpha \in A$ tel que l'une des deux possibilités précédentes soit satisfaite. On pose $A' = A \setminus \{\alpha\}$, et on recommence la construction. Si on obtient toujours $j(i) = -1$, la suite d'éclatements construite convient.

d) On peut donc supposer, quitte à diminuer A, que $j(i) \geq 0$. Soit $I_{i,j}$ l'idéal de Q_i^j dans $\mathcal{O}_{U_i}$ pour $0 \leq j \leq j(i)$. Rappelons le résultat suivant ([H_1] lemme 3.2): Etant donnés deux sous-espaces A et B d'un espace analytique Z, et U un ouvert relativement compact de Z, il existe un entier $a_o \geq 1$ tel que, pour tout $a \geq a_o$, on ait : si $\tilde{U}$ est l'éclaté de l'idéal $I_A + I_B^a$ de $\mathcal{O}_U$, alors en tout point $\tilde{y} \in \tilde{U} \setminus \tilde{A}$ $\tilde{A}$ étant le transformé strict de A, l'idéal $I_A \mathcal{O}_{\tilde{U},\tilde{y}}$ est localement inversible.

Soit alors $a_{j(i)}$ l'entier associé au couple $(I_{i,j(i)-1}, I_{i,j(i)})$, $a_{j(i)-1}$ associé à $(I_{i,j(i)-2}, I_{i,j(i)-1} + I_{i,j(i)}^{a_{j(i)}})$ etc..., et soit
$I_i = I_{i,o} + [I_{i,1} + [\ldots + [I_{i,j(i)-1} + I_{i,j(i)}^{a_{j(i)}}]^{a_{j(i)-1}} \ldots]^{a_1}$.
I_i est un idéal de $\mathcal{O}_{U_i}$ qui définit un sous-espace fermé E_i de U_i, de support $|Q_i^{j(i)}|$. L'éclatement de E_i est donc k-permis, d'après b).

e) Soit $\pi_i : W_{i+1} \to U_i$ l'éclatement de E_i dans U_i, et soit y_{i+1} le point marqué par e dans W_{i+1}. On peut alors considérer la suite $(T^j_{\alpha,i+1})$ dans un voisinage ouvert V_{i+1} de L_{i+1} au-dessus d'un voisinage ouvert U_{i+1} de y_{i+1}.

(4.4.4) <u>Lemme</u> : Soit $|\hat{Q}_i^\ell|$ le transformé strict de $|Q_i^\ell|$ par π_i, pour $-1 \leq \ell < j(i)$.

1) si $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^\ell|$, alors au voisinage de y_{i+1}, on a :

a) $T^{\ell+1}_{\alpha,i+1}$ est le transformé strict de $T^{\ell+1}_{\alpha,i}$.

b) $|Q^\ell_{i+1}|$ est le transformé strict de $|Q_i^\ell|$

2) si $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^{\ell-1}| \setminus |\hat{Q}_i^\ell|$ $\quad (0 \leq \ell \leq j(i))$

a) si de plus $y_{i+1} \notin \hat{P}_i^\ell$, il existe $\alpha \in A$ et un point de $L^\ell_{\alpha,i+1}$ où l'inclusion $(f_{i+1} \circ \nu^\ell_{\alpha,i+1})^{-1}(y_{i+1}) \hookrightarrow (f_i \circ \nu^\ell_{\alpha,i})^{-1}(y_i)$ est stricte.

b) si de plus $y_{i+1} \in \hat{P}_i^\ell$, alors $|P^\ell_{i+1}| = |\hat{P}_i^\ell|$ au voisinage de y_{i+1}, et $|P^\ell_{i+1}|$ est un voisinage de y_{i+1} dans $|Q^{\ell-1}_{i+1}| = |\hat{Q}_i^{\ell-1}|$.

Par suite $Q^\ell_{i+1} = \emptyset$ et $j(i+1) \leq \ell-1 \leq j(i) - 1$.

<u>Démonstration</u> : Elle se fait par récurrence sur ℓ. On suppose le lemme vrai pour $\ell - 1$. Soit $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^\ell|$. Alors $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^{\ell-1}|$ et au voisinage de y_{i+1}, $|\hat{Q}_i^{\ell-1}| = |Q^{\ell-1}_{i+1}|$.

1 b) $\Rightarrow$ 1 a) : En effet, si $|\hat{Q}_i^\ell| = |Q^\ell_{i+1}|$ au voisinage de y_{i+1}, on a

$$T^{\ell+1}_{\alpha,i+1} = \overline{\bar{\omega}^{i+1^{-1}}(X_\alpha)\big|_{(|Q^\ell_{i+1}| \setminus E^{i+1})}} = \overline{\bar{\omega}^{i+1^{-1}}(X_\alpha)\big|_{(|\hat{Q}_i^\ell| \setminus E^{i+1})}} = \hat{T}^{\ell+1}_{\alpha,i} .$$

Démonstration de 1 b) : Comme $\ell < j(i)$, E_i est nulle part dense dans $|Q_i^\ell|$, et d'après (1.4.1), $f_{i+1} \circ \nu_{\alpha,i+1}^\ell$ est le transformé strict par π_i de $f_i \circ \nu_{\alpha,i}^\ell$. Par construction, en tout point de $|\hat{Q}_i^{\ell-1}| \setminus |\hat{Q}_i^\ell|$, l'idéal $I_{i,\ell}^r \mathcal{O}_{|Q_i^{\ell-1}|}$ est localement inversible comme $\mathcal{O}_{|\hat{Q}_i^{\ell-1}|}$-module pour un certain entier r : cela résulte de la remarque d). Il en est donc de même de $I_{i,\ell}\mathcal{O}_{|\hat{Q}_i^{\ell-1}|}$. D'autre part, $I_{i,\ell} = I_{P_i^\ell} + I_{\overline{(Q_i^{\ell-1} \setminus P_i^\ell)}}$ dans $\mathcal{O}_{U_i}$, et l'éclaté de $I_{i,\ell}$ dans U_i est la réunion disjointe des transformés stricts de P_i^ℓ et $\overline{|Q_i^{\ell-1}| \setminus P_i^\ell}$ dans cet éclaté.

Par suite $|\hat{Q}_i^{\ell-1}| \setminus |\hat{Q}_i^\ell|$ est la réunion disjointe des transformés stricts $|\hat{P}_i^\ell| \setminus |\hat{Q}_i^\ell|$ et $\widehat{(\overline{|Q_i^{\ell-1}| \setminus P_i^\ell})}$. Ceci montre qu'en tout point de $|\hat{Q}_i^{\ell-1}| \setminus |\hat{P}_i^\ell| = |Q_{i+1}^{\ell-1}| \setminus |\hat{P}_i^\ell|$, c'est l'idéal $I_{P_i^\ell}\mathcal{O}_{|Q_{i+1}^{\ell-1}|}$ qui est localement inversible comme $\mathcal{O}_{|Q_{i+1}^{\ell-1}|}$-module.

On en déduit, en utilisant un argument analogue à celui de $[H_1]$, Lemme 4.4.5, que si $y_{i+1} \in |\hat{P}_i^\ell|$, on a $|P_{i+1}^\ell| = |\hat{P}_i^\ell|$ au voisinage de y_{i+1}. Finalement, si $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^\ell|$, la remarque précédente et le fait que $|\hat{Q}_i^\ell| \subset |\hat{P}_i^\ell|$ montrent que $|Q_{i+1}^\ell| = |\hat{Q}_i^\ell|$ au voisinage de y_{i+1}.

2) a) Si $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^{\ell-1}| \setminus |\hat{P}_i^\ell|$, les remarques précédentes montrent que $I_{P_i^\ell}\mathcal{O}_{|Q_{i+1}^{\ell-1}|}$ est localement inversible au voisinage de y_{i+1}. Il existe donc $\alpha \in A$ tel que $I_{P_{\alpha,i}^\ell}\mathcal{O}_{|Q_{i+1}^{\ell-1}|}$ soit localement inversible en y_{i+1} (on a $I_{P_i^\ell} = \sum_{\alpha \in A} I_{P_{\alpha,i}^\ell}$) et le résultat découle de [H.L.T] th. 2'.

2) b) Si $y_{i+1} \in |\hat{P}_i^\ell|$, alors $|P_{i+1}^\ell| = |\hat{P}_i^\ell|$ au voisinage de y_{i+1}, et comme $y_{i+1} \notin |\hat{Q}_i^\ell|$, $|\hat{P}_i^\ell|$ est un voisinage de y_{i+1} dans $|Q_{i+1}^{\ell-1}|$. Ceci montre 2) b). □

Fin de la démonstration de (4.4.3).

Nous allons montrer que, pour i assez grand, $j(i) = -1$. Si c'est faux, on a $j(i) \geqslant 0$ pour tout i, et la suite d'éclatements est infinie car $Q_i^0 \neq \emptyset$ pour tout i. Pour tout $i \geqslant 0$, soit $\ell(i+1,i)$ l'entier ℓ tel que $y_{i+1} \in |\hat{Q}_i^\ell| \setminus |\hat{Q}_i^{\ell+1}|$. On a $-1 \leqslant \ell(i+1,i) \leqslant j(i) - 1 \leqslant \dim Y$ pour tout i.

Soit $L = \min\{\ell \,/$ il existe un nombre infini de i avec $\ell(i+1,i) = \ell\}$. Il existe alors $i_o \geqslant 0$, tel que $L = \min\{\ell / \exists i \geqslant i_o$ avec $\ell(i+1,i) = \ell\}$. Pour tout $i \geqslant i_o$, $j(i)-1 \geqslant L$, et le lemme montre que $T^{L+1}_{\alpha,i+1}$ est le transformé strict par π_i de $T^{L+1}_{\alpha,i}$. Pour i tel que $\ell(i+1,i) = L$, $y_{i+1} \notin \hat{P}^{L+1}_i$, sinon 2)b) montre que $j(i+1) \leqslant L \leqslant j(i)-1$, ce qui est impossible puisque $L \leqslant j(i+1) - 1$. On en déduit que si $T^{L+1}_{\alpha,i+1} \cap L_i$ n'est pas vide, l'inclusion de 2) a) est stricte, pour au moins un $\alpha \in A$. Pour i assez grand, $T^{L+1}_{\alpha,i} \cap L_i$ est vide, et par suite $|Q^{L+1}_i| = \emptyset$, donc $j(i) \leqslant L$, ce qui est contradictoire avec $L \leqslant j(i) - 1$.

5. Le cas analytique réel

On se place dans la même situation qu'au § 4. On ne considère cependant que la catégorie des espaces analytiques complexifiés d'espaces analytiques réels, les morphismes étant aussi des morphismes complexifiés de morphismes analytiques réels. Le but de ce paragraphe est de montrer que les constructions du § 4 restent aussi à l'intérieur de cette catégorie. En particulier, les morphismes π_i du théorème (4.4.1) sont des complexifiés de morphismes analytiques réels, et les C-stratifications $\mathcal{S}_i$ sont invariantes par conjugaison.

(5.1) On imposera donc aux C-partitions de (4.1) de vérifier la condition supplémentaire :

chaque C-strate X_α de X (ou de Y) est invariante par conjugaison de l'espace ambiant.

Dans ces conditions, (4.3.1) reste vrai dans la catégorie considérée. Si on montre (4.3.3) dans cette catégorie, on voit simplement que (4.3.2) et (4.3.4) sont vérifiés.

Pour montrer (4.3.3), il suffit de montrer le résultat suivant :

soit $f : X \to Y$ (dans la catégorie considérée), et $x \in X$. Pour tout voisinage assez petit V de x, il existe un voisinage U de $f(x)$ tel que, si $k = \dim_x f^{-1}(f(x))$, l'ensemble F des points y de U tels que $\dim f^{-1}(y) = k$ est analytique fermé dans U et invariant par conjugaison.

Il suffit en fait de trouver une situation de paramétrisation locale, φ étant fini,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & U \times B^k \arrow[dl] \\ U & \end{tikzcd}$$

invariante par conjugaison, ce qui est possible. En effet, l'ensemble $W = \varphi(V)$ est alors invariant par conjugaison, et on peut le définir par des fonctions analytiques réelles, $f_1,\dots,f_p$, dans $U \times B^k$. F n'est autre que le sous-ensemble de U défini par les fonctions $f_i(.,b)$ $b \in B^k$, $i \in \{1,\dots,p\}$, et est donc invariant par conjugaison.

(5.2) On imposera aux éclatements k-permis de (4.4.2) d'être de centre invariant par conjugaison. On peut faire les deux remarques suivantes :

- si $f : X \to Y$ est dans la catégorie considérée, le platificateur local aussi (cf.[H.L.T.]).
- De même, la modification de Nash relative $\nu_f : X' \to X$ est aussi dans cette catégorie. En effet, si on note σ_X et σ_Y les conjugaisons de X et Y, de sorte qu'on a $\sigma_Y \circ f \circ \sigma_X = f$, le faisceau Ω^1_f est aussi muni d'une conjugaison au-dessus de σ_X, de même que la grassmannienne $G_d(\Omega^1_f)$. De plus, le morphisme naturel $g : G_d(\Omega^1_f) \to X$ vérifie $\sigma_X \circ g \circ \sigma_{G_d} = g$.

Par suite X' est invariant sous l'action de σ_{G_d}, et ν_f vérifie $\nu_f = \sigma_X \circ \nu_f \circ \sigma_{X'}$. L'involution $\sigma_{X'}$ se décrit simplement : on associe à toute limite de tangents aux fibres de f la limite prise sur les points conjugués dans X.

A l'aide de ces deux remarques, on voit que les centres d'éclatements de (4.4.2) sont encore k-permis dans la catégorie considérée. Le théorème (4.4.1) est donc vrai dans cette catégorie . □

BIBLIOGRAPHIE

[D] P. Deligne : Lette à Lê D. T. datée du 22/9/78.

[G] A. Grothendieck : Exposé n° 12, Famille d'espaces complexes. Séminaire H. Cartan 1960/1961.

[H_1] H. Hironaka : Flattening theorem in complex analytic geometry. Amer. J. of Math. Vol. 97 n°2 (1975).

[H_2] H. Hironaka : Stratifications and flatness. Real and complex singularities. Oslo 1976. P. Holm Ed. Sijthoff and Noordhoff.

[H_3] H. Hironaka : La voûte étoilée. Singularités à Cargèse. Astérisque 7/8 (1973).

[H.L.T.] H. Hironaka, M. Lejeune, B. Teissier : Aplatissement local. Singularités à Cargèse. Astérisque 7/8 (1973).

[L] Lê D. T. : Some remarks on relative monodromy. Real and complex singularities. Oslo 1976. P. Holm Ed. Sijthoof and Noordhoff.

[L.T.] Lê D. T. et B. Teissier : Classes de Chern des variétés singulières et variétés polaires locales.

[M] J. Mather : Stratifications and Mappings. Dynamical systems. Edited by M. M. Peixoto. Academic Press.

[S] C. Sabbah : Note aux C. R. Acad. Sc. t. 294 (4/1/1982) p.39-41.

[T_1] B. Teissier : Variétés polaires locales et conditions de Whitney. C. R. Acad. Sc. t. 290 (5 mai 1980) série A, p.799.

[T_2] B. Teissier : Variétés polaires locales. Quelques résultats. Journées complexes. Nancy 1980. Publ. Institut E. Cartan.

[T_3] B. Teissier : Variétés polaires II. A paraître.

[Th] R. Thom : Ensembles et morphismes stratifiés. Bull. AMS 75 (1969)

[V] J. L. Verdier : Stratifications de Whitney et théorèmes de Bertini-Sard. Inv. Math. n°36 (1976).

C. SABBAH
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
(France)