Astérisque

BERNARD MALGRANGE

Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 243-267

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__243_0>

POLYNÔMES DE BERNSTEIN-SATO ET COHOMOLOGIE ÉVANESCENTE

par B. MALGRANGE

1. INTRODUCTION.

Soient X une variété analytique complexe lisse et connexe, et f une application holomorphe non constante $X \to \mathbb{C}$; on désigne comme d'habitude par $\mathcal{O}$ (ou $\mathcal{O}_X$) le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et par $\mathcal{D}$ (ou $\mathcal{D}_X$) le faisceau des opérateurs différentiels linéaires sur X, à coefficients dans $\mathcal{O}$; on pose aussi $X(t) = f^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{C}$.

Rappelons rapidement la définition de "faisceau des cycles évanescents le long de $X(0)$" (Deligne, [D]) : soit i l'injection $\{0\} \to \mathbb{C}$; soit $\tilde{\mathbb{C}}^*$ un revêtement universel de $\mathbb{C}^*$, et j l'application évidente $\tilde{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}$; on pose $\tilde{X}^* = X \times_{\mathbb{C}} \tilde{\mathbb{C}}^*$, et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} X(0) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "f"] & \tilde{X}^* \arrow[l, "\bar{j}"'] \arrow[d, "f"] \\ \{0\} \arrow[r, "i"] & \mathbb{C} & \tilde{\mathbb{C}}^* \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

On pose alors $R\Psi(\mathbb{C}_{\tilde{X}^*}) = \bar{i}^* R\bar{j}_* \mathbb{C}_{\tilde{X}^*}$; c'est un complexe de faisceaux (dans la catégorie dérivée) sur $X(0)$, que nous appellerons "faisceau des cycles évanescents le long de $X(0)$" (par abus de langage ; en fait le "vrai" faisceau des cycles évanescents est le complexe $R\Phi$ défini par le triangle $\ldots \to \mathbb{C}_{X(0)} \to R\Psi \to R\Phi \xrightarrow{+1} \ldots$; voir [D] ;

nous examinerons ce complexe au § 6). L'action de la monodromie sur $\tilde{\mathbb{C}}^*$ induit un automorphisme de $R\Psi$ qu'on notera T . Soit $x \in X(0)$; il est facile de voir que l'espace $(R^p\Psi_x, T)$ est isomorphe au p-ième groupe de cohomologie de la fibre générale du "tube de Milnor" de centre x , muni de l'action de la monodromie (loc. cit.). L'objet de cet article est de construire un $\mathcal{D}_X$-module holonome L , à singularités régulières, porté par $X(0)$, et muni d'un automorphisme T tel qu'on ait un isomorphisme $(DR(L)[1], T) \simeq (R\Psi, T)$. On a posé ici, comme d'habitude $DR(L) = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, L)$; rappelons que, avec des notations évidentes, un représentant canonique de $DR(L)$ est le complexe de de Rham $\left(\Omega^\bullet_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} L, \nabla\right)$.

La construction de L est liée de façon étroite au "polynôme de Bernstein-Sato", ou "fonction b " ; le résultat précédent éclaircit donc la relation entre ce polynôme, et la monodromie de la fibration de Milnor. Dans [M1], [M2], [M3] , j'avais obtenu des résultats partiels dans ce sens ; en fait, dans [M3], se trouvait déjà l'idée essentielle de la démonstration par complétion formelle que je donne ici, mais je n'en avais alors tiré qu'un résultat partiel.

Lorsque ce travail était en cours d'achèvement, j'ai pris connaissance d'une lettre de A. Beilison à P. Deligne qui annonce des résultats plus généraux dans le même sens, pour $\mathbb{C}_X$ remplacé par un faisceau pervers quelconque sur X , résultats obtenus en collaboration avec J. Bernstein. Plus récemment, M. Kashiwara m'a informé qu'il avait aussi des résultats analogues à ceux de Beilinson-Bernstein.

2. SORITES SUR LES ÉQUATIONS A SINGULARITÉS RÉGULIÈRES.

Soit (E, ∇) un espace vectoriel à connexion sur le corps $K = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ (une variable), à singularité régulière ; soient D^* un disque pointé de centre 0 et a un point de D^*. Soient encore V le système local des sections horizontales de E sur D^*, et (V_a, T) la fibre de V en a munie de l'action de la monodromie ; si l'on remplace a par $a' \in]0,a]$, $(V_{a'}, T)$ est canoniquement isomorphe à (V_a, T), ce qui permet de définir le foncteur de "monodromie", ou de "cohomologie évanescente" $(E, \nabla) \mapsto (V_a, T)$. Ce foncteur peut encore se représenter de deux autres manières.

(2.1) On prend dans E un réseau Λ stable par $t\partial$ $(\partial = \frac{d}{dt})$ tel que les valeurs propres λ_i de l'action de $t\partial$ dans $\Lambda/t\Lambda$ vérifient : $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} - \{0\}$; alors, il est classique (Fuchs, Frobenius) que (V_a, T) est isomorphe à $(\Lambda/t\Lambda, \exp(-2\pi i t\partial))$.

Dans la suite, pour la commodité, on choisira une fois pour toutes l'unique réseau Λ tel que les valeurs propres λ_i de l'action de $t\partial_t$ dans $\Lambda/t\Lambda$ vérifient $-1 < \operatorname{Re}\lambda_i \leq 0$.

(2.2) Soit $\tilde{E}$ l'espace des sections de classe de Nilsson de E sur un revêtement universel $\tilde{D}^*$ de D^*, i.e. les sommes finies d'expressions de la forme $e_{\alpha,p} t^{\alpha} (\log t)^p$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $e_{\alpha,p} \in E$. Notons $\psi(E)$ le complexe de de Rham $\tilde{E} \xrightarrow{t\partial} \tilde{E}$. Alors, on a :

i) $\psi^1(E) = 0$;

ii) $\psi^0(E) \simeq \Lambda/t\Lambda$; de plus, E, donc $\psi(E)$ est muni naturellement d'une action de la monodromie, (par $\log t \mapsto \log t + 2\pi i$). Alors, cette action coïncide sur $\Lambda/t\Lambda$ avec la précédente.

Etablissons rapidement ce résultat : tout élément de $\tilde{E}$ s'écrit d'une manière et d'une seule $\sum_{\alpha,p} e_{\alpha,p} t^{\alpha} (\log t)^p$, avec $0 \leq \operatorname{Re}\alpha < 1$; pour $k \in \mathbb{Z}$, notons $\tilde{\Lambda}^k$ l'ensemble des expressions du type précédent avec $\forall (\alpha, p) : e_{\alpha,p} \in t^k \Lambda$, et considérons l'application

$$\tilde{\Lambda}^k / \tilde{\Lambda}^{k+1} \xrightarrow{t\partial} \tilde{\Lambda}^k / \tilde{\Lambda}^{k+1} \quad ;$$

on vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

a) pour $k \neq 0$, cette application est bijective ;

b) pour $k = 0$, son noyau est isomorphe à $\Lambda/t\Lambda$, et son conoyau est nul ; de plus, les deux actions de la monodromie considérées coïncident.

Par passage à la limite, on en déduit les assertions analogues à i) et ii) pour $\psi(\hat{E})$, $\hat{E}$ le complété formel de E ; d'autre part, le théorème de comparaison usuel, joint à un argument de limite inductive, montre que le morphisme naturel $\psi(E) \to \psi(\hat{E})$ est un quasi-isomorphisme. Ceci démontre l'assertion voulue.

3. <u>LE POLYNÔME DE BERNSTEIN-SATO.</u>

Reprenons les notations du §1, soit $x \in X(0)$, et soit s une indéterminée ; rappelons d'abord le théorème suivant dû à Bernstein [B] dans le cas polynomial et à Björk [Bj] dans le cas analytique.

THÉORÈME 3.1. - <u>Il existe</u> $P \in \mathcal{D}_x[s]$ <u>et</u> $B \in \mathbb{C}[s]$, $B \neq 0$, <u>tels qu'on ait</u> $Pf^s = B(s)f^{s-1}$.

L'ensemble des $B \in \mathbb{C}[s]$ tel qu'il existe un P vérifiant l'équation précédente forme manifestement un idéal de $\mathbb{C}[s]$; le générateur unitaire de cet idéal, qui sera noté b_x , s'appelle le polynôme de Bernstein-Sato de f au point x .

Il est plus commode d'écrire la formule précédente de la façon suivante (voir [M 2], [K]) : soit $\mathfrak{M}$ le faisceau sur $X \times \mathbb{C}$ des fonctions méromorphes à pôles sur $f = t$, et posons $N = \mathfrak{M}/\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}}$; notons, comme d'habitude, par $\delta(t-f)$ la classe de $\frac{1}{t-f}$ dans N ; alors l'égalité $P(x, \partial_x, s+1)f^{s+1} = B(s+1)f^s$ s'écrit aussi :

$$P(x, \partial_x, -t\partial_t)t\delta(t-f) = B(-t\partial_t)\delta(t-f) \quad ;$$

posons alors $M = \mathcal{D}_X[t\partial_t]\,\delta(t-f) \subset N$; de l'égalité $\varphi(t)\delta(t-f) = \varphi(f)\delta(t-f)$ et de la formule de Leibniz, on déduit que M est stable par l'action de $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}}$ (à noter qu'il n'est pas en général stable par ∂_t) ; de plus, la définition de b_x signifie ceci :

(3.2) b_x <u>est le polynôme minimal de l'action de</u> $(-t\partial_t)$ <u>sur</u> $(M/tM)_{(x,0)}$.

Dans [K] , il est démontré que M/tM est un $\mathcal{D}_X$-module holonome ; dans [K - K2], il est indiqué sans démonstration qu'il est à singularités régulières au sens de [K - K1]. J'admettrai ce point, qui, d'ailleurs, ne me servira pas de manière essentielle.

Pour résoudre le problème posé dans l'introduction, une idée naturelle serait d'établir un isomorphisme

$$(DR(M/tM)[1], \exp(-2\pi i t\partial_t)) \simeq (R\Psi, T) \quad ;$$

malheureusement ce résultat n'est pas toujours vrai, parce que les zéros de b peuvent différer d'un entier non nul. Voici un contre-exemple : prenons X = un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^n$, et prenons $f = \Sigma x_i^2$; on a $b_0(s) = s(s+\frac{n}{2}-1)$; prenons alors n pair ≥ 4 : sur M/tM , $t\partial_t$ est diagonalisable de valeurs propres 0 et $(\frac{n}{2}-1)$, donc $\exp(-2\pi i t\partial_t)$ est l'identité ; si donc le résultat énoncé était vrai, la monodromie agirait trivialement sur le complexe $R\Psi$ au voisinage de 0 ; en regardant l'interprétation de la variation en termes de $R\Psi$ [D], on en déduirait qu'elle est nulle, contrairement à la formule de Picard-Lefschetz. En fait, dans cet exemple, le polynôme minimal de T sur $R\Psi$ est égal à $(T-1)^2$.

La même difficulté se rencontre déjà à une variable, pour un vectoriel à connexion (E,∇) à singularité régulière : si Λ est un réseau de E stable par $t\partial_t$, et si deux valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ dans $\Lambda/t\Lambda$ diffèrent d'un entier non nul, il peut arriver que $(\Lambda/t\Lambda, \exp(-2\pi i t\partial_t))$ ne représente pas la monodromie. On remédie classiquement à cet inconvénient en décalant Λ de manière à faire coïncider les valeurs propres en question. On va procéder ici de la même manière.

Soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ le sous-faisceau des opérateurs différentiels de la forme $p(x,t,\partial_x,t\partial_t)$; il est visible que M est cohérent sur $\mathcal{D}'$. Appelons "réseau" un sous-$\mathcal{D}'$-module cohérent M' de $M[t^{-1}] = N[t^{-1}]$ qui vérifie, pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$ convenables : $t^k M \subset M' \subset t^\ell M$; comme $t^\ell M/t^{\ell+1}M$ est isomorphe en tant que $\mathcal{D}_X$-module à M/tM (l'action de $t\partial_t$ étant décalée de ℓ), on voit facilement que $t^\ell M/t^k M$, et M'/tM', sont encore holonomes et à singularités régulières sur $\mathcal{D}_X$.

LEMME 3.3. - <u>Il existe un réseau unique, qu'on notera</u> M' <u>dans toute la suite, qui possède la propriété suivante : pour tout</u> $x \in X(0)$, <u>les valeurs propres</u> λ <u>de l'action de</u> $t\partial_t$ <u>sur</u> $(M'/tM')_{x,0}$ <u>vérifient</u> : $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$.

(Remarquons qu'il n'y a pas lieu de se préoccuper des points (x,t) avec $t \neq f(x)$, puisqu'alors $M = N = 0$, ni non plus des points (x,t) avec $t = f(x) \neq 0$, puisqu'en un tel point on aura $M' = M = N$, et $M'/tM' = 0$).

Sous réserve de démontrer l'unicité, il suffit de construire M' localement ; par le théorème (3.1), on peut alors supposer que $t\partial_t$ admet un polynôme minimal sur M/tM ; soient a et $b \in \mathbb{R}$ tel que les racines de ce polynôme λ vérifient $a \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq b$; choisissons alors k et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels qu'on ait $b+\ell \leq 0$, $a+k > 0$; il est clair que M' doit vérifier $t^\ell M \subset M' \subset t^k M$ et que $M'/t^k M$ s'obtient de la manière suivante :

On décompose $t^\ell M/t^k M = P$ suivant les sous-espaces P_λ sur lesquels $(t\partial_t - \lambda)$ est nilpotent, et l'on prend $M'/t^k M = \bigoplus_{\mathrm{Re}\,\lambda > -1} P_\lambda$ (la cohérence des P_λ sur $\mathcal{D}_X$ résulte de ce que $t\partial_t$ est un endomorphisme de $t^\ell M/t^k M$ en tant que $\mathcal{D}_X$-module). Le théorème est alors le suivant :

THEOREME 3.4. - $(DR(M'/tM')[1], \exp(-2\pi i t\partial_t))$ <u>est isomorphe à</u> $(R\Psi, T)$.

Remarque 3.5. - En fait, le choix particulier de la condition $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ est sans importance ici (on aurait pu prendre aussi bien n'importe quelle section de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$) ; ce choix est cependant naturel, pour de nombreuses raisons ; on en verra une au § 6 ; une autre est le rôle que joue ce réseau dans l'étude de la (ou des) structure(s) de Hodge mixte(s) de la cohomologie évanescente dans le cas des singularités isolées ; voir à ce sujet l'exposé de F. Pham et [Va2].

Une dernière raison, dont j'ignore dans quelle mesure elle a ou non un lien avec la précédente (1), est la suivante : si $X(0)$ est à croisements normaux, i.e. si f s'écrit localement sous la forme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, alors on a $M = M'$ comme on le voit en calculant le polynôme de Bernstein-Sato de f , ce qui est immédiat. Dans le cas général, il est démontré à partir de là dans [K] que les zéros de b sont (rationnels) et < 1 ; autrement dit les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur M/tM sont > -1 , donc on aura $M \subset M'$.

4. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.4.

Les complexes considérés ici sont des complexes de faisceaux sur X identifié à $X \times \{0\} \subset X \times \mathbb{C}$ (au besoin, on restreint à X les faisceaux sur $X \times \mathbb{C}$).

(4.1) Posons $M[t^{-1}]/t^p M' = M_p$, $\tilde{M}_p = M_p \otimes_{\mathbb{C}} \{\Sigma c_{\alpha,q} t^{\alpha}(\log t)^p\}$, avec $c_{\alpha,q} \in \mathbb{C}$, $0 \leq \mathrm{Re}\,\alpha < 1$, $p \in \mathbb{N}$; posons, comme au § 2

$$\psi(M_p) = \text{le complexe } \{\tilde{M}_p \xrightarrow{t\partial_t} \tilde{M}_p\} .$$

Comme au § 2, on voit que le système projectif $\{\psi(M_p)\}$ est essentiellement constant dès que $p \geq 1$, et égal à M'/tM' ; d'autre part, l'action de la monodromie sur $\psi(M_p)$ $(p \geq 0)$ coïncide avec l'action de $\exp(-2\pi i t\partial_t)$ sur M'/tM' .

---

(1) Il me paraît possible que le jacobien d'une désingularisation ait un rapport étroit avec la structure de Hodge mixte d'une singularité isolée ; voir à ce propos [Va1] et [Va2].

(4.2) Considérons de même le complexe $\psi(M[t^{-1}]) = \{\tilde{M}[t^{-1}] \xrightarrow{t\partial_t} \tilde{M}[t^{-1}]\}$; l'application évidente $M[t^{-1}] \longrightarrow \{M_p\}$ donne une flèche $\psi(M[t^{-1}]) \longrightarrow M'/tM'$.

Le point suivant consiste à calculer $\psi(M[t^{-1}])$; pour cela, reprenons les notations de l'introduction, et soit Nilss_f le faisceau sur X construit ainsi : soit $x \in X(0)$, U un voisinage ouvert de x dans X , et soit $\mathcal{N}(U)$ l'espace des fonctions sur $\bar{j}^{-1}(U)$ qui sont de classe de Nilsson, (i.e. de détermination finie et à croissance modérée) le long de $X(0)$; on pose $\mathrm{Nilss}_{f,x} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{N}(U)$; on obtient ainsi un faisceau sur $X(0)$, qu'on prolonge par 0 sur $X - X(0)$. Un élément de $\mathrm{Nilss}_{f,x}$, $x \in X(0)$ s'écrit comme une somme $\Sigma a_{\alpha,q}(x) f^{\alpha} (\log f)^q$ $\alpha \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$, $a_{\alpha,q} \in \mathcal{O}_{X,x}$ (voir [D]).

LEMME (4.2.1). - <u>On a</u> $\psi^0(M[t^{-1}]) = 0$, <u>et</u> $\psi^1(M[t^{-1}]) = \mathrm{Nilss}_f$.

Il est facile de voir que f est inversible dans $M[t^{-1}] = N[t^{-1}]$, et que l'application naturelle $N[f^{-1}] \longrightarrow N[t^{-1}]$ est bijective ; d'autre part, tout élément de N (en un point $(x, 0)$, $x \in X(0)$) s'écrit d'une manière et d'une seule $\Sigma a_p(x)\delta^p(t-f)$, $a_p \in \mathcal{O}_{X,x}$, donc tout élément de $N[t^{-1}]$ s'écrira de la même manière, avec ici $a_p \in \mathcal{O}_{X,x}[f^{-1}]$; un élément de $\tilde{M}[t^{-1}]$ s'écrira donc d'une manière et d'une seule

$$\Sigma a_p(x,t)\delta^p(t-f) \quad \text{avec} \quad a_p(x,t) = \Sigma a_{p,\alpha,q}(x) t^{\alpha} (\log t)^q ,$$

$$p,q \in \mathbb{N} , \quad 0 \le \operatorname{Re}\alpha < 1 , \quad a_{p,\alpha,q} \in \mathcal{O}_{X,x}[f^{-1}] .$$

On a :

$$t\partial_t \Sigma a_p(x,t)\delta^p(t-f) = \Sigma \frac{\partial a_p}{\partial t} \delta^p(t-f) + \Sigma a_p \delta^{p+1}(t-f) \quad ;$$

donc, en filtrant $\tilde{M}[t^{-1}]$ par "p" , on trouve que $t\partial_t$ induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}(\tilde{M}[t^{-1}])_p$ sur $\mathrm{gr}(\tilde{M}[t^{-1}])_{p+1}$; on en déduit immédiatement qu'on a $\psi^0(M[t^{-1}]) = 0$, et $\psi^1(M[t^{-1}]) = \tilde{M}[t^{-1}]_0$; ce dernier espace s'identifie à Nilss_f par l'application $a(x)t^{\alpha}(\log t)^q \delta(t-f) \mapsto a(x) f^{\alpha} (\log f)^q$; (moralement, cette application est l'intégration $\int u(x,t)\delta(t-f)dt = u(x,f)$).

Il est évident que l'isomorphisme obtenu commute à l'action de la monodromie ; reste à vérifier que c'est bien un isomorphisme de $\mathcal{D}_X$-modules ; je laisse ce dernier point au lecteur.

(4.3) Les constructions précédentes donnent un diagramme

$$(4.3.1)\quad \begin{array}{ccc} \psi(M[t^{-1}]) & \longrightarrow & \{\psi(M_p)\} \qquad (p\geq 1) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ \mathrm{Nilss}_f[-1] & \dashrightarrow & M'/tM' \end{array}$$

Considérons maintenant le complexe de de Rham $DR(\tilde{X}^*) = (\Omega_{\tilde{X}^*}, d)$. D'après Deligne [D], on a $\bar{i}^*\bar{j}_* DR(\tilde{X}^*) = R\Psi$, et l'injection naturelle $DR\ \mathrm{Nilss}_f \to \bar{i}^*\bar{j}_* DR(\tilde{X}^*)$ est un isomorphisme ; par conséquent, en prenant la cohomologie de de Rham de (4.3.1) on obtient une flèche

$$(4.3.2)\quad R\Psi \longrightarrow DR(M'/tM'[1])\ .$$

De plus, cette flèche commute à l'action de la monodromie (i.e. à l'action de T sur $R\Psi$, et de $\exp(-2\pi i t\partial_t)$ sur M'/tM'). L'énoncé précisé du théorème (3.4) est le suivant.

THEOREME (4.3.3). - La flèche (4.3.2) est un isomorphisme.

Compte-tenu des constructions précédentes, ce théorème est la conséquence de la proposition suivante, qui sera démontré dans le prochain paragraphe.

PROPOSITION (4.3.4). - Pour $p \geq 1$, l'application $DR\psi(M[t^{-1}]) \longrightarrow DR\psi(M_p)$ est un quasi-isomorphisme.

5. DÉMONSTRATION DE (4.3.4).

(5.1) Soit x un point de $X(0)$, et U une boule fermée de X de centre x et de rayon assez petit. Comme les foncteurs "ψ" et "DR" commutent, et comme d'autre part le système projectif $\{\psi(M_p)\}$ est constant pour $p \geq 1$, il suffit de démontrer que, pour $p >> 0$, l'application naturelle

$$\psi H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]) \longrightarrow \psi H^k_{DR}(U, M_p)$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $k \geq 0$ (on écrit H^k pour l'hypercohomologie). Considérons alors la suite exacte
$0 \longrightarrow t^p M' \longrightarrow M[t^{-1}] \longrightarrow M_p \longrightarrow 0$; en prenant la suite de cohomologie correspondante, on trouve une suite exacte :

(5.1.1) $0 \longrightarrow H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])/A_p \longrightarrow H^k_{DR}(U, M_p) \longrightarrow B_p \longrightarrow 0$

avec $A_p = \mathrm{im}\{H^k_{DR}(U, t^p M') \to H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]\}$ et

$B_p = \ker\{H^{k+1}_{DR}(U, t^p M') \to H^{k+1}_{DR}(U, M[t^{-1}])\}$.

La proposition sera conséquence des trois assertions suivantes :

(5.1.2) $H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])$ est fini sur $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$, et l'action ∂_t dans cet espace est à singularité régulière.

(5.1.3) A_p est un réseau de $H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])$.

(5 1.4) Le système projectif $\{B_p\}$ est essentiellement trivial (i.e. il existe q tel que, pour $p >> 0$, l'application $B_{p+q} \to B_p$ soit nulle).

(5.2) Montrons d'abord comment on déduit le résultat de ces assertions. Tout d'abord, on a évidemment $A_{p+1} = tA_p$; les deux premières assertions, jointes à la répétition des arguments du § 2 montrent alors que, pour $p \gg 0$, on a :

$$\psi^0 H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])/A_p = \psi^0 H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])$$

et $$\psi^1 H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])/A_p = \psi^1 H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]) = 0$$

en appliquant ψ à la suite exacte (5.1.1), on trouve alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \psi^0 H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]) \longrightarrow \psi^0 H^k_{DR}(U, M_p) \longrightarrow \psi^0 B_p \longrightarrow 0$$

et un isomorphisme

$$\psi^1 H^k_{DR}(U, M_p) \xrightarrow{\sim} \psi^1 B_p \ .$$

L'assertion (5.1.4) permet alors de conclure, pourvu qu'on prouve que les systèmes projectifs $\{\psi^i H^k_{DR}(U, M_p)\}$ sont constants pour $p \gg 0$. Pour établir ce dernier point, considérons la suite exacte
$0 \longrightarrow t^p M'/t^{p+1} M' \longrightarrow M_{p+1} \longrightarrow M_p \longrightarrow 0$; on en déduit une suite exacte de cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^k_{DR}(U, t^p M'/t^{p+1} M') \xrightarrow{\alpha} H^k_{DR}(U, M_{p+1}) \xrightarrow{\beta} H^k_{DR}(U, M_p)$$
$$\xrightarrow{\gamma} H^{k+1}_{DR}(U, t^p M'/t^{p+1} M') \longrightarrow \dots$$

Les valeurs propres λ de l'action de $t\partial_t$ sur $(t^p M'/t^{p+1} M')$ vérifient $p-1 < \mathrm{Re}\,\lambda \leq p$; il en est donc de même pour $H^k_{DR}(U, t^p M'/t^{p+1} M')$, et donc aussi pour $\mathrm{Im}\,\alpha$ et $\mathrm{Im}\,\gamma$; donc $\psi^i(\mathrm{Im}\,\alpha) = \psi^i(\mathrm{Im}\,\gamma) = 0$, $(i=0,1)$; le résultat s'en déduit aussitôt en appliquant ψ aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\alpha \longrightarrow H^k_{DR}(U, M_{p+1}) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\beta \longrightarrow 0 \ , \text{ et}$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\beta \longrightarrow H^k_{DR}(U, M_p) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\gamma \longrightarrow 0 \ .$$

(5.3) Reste à démontrer les assertions (5.1.1 à 3). Il est probable qu'on pourrait le faire directement par désingularisation. Toutefois, on va employer ici une autre méthode, qui consiste à se ramener aux assertions analogues pour la cohomologie de de Rham relative, assertions qui sont démontrées dans Hamm [H]. Les deux premières assertions sont démontrées dans [M 3] par ce procédé ; pour la commodité du lecteur, on va reproduire ici une version simplifiée de leur démonstration.

Rappelons d'abord comment on ramène l'étude de $DRM[t^{-1}]$ à celle de la cohomologie relative (ceci n'est rien d'autre que le calcul classique de la cohomologie de de Rham relative par résidu). On considère le complexe $(\tilde{\Omega}^{\bullet}_{X/T}, d_{X/T})$ défini par $\tilde{\Omega}^{p}_{X/T} = \Omega^{p}_{X}[f^{-1}]/df \wedge \Omega^{p-1}_{X}[f^{-1}]$, la différentielle $d_{X/T}$ étant définie par passage au quotient à partir de la différentielle usuelle ; on envoie $\tilde{\Omega}^{\bullet}_{X/T}[-1]$ dans $\left(M[t^{-1}] \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^{\bullet}_{X}, d\right)$ par $\alpha \mapsto (\alpha \wedge df) \otimes \delta(t-f)$.

PROPOSITION (5.3.1). - <u>L'application précédente, restreinte à $X(0)$, est un quasi-isomorphisme</u>.

Plaçons-nous en $x \in X(0)$; un élément de $M[t^{-1}] \otimes \Omega^{p}_{X}$ en x s'écrit $\Sigma \omega_k \delta^{k}(t-f)$, avec $\omega_k \in \Omega^{p}_{X,x}[f^{-1}]$, et la différentielle s'écrit $d(\omega_k \otimes \delta^{k}(t-f)) = d\omega_k \otimes \delta^{k}(t-f) - (df \wedge \omega_k) \otimes \delta^{k+1}(t-f)$; en filtrant par le degré en k, on trouve que le gradué associé est le complexe $\Omega^{\bullet}_{X}[f^{-1}]$ muni de $-df \wedge$.

LEMME (5.3.2). - <u>Ce dernier complexe est acyclique</u>.

En effet, au voisinage de x, df ne s'annule pas en dehors de 0 ; le Nullstellensatz montre alors qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ et des $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ tels qu'on ait $f^{\ell} = \Sigma a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, ou encore, en posant $\xi = f^{-\ell} \Sigma a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$: $\xi(f) = 1$. Soit alors $\alpha \in \Omega^{k}_{X,x}[f^{-1}]$, avec $df \wedge \alpha = 0$; on a $0 = i_{\xi}(df \wedge \alpha) = \alpha - df \wedge i_{\xi}\alpha$ (i_{ξ} le produit intérieur par ξ) ; d'où le lemme.

Du lemme précédent, on déduit par un raisonnement classique que le complexe $\left(M[t^{-1}] \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^{\bullet}_{X}, d\right)$ est quasi-isomorphe au sous-complexe des éléments de la forme $(\alpha \wedge df) \otimes \delta(t-f)$, c'est-à-dire au sous-complexe

$(\tilde{\Omega}_{X/T}[-1], d_{X/T})$; on va rappeler ce raisonnement, dont on aura à utiliser des variantes dans la suite : soit $\omega = \sum_{k\leq \ell} \omega_k \otimes \delta^k(t-f)$, avec $d\omega = 0$; on a en particulier $df \wedge \omega_\ell = 0$, d'où $\omega_\ell = df \wedge \pi$; en considérant $\omega + d(\pi \otimes \delta^{\ell-1}(t-f))$ on se ramène au cas où ℓ est remplacé par $\ell-1$, et finalement au cas où $\omega = \omega_o \otimes \delta(t-f)$; on a alors $df \wedge \omega_o = 0$, d'où $\omega_o = df \wedge \alpha$; ceci montre que l'application

$$H^{k+1}(\tilde{\Omega}_{X/T}, d_{X/T}) \longrightarrow H^k\left(M[t^{-1}] \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^\bullet_X, d\right)$$

est surjective ; l'injectivité se démontre de la même manière. Cela démontre la proposition.

Faisons maintenant les observations suivantes :

(5.3.3) L'isomorphisme obtenu envoie la différentielle de Gauss-Manin ∇ de $H^k(\tilde{\Omega}^\bullet_{X/T})_x$ sur la différentielle d_t de $H^{k+1}_{DR} M[t^{-1}]_x$; on laisse la vérification au lecteur (ou on le renvoie à [M 2] s'il est paresseux).

(5.3.4) Posons $V = X(0) \cap U$; comme $M[t^{-1}]$ (restreint à $t = 0$) est nul sur $X - X(0)$, on a $H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]) = H^k_{DR}(V, M[t^{-1}])$. Les résultats précédents donnent donc un isomorphisme de $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ vectoriels à connexion : $H^k(V, \tilde{\Omega}^\bullet_{X/T}) \simeq H^k_{DR}(U, M[t^{-1}])$; l'assertion (1.2) résulte alors de [H] , prop. I.2.8 et II.3.5.

(5.4) Démontrons maintenant l'assertion (1.3). Observons d'abord ceci : comme V est un fermé de Stein, et comme $M[t^{-1}]$ est une limite inductive de faisceaux $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}}$-cohérents, $H^k_{DR}(U, M[t^{-1}]) = H^k_{DR}(V, M[t^{-1}])$ est le k-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma\left(V, M[t^{-1}] \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \tilde{\Omega}^\bullet_X\right)$; de même $H^k(V, \tilde{\Omega}^\bullet_{X/T})$ est le k-ième groupe de cohomologie de $\Gamma(V, \tilde{\Omega}^\bullet_{X/T})$; la même remarque vaudra aussi pour les autres groupes d'hypercohomologie qu'on aura à considérer dans ce paragraphe. D'autre part, dans les assertions (1.3) et (1.4), on peut remplacer U par V , ce qu'on fera désormais.

Pour démontrer (1.3), il suffit de démontrer que l'image A de $H^k_{DR}(V,M)$ dans $H^k_{DR}(V,M[t^{-1}])$ est un réseau. Désignons alors par $(\Omega^\bullet_{X/T}, d_{X/T})$ le complexe $\Omega^k_X/df\wedge\Omega^{k-1}_X$, muni de la différentielle relative ; d'après [H], prop. I.2.8, l'image A' de $H^{k-1}(V,\Omega^\bullet_{X/T})$ dans $H^{k-1}(V,\tilde{\Omega}_{X/T})$ est un réseau (1) ; d'autre part, via l'isomorphisme (3.1), on peut considérer A comme un sous-ensemble de $H^{k-1}(V,\tilde{\Omega}_{X/T})$, et il est d'ailleurs immédiat qu'il contient A' ; tout revient donc à démontrer le lemme suivant :

LEMME (5.4.1). - <u>Il existe</u> $\ell \geq 0$ <u>tel qu'on ait</u> $t^\ell A \subset A'$.

En reprenant directement au niveau des complexes la démonstration de l'isomorphisme (3.1), on se ramène à démontrer le résultat suivant :

LEMME (5.4.2). - <u>Il existe</u> ℓ_1 <u>tel que toute classe de cohomologie de</u> $H^k_{DR}(V,M)$ <u>soit représentée par une forme</u>
$\sum_{p\leq\ell_1} \omega_p \otimes \delta^p(t-f)$, $\omega_p \in \Gamma(V,\Omega^k_X)$.

D'après [K], M est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (et même sous-holonome) ; quitte à rétrécir U, on peut en prendre une bonne filtration $\{_\ell M\}$ au voisinage de U ; on filtre alors le complexe $\Gamma(V,DRM)$ par

$${}_\ell\Gamma(V,DRM) : \quad 0 \to \Gamma(V,{}_\ell M) \to \Gamma\left(V,{}_{\ell+1}M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^1_X\right) \to \dots \to \Gamma\left(V,{}_{\ell+1}M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega^n_X\right) \to 0 .$$

Les ${}_\ell M$ sont cohérents sur $\mathcal{O}_X$; pour démontrer le lemme, il suffit donc de voir que l'injection ${}_\ell\Gamma(V,DRM) \to \Gamma(V,DRM)$ est un quasi isomorphisme pour ℓ assez grand ; ceci résulte du lemme suivant.

---

(1) Via l'identification de $H^{k-1}(V,\tilde{\Omega}_{X/T})$ avec la cohomologie relative de la fibration $U \to \mathbb{C}$, cette assertion peut aussi se démontrer par un argument de positivité des exposants caractéristiques ; voir [M3].

LEMME (5.4.3). - Pour $\ell \gg 0$, $\mathrm{gr}_\ell \Gamma(V, \mathrm{DR}M)$ est acyclique.

Comme V est un compact de Stein, et que la flèche $\mathrm{gr}\, d = \delta$ commute à l'action de $\mathcal{O}_X$, il suffit d'établir l'assertion analogue au niveau des faisceaux ; or, $\mathrm{gr}\, M$ est cohérent sur $\mathrm{gr}\, \mathcal{D} = \mathcal{O}_X[\xi_1,\dots,\xi_n]$ ($\xi_i = \mathrm{gr}\, \frac{\partial}{\partial x_i}$), et $(\mathrm{gr}\, M, \delta)$ n'est autre que le complexe de Koszul $K(\underline{\xi}, \mathrm{gr}\, M)$, avec $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$; les faisceaux de cohomologie $\underline{H}^k(\mathrm{gr}\, M, \delta)$ sont donc cohérents sur $\mathrm{gr}\, \mathcal{D}$, et annulés par les ξ_i ; il en résulte aussitôt qu'on a $\underline{H}^k(\mathrm{gr}_\ell M, \delta) = 0$ pour $\ell \gg 0$, ce qui est l'assertion cherchée. Ceci établit l'assertion (1.3).

Remarque (5.4.4). - Il est facile de préciser quel est le réseau A_p dans $H^k_{\mathrm{DR}}(V, M[t^{-1}])$; en effet, d'après la définition de M', les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur A_p/A_{p+1} doivent nécessairement vérifier $p-1 < \mathrm{Re}\,\lambda \leq p$; A_p est donc l'unique réseau qui possède cette propriété. (Malheureusement, cette propriété ne suffirait pas à déterminer A_p a priori, si l'on ne savait pas déjà que c'est un réseau ; d'où la démonstration qui précède).

(5.5) Reste à démontrer (1.4). Désignons par B (resp. B') le noyau de l'application $H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(V, M) \to H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(V, M[t^{-1}])$ (resp. $H^k(V, \Omega^\bullet_{X/T}) \to H^k(V, \tilde{\Omega}_{X/T})$) ; en envoyant $\Omega^\bullet_{X/T}[-1]$ dans $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_X$ par $\alpha \mapsto \alpha \wedge df \otimes \delta(t-f)$ on obtient un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & H^k(V, \Omega_{X/T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(V, \tilde{\Omega}_{X/T}) \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(V, M) \arrow[r] & H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(V, M[t^{-1}])
\end{tikzcd}$$

et la dernière flèche verticale est un isomorphisme.

L'assertion (1.4) revient à démontrer ceci : il existe $\ell \geq 0$ tel qu'on ait $t^{\ell}B = 0$; d'après Hamm, loc. cit., l'assertion analogue est vraie pour B' ; tout revient donc à démontrer ceci.

LEMME (5.5.1). - Il existe $\ell_1 \geq 0$ tel qu'on ait $t^{\ell_1}B \subset \operatorname{Im} B'$.

D'après (4.2), tout élément de B' se représente par un ω de la forme $\sum_{p\leq \ell_2} \omega_p \otimes \delta^p(t-f)$, $\omega_p \in \Gamma(V, \Omega_X^{k+1})$, avec ℓ_2 indépendant de ω ; on va voir, en adaptant la démonstration de (3.1) que, pour $\ell_4 \gg 0$ indépendant de ω, $t^{\ell_4}\omega$ est cohomologue dans $\Gamma\left(V, M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^{\bullet}\right)$ à un π de la forme $df \wedge \alpha \otimes \delta(t-f)$, $\alpha \in \Gamma(V, \Omega_X^k)$.

De $d\omega = 0$, on déduit en particulier qu'on a $df \wedge \omega_{\ell_2} = 0$; donc (lemme (3.2)), il existe ℓ_3 tel qu'on ait $t^{\ell_3}\omega_{\ell_2} = df \wedge \beta$, avec $\beta \in \Gamma(V, \Omega_X^k)$; d'autre part, pour tout $\ell \geq 0$, $t^{\ell}\delta^{\ell}(t-f)$ appartient à M car on a $t^{\ell}\partial_t^{\ell} = t\partial_t(t\partial_t - 1)\ldots(t\partial_t - \ell + 1)$ (appliquer les deux membres à t^s pour s'en convaincre) ; par conséquent, on a :

$$t^{\ell_2 - 1}\beta \otimes \delta^{\ell_2 - 1}(t-f) \in \Gamma\left(V, M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^k\right) \quad ;$$

en remplaçant $t^{\ell_3 + \ell_2 - 1}\omega$ par $t^{\ell_3 + \ell_2 - 1}\omega + d\left(t^{\ell_2 - 1}\beta \otimes \delta^{\ell_2 - 1}(t-f)\right)$, on est ramené au cas où ℓ_2 est remplacé par $\ell_2 - 1$; d'où, par récurrence, l'assertion.

Pour démontrer le lemme on est donc ramené au cas où ω est de la forme $df \wedge \alpha \otimes \delta(t-f)$; comme $d\omega = 0$, on a $df \wedge d\alpha = 0$, d'où $t^{\ell_3}d\alpha = df \wedge \beta$; la classe de $f^{\ell_3}\alpha$ dans $\Gamma(V, \Omega_{X/T}^k)$ est donc un cocycle, dont l'image dans $\Gamma\left(V, M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^{k+1}\right)$ est égale à $-t^{\ell_3}\omega$; ceci établit le lemme, et termine la démonstration.

6. LE FONCTEUR $R\Phi$ ET LA VARIATION.

N.B. Les résultats de ce paragraphe ne figuraient pas dans l'exposé à Luminy et ont été obtenus ultérieurement lors de la rédaction.

(6.1) Rappelons d'abord rapidement la construction de Deligne du foncteur $R\Phi$ (voir [D], exposé 13, n° 1.4). On considère sur un espace X un triplet (F, G, K) où F et G sont des complexes de faisceaux sur X munis d'une action de $\mathbb{Z}$, l'action sur F étant triviale, et où K est un morphisme équivariant $F \to G$; on désignera dans la suite par T l'action du générateur de $\mathbb{Z}$; un tel complexe est toujours homotope à un complexe (F', G', K') tel que K' soit injectif et que la suite exacte $0 \to F' \to G' \to \operatorname{coker} K' \to 0$ soit scindée degré par degré (il suffit par exemple de remplacer G par la somme de G et du cône de F) ; l'automorphisme $T-1$ de G' induit 0 sur F', donc provient d'un morphisme $V : \operatorname{coker} K' \to G'$, qui est par définition la variation.

En faisant passer cette construction aux catégories dérivées, et en l'appliquant à la flèche $K : \mathbb{C}_{X(0)} \to R\Psi$ provenant par $\bar{i}^*$ de l'application évidente $\mathbb{C}_X \to R\bar{j}^* \mathbb{C}_{\tilde{X}^*}$ (notations de l'introduction), on trouve un triangle distingué

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{C}_{X(0)} \xrightarrow{K} R\Psi \xrightarrow{U} R\Phi \xrightarrow{+1} \cdots$$

et un morphisme "variation" $V : R\Phi \to R\Psi$. Pour la relation avec la variation au sens de Lefschetz, dans le cas d'une singularité isolée, voir [D].

Je me propose ici d'expliquer brièvement comment on peut représenter $R\Phi$ (et les flèches U, V) en termes de $\mathcal{D}$-modules. Une idée naturelle serait d'étudier le microlocalisé $M^{\mathbb{R}}$ de M sur l'ensemble $(x, t=0, \rho=0, \tau)$, la microlocalisation étant liée de façon essentielle à des foncteurs de type $R\Phi$ (c'est un point que plusieurs personnes semblent avoir aperçu récemment de manière plus ou moins indépendante ; une première idée dans ce sens, à savoir la relation entre microfonctions et variation à la Lefschetz, est due à Pham, Maisonobe et Rombaldi ; voir [P]).

Toutefois, je ne poursuivrai pas ici dans cette direction, et je partirai de la représentation de $R\Psi$ obtenue au paragraphe précédent.

(6.2) Si L est un $\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}$-modules, on note $\delta\rho(L)$ le foncteur "cohomologie de de Rham de L par rapport à t ", i.e. le complexe $L \xrightarrow{\partial_t} L$; on continue à noter "DR" le complexe de de Rham par rapport à x ; enfin, comme au § 4, on restreindra les constructions à $X = X\times\{0\} \subset X\times\mathbb{C}$.

Prenons en particulier $L = N \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}\delta(t-f)|_X$; comme au lemme (4.2.1), on voit qu'on a $\delta\rho^o N = 0$, et $\delta\rho^1 N = \mathcal{O}_{X|X(0)}$, i.e. $\mathcal{O}_X$ sur $X(0)$ et 0 ailleurs. Par suite, on a un isomorphisme $(DR)(\delta\rho)N[1] \simeq \mathbb{C}_{X(0)}$.

Pour représenter la flèche $K : \mathbb{C}_{X(0)} \to R\Psi$ par un morphisme de complexes de $\mathcal{D}$-modules, plongeons N dans $N[t^{-1}] = M[t^{-1}]$, (il est facile de voir que N est sans t-torsion), et posons $N^p = t^p M' \cap N$. Tout d'abord, il est clair que K se représente par le foncteur $DR(.)[1]$ appliqué à la flèche $\delta\rho(N) \to \psi\ (N[t^{-1}])$ qui est définie par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & \tilde{N}[t^{-1}] \\ {\scriptstyle\partial_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t\partial_t} \\ N & \xrightarrow{\ t\ } & \tilde{N}[t^{-1}] \end{array}$$

où "id" est l'injection évidente, et "t" cette injection suivie de la multiplication par t . On va filtrer ce morphisme comme au § 4.

LEMME (6.2.1). - <u>On a</u> $M' \subset N$.

En effet, pour $k \gg 0$, on a $t^k M' \subset N$; soit alors $\bar{m}$ un élément de $M' + N/N$; d'une part, on a $t^k\bar{m} = 0$, d'où $\partial_t^k t^k \bar{m} = 0$, ou encore $(t\partial_t +1)\dots(t\partial_t +k)\bar{m} = 0$; d'autre part, comme $\bar{m}$ provient d'un élément de $M'/t^k M'$, il vérifie une équation $p(t\partial_t)\bar{m} = 0$, les racines de p étant de partie réelle > -1 ; donc $\bar{m} = 0$.

On a donc $N^o = M'$, $N^1 = tM'$. D'autre part, on vérifie immédiatement que les applications

$$\begin{pmatrix} N/N^{k+1} \\ \partial_t \big\downarrow \\ N/N^k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} N/N^1 \\ \partial_t \big\downarrow \\ N/N^o \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} N^o/N^1 \\ \partial_t \big\downarrow \\ N^{-1}/N^o \end{pmatrix}$$

sont des quasi isomorphismes pour tout $k \geq 0$.

(Utiliser le fait que $t\partial_t$, resp. $\partial_t t$, est bijectif sur N^k/N^{k+1} , pour $k \neq 0$, resp. $k \neq -1$) ; d'autre part, en raisonnant comme au §5, on voit que l'application

$$\begin{pmatrix} N \\ \partial_t \big\downarrow \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} N/N^{k+1} \\ \partial_t \big\downarrow \\ N/N^k \end{pmatrix}$$

devient un quasi isomorphisme pour $k \gg 0$ quand on lui applique "DR" . On voit alors finalement, utilisant les constructions du §4 que la flèche $\mathbb{C}_{X(0)} \xrightarrow{K} R\Psi$ provient, par $DR(.)[1]$, du morphisme de complexes $k : K_o^\bullet \to K_\Psi^\bullet$ défini par le diagramme

$$(6.2.2) \qquad \begin{pmatrix} N^o/N^1 \\ \partial_t \big\downarrow \\ N^{-1}/N^o \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{id} \\ \\ \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} \begin{pmatrix} \widetilde{N^o/N^1} \\ t\partial_t \big\downarrow \\ \widetilde{N^o/N^1} \end{pmatrix}$$

Ici, il faut faire agir T trivialement sur le premier complexe, et de la manière qu'on a déjà vue sur le second ; par contre, la cohomologie du second complexe, qui est concentrée en degré 0 , vaut N^o/N^1 <u>muni de</u> T . Il est alors clair que $(R\Phi, T)$ est représenté, via $DR(.)[2]$, par le complexe simple $K_\Phi^\bullet$ associé au complexe double (6.2.2), muni de T et que la flèche $R\Psi \xrightarrow{U} R\Phi$ est représentée par la flèche évidente

$$N_o/N_1 = \ker(t\partial_t , \widetilde{N^o/N^1}) \xrightarrow{u} K_\Phi^\bullet[1] \ .$$

LEMME (6.2.3). - <u>On a</u> $H^i(K_\Phi^\bullet) = 0$ <u>pour</u> $i \neq 1$, <u>et</u> $(H^1(K_\Phi^\bullet), T) = (N^{-1}/N^o, T)$; <u>de plus</u>, u <u>est égal à</u> $-\partial_t$: $N^o/N^1 \to N^{-1}/N^o$.

Il suffit de traiter le cas où l'action de T sur N^o/N^1 est nilpotent (en effet, sur les composantes isotypiques correspondant à des valeurs propres $\neq 0$, l'application ∂_t est bijective et le résultat est évident). On peut alors aussi remplacer $\widetilde{N_o/N_1}$ par l'ensemble des sommes $\sum n_p(\log t)^p$, $n_p \in N^o/N^1$.

Le complexe $K^\bullet_\Phi$ s'écrit

$$0 \longrightarrow N^o/N^1 \xrightarrow{\delta} N^{-1}/N^o \oplus \widetilde{N^o/N^1} \xrightarrow{\delta'} \widetilde{N^o/N^1} \longrightarrow 0$$

avec $\delta(\alpha) = (\partial_t\alpha, \alpha)$, $\delta'(\beta,\gamma) = -t\beta + t\partial_t\gamma$.

On vérifie tout de suite que la cohomologie de ce complexe est nulle en degré 0 et 2 ; d'autre part un 1-cocycle s'écrit $(\beta, \gamma = \sum \gamma_k(\log t)^k)$, $\gamma_k \in N_o/N_1$, avec $t\partial_t\gamma = t\beta$; on trouve que γ a nécessairement la forme suivante :

$$\gamma = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(t\partial_t)^{n-1}(t\beta)(\log t)^n + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}(t\partial_t)^n\gamma_o(\log t)^n .$$

Par conséquent, l'application $(\beta,\gamma) \mapsto (\beta,\gamma_o)$ est une bijection des cocycles sur $(N^{-1}/N^o) \times (N^o/N^1)$. L'image des cobords dans cette bijection est l'ensemble des paires (β,γ_o) vérifiant $t\beta = t\partial_t\gamma_o$, ou encore $\beta = \partial_t\gamma_o$; par suite, le quotient, i.e. $\underline{H}^1(K^\bullet_\Phi)$ est bien isomorphe à N^{-1}/N^o.

Ecrivons l'action de T sur $\underline{H}^1(K^\bullet_\Phi)$. Sur la paire (β,γ), T opère par $T\beta = \beta$, et

$$T\gamma = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(t\partial_t)^{n-1}(t\beta)(\log t + 2\pi i)^n + \sum \frac{(-1)^n}{n!}(t\partial_t)^n\gamma_o(\log t + 2\pi i)^n$$

donc sur la paire correspondante (β,γ_o), T opère par $T(\beta,\gamma_o) = (\beta, T\gamma_o + v\beta)$, avec

(6.2.4) $$v\beta = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(t\partial_t)^{n-1}(t\beta)(2\pi i)^n$$

et v vérifie la relation

(6.2.5) $\beta = \partial_t v\beta + T\beta$.

En particulier sur la paire $(\beta, \gamma_o = 0)$, $\underline{T}$ agit par $T(\beta, 0) = (\beta, v\beta) \sim (T\beta, 0)$ donc l'action de $\underline{T}$ sur $\underline{H}^1(K^\bullet_\Phi)$ est bien celle qui est indiquée.

Enfin, un cocycle de la forme $(0, \gamma)$, i.e. provenant d'un cocycle de $K^\bullet_\Psi$ correspond à la paire $(0, \gamma_o)$, ou encore à la paire $(-\partial_t \gamma_o, 0)$, ce qui établit le dernier résultat.

THÉORÈME (6.2.6). - La paire $N^o/N^1 \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} N^{-1}/N^o$ avec $u = -\partial_t$, v défini par (6.2.3), représente, via DIR(.)[1] la paire $R\Psi \underset{V}{\overset{U}{\rightleftarrows}} R\Phi$.

(Remarquer que la définition de v garde un sens si $t\beta$ n'est pas nilpotent).

Seule l'assertion relative à v et V n'a pas été démontrée ; sur la partie unipotente, elle résulte des calculs précédents et de la définition de V . Pour les autres composantes aucun calcul n'est nécessaire : la construction que l'on devra faire pour définir directement la variation au niveau des complexes $K^\bullet_\Phi$ et $K^\bullet_\Psi$ donnera nécessairement un v' : $N^{-1}/N^o \to N^o/N^1$ vérifiant $v'u = T-1$ sur N^o/N^1 , et $uv' = T-1$ sur N^{-1}/N^o ; comme u est ici bijectif, l'une de ces deux relations suffit à établir qu'on a $v' = v$.

(6.3) L'ensemble des résultats précédents s'interprète de façon plus naturelle si l'on utilise la spécialisation de Verdier (voir son exposé dans ce même volume). Je me contenterai ici de dire quelques mots sur ce sujet en renvoyant les détails à une publication ultérieure.

Soient X une variété analytique complexe, et Y une hypersurface, non nécessairement lisse de X ; notons par E_Y le fibré vectoriel de rang 1 défini par le diviseur Y , et par $N_Y = E_Y|Y$ le fibré normal de Y ; le "faisceau spécialisé de $\mathbb{C}_X$ le long de Y ", au sens de Verdier, est un complexe de faisceaux sur N_Y (donc aussi, si l'on veut, sur E_Y) que je noterai $R\Psi_Y(\mathbb{C}_X)$. Dans le cas où Y a une équation globale $f = 0$, on peut identifier E_Y à $X \times \mathbb{C}$ et N_Y à $Y \times \mathbb{C}$; on peut voir alors en utilisant les calculs précédents qu'on a un isomorphisme (dans une catégorie dérivée convenable) $R\Psi_Y(\mathbb{C}_X) \simeq DR(\mathrm{gr}\, N)[1]$, le foncteur "DR" étant ici pris par rapport à x et t ; on a posé, bien sûr, $\mathrm{gr}\, N = \oplus N^k/N^{k+1}$. On peut voir que cette formule condense pratiquement toutes les informations obtenues précédemment.

Dans le cas général, en prenant des équations locales de Y , et en examinant la manière dont $\mathrm{gr}\, N$ se transforme lorsqu'on change de carte, on fabrique un $\mathcal{D}_{E_Y}$-module holonome L , homogène par rapport à la fibre en un sens convenable, et vérifiant $DR_{E_Y}(L)[1] \simeq R\Psi_Y(\mathbb{C}_X)$.

7. REMARQUES DIVERSES.

Soit $x \in X(0)$, et b'_x le polynôme minimal de l'action de $(-t\partial_t)$ sur M'/tM' $(= N^o/N^1)$ au point x ; posons $b'_x(s) = \Pi(s - \lambda_j)$ et $B'_x(T) = \Pi(T - \exp(2\pi i \lambda_j))$; comme on a $0 \leq \mathrm{Re}\, \lambda_j < 1$, il est clair que $B'_x(T)$ est le polynôme minimal de l'action de T sur $(M'/tM')_x$.

PROPOSITION (7.1). - B'_x <u>est le polynôme minimal de l'action de</u> T <u>sur</u> $R\Psi$ <u>au voisinage de</u> x .

Cela résulte aussitôt du fait que, sur les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes, le foncteur "DR" est fidèle (parce qu'il est fidèle sur les $\mathcal{D}_X^\infty$-modules holonomes, voir [KK1] ou [Me], et parce que $\mathcal{D}_X^\infty$ est fidèlement plat sur $\mathcal{D}_X$).

Le théorème de monodromie se lit alors de la manière suivante.

PROPOSITION (7.2). - Les zéros de b'_x sont rationnels [K], et de multiplicité $\leq n = \dim X$.

Soit $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ une désingularisation de $X(0)$ au voisinage de x, et posons $\tilde{f} = f \circ \pi$. Désignons par $\tilde{M}, \tilde{M}', R\tilde{\Psi}$, etc., les objets analogues à $M, M', R\Psi$, etc., avec f remplacée par $\tilde{f}$. Soit $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, et supposons que, dans des coordonnées convenables $\tilde{f}$ s'écrive, au voisinage de $\tilde{x}$, sous la forme $g x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$; un calcul immédiat (et bien connu) montre qu'on a, au voisinage de $\tilde{x}$:

$$b(s) = \prod_i s\left(s - \frac{1}{m_i}\right) \dots \left(s - \frac{m_i - 1}{m_i}\right) \quad ;$$

donc on a $\tilde{M}' = \tilde{M}$ (cf. rem. 3.5), et d'autre part, l'assertion de la proposition 7.2 est vraie pour $\tilde{b}_{\tilde{x}}$ $(= \tilde{b}'_{\tilde{x}})$; donc elle sera encore vraie pour $\tilde{b}_{\pi^{-1}(x)}$, le polynôme minimal de $\tilde{M}/t\tilde{M}$ au voisinage de $\pi^{-1}(x)$. La proposition résulte alors du lemme suivant :

LEMME (7.3). - b'_x divise $\tilde{b}_{\pi^{-1}(x)}$.

Ceci résulte immédiatement de (7.1) et du fait qu'on a (Deligne, loc. cit.) $R\Psi = R\pi_* R\tilde{\Psi}$.

A noter que ce lemme pourraît être utile par lui-même dans des calculs explicites.

Quant à la relation entre les zéros de b_x et ceux de b'_x, elle est la même que celle qui existe à une variable, entre les zéros de l'action de $-t\partial_t$ sur $\Lambda/t\Lambda$ et $\Lambda'/t\Lambda'$, Λ un réseau de E stable par $t\partial_t$ (notations du n° 2), et Λ' le réseau canonique, i.e. celui qui vérifie $-1 < \operatorname{Re}\lambda \leq 0$, λ une valeur propre de $t\partial_t$, à savoir la suivante :

a) si λ est racine de b'_x, et $\lambda + j$ $(j \in \mathbb{Z})$ les racines correspondantes de b_x, on a :
$\sup_j \operatorname{mult}(\lambda + j, b_x) \leq \operatorname{mult}(\lambda, b'_x) \leq \sum_j \operatorname{mult}(\lambda + j, b_x)$;

b) la multiplicité de λ dans b' est égale à la "multiplicité stable" (en un sens évident) de $\lambda - k$ dans le polynôme minimal de $(-t\partial_t, (M/t^\ell M)_x)$, $0 \ll k \ll \ell$.

Je laisse la vérification de ces deux assertions au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[B] J.N. BERNSTEIN, Prolongement analytique des fonctions généralisées avec paramètres (en russe), Funkts-Analyz, 6.4 (1972) p. 26-40.

[Bj] J.E. BJÖRK, Rings of differential operators, North-Holland (1979).

[D] P. DELIGNE, S.G.A 7 II, exposés XIII et XIV, Springer Lect. Notes, n° 340 (1970), p. 82-164.

[H] H. HAMM, Zur analytischer und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie, Habilitationsschrift, Göttingen (1974) (notes multigraphiées).

[K] M. KASHIWARA, b-functions and holonomic systems, rationality of roots of b-functions, Inv. Math. 38 (1976), p. 33-53.

[K-K1] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of differential equations III, R.I.M.S., Kyoto University, Report n° 293.

[K-K2] M. KASHIWARA, T. KAWAI, Second microlocalisation and asymptotic expansions, Springer Lect. Notes in Physics, n° 126 (1980), p. 21-76.

[M1] B. MALGRANGE, Sur les polynômes de I.N. Bernstein, Uspekhi Mat. Nauk 24-9 (1974), p. 81-88 (traduction française dans : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973-74, exposé n° 20).

[M2] B. MALGRANGE, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, Springer Lect. Notes in math., n° 459 (1975), p. 98-119.

[M3] B. MALGRANGE, Polynômes de Bernstein-Sato, publications de l'I.R.M.A., RCP n° 25, vol. 28, Strasbourg (1980), p. 42-58.

[Me] Z. MEBKHOUT, Cohomologie locale des espaces analytiques complexes, Thèse, Paris (1979).

[P] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Math., vol. 2, Birkhäuser (1979).

[Va 1] A. VARCHENKO, Polyèdres de Newton et estimation des intégrales oscillantes (en russe), Funkts. Analyz 10-3 (1976), p. 13-38.

[Va 2] A. VARCHENKO, Structure de Hodge mixte asymptotique sur la cohomologie évanescente (en russe), Izv. Akad. Nauk 45, 3 (1981), p. 540-591.

B. MALGRANGE

Institut Fourier
Université de Grenoble I
Laboratoire de mathématiques pures
B.P.74
38402 Saint-Martin-d'Hères

(avril 82)