

Astérisque

JOHANNES SJÖSTRAND

Singularités analytiques microlocales

Astérisque, tome 95 (1982), p. III-166

http://www.numdam.org/item?id=AST_1982_95_R3_0

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**singularités analytiques
microlocales**

Johannes SJÖSTRAND

0. INTRODUCTION

Ces notes représentent en gros le contenu d'un cours donné à l'Université de Paris Sud au printemps 1981 et en version accélérée à l'Université de Lund. Elles sont basées sur environ 3 années de travail avec des singularités analytiques. L'auteur en est venu à ce sujet par l'étude de la propagation de singularités analytiques pour des problèmes aux limites. Parmi les trois définitions existantes du spectre singulier analytique, celle de Bros-Iagolnitzer (voir [B-I], les deux autres étant dûes à Hörmander [H] et Sato [S]) s'est révélée la plus maniable, au moins pour un analyste avec une certaine prédilection pour les opérateurs intégraux de Fourier à phases complexes. Le besoin de développer l'approche de Bros-Iagolnitzer plus systématiquement s'est alors manifesté, déjà dans le cas sans bord. Quelques pas dans cette direction ont été faits par G. Lebeau [L] et aussi par l'auteur dans un cours non-publié à Stanford pendant l'été 1980. Ensuite, et grâce à de nombreuses discussions avec B. Lascar et sous l'inspiration d'un article de P. Schapira [Sch] il est devenu clair que la notion de fonction phase se confond très profitablement avec la notion de fonction poids plurisous-harmonique. Ainsi les sections 3, 7, 9-16 ont été rajoutées depuis le cours à Stanford et la section 16 même après le cours à Orsay.

Ces notes ne tentent pas de donner un traitement définitif de la théorie (qui est encore vivante) mais seulement de développer quelques techniques, à modifier suivant les besoins de chaque problème particulier. (Par exemple pour des problèmes plutôt constructifs on pourrait supprimer le grand paramètre λ , quitte à travailler dans des domaines non-bornés). Nous n'avons pas non plus cherché à être complet, ni les opérateurs pseudo-différentiels classiques, ni les hyperfonctions ne sont traités, et même pas la théorie des problèmes aux limites qui est à l'origine de tout ce travail.

Chaque lecteur (supposé être déjà un peu familier avec des opérateurs de Fourier intégraux et. c.) jugera lui-même sur la nouveauté et l'intérêt de ces notes. Peut-être le point central est la section 11 qui contient un début de théorie systématique qui dans le meilleur cas se développera aussi un jour dans la théorie C^∞ .

Nous tenons à remercier tout particulièrement B. Lascar pour de nombreuses discussions fructueuses ainsi que N. Hanges, L. Hörmander, A. Grigis, G. Lebeau, G. Métivier, P. Schapira. Nous remercions aussi J.M. Bony, P. Schapira, Y. Laurent, Trepreau, qui ont su nous communiquer de manière compréhensible des idées de la théorie des hyperfonctions. Finalement nous remercions tous les auditeurs patients de nos 3 cours cités-ci-dessus.

1. H_φ , SYMBOLES ANALYTIQUES ET ALGÈBRES FORMELLES D'OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction $u(z, \lambda)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ appartient par définition à l'espace $H_\varphi^{loc}(\Omega)$ si

(1.1) u est holomorphe en z pour tout $\lambda > 0$

(1.2) Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(z, \lambda)| \leq C e^{\lambda(\varphi(z) + \varepsilon)}$$

pour $z \in K$, $\lambda \geq 1$.

Parfois on dit simplement que u est de classe H_φ dans Ω . On dira que u est un symbole analytique si $u \in H_0^{loc}(\Omega)$. En particulier u est un symbole d'ordre fini $m \in \mathbb{R}$ si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ telle que

(1.3) $|u(z, \lambda)| \leq C \lambda^m$, $z \in K$, $\lambda \geq 1$.

En général on ne distinguera pas entre deux éléments de $H_\varphi^{loc}(\Omega)$ si la différence est à décroissance exponentielle par rapport à $e^{\lambda\varphi}$. Plus précisément si $u, v \in H_\varphi^{loc}(\Omega)$, on dit que u et v sont équivalentes ($u \sim v$) s'il existe une fonction continue $\varphi_1 < \varphi$ sur Ω telle que

(1.4) $u - v \in H_{\varphi_1}^{loc}(\Omega)$.

Un élément formel de H_φ sur Ω est donné par :

I. Un recouvrement $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ où les $\Omega_\alpha \subset \Omega$ sont ouverts.

II. Pour chaque Ω_α un élément $u_\alpha \in H_\varphi^{loc}(\Omega_\alpha)$ (représentant local) tel que $u_\alpha \sim u_\beta$ dans $H_\varphi^{loc}(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in A$.

En particulier, pour $\varphi = 0$ on obtient la notion de symbole analytique formel. Il y a une relation d'équivalence évidente entre les éléments formels de classe H_φ sur Ω et on ne distinguera pas entre deux éléments équivalents.

Exemple 1.1. Soit $a_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ on ait avec $C = C_{\tilde{\Omega}} > 0$:

$$(1.5) \quad |a_k(z)| \leq C^{k+1} k^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in \tilde{\Omega}.$$

Alors modulo équivalence on peut définir un symbole analytique formel sur Ω par les représentants

$$a_{\tilde{\Omega}}(z, \lambda) = \sum_{0 \leq k \leq \lambda/eC_{\tilde{\Omega}}} a_k(z) \lambda^{-k}, \quad z \in \tilde{\Omega}.$$

On remarque que $a_{\tilde{\Omega}}$ est un symbole analytique d'ordre 0 sur $\tilde{\Omega}$ puisque pour $z \in \tilde{\Omega}$, $0 \leq k \leq \lambda/eC_{\tilde{\Omega}}$:

$$(1.6) \quad |a_k(z) \lambda^{-k}| \leq C \left(\frac{Ck}{\lambda}\right)^k \leq C e^{-k}, \quad C = C_{\tilde{\Omega}}.$$

Si $C_1 > C$ et $\frac{\lambda}{eC_1} < k \leq \frac{\lambda}{eC}$, $z \in \tilde{\Omega}$, alors

$$(1.7) \quad |a_k(z) \lambda^{-k}| \leq C e^{-\lambda/eC_1},$$

ce qui montre bien l'équivalence entre les représentants locaux dans les régions $\tilde{\Omega}_\alpha \cap \tilde{\Omega}_\beta$. On écrit formellement :

$$(1.8) \quad a(z, \lambda) = \sum_0^\infty a_k(z) \lambda^{-k}$$

et on appellera a un symbole analytique classique formel.

Le résultat suivant n'a peut-être qu'un intérêt théorique :

Proposition 1.2. Soit $\Omega \subset \mathcal{C}^n$ ouvert et pseudo-convexe, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue et plurisous harmonique et soit $u(z, \lambda)$ un élément formel de H sur Ω . Alors pour tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, il existe un représentant $\tilde{u}(z, \lambda) \in H_{\varphi}^{loc}(\tilde{\Omega})$ de u .

Démonstration. Ceci est une application simple des théorèmes sur l'opérateur $\bar{\partial}$ de L. Hörmander [H2]. D'abord après avoir augmenté $\tilde{\Omega}$ on peut supposer que $\tilde{\Omega}$ est pseudo-convexe. Soit $u_j(z, \lambda)$ des représentants locaux sur Ω_j , $j = 1, \dots, N$ où $\tilde{\Omega} \subset \bigcup_1^N \Omega_j$ et

soient $x_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que $\sum_1^N x_j = 1$ sur $\overline{\Omega}$. Soit $v(z, \lambda) = \sum_1^N x_j(z) u_j$. Alors $\bar{\partial} v = \sum_1^N u_j \bar{\partial} x_j$ est à décroissance exponentielle dans $L_\varphi^2(\overline{\Omega}) = L^2(\overline{\Omega}; e^{-2\lambda\varphi(x)} L(dx))$ (où $L(dx)$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C}^n) et d'après les résultats de Hörmander [H2] on peut trouver w à décroissance exponentielle dans $L_\varphi^2(\overline{\Omega})$ telle que $\bar{\partial} w = -\bar{\partial} v$. Alors $\tilde{u} = v+w$ est holomorphe et $\tilde{u} - u_j$ est à décroissance exponentielle dans $L_\varphi^2(\Omega_j \cap \overline{\Omega})$. Utilisant aussi que $\tilde{u} - u_j$ est holomorphe on en déduit que $(\tilde{u} - u_j) e^{-\lambda\varphi(z)}$ est à décroissance exponentielle uniforme sur tout compact de Ω_j . $\#$

Il sera aussi commode de parler de germes de fonctions de classe H_φ . Si $x_0 \in \mathbb{C}^n$ et $\varphi(x)$ est une fonction continue réelle définie près de x_0 , alors par définition, un élément u de H_{φ, x_0} est donné par un élément $\hat{u} \in H_\varphi^{loc}(\Omega)$ où $x_0 \in \Omega$. On dit que $u,$

$v \in H_{\varphi, x_0}$ sont équivalentes si $\hat{u} \sim \hat{v}$ dans $H_\varphi^{loc}(W)$ pour un voisinage W de x_0 .

Soient $p(x, \xi, \lambda), q(x, \xi, \lambda)$ des symboles analytiques définis dans un voisinage de $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^{2n}$. On définit alors le symbole composé dans un voisinage de (x_0, ξ_0) par

$$(1.9) \quad r = p \circ q = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N/C_0} \frac{1}{\alpha!} (i\lambda)^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial q}{\partial x^\alpha},$$

avec C_0 assez grande. Par les inégalités de Cauchy on a pour tout $\epsilon > 0$ dans un voisinage de (x_0, ξ_0) :

$$\left| \frac{\partial^\alpha p}{\partial \xi^\alpha} \right| + \left| \frac{\partial^\alpha q}{\partial x^\alpha} \right| \leq C_\epsilon e^{\epsilon \lambda} C^{|\alpha|} \cdot \alpha!$$

où C est une constante géométrique qui ne dépend pas de $\epsilon > 0$. Il est alors facile de voir que (1.9) définit bien un symbole analytique près de (x_0, ξ_0) pour $C_0 > 0$ assez grande et dont la classe d'équivalence ne change pas si l'on augmente C_0 encore. Nous allons plus tard définir de vrais opérateurs dont le symbole d'un composé est donné par (1.9). Pour l'instant on s'intéresse surtout au problème d'inversion de symboles elliptiques dans le cadre des symboles classiques. Soient donc

$$p = \sum_0^\infty p_k(x, \xi) \lambda^{-k}, \quad q = \sum_0^\infty q_k(x, \xi) \lambda^{-k}$$

des symboles analytiques classiques définis près de (x_0, ξ_0) et définissons le symbole composé par

$$(1.10) \quad r = p \circ q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} (i\lambda)^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^\alpha q}{\partial x^\alpha},$$

où la somme infinie a un sens comme somme finie en chaque degré d'homogénéité par rapport à λ .

On laisse comme exercice de montrer que r est bien un symbole analytique classique et que si \tilde{p}, \tilde{q} sont des représentants locaux de p, q et que $\tilde{r} = \tilde{p} \circ \tilde{q}$ est défini par (1.9), alors \tilde{r} est bien un représentant de r . Dans le reste de cette section on discutera uniquement des symboles analytiques classiques formels, en s'inspirant des travaux de L. Boutet de Monvel et P. Kree [B-K] et de Boutet de Monvel [B]. Si $p(x, \xi, \lambda)$ est un symbole analytique classique d'ordre 0 on lui associe l'opérateur différentiel d'ordre infini :

$$\begin{aligned} A(x, \xi, D_x, \lambda) &= p(x, \xi + \tilde{D}_x, \lambda) = \\ &= \sum \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(x, \xi, \lambda) \tilde{D}_x^\alpha = \sum_0^\infty \lambda^{-k} A_k(x, \xi, D_x), \end{aligned}$$

où $\tilde{D}_x = \frac{1}{\lambda} D_x$ et

$$(1.11) \quad A_k = \sum_{\nu + |\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} p_\nu^{(\alpha)}(x, \xi) D_x^\alpha.$$

De A on récupère p par la formule :

$$p(x, \xi, \lambda) = A(x, \xi, D_x, \lambda) \quad (1).$$

(Dans tous les calculs ici on manipule des sommes finies en chaque degré d'homogénéité). Si q est un autre symbole analytique formel d'ordre 0 et si B est son opérateur associé, alors il est facile de vérifier que l'opérateur associé à $r = p \circ q$ est $C = A \circ B = \sum_0^\infty \lambda^{-k} C_k$ (défini par $C_k = \sum_{\nu + \mu = k} A_\nu \circ B_\mu$). Il en résulte que la composition des symboles classiques est associative.

Soit $\Omega_t \subset \mathbb{C}^{2n}$, $0 \leq t \leq t_0$ une famille de petits voisinages ouverts de (x_0, ξ_0)

tels que $\Omega_s \subset \Omega_t$ pour $s \leq t$ et même

$$\left\{ \begin{array}{l} (y, \xi) \in \Omega_s \\ |x-y| \leq t-s \end{array} \right. \Rightarrow (x, \xi) \in \Omega_t$$

pour $s \leq t$. Alors pour $0 \leq s < t \leq t_0$, D_x^α est un opérateur borné de l'espace $B(\Omega_t)$ des fonctions holomorphes bornées sur Ω_t dans l'espace $B(\Omega_s)$ de norme

$$\|D_x^\alpha\|_{t,s} \leq \frac{C_0^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}}{(t-s)^{|\alpha|}}$$

où C_0 est une constante universelle ne dépendant que de n . (Si l'on choisissait plutôt Ω_t comme un polydisque de rayon const. $+t$ alors on aurait

$$\|D_x^\alpha\|_{t,s} \leq (t-s)^{-|\alpha|} |\alpha|! .)$$

Si Ω_{t_0} est assez petit alors sur Ω_{t_0} ,

$$|p_\nu^{(\alpha)}| \leq C^{1+|\alpha|} \nu^{|\alpha|} |\alpha|! ,$$

donc avec une nouvelle constante C_1 ,

$$\left\| \frac{1}{\alpha!} p_\nu^{(\alpha)} D_x^\alpha \right\|_{t,s} \leq C_1^{1+|\alpha|} \nu^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} (t-s)^{-|\alpha|} , \quad 0 \leq s < t \leq t_0 .$$

Il y a au plus $(1+k)^{n+1}$ termes dans (1.11), donc avec une nouvelle constante C on obtient :

$$(1.12) \quad \|A_k\|_{t,s} \leq C^{k+1} k^k (t-s)^{-k} , \quad 0 \leq s < t \leq t_0 .$$

Inversement, si $p = \sum_0^\infty p_k(x, \xi) \lambda^{-k}$ est un symbole classique formel au sens que les p_k sont holomorphes dans un voisinage de (x_0, ξ_0) indépendant de k mais que la condition (1.5) n'est pas nécessairement satisfaite, et si (1.12) est vérifiée on déduit alors que p est un symbole analytique classique près de (x_0, ξ_0) . En effet, $p_k = A_k(1)$ et on a avec une nouvelle constante C :

$$(1.13) \quad \sup_{\Omega_{t_0}/2} |p_k| \leq C^{k+1} k^k .$$

H_p, SYMBOLES ANALYTIQUES

Si A vérifie (1.12) on lui associe la suite $f(A) = (f_k(A))_{k=0}^{\infty}$ où $f_k = f_k(A)$ est le plus petit nombre ≥ 0 tel que :

$$(1.14) \quad \|A_k\|_{t,s} \leq f_k k^k (t-s)^{-k}, \quad 0 \leq s < t \leq t_0.$$

Alors (1.12) montre que $(f_k)_0^{\infty}$ est au plus à croissance exponentielle. Soit maintenant $B = \sum_0^{\infty} \lambda^{-k} B_k$ un autre opérateur du même type.

Lemme 1.3 : Si $C = A \circ B = \sum_0^{\infty} \lambda^{-k} C_k$, alors $f_k(C) \leq \sum_{\nu+\mu=k} f_{\nu}(A) f_{\mu}(B)$.

Démonstration : Nous avons $C_k = \sum_{\nu+\mu=k} A_{\nu} \circ B_{\mu}$ et donc pour $0 \leq s < r < t \leq t_0$:

$$\|A_{\nu} \circ B_{\mu}\|_{t,s} \leq f_{\nu}(A) f_{\mu}(B) \nu^{\nu} (r-s)^{-\nu} \mu^{\mu} (t-r)^{-\mu}$$

Si s et t sont donnés on choisit r tel que

$$r-s = \frac{\nu}{\nu+\mu} (t-s), \quad t-r = \frac{\mu}{\nu+\mu} (t-s).$$

Alors

$$\|A_{\nu} \circ B_{\mu}\|_{t,s} \leq f_{\nu}(A) f_{\mu}(B) (\nu+\mu)^{\nu+\mu} (t-s)^{-(\nu+\mu)}$$

et on obtient le Lemme. $\#$

Pour $\rho > 0$ on pose

$$\|A\|_{\rho} = \sum_0^{\infty} \rho^k f_k(A).$$

Alors (1.12) est satisfaite pour un $C > 0$ si et seulement si $\|A\|_{\rho} < \infty$ pour un $\rho > 0$.

Lemme 1.4 : Si $C = A \circ B$, $\rho > 0$ et $\|A\|_{\rho} < \infty$, $\|B\|_{\rho} < \infty$ alors $\|C\|_{\rho}$ est finie et

$$\|C\|_{\rho} \leq \|A\|_{\rho} \|B\|_{\rho}.$$

Démonstration :
$$\|C\|_\rho = \sum_0^\infty \rho^k f_k(C)$$

$$\leq \sum \rho^{\nu+\mu} f_\nu(A) f_\mu(B) = \|A\|_\rho \cdot \|B\|_\rho \quad \#$$

Si p est un symbole classique formel (dans un voisinage de $\bar{\Omega}_{t_0}$) on pose

$\|p\|_\rho = \|A\|_\rho$ où A est l'opérateur associé et on sait que $\|A\|_\rho < +\infty$ pour un $\rho > 0$ si p est un symbole analytique dans un voisinage de $\bar{\Omega}_{t_0}$. Inversement si

$\|A\|_\rho < +\infty$ alors p est un symbole analytique dans Ω_{t_0} . Il devient alors évident que $p \circ q$ est un symbole analytique classique si p et q le sont.

Soit maintenant $p = \sum_0^\infty p_k \lambda^{-k}$ un symbole analytique classique. On suppose que p est elliptique c.a.d. que $p_0 \neq 0$ partout. Il est alors standard de construire un symbole classique unique, $q = \sum_0^\infty q_k \lambda^{-k}$ tel que $p \circ q = q \circ p = 1$. (On procède par récurrence en commençant avec $q_0 = \frac{1}{p_0}$). Grâce aux pseudonormes on montre alors

Théorème 1.5 (Boutet de Monvel-Kree [B-K]) : Le symbole "inverse" q est un symbole analytique classique.

Démonstration : On fixe un point (x_0, ξ_0) dans le domaine de définition de p et on se propose de montrer que q est analytique près de (x_0, ξ_0) . On définit alors les pseudonormes $\| \cdot \|_\rho$ comme ci-dessus. Soit $q_0 = \frac{1}{p_0}$. Alors $p \circ q_0 = 1 - r$ où r est un symbole analytique classique d'ordre -1 . Si $\rho > 0$ est assez petit on a $\|r\|_\rho < 1/2$. Maintenant $q = q_0 \circ (1+r+r^2+\dots)$ (somme finie en chaque degré d'homogénéité) et q est analytique puisque $\|1+r+r^2+\dots\|_\rho \leq 2$. $\#$

Notre choix de pseudonormes $\| \cdot \|_\rho$ (introduit dans [Sj]) est différent de ceux de [B-K] et de [B]. Il permet d'obtenir la propriété d'algèbre de Banach sans calcul.

2. MÉTHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE - MÉTHODE DU COL

Dans cette section on adapte la méthode de Melin-Sjöstrand [M-Sj] (sans doute classique au moins conceptuellement) au cas analytique, suivant [Sj]. Voir aussi Lebeau [L]. On considère d'abord le cas d'une phase particulière. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule d'unité fermée et $\tilde{B} = \{\lambda x ; x \in B, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$.

Théorème 2.1 : Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de la dimension n , telle que pour $\forall N \in \mathbb{N}, \lambda > 0$, et toute fonction holomorphe u , définie dans un voisinage de \tilde{B} :

$$(2.1) \quad \int_B e^{-\lambda x^2/2} u(x) dx = \sum_{\nu=0}^{N-1} \lambda^{-\frac{n}{2}-\nu} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^\nu u(0) + R_N(\lambda),$$

où

$$(2.2) \quad \frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}} |u(z)|} \leq C \lambda^{-\frac{n}{2}} (N+1)^{\frac{n}{2}} \frac{N! 2^N}{\lambda^N}$$

Démonstration : Dans le cas d'une variable, si $u(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$ et $|u(z)| \leq 1$, alors $|u^{(k)}(0)| \leq k!$ et donc

$$\left| u(z) - \sum_0^{2N-1} \frac{u^{(k)}(0) z^k}{k!} \right| \leq (2N+1).$$

Par le principe du maximum on obtient :

$$\left| u(z) - \sum_0^{2N-1} \frac{u^{(k)}(0) z^k}{k!} \right| \leq (2N+1) |z|^{2N}.$$

On a aussi

$$\left| \frac{u^{(k)}(0) z^k}{k!} \right| \leq |z|^k.$$

Soit maintenant $u(z)$ holomorphe dans un voisinage de $\tilde{B} \subset \mathbb{C}^n$ et t.q. $\sup_{\tilde{B}} |u(z)| \leq 1$.

On peut appliquer les inégalités précédentes à toutes les droites complexes passant par 0 et on obtient pour tous $z \in \mathbb{C}$:

$$(2.3) \quad \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{u^{(\alpha)}(0)z^\alpha}{\alpha!} \right| \leq |z|^k$$

$$(2.4) \quad \left| u(z) - \sum_{|\alpha| \leq 2N-1} \frac{u^{(\alpha)}(0)z^\alpha}{\alpha!} \right| \leq (2N+1) |z|^{2N}$$

Lemme 2.2 : Soit $p_{2k}(z)$ un polynôme homogène de degré $2k$. Quand $2k$ est impair alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/2} p_{2k}(x) dx = 0$$

quand $2k$ est pair alors

$$(2.5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/2} p_{2k}(x) dx = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{k!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k p_{2k}$$

(Ici $(\frac{\Delta}{2})^k p_{2k}$ est constante).

Démonstration : Le cas $2k$ impair est trivial. Soit donc $2k$ pair. Par les relations d'homogénéité d'Euler on a

$$\frac{1}{2k} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{2k}) = p_{2k}$$

Après intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2/2} p_{2k}(x) dx &= \frac{1}{2k} \int \left(\sum \frac{\partial}{\partial x_j} (-x_j e^{-x^2/2}) \right) p_{2k}(x) dx \\ &= \frac{1}{k} \int \frac{\Delta}{2} (e^{-x^2/2}) p_{2k}(x) dx \\ &= \frac{1}{k} \int e^{-x^2/2} \frac{\Delta}{2} (p_{2k}) dx . \end{aligned}$$

Par induction on obtient (2.5) puisque

$$\int e^{-x^2/2} dx = (2\pi)^{n/2} . \quad \#$$

De (2.5) on obtient après un changement de variables

$$(2.6) \quad \int e^{-\lambda x^2/2} p_{2k}(x) dx = \frac{1}{k!} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \lambda^{-k} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k p_{2k} ,$$

donc

$$(2.7) \quad \int e^{-\lambda x^2/2} \left(\sum_{|\alpha|=2k} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx = \frac{1}{k!} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \lambda^{-k} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k u(0) .$$

On a donc (2.1) avec

$$R_N(\lambda) = I'(\lambda) + I''(\lambda) ,$$

où

$$I'(\lambda) = \int_{|x| \leq 1} e^{-\lambda x^2/2} \left(u(x) - \sum_{|\alpha| \leq 2N-1} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx ,$$

$$I''(\lambda) = - \int_{|x| \geq 1} e^{-\lambda x^2/2} \sum_{|\alpha| \leq 2N-1} \frac{u^{(\alpha)}(0) x^\alpha}{\alpha!} dx$$

Utilisant (2.3), (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} |R_N(\lambda)| &\leq (2N+1) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda x^2/2} |x|^{2N} dx \\ &= (2N+1) \lambda^{-n/2-N} \int e^{-x^2/2} |x|^{2N} dx . \end{aligned}$$

La dernière intégrale se calcule soit avec le Lemme 2.2, soit en passant par des coordonnées polaires. La première méthode donne

$$|R_N(\lambda)| \leq \frac{(2N+1)}{\lambda^{n/2+N}} (2\pi)^{n/2} 2^N (N-1 + \frac{n}{2}) (N-2 + \frac{n}{2}) \dots \left(\frac{n}{2}\right)$$

Ici on remarque que si $0 \leq a \leq C_1$ alors il existe une constante C_2 telle que

$$\frac{(n+a)(n-1+a)\dots(a+1)}{n(n-1)\dots 1} \leq C_2 n^a . \text{ Donc}$$

$$|R_N(\lambda)| \leq C(n) \frac{(N+1)^{n/2}}{\lambda^{n/2}} \cdot \frac{N! 2^N}{\lambda^N} . \quad \#$$

Remarque 2.3 : On applique la formule de Stirling :

$$N! = (2\pi)^{1/2} N^{N+1/2} e^{-N} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{N}))$$

et on trouve avec une nouvelle constante

$$\frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}} |u|} \leq C \frac{(N+1)^{(n+1)/2}}{\lambda^{n/2}} \left(\frac{2N}{e\lambda}\right)^N , N \geq 0 , \lambda > 0 .$$

Le choix optimal pour minimiser le dernier facteur est $N = \lambda/2$. On prend plutôt sa partie entière $N = [\lambda/2]$ et on trouve avec une nouvelle constante qui ne dépend que de n :

$$\frac{|R_{[\lambda/2]}(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}} |u|} \leq C (1+\lambda)^{1/2} e^{-\lambda/2} , \quad \lambda \geq 1 .$$

Le facteur $e^{-\lambda/2}$ est à considérer comme $e^{-\lambda x^2/2} \Big|_{\partial \tilde{B}}$.

Exercice 2.4 : Extraire de la démonstration du Théorème 2.1 la version suivante des inégalités de Cauchy :

$$(2.8) \quad \frac{1}{k!} \left| \left(\frac{\Delta}{2}\right)^k u(0) \right| \leq C(n) (k+1)^{n/2} (k-1)! 2^k \sup_{\tilde{B}} |u| ,$$

pour $k \geq 1$.

Remarque 2.5 : Soit $B_r = rB$, $\tilde{B}_r = r\tilde{B}$, $r > 0$. Soit u holomorphe près de \tilde{B}_r . Alors pour développer $\int_{B_r} e^{-\lambda x^2/2} u(x) dx$ on fait le changement de variables $x = ry$ et on remplace λ par λr^2 dans le Théorème 2.1. On trouve alors la même formule que dans

le Théorème 2.1, où seulement le reste a été modifié. Le nouveau reste vérifie :

$$\frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}_r} |u|} \leq C(n) \frac{(N+1)^{n/2}}{\lambda^{n/2}} \frac{N! 2^N}{(r^2 \lambda)^N}$$

Avec $N = [r^2 \lambda / 2]$ on obtient comme avant

$$(2.9) \quad \frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}_r} |u|} \leq C(n) r^n (1+r^2 \lambda)^{1/2} e^{-r^2 \lambda / 2}, \quad r^2 \lambda \geq 1.$$

Soit $q(z)$ une forme quadratique non-dégénérée sur \mathbb{C}^n . Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace totalement réel (c.a.d. $\Gamma \cap i\Gamma = \{0\}$) de dimension maximale n et telle que $q|_{\Gamma}$ soit réelle est définie positive. Soit $B_r = \{z \in \Gamma; q(z) \leq r\}$, $r > 0$ et $\tilde{B}_r = \{wz; z \in B_r, w \in \mathbb{C}, |w| \leq 1\}$. Avec un choix d'orientation sur Γ on considère

$$(2.10) \quad I(\lambda) = \int_{B_r} e^{-\lambda q(z)} u(z) dz,$$

avec u holomorphe dans un voisinage de \tilde{B}_r . Après un changement linéaire de coordonnées $z \rightarrow \tilde{z}$ on peut supposer que $\Gamma = \mathbb{R}^n$ et $q = \tilde{z}^2 / 2$, $B_r = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n; \tilde{x}^2 / 2 \leq r\}$.

Avec $\tilde{u}(\tilde{z}) = u(z)$ on obtient alors

$$(2.11) \quad I(\lambda) = \det \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right) \int_{\frac{\tilde{x}^2}{2} \leq r} e^{-\lambda \tilde{x}^2 / 2} \tilde{u}(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

Si $q(z) = \frac{1}{2} \langle Qz, z \rangle$, on trouve

$$(2.12) \quad \det \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right) = \pm (\det Q)^{-1/2}.$$

Appliquant les résultats précédents à l'intégrale (2.11) on obtient alors le développement du Théorème (2.1) avec le facteur $\det \left(\frac{dz}{d\tilde{z}} \right)$ en plus et avec Δ remplacé par $\tilde{\Delta}$, le Laplacien dans les coordonnées \tilde{z} . L'estimation du reste devient

$$(2.13) \quad \frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\tilde{B}_r} |u|} \leq C(n) \frac{r^{n/2} (N+1)^{n/2} N!}{|\det Q|^{1/2} (r\lambda)^{n/2} (r\lambda)^N} .$$

Exemple 2.6 : On considère l'intégrale sur un contour de \mathbb{C}^{2n} :

$$\mathfrak{J}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2i}\right)^n \int \int_{\substack{|x| \leq C_1 \\ \xi = -C_2 i \bar{x}}} e^{-i\lambda x \xi} u(x, \xi) dx \wedge d\xi .$$

Ici Γ est donné par $\xi = -C_2 i \bar{x}$ et $r = C_2 \cdot C_1^2$. Les projections de B_r sur \mathbb{C}_x^n et \mathbb{C}_ξ^n sont respectivement $|x| \leq C_1$ et $|\xi| \leq C_1 C_2$, donc $\tilde{B}_r \subset \{(x, \xi) ; |x| \leq C_1, |\xi| \leq C_1 C_2\}$. On a donc un développement de phase stationnaire pour $\mathfrak{J}(\lambda)$ avec le reste :

$$(2.14) \quad \frac{|R_N(\lambda)|}{\sup_{\substack{|x| \leq C_1 \\ |\xi| \leq C_1 C_2}} |u(x, \xi)|} \leq C(n) (N+1)^n \cdot \frac{N!}{(C_1^2 C_2 \lambda)^N} .$$

Pour calculer aussi les termes du développement on paramétrise le contour Γ par $x \in \mathbb{C}^n$:

$$dx \wedge d\xi = (-C_2 i)^n dx \wedge d\bar{x} = (2C_2)^n \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(2i)^n} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} (2C_2)^n L(dx)$$

où $L(dx)$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et on choisit l'orientation telle que l'on ait le signe "+". Alors on obtient

$$\mathfrak{J}(\lambda) = (2C_2 \lambda)^n \int_{|x| \leq C_1} e^{-\lambda C_2 |x|^2} u\left(x, \frac{C_2}{i} \bar{x}\right) L(dx)$$

posant $\tilde{\lambda} = 2\lambda C_2$ on peut alors identifier le $k^{\text{ième}}$ terme dans le développement :

$$(2\lambda C_2)^{-k} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2} \Delta_{x, \bar{x}} \right)^k u\left(x, \frac{C_2}{i} \bar{x}\right) (0) .$$

Ici on remarque que $\frac{1}{2} \Delta_{x, \bar{x}} = 2 \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$. Donc

$$\left(\frac{1}{2} \Delta_{x, \bar{x}}\right)^k u(x, \frac{C_2}{i} \bar{x}) = \left((2C_2 \frac{1}{i}) \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \right)^k u \left(x, \frac{C_2}{i} \bar{x} \right)$$

et on obtient

$$(2.15) \quad \mathcal{J}(\lambda) = \sum_0^{N-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{i\lambda} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \right)^k u(0,0) + R_N(\lambda)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(i\lambda)^{|\alpha|}} (\partial_x^\alpha \partial_{\bar{x}}^\alpha u)(0,0) + R_N(\lambda),$$

$$|\alpha| \leq N-1$$

où $R_N(\lambda)$ vérifie (2.14). Quand $u = u(x)$ on trouve $\mathcal{J}(\lambda) = u(0) + R_N(\lambda)$ où $R_N(\lambda)$ se majore en termes de $\sup_{|x| \leq C_1} |u(x, \lambda)|$.

On considère maintenant le cas général d'une phase qui n'est pas nécessairement quadratique. On se ramène alors au cas quadratique à l'aide du lemme de Morse. (Voir Hörmander [H3]).

Lemme 2.7 : *Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe définie près de $z_0 \in \mathbb{C}^n$. On suppose que z_0 est un point critique non-dégénéré, c.a.d. $\varphi'(z_0) = 0$, $\det \varphi''(z_0) \neq 0$. Alors on peut trouver des coordonnées locales holomorphes centrées en z_0 telles que :*

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{1}{2} (\tilde{z}_1^2 + \dots + \tilde{z}_n^2).$$

Démonstration : On peut d'abord se ramener au cas $z_0 = 0$, $\varphi(z) = \frac{1}{2} (z_1^2 + \dots + z_n^2) + \mathcal{O}(|z|^3)$. Par la formule de Taylor,

$$\varphi(z) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(tz) dt = \frac{1}{2} \sum \sum q_{jk}(z) z_j z_k =$$

$$= \frac{1}{2} \langle Q(z)z, z \rangle,$$

où

$$q_{j,k}(z) = 2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k} (tz) dt$$

de telle manière que $Q(0) = I$. On cherche \tilde{z} de la forme $\tilde{z} = A(z)z$ avec $A(0) = I$. Il suffit alors de résoudre ${}^t A(z) A(z) = Q(z)$, et on peut prendre par exemple $A(z) = Q(z)^{1/2}$. La racine carrée est bien définie puisque $Q(z) = I +$ petite perturbation.

#

Si $\varphi(w, z)$ est holomorphe près de $(0, z_0) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^n$ et $\varphi(0, z)$ vérifie les hypothèses du Lemme de Morse, alors pour w petit, il existe un point critique unique (et non-dégénéré) $z(w)$ près de z_0 pour la fonction $z \rightarrow \varphi(w, z)$. De plus $z(w)$ est une fonction holomorphe de w . Les coordonnées \tilde{z} construites dans la démonstration du Lemme de Morse dépendent holomorphiquement de w .

Théorème 2.8 : Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de 0, φ une fonction holomorphe sur U avec $z = 0$ comme seul point critique. On suppose $\varphi(0) = 0$, $\det \varphi''(0) \neq 0$. Soit $V \subset\subset U$ un voisinage ouvert de 0 et supposons que $\operatorname{Re} \varphi(x) \geq 0$ pour tous $x \in V \cap \mathbb{R}^n$ et que $\operatorname{Re} \varphi(x) > 0$ sur $\partial V_{\mathbb{R}}$. Alors il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que pour toute fonction holomorphe bornée u sur U on ait

$$(2.16) \quad I(\lambda) = \int_{V_{\mathbb{R}}} e^{-\lambda \varphi(x)} a(x) dx = \sum_{0 \leq k \leq \lambda/C} (2\pi)^{\frac{n}{2}} (k! \lambda^{\frac{n}{2}+k})^{-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{\Delta}\right)^k \left(\frac{u}{\mathcal{J}}\right)(0) + R(\lambda)$$

où $|R(\lambda)| \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon \lambda} \sup_U |u(z)|$, $\lambda \geq 1$, et

$$\tilde{\Delta} = \sum \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}_j^2}, \quad \mathcal{J} = \pm \det \frac{d\tilde{z}}{dz}.$$

Ici $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ sont des coordonnées comme dans le Lemme de Morse, $\mathcal{J}(0) = (\det \varphi''(0))^{1/2}$ où on choisit la branche qui se déforme continûment en 1 sous l'homotopie $[0, 1] \ni s \rightarrow (1-s) \varphi''(0) + sI$.

Démonstration : "Méthode du Col". On fait d'abord une légère déformation. Pour $\delta > 0$ petit on considère le contour $\Gamma_\delta : V_{\mathbb{R}} \ni x \rightarrow x + \delta \overline{\varphi'(x)} = z$. Le long de

LA PHASE STATIONNAIRE

(l'image de) Γ_δ on a

$$\varphi(z) = \varphi(x) + \delta |\varphi'(x)|^2 + o(\delta^2 |\varphi'(x)|^2),$$

et donc pour $\delta > 0$ assez petit $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq C_\delta |z|^2$, où $C_\delta > 0$. Si l'on fixe $\delta > 0$ assez petit, alors la formule de Stokes et l'hypothèse que $\operatorname{Re} \varphi > 0$ sur $\partial V_{\mathbb{R}}$ entraînent que modulo une erreur $o\left(\frac{1}{\epsilon} e^{-\epsilon \lambda} \sup_U |u|\right)$ on ait

$$(2.17) \quad I(\lambda) \equiv \int_{\Gamma} e^{-\lambda \varphi(z)} u(z) dz, \quad \Gamma = \Gamma_\delta.$$

Maintenant il est clair que seulement un voisinage de 0 va donner une contribution non négligeable à (2.17) et on peut supposer que le Lemme de Morse soit applicable dans un voisinage de Γ . On trouve alors

$$(2.18) \quad I(\lambda) \equiv \int_{\tilde{\Gamma}} e^{-\lambda \tilde{z}^2/2} \tilde{u}(\tilde{z}) d\tilde{z}, \quad \tilde{u}(\tilde{z}) = u(z) \det \frac{dz}{d\tilde{z}}.$$

Par construction on a sur $\tilde{\Gamma}$

$$(2.19) \quad \operatorname{Re} \tilde{z}^2/2 \geq C |\tilde{z}|^2, \quad C > 0.$$

Ecrivant $\tilde{z} = x+iy$ on trouve alors que $|t_y| \leq |t_x|^2$ pour tout $(t_x, t_y) \in T_0(\tilde{\Gamma})$ et le Théorème des fonctions implicites et (2.19) montrent que $\tilde{\Gamma}$ (au moins dans un voisinage de 0) est de la forme $y = h(x)$, $x \in W$, où $h(x)$ est une fonction réel-analytique vérifiant $|h(x)| \leq \theta |x|$, $\theta < 1$. Soit

$$\tilde{\Gamma}_t : W \ni x \rightarrow x + it h(x) \in \mathbb{C}^n.$$

La formule de Stokes montre alors que avec une erreur exponentiellement petite on a

$$(2.20) \quad I(\lambda) \equiv \pm \int_W e^{-\lambda x^2/2} \tilde{u}(x) dx.$$

Nous avons $t \left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right) \circ \left(\frac{d\tilde{z}}{dx}\right) = \varphi''(0)$ en 0 et modulo le signe, le théorème résulte maintenant du Théorème 2.1 et de la Remarque 2.5. Pour finalement déterminer le signe on déforme $\varphi(x)$ continûment en $x^2/2$. $\#$

Remarque 2.9 : L'hypothèse " $\operatorname{Re} \varphi|_{\partial V_{\mathbb{R}}} > 0$ " peut être affaiblie. Par exemple on

peut supposer seulement que $\partial V_{\mathbb{R}}$ soit une hypersurface réel-analytique près de chaque composante connexe de $K = \{x \in \partial V_{\mathbb{R}} ; \operatorname{Re} \varphi(x) = 0\}$, et que $d\varphi|_{\partial V_{\mathbb{R}}} \neq 0$ sur K . Il existe des conditions encore plus faibles.

Remarque 2.10 : On peut introduire des paramètres dans le Théorème 2.8. Par exemple soit $W \subset \mathbb{C}^k$ un voisinage de 0 et $\varphi(w, z)$ une fonction holomorphe sur $W \times U$ telle que $\varphi(0, z)$, U, V vérifient les hypothèses du Théorème 2.8. Après avoir diminué W autour de 0 on obtient pour toute fonction holomorphe bornée $u(z)$ sur U :

$$e^{\lambda\varphi(w, z(w))} \int_{V_{\mathbb{R}}} e^{-\lambda\varphi(w, x)} u(x) dx =$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq \lambda/C} (2\pi)^{n/2} (k! \lambda^{n/2+k})^{-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{\Delta}_w\right)^k \left(\frac{u}{\partial_w}\right)(z(w)) + R(w, \lambda),$$

où $\tilde{\Delta}_w, \partial_w, z(w)$ dépendent holomorphiquement de w et

$$|R(w, \lambda)| \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\lambda} \sup_U |u|.$$

On laisse comme exercice d'apporter les modifications nécessaires dans la démonstration du Théorème 2.8.

3. LEMME "FONDAMENTAL" ET TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS LE DOMAINE COMPLEXE

On va d'abord discuter des formes quadratiques réelles sur \mathbb{C}^n . Soit donc q une telle forme et posons $\mathcal{J} q(x) = q(ix)$. Donc $\mathcal{J}^2 = I$. Clairement q est pluriharmonique (c.a.d. harmonique sur toute droite complexe) ssi $\mathcal{J}q = -q$. Disons que q est du type de Levi si $\mathcal{J}q = q$. Si q est une forme quadratique réelle arbitraire, alors on a une décomposition unique $q = h + \ell$ où h est pluriharmonique et ℓ est de Levi, de plus $\ell = \frac{1}{2}(q + \mathcal{J}q)$, $h = \frac{1}{2}(q - \mathcal{J}q)$. Nous avons aussi

$$h(z) = \operatorname{Re} \langle z, Az \rangle, \quad \ell(z) = \langle z, \mathcal{L}\bar{z} \rangle$$

où $A = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial z_j \partial z_k} \right)$, $\mathcal{L} = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right)$. Donc q est plurisous-harmonique (pl.s.h) ssi $\ell \geq 0$.

Rappelons que $\operatorname{sign}(q) = m_+ - m_-$ où m_+ (m_-) est le nombre de valeurs propres > 0

LEMME FONDAMENTAL

(< 0) pour une diagonalisation de q, et que $m_{\pm} = \max \dim_{\mathbb{R}} L$ où L parcourt les sous espaces réel-linéaires tels que $q|_L > 0$. q est non dégénérée ssi $m_{+} + m_{-} = 2n$.

Proposition 3.1 : Soit q(z) une forme quadratique plurisous-harmonique sur \mathbb{C}^n .
Alors

(a) $sign(q) \geq 0$,

(b) Si en plus q est non dégénérée de signature 0 (c.a.d. $m_{-}(q) = n$) alors la même chose est vraie pour toute forme quadratique $\tilde{q} \leq q$ qui est plurisous-harmonique.

Démonstration : (a) Soit $L \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace réel linéaire de dimension m_{-} tel que $q|_L < 0$. Alors si l'on décompose $q = h + \ell$ on trouve pour tout $0 \neq x \in L$ que $h(x) = q(x) - \ell(x) \leq q(x) < 0$ et donc $q(ix) = -h(x) + \ell(x) > \ell(x) \geq 0$. Donc $q|_{iL} > 0$ et $m_{+} \geq m_{-}$. (L est totalement réel). La partie (b) devient évidente. $\#$

On peut maintenant établir le "lemme fondamental".

Lemme 3.2 : Soit $\varphi(x,y)$ une fonction réelle plurisous-harmonique de classe C^{∞} , définie dans un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^{n+k}$. On suppose que $\nabla_y \varphi(0,0) = 0$ et que $\nabla_y^2 \varphi(0,0)$ est non dégénérée de signature 0. Pour x dans un petit voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n , soit $y = y(x)$ le point critique (unique) de $y \rightarrow \varphi(x,y)$ qui est proche de 0 (donc $y(x)$ est une fonction C^{∞} de x). Alors la fonction $\phi(x) = \varphi(x, y(x))$ est pl. s. h. Si $\tilde{\varphi} \leq \varphi$ est une autre fonction pl. s. h. avec $\tilde{\varphi}(0,0) = \varphi(0,0)$ alors $\nabla_y^2 \tilde{\varphi}(0,0)$ est aussi non dégénérée de signature 0 et dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ on a $\tilde{\phi} \leq \phi$ où $\tilde{\phi}$ est définie à partir de $\tilde{\varphi}$ comme ϕ à partir de φ .

Démonstration : Soit $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}^k$ un sous-espace de dimension réelle = k tel que $\nabla_y^2 \varphi(0,0)|_{\Gamma_0} < 0$. Après un changement de variables complexe linéaire on peut supposer que $\Gamma_0 = \mathbb{R}^k$. On étend Γ_0 à une famille de sous espaces remplissant \mathbb{C}^k , en posant $\Gamma_t = \{y \in \mathbb{C}^k ; \text{Im } y = t\}$, $t \in \mathbb{R}^k$. Ici on remarque que si $\psi(t,s)$ est une fonction C^{∞} réelle définie près de 0 dans $\mathbb{R}^{n'+n''}$ avec un point critique en 0 et telle que $\nabla_s^2 \psi(0,0)$ soit non dégénérée, alors si l'on introduit le point critique $s(t)$ de $s \rightarrow \psi(t,s)$ la fonction $f(t) = \psi(t, s(t))$ a un point critique en 0. De plus $\nabla_t^2 f$ est non dégénérée ssi $\nabla_{(t,s)}^2 \psi(0,0)$ est non dégénérée et $\text{sign } \nabla_t^2 f + \text{sign } \nabla_s^2 \psi = \text{sign } \nabla_{(t,s)}^2 \psi$. Tout ceci devient clair si l'on fait le changement de variables en

s, $s \rightarrow s - s(t)$. Alors dans les nouvelles coordonnées $s(t) = 0$ et $\nabla_t \nabla_s \psi(0,0) = 0$.

Dans le cas particulier où ψ est de signature 0, $n' = n''$ et $\nabla_s^2 \psi < 0$ on a $\nabla_t^2 f > 0$ et on peut donner la valeur critique par une formule mini-max locale :

$$\psi(0,0) = \inf_t \sup_s \psi(t,s) .$$

Ici les "inf" et "sup" sont pris localement sur des voisinages convenables de 0.

Appliquant ces remarques à $y \rightarrow \varphi(x,y)$, $y = s + it$, on trouve

$$\phi(x) = \inf_t \sup_{y \in \Gamma_t} \varphi(x,y)$$

et la formule analogue pour $\check{\phi}$. Il est alors clair que $\check{\phi} \leq \phi$. Si $\check{\phi}$ est pluriharmonique (pl.h.) et donc la partie réelle d'une fonction holomorphe on sait que $\check{\phi}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe, donc pl.h. . Pour vérifier que ϕ est pl.s.h. en un point x_0 , on peut sans changer $\phi''(x_0)$ remplacer φ par $\frac{1}{2} < (x-x_0, y-y_0)$, $\nabla^2 \varphi(x_0, y_0) < \frac{1}{2} \mathbb{R}^{2n}$ si $y_0 = y(x_0)$. On est alors ramené au cas des formes quadratiques et on peut trouver $\check{\phi} \leq \varphi$ pl.h. avec $\check{\phi}(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$. Alors $\check{\phi} \leq \phi$ avec égalité en x_0 et on déduit que $\phi''(x_0)$ est pl.s.h. $\#$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction C^∞ pl.s.h. définie près de $x_0 \in \mathbb{C}^n$ avec $\varphi''(x_0)$ non dégénérée de signature 0. Pour $\xi \in \mathbb{C}^n$ près de $\xi_0 = \frac{2}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0)$, on définit alors $\varphi^*(\xi) =$ valeur critique de $x \rightarrow \varphi(x) + \text{Im} \langle x, \xi \rangle = \text{v.c.}_x (\varphi + \text{Im} \langle x, \xi \rangle)$. Pour $f(x)$ holomorphe on a $\frac{\partial}{\partial x} \text{Im} f = \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial x}$. Donc le point critique de $x \rightarrow \varphi(x) + \text{Im} \langle x, \xi \rangle$ est donné par l'équation $\xi = \frac{2}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$. D'après le lemme fondamental on sait que $\varphi^*(\xi)$ est pl.s.h. . Si l'on introduit $\Lambda_\varphi \subset \mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_\xi^n$ par $\xi = \frac{2}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ alors les projections de Λ_φ sur \mathbb{C}_x^n et \mathbb{C}_ξ^n sont des difféomorphismes locaux. Λ_φ s'écrit aussi : $x = x(\xi)$ où $x(\xi)$ est le point critique de $x \rightarrow \varphi(x) + \text{Im} \langle x, \xi \rangle$. On a

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi(x) + \text{Im} \langle x, \xi \rangle) \right) (x(\xi), \xi) = \frac{1}{2i} x(\xi)$$

c.a.d. Λ_φ est aussi donnée par : $x = \frac{2}{1} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi}(\xi)$. La projection $\Lambda_\varphi \rightarrow \mathbb{C}_x^n$ étant un

LEMME FONDAMENTAL

difféomorphisme, on sait que $(\varphi^*)''$ est non dégénérée. La signature est 0 parce que comme dans la démonstration du Lemme 3.2 on peut diminuer $\varphi''(x_0)$ jusqu'à une forme pluriharmonique (tout en restant non dégénérée) et alors $(\varphi^*)''(\xi_0)$ diminuera aussi dans les formes non dégénérées jusqu'à une forme pluriharmonique qui est nécessairement de signature 0. Notons enfin que l'on peut récupérer $\varphi(x)$ par

$$\varphi(x) = v.c. \int_{\xi} (\varphi^*(\xi) - \text{Im } x \cdot \xi) .$$

Bien entendu φ^* est essentiellement la transformée de Legendre de φ .

Avant de continuer avec la transformée de Fourier, on fait quelques remarques générales. D'abord soit $\varphi(y)$ une fonction C^∞ réelle définie près de $0 \in \mathbb{C}^k$ et avec un point de col en 0. (Un point critique non dégénéré de signature 0 sera désormais appelé "point de col" ou simplement "col"). Nous appellerons contour d'intégration une application injective de différentielle injective $\Gamma : W \rightarrow \mathbb{C}^k$ où $W \subset \subset \mathbb{R}^k$ est ouvert et Γ est C^∞ dans un voisinage de \bar{W} . Soit maintenant Γ un contour d'intégration dans \mathbb{C}^k qui passe par 0 et tel que $\varphi(y) - \varphi(0) \leq -C|y|^2$ pour y dans (l'image de) Γ . On appelle alors Γ un bon contour par rapport à φ . Si $u \in H_{\varphi,0}$ alors seul un voisinage de $y = 0$ donne une contribution non exponentiellement petite à l'intégrale $I_\Gamma(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(0)} \int_{\Gamma} e^{\lambda\varphi(y)} u(y,\lambda) dy$. Cette intégrale est donc bien définie modulo

le signe (qui dépend d'un choix d'orientation pour Γ) et modulo un terme exponentiellement petit quand $\lambda \rightarrow \infty$. Cette dernière imprécision dépend d'une part du fait que les éléments de $H_{\varphi,0}$ sont définis seulement modulo " \sim " et d'autre part du fait que le domaine de définition de u ne contient pas nécessairement l'image de Γ à moins que l'on restreigne Γ à un voisinage suffisamment petit de 0. Si Γ_1 est un deuxième bon contour alors par la formule de Stokes et avec des bons choix d'orientation on a que $I_\Gamma(\lambda) - I_{\Gamma_1}(\lambda)$ est exponentiellement petit quand $\lambda \rightarrow \infty$. En effet le Lemme de Morse réel (voir Hörmander [H3]) nous permet de trouver des coordonnées réelles (t,s) , $t, s \in \mathbb{R}^n$ telles que $\varphi(y) = \frac{1}{2}(t^2 - s^2)$ et alors Γ et Γ_1 sont de la forme $t = \gamma(s)$, $t = \gamma_1(s)$ avec $|\gamma(s)|, |\gamma_1(s)| \leq \theta|s|$, $\theta < 1$, et on a donc une déformation évidente de bons contours et la formule de Stokes s'applique. Rajoutons maintenant des paramètres $x \in \mathbb{C}^n$ et supposons que $\varphi(x,y)$ est C^∞ , réelle et définie dans un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^{n+k}$ et que $\varphi(0,y)$ vérifie les hypothèses ci-dessus. Soit alors $\phi(x) = v.c \int_{\Gamma_0} \varphi(x,y)$. Alors si $u \in H_{\varphi,(0,0)}$, on pose $U(x,\lambda) = \int_{\Gamma_0} u(x,y,\lambda) dy$

où Γ_0 est un bon contour pour $\varphi(0,y)$. Alors $U(x,\lambda)$ est holomorphe en x et définie dans un voisinage de 0. Appliquant le Lemme de Morse réel et la formule de Stokes

on voit aussi que modulo une erreur exponentiellement petite on peut remplacer le contour Γ_0 par un bon contour Γ_x pour $y \rightarrow \varphi(x,y)$ (dépendant de manière C^∞ de x) et donc $V(x,\lambda) \in H_{\phi,0}$. Nous avons ainsi défini au signe près $\int u(x,y,\lambda) dy \in H_{\phi,0}$ pour $u \in H_{\varphi,0}$.

Revenons maintenant aux fonction φ et φ^* discutées auparavant. Modulo le signe on définit pour $u \in H_{\varphi,x_0}$

$$\mathcal{F}u(\xi,\lambda) = \int_{\Gamma_\xi} e^{-i\lambda x \cdot \xi} u(x,\lambda) dx \in H_{\varphi^*,\xi_0}$$

où Γ_ξ est une famille lisse de bons contours pour $x \rightarrow \varphi(x) + \text{Im } x \cdot \xi$. De même on définit

$$\mathcal{G}u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\Gamma_x^*} e^{i\lambda x \cdot \xi} v(\xi,\lambda) d\xi \in H_{\varphi,x_0}$$

pour $v \in H_{\varphi^*,\xi_0}$ où Γ_x^* est une famille lisse de bons contours pour $\xi \rightarrow \varphi^*(\xi) - \text{Im } x \cdot \xi$

Avec des bons choix d'orientation on a

Proposition 3.3 : Pour $u \in H_{\varphi,x_0}$ on a $u = \mathcal{G}\mathcal{F}u$ dans H_{φ,x_0} .

Démonstration : On écrit

$$(3.1) \quad u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int \int_{\substack{\xi \in \Gamma^*(x) \\ s \in \Gamma(\xi)}} e^{i\lambda(x-y) \cdot \xi} u(y,\lambda) dy \wedge d\xi.$$

Le contour composé est automatiquement bon pour la fonction $(y,\xi) \rightarrow \varphi(y) - \text{Im}(x-y) \cdot \xi$ qui a un col en $y = x$, $\xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$. (Nous reprendrons la démonstration de ce fait en plus grande généralité dans la section 4). Un autre bon contour est donné par $\hat{\Gamma}(x) : \xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i C(\overline{x-y})$, $|y-x| \leq \frac{1}{C}$ si $C > 0$ est assez grande. D'après nos remarques précédentes (3.1) est encore valable avec le contour $\hat{\Gamma}(x)$ à la place (modulo une erreur négligeable). Alors on peut facilement appliquer l'exemple 2.6 pour conclure. $\#$

4. OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS ET FOURIER INTÉGRAUX DANS LE DOMAINE COMPLEXE

Dans un premier temps il sera commode de faire opérer nos opérateurs sur les espaces de germes H_{φ, x_0} . Il est clair cependant que l'on contrôle aussi les domaines de définition, et en effet dans la section 12 on sera obligé de reprendre le calcul des opérateurs pseudodifférentiels avec plus de précision.

Soit $a(x, y, \theta, \lambda)$ un symbole analytique, défini dans un voisinage de $(x_0, x_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^{3n}$ et soit $\varphi(x)$ une fonction C^∞ réelle (pas nécessairement pl. s. h.) avec

$\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) = \xi_0$. Pour $u \in H_{\varphi, x_0}$ on définit alors $Au \in H_{\varphi, x_0}$ par

$$(4.1) \quad Au(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\theta} a(x, y, \theta, \lambda) u(y, \lambda) dy d\theta$$

où $\Gamma(x)$ est un contour de la forme

$$\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i R(\overline{x-y}), \quad |x-y| \leq r.$$

Pour $R > 0$ assez grande et $r > 0$ assez petite (et x assez voisin de x_0), $\Gamma(x)$ est un bon contour, car le long de $\Gamma(x)$ on a

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\varphi(x)} \Big| e^{i\lambda(x-y)\theta} \Big| e^{\lambda\varphi(y)} &= \\ = e^{\lambda(\varphi(y)-\varphi(x)) - 2\lambda \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) (y-x) - R|x-y|^2} &\leq e^{-\lambda(R-C)|x-y|^2} \end{aligned}$$

où $C > 0$ dépend de φ mais pas de R . Le choix de r et de R n'affecte pas Au dans H_{φ, x_0} . Quand $a = 1$ nous avons déjà vu que $Au = u$ dans H_{φ, x_0} avec le bon choix d'orientation pour $\Gamma(x)$.

Explicitons l'opérateur (4.1). Le long de $\Gamma(x)$ on a

$$dy \wedge d\theta = (-Ri)^n dy \wedge \overline{dy} = (2R)^n \frac{dy \wedge \overline{dy}}{(2i)^n} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} (2R)^n L(dy),$$

donc

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad Au(x, \lambda) &= \left(\frac{R\lambda}{\Pi}\right)^n \int_{|x-y| \leq r} e^{2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-y) - R\lambda |x-y|^2} \\
 &\quad \times a(x, y, \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + iR(\overline{x-y}), \lambda) u(y) L(dy) \\
 &= \int k(x, y, \lambda) u(y, \lambda) L(dy) .
 \end{aligned}$$

Si a est un symbole d'ordre 0 alors

$$|k(x, y, \lambda)| e^{-\lambda(\varphi(x) - \varphi(y))} \leq C_{R,a} \lambda^n e^{-\lambda(R-C)|x-y|^2} .$$

Nous avons donc un résultat de continuité évident dans les espaces L^2_φ .

Pour (x, ξ) près de (x_0, ξ_0) on définit le symbole de A ; $\sigma_A(x, \xi, \lambda)$ par

$$(4.3) \quad \sigma_A(x, \xi, \lambda) = e^{-i\lambda x \xi} A(e^{i\lambda(\cdot)\xi}) .$$

La méthode de la phase stationnaire donne

$$(4.4) \quad \sigma_A(x, \xi, \lambda) \equiv \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(i\lambda)^{|\alpha|}} (\partial_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a)(x, x, \xi, \lambda) ,$$

modulo un terme à décroissance exponentielle, si $C > 0$ est assez grande. On remarque que $\sigma_A = a$ si $a = a(x, \theta, \lambda)$ ne dépend pas de y .

L'application $a(x, y, \theta, \lambda) \rightarrow \sigma_A(x, \xi, \lambda)$ n'est pas injective mais nous allons montrer que l'action de A sur H_{φ, x_0} ne dépend que de σ_A . Par la formule de Stokes, il suffit en effet de montrer :

Lemme 4.1 : Si $\sigma_A = 0$ dans $H_{O, (x_0, \xi_0)}$ alors il existe un symbole $b(x, y, \theta, \lambda) \in$

$H_{O, (x_0, x_0, \xi_0)}$ à valeurs dans les $(n-1)$ -formes en θ tel que

$$(4.5) \quad e^{i\lambda(x-y)\theta} a(x, y, \theta, \lambda) d\theta = \frac{i}{\lambda} d_\theta (e^{i\lambda(x-y)\theta} b(x, y, \theta, \lambda))$$

dans $H_{-\text{Im}(x-y)\theta}$, (x_0, x_0, ξ_0) .

Démonstration : On écrit

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^n \sigma_A(x, \eta, \lambda) = \int \int e^{i\lambda y\theta} a(x, x-y, \theta, \lambda) e^{-i\lambda y\eta} dy d\theta =$$

$$= (\mathcal{F}_{(y, \theta) \rightarrow (\eta, \theta^*)} u)(\eta, 0, \lambda) = v(x, \eta, 0, \lambda),$$

où $u(x, y, \theta, \lambda) = a(x, x-y, \theta, \lambda) e^{i\lambda y\theta}$ et on considère x comme paramètre. Ici $u(x, \dots, \lambda)$ est de classe H_φ avec $\varphi = -\text{Im}(y\theta)$ qui est pl. h. et la discussion de la section 3 s'applique. Donc $v(x, \dots, \lambda)$ est de classe H_{φ^*} où $\varphi^* = \text{Im} \eta \cdot \theta^*$ est la fonction pl. h. duale de φ . Notre hypothèse dit que $v(x, \eta, 0, \lambda)$ est à décroissance exponentielle (par rapport à $e^{\lambda\varphi^*(\eta, 0)} = 1$) dans un voisinage de $x = x_0$, $\eta = \xi_0$. Après modification avec un terme $= 0$ dans $H_{\varphi^*, (x_0, \xi_0)}$ on peut alors supposer que $v = 0$ sur $\theta^* = 0$.

Ensuite on multiplie par $e^{i\lambda\eta\theta^*}$, on applique la formule de Taylor à l'ordre 1 en θ^* et on remultiplie par $e^{-i\lambda\eta\theta^*}$. Alors on trouve

$$(4.6) \quad v(x, \eta, \theta^*, \lambda) = \sum_1^n \hat{v}_j(x, \eta, \theta^*, \lambda) \theta_j^* \quad , \quad \hat{v}_j \in H_{\varphi^*, (x_0, \xi_0)}$$

où les \hat{v}_j dépendent holomorphiquement de x . Par la formule de Fourier inverse que nous avons établi dans la section précédente on trouve

$$u(x, y, \theta, \lambda) = \sum_1^n \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta_j} v_j \quad \text{dans } H_{\varphi, (x_0, 0, \xi_0)}$$

où

$$v_j = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int \int e^{i\lambda(y\eta + \theta\theta^*)} \hat{v}_j(x, \eta, \theta^*, \lambda) d\eta d\theta^* \in H_{\varphi, (x_0, 0, \xi_0)}$$

c'est-à-dire $v_j = b_j(x, y, \theta, \lambda) e^{i\lambda y \cdot \theta}$ où b_j est un symbole. On obtient alors le Lemme avec

$$b = \sum_1^n (-1)^{j+1} b_j(x, x-y, \theta, \lambda) d\theta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\theta_j} \wedge \dots \wedge d\theta_n \quad \#$$

Pour traiter la composition nous allons généraliser notre cadre. Soit $\varphi(z, y, \theta)$ une fonction de classe C^2 , réelle, définie près de $(z_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{C}^{n_z + n_y + n_\theta}$, soit

$f(y)$ une fonction réelle de classe C^2 définie près de y_0 et supposons que $(y, \theta) \rightarrow \varphi(z, y, \theta) + f(y)$ ait un col en (y_0, θ_0) . Soit alors $g(z) = v.c. (\varphi(z, y, \theta) + f(y))$ qui sera pl. s. h. si φ et f le sont. Si $a(z, y, \theta, \lambda) \in H_{\varphi, (z_0, y_0, \theta_0)}$ on sait alors définir (modulo le signe) un opérateur $A : H_{f, y_0} \rightarrow H_{g, z_0}$ par

$$Au(z, \lambda) = \int \int_{\Gamma_1(z)} a(z, y, \theta, \lambda) u(y, \lambda) dy d\theta ,$$

$\Gamma_1(z)$ est un bon contour pour $(y, \theta) \rightarrow \varphi(z, y, \theta) + f(y)$ qui dépend de manière C^2 de z .

Soit maintenant $b(x, z, w, \lambda) \in H_{\psi, (x_0, z_0, w_0)}$, $(x_0, z_0, w_0) \in \mathbb{C}^{n_x + n_z + n_w}$ et faisons les mêmes hypothèses sur (b, ψ, g) que l'on a fait sur (a, φ, f) . Alors on a un opérateur $B : H_{g, z_0} \rightarrow H_{h, x_0}$ défini par

$$Bv(x, \lambda) = \int \int_{\Gamma_2(x)} b(x, z, w, \lambda) v(z, \lambda) dz dw ,$$

$h(x) = v.c. (\psi(x, z, w) + g(z))$, et $B \circ A : H_{f, y_0} \rightarrow H_{h, x_0}$ est donné par

$$B \circ A u(x, \lambda) = \iiint \int_{\Gamma(x)} b(x, z, w, \lambda) a(z, y, \theta, \lambda) u(y, \lambda) dy d\theta dz dw ,$$

où $\Gamma(x)$ est le "contour composé" : $(z, w) \in \Gamma_2(x)$, $(y, \theta) \in \Gamma_1(z)$.

Avant de continuer on fait ici une remarque générale. Soit $F(x, y)$ de classe C^2 définie près de 0 dans \mathbb{C}^{n+k} , telle que $F(0, y)$ ait un point de col en $y = 0$. Si $y = y(x)$ est le point critique de $y \rightarrow F(x, y)$, nous avons déjà observé que $G(x) = F(x, y(x))$ a un col en 0 ssi $f(x, y)$ a un col en $(0, 0)$. Soit $\Gamma(x)$ un bon contour pour $y \rightarrow F(x, y)$ et $\tilde{\Gamma}$ un bon contour pour $G(x)$ (en supposant que G a un col en 0). Alors pour (x, y) sur le contour composé ; $x \in \tilde{\Gamma}$, $y \in \Gamma(x)$ on a $F(x, y) \leq G(x) - C|y - y(x)|^2 \leq G(0) - C|x|^2 - C|y - y(x)|^2$. Le contour composé est donc bon puisque $|x|^2 + |y - y(x)|^2 \sim |x|^2 + |y|^2$.

Revenant à l'opérateur $B \circ A$ on constate que $(z, w, y, \theta) \rightarrow \psi(x, z, w) + \varphi(z, y, \theta) + f(y)$ a un col et que le contour composé $\Gamma(x)$ est bon. Donc $B \circ A$ est un opérateur "inté-

gral de Fourier" du même type que A et B si on compte (z,w,θ) comme les "variables de fibre".

Supposons maintenant que $(z,w) \rightarrow \psi(x_0,z,w) + \varphi(z,y_0,\theta_0)$ ait un col en (z_0,w_0) et soit $\Gamma_3(x,y,\theta)$ un bon contour pour $(z,w) \rightarrow \psi(x,z,w) + \varphi(z,y,\theta)$ et $F(x,y,\theta)$ la valeur critique. Alors $(y,\theta) \rightarrow F(x,y,\theta) + f(y)$ a un col près de (y_0,θ_0) et la valeur critique est $h(x)$. Soit $\Gamma_4(x)$ un bon contour pour $(y,\theta) \rightarrow F(x,y,\theta) + f(y)$. Alors le contour $\tilde{\Gamma}(x)$ donné par $(y,\theta) \in \Gamma_4(x)$, $(z,w) \in \Gamma_3(x,y,\theta)$ est bon pour $(z,w,y,\theta) \rightarrow \psi(x,z,w) + \varphi(z,y,\theta) + f(y)$ et on obtient

$$(4.7) \quad B \circ A u(x,\lambda) = \iiint_{\tilde{\Gamma}} b a u \, dy \, d\theta \, dz \, dw = \\ = \int_{\Gamma_4(x)} \int c(x,y,\theta,\lambda) u(y,\lambda) \, dy \, d\theta$$

où

$$(4.8) \quad c(x,y,\theta,\lambda) = \int_{\Gamma_3(x,y,\theta)} \int b(x,z,w,\lambda) a(z,y,\theta,\lambda) \, dz \, dw \in H_{F,(x_0,y_0,\theta_0)}$$

L'interprétation de notre hypothèse supplémentaire (que $(z,w) \rightarrow \psi(x_0,z,w) + \varphi(z,y_0,\theta_0)$ ait un col) et de (4.7), (4.8) est que dès que l'on sait définir $B(a(\cdot,y,\theta,\lambda)) = c(x,y,\theta,\lambda)$ alors l'équation $B \circ A$ s'obtient en appliquant B sous le signe somme de A. Quand B est un opérateur pseudodifférentiel l'hypothèse supplémentaire est toujours vérifiée, et en particulier pour deux opérateurs pseudodifférentiels on obtient le :

Théorème 4.2 : Soient $A, B \in H_{\varphi, x_0} \rightarrow H_{\varphi, x_0}$ deux opérateurs pseudodifférentiels.

Alors $B \circ A$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole

$$(4.9) \quad \sigma_{B \circ A}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| \leq C} \frac{1}{\alpha!} (i\lambda)^{-|\alpha|} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_B(x, \xi, \lambda) \partial_x^{\alpha} \sigma_A(x, \xi, \lambda)$$

avec $C > 0$ assez grande.

Démonstration : D'après le Lemme 4.1 on peut supposer que A, B sont donnés par (4.1) avec $a = \sigma_A(x,\theta,\lambda)$, $b = \sigma_B(x,\theta,\lambda)$ respectivement. D'après les remarques précédentes on a alors

$$B \circ A u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\lambda(x-y)\theta} c(x, \theta, \lambda) u(y, \lambda) dy d\theta,$$

avec

$$c(x, \theta, \lambda) = e^{-i\lambda x \theta} B(a(\cdot, x, \theta, \lambda) e^{i\lambda(\cdot)\theta}).$$

Cette quantité se développe avec la méthode de la phase stationnaire et on trouve (4.9). $\#$

Remarque 4.3 : On peut aussi définir des opérateurs pseudodifférentiels avec des phases non-standard :

$$(4.10) \quad Au(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\lambda\psi(x, y, \theta)} \tilde{a}(x, y, \theta, \lambda) u(y, \lambda) dy d\theta.$$

Ici on suppose que ψ est holomorphe, définie près de $(x_0, x_0, \theta_0) \in \mathbb{C}^{3n}$ et que $\psi|_{x=y} = 0$, $\det \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \neq 0$. Alors par l'astuce de Kuranishi on écrit

$$\psi(x, y, \theta) = (x-y) \xi(x, y, \theta)$$

où $\theta \rightarrow \xi(x, y, \theta)$ est un difféomorphisme local et holomorphe. Si $\theta = \theta(x, y, \xi)$ est l'inverse, on obtient formellement

$$(4.11) \quad Au(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\lambda(x-y)\xi} a(x, y, \xi, \lambda) u(y, \lambda) dy d\xi,$$

avec $a(x, y, \xi, \lambda) = \tilde{a}(x, y, \theta, \lambda) \det \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)$. Un bon contour pour (4.11) donne un bon contour pour (4.10) et réciproquement. Pour deux opérateurs du type (4.10) pas forcément avec la même phase, d'une part le Théorème 4.2 est valable et d'autre part on obtient $B \circ A$ en appliquant B formellement sous le signe somme de A (ou bien ${}^t A_y$ sous le signe somme de B). Des phases non-standard apparaissent après changement de coordonnées holomorphes.

Remarque 4.4 : Si on veut étudier l'action d'un opérateur pseudodifférentiel simultanément dans plusieurs espaces H_{φ, x_0} où φ varie légèrement on pourra utiliser des contours singuliers de la forme

$$\tilde{\gamma}(x) : \theta = \frac{2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i R \frac{(x-y)}{|x-y|}, \quad |x-y| \leq r$$

dans (4.1). Le long de $\tilde{\Gamma}(x)$ on a modulo des termes en dy_k , $1 \leq k \leq n$:

$$d\theta_j \equiv \frac{R}{i} \bar{\partial}_y \left(\frac{\overline{y_j - x_j}}{|y-x|} \right) = \frac{R}{i|y-x|} \left(\overline{dy_j} - \frac{\overline{y_j - x_j}}{|y-x|} \bar{\partial}_y |y-x| \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} dy \wedge d\theta &= \left(\frac{R}{i|y-x|} \right)^n dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge \left(\overline{dy_1} - \frac{\overline{y_1 - x_1}}{|y-x|} \bar{\partial}_y |y-x| \right) \wedge \\ &\quad \dots \wedge \left(\overline{dy_n} - \frac{\overline{y_n - x_n}}{|y-x|} \bar{\partial}_y |y-x| \right) \\ &= \left(\frac{R}{i|y-x|} \right)^n dy \wedge \left(\overline{dy} - \sum_1^n \frac{\overline{y_j - x_j}}{|y-x|} \overline{dy_1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_y |y-x| \wedge \overline{dy_{j+1}} \wedge \dots \wedge \overline{dy_n} \right). \end{aligned}$$

Ici on peut remplacer $\bar{\partial}_y |y-x|$ par $\bar{\partial}_{y_j} |y-x| = \frac{1}{2} \frac{(y_j - x_j)}{|y-x|} \overline{dy_j}$, et le long de $\tilde{\Gamma}(x)$ on a donc

$$dy \wedge d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{i|y-x|} \right)^n dy \wedge \overline{dy} = \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{|y-x|} \right)^n L(dy).$$

Ainsi l'intégrale (4.1) avec $\Gamma(x)$ remplacé par $\tilde{\Gamma}(x)$ devient

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \tilde{A}u(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \left(\frac{R\lambda}{i} \right)^n \int_{|x-y| \leq r} e^{2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-y) - R\lambda |x-y|} |x-y|^{-n} \\ &\quad \times a(x, y, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + iR \frac{(x-y)}{|x-y|}, \lambda) u(y, \lambda) L(dy). \end{aligned}$$

Le noyau est donc localement intégrable et si a est un symbole d'ordre 0 on a un résultat évident de continuité dans $L^2_{\tilde{\varphi}}$ si $\tilde{\varphi}$ est assez proche de φ dans la norme C^1 (ou même Lipschitz).

Vérifions aussi que $\tilde{A}u = Au$ si dans (4.1) on prend le contour Γ : $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i \frac{R}{r} (\overline{x-y})$. Pour cela on déforme le contour continûment en introduisant pour $t \geq 1$:

$$\Gamma_t(x) : \begin{cases} \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i t \frac{R}{r} (\overline{x-y}) & , \text{ si } |x-y| \leq \frac{r}{t} \\ \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i R \frac{\overline{x-y}}{|x-y|} & , \text{ si } \frac{r}{t} \leq |x-y| \leq r . \end{cases}$$

Alors $\int_{\Gamma_t} \dots dy d\theta$ ne dépend pas de t et d'autre part $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_t} \dots dy d\theta = \int_{\Gamma} \dots dy d\theta$

puisque pour λ, R, r fixés :

$$\theta = \int \dots \dots \dots dy d\theta = \theta(1) t^{-2n} . t^n \rightarrow 0 , t \rightarrow + \infty .$$

$$\int_{|x-y| \leq \frac{r}{t}} \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + i t \frac{R}{r} (\overline{x-y})$$

Pour terminer cette section nous allons légèrement généraliser les résultats de la section 3 concernant la transformée de Fourier. Soit $\varphi(x,y)$ une fonction holomorphe, définie près de $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ telle que

$$(4.13) \quad \det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0 .$$

Soit $f(y)$ une fonction pl.s.h. de classe C^∞ , définie près de y_0 telle que

$$(4.14) \quad y \rightarrow -\operatorname{Im} \varphi(x_0, y) + f(y) \text{ a un col en } y_0 .$$

Alors $g(x) = \text{v.c. } (-\operatorname{Im} \varphi(x, y) + f(y))$ est pl.s.h. . Soit $\psi(x, y) = -\operatorname{Im} \varphi(x, y)$.

Alors $\frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et (4.13) est équivalente à la condition

$$(4.13)' \quad \left\{ \left(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} , y, -\frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} \text{ est le graphe d'un difféomorphisme (symplectique) ,}$$

que l'on dénote \mathcal{X} . (4.14) entraîne que $\nabla_y^2 (\psi(x, y) + f(y))$ est non dégénérée ce qui équivaut au fait que l'application $\mathcal{X}(\Lambda_f) \ni (x, \xi) \rightarrow x \in \mathbb{C}^n$ soit un difféomorphisme local. Alors $\Lambda_g = \mathcal{X}(\Lambda_f)$. Puisque $\Lambda_f = \mathcal{X}^{-1}(\Lambda_g)$ et \mathcal{X}^{-1} est donnée par $-\psi$ avec x et y permutés, il résulte de (4.13), (4.14) que $\nabla_x^2 (-\psi(x, y_0) + g(x)) (x_0)$ est non dégénérée. Diminuant $f''(y_0)$ jusqu'à une forme pl.h. on montre comme dans

la section 3 que $x \rightarrow -\psi(x, y_0) + g(x)$ a un col en x_0 . Aussi $f(y) = v.c. (-\psi(x, y) + g(x)) + C$ et en posant $y = y_0$ on trouve $C = 0$. Donc pour résumer

$$(4.15) \quad x \rightarrow -\psi(x, y) + g(x) \text{ a un col près de } x_0 \\ \text{et la valeur critique est } f(y) .$$

Soit maintenant $a(x, y, \lambda)$ un symbole analytique classique elliptique d'ordre 0 défini près de (x_0, y_0) et soit $T : H_{f, y_0} \rightarrow H_{g, x_0}$ défini par

$$(4.16) \quad Tu(x, \lambda) = \int_{\Gamma(x)} e^{i\lambda\varphi(x, y)} a(x, y, \lambda) u(y, \lambda) dy$$

où $\Gamma(x)$ est un bon contour pour $y \rightarrow \psi(x, y) + f(y)$. On cherche à inverser T par un opérateur de la forme

$$(4.17) \quad Sv(y, \lambda) = \lambda^n \int_{\tilde{\Gamma}(y)} e^{-i\lambda\varphi(x, y)} b(x, y, \lambda) v(x, \lambda) dx ,$$

où $\tilde{\Gamma}(y)$ est un bon contour pour $x \rightarrow -\psi(x, y) + g(x)$ et b est un symbole analytique classique d'ordre 0.

Théorème 4.5 : Il existe un symbole analytique classique b tel que $S \circ T = I$ dans H_{f, y_0} , $T \circ S = I$ dans H_{g, x_0} , si S est donné par (4.17).

Démonstration : Soit \tilde{b} un symbole analytique classique d'ordre 0 et \tilde{S} l'opérateur correspondant dans (4.17). Alors

$$T \circ \tilde{S} u(x, \lambda) = \lambda^n \int_{y \in \Gamma(x)} \int_{z \in \tilde{\Gamma}(y)} e^{i\lambda(\varphi(x, y) - \varphi(z, y))} a \tilde{b} u(z, \lambda) dz dy .$$

Par l'astuce de Kuranishi on reconnaît ici un opérateur pseudodifférentiel classique elliptique. Soit alors R une paramétrix, c.a.d. un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole est donné par le Théorème 1.5. On pose $S = \tilde{S} \circ R$ et comme on a vu avant dans cette section, S est alors de la forme (4.17) avec b donné par

$$t_R(x, \tilde{D}_x, \lambda) (\tilde{b}(\cdot, y, \lambda) e^{-i\lambda\varphi(\cdot, y)}) = b(x, y, \lambda) e^{-i\lambda\varphi(x, y)} .$$

Nous avons $T \circ S \equiv I$ dans H_{g, x_0} . De même on construit un opérateur S_1 de la forme (4.17) tel que $S_1 \circ T \equiv I$ dans H_{f, y_0} et alors nécessairement $S \equiv S_1$. $\#$

Exemple 4.6 : On prend $x_0 = y_0 = 0$, $\varphi = (x-y)^2$, $f = g = 0$. Si $u \in H_{0,0}$ est un symbole analytique classique on voit bien que Tu est de la même nature et on a un développement de phase stationnaire pour Tu tout à fait explicite. Si v est un symbole analytique classique, pour résoudre l'équation $Tu = v$ on est alors tenté de déterminer les termes successifs de u en écrivant le développement de Tu et identifier les termes. Cela marche très bien au niveau des symboles classiques formels, mais pour majorer u_k dans $u = \sum_0^\infty u_k \lambda^{-k}$ on a des difficultés, dues au fait que le $k^{\text{ième}}$ terme dans le développement de Tu fait intervenir essentiellement $2k$ dérivées de u . Il est clair que l'on ne peut pas aboutir uniquement avec des estimations car déjà le problème

$$u(x, \lambda) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \partial_x^2 u(x, \lambda) = v(x) \quad (\text{une variable})$$

n'a pas en général de solution symbole analytique classique, quand v est une fonction holomorphe.

5. OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS DANS LE DOMAINE RÉEL, RÉOLUTIONS DE L'IDENTITÉ

On suit essentiellement [Sj 1,4]. Quand on travaille dans le domaine réel on évitera d'écrire les opérateurs pseudodifférentiels avec la phase standard, car pour cette phase le contour $\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\theta^n$ n'est pas très bon et on tombe facilement dans des difficultés avec des fonctions tronçature. Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$ et écrivons $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{C}^{2n}$. Soit $\varphi(x, y, \alpha)$ une fonction analytique définie près de (x_0, x_0, x_0, ξ_0) vérifiant :

$$(5.1) \quad \text{Pour } x = y = \alpha_x \text{ on a } \varphi = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha_\xi,$$

$$(5.2) \quad \text{Sur le domaine réel ; } \text{Im } \varphi \geq C(|x - \alpha_x|^2 + |y - \alpha_x|^2) \text{ où } C > 0.$$

Exemple : $\varphi(x, y, \alpha) = (x-y)\alpha_\xi + \frac{i}{2} ((x-\alpha_x)^2 + (y-\alpha_x)^2)$.

En général, si φ vérifie (5.1) et (5.2) alors

$$(5.3) \quad \varphi(x, y, \alpha) = (x-y)\alpha_{\xi} + h(x, y, \alpha) ,$$

où

$$(5.4) \quad h(x, y, \alpha) = \mathcal{O}(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2) ,$$

$$(5.5) \quad \text{Im } h(x, y, \alpha) \geq C(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2) \text{ sur le réel.}$$

Par rapport à la phase standard, φ à n variables de trop. Cependant on peut éliminer les variables α_x à l'aide de la phase stationnaire, car (5.4), (5.5) entraînent que pour x proche de y et proche du réel, la fonction $\alpha_x \rightarrow h(x, y, \alpha)$ a un point critique non dégénéré et proche de $x \sim y$. Si $g(x, y, \alpha_{\xi})$ est la valeur critique il est clair que

$$(5.6) \quad g(x, y, \alpha_{\xi}) = \mathcal{O}(|x-y|^2) .$$

En appliquant le Lemme 7.5 ci-dessous (et sans doute aussi par une analyse directe du Hessien de g) on trouve aussi que pour x, y, α_{ξ} réels,

$$(5.7) \quad \text{Im } g(x, y, \alpha_{\xi}) \geq C |x-y|^2$$

où $C > 0$. Donc, un opérateur intégral de Fourier exprimé avec la phase $\varphi(x, y, \alpha)$ se ramène au moins formellement à l'aide de la méthode de la phase stationnaire à un opérateur pseudodifférentiel exprimé avec la phase $(x-y)\alpha_{\xi} + g(x, y, \alpha_{\xi})$. Si $a(x, y, \alpha, \lambda)$ est un symbole analytique défini près de (x_0, x_0, x_0, ξ_0) et $\psi(x)$ une fonction C^{∞} réelle définie dans un voisinage complexe de x_0 avec $\frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0) = \xi_0$, on a donc un opérateur pseudodifférentiel $A : H_{\psi, x_0} \rightarrow H_{\psi, x_0}$ défini par

$$(5.8) \quad Au(x, \lambda) = \lambda^{3n/2} \int \int_{\Gamma(x)} e^{i\lambda\varphi(x, y, \alpha)} a(x, y, \alpha, \lambda) u(y, \lambda) dy d\alpha ,$$

où le bon contour $\Gamma(x)$ se trouve sans difficulté, en intégrant d'abord en α_x . Les résultats et remarques de la section précédente restent valables : on associe à A son symbole $\sigma_A(x, \xi, \lambda)$ comme avant et il est toujours vrai que si $\sigma_A = 0$ alors il existe un symbole analytique $b(x, y, \alpha, \lambda)$ à valeurs dans les $(2n-1)$ -formes en α , tel que

$$e^{i\lambda\varphi} a d\alpha = d_{\alpha} (e^{i\lambda\varphi} b)$$

près de (x_0, x_0, x_0, ξ_0) . En effet, comme avant on trouve

$$\lambda^{-3n/2} \sigma_A(x, \eta, \lambda) = (\mathcal{F}(y, \alpha) \rightarrow (\eta, \alpha^*) u_x) (\eta, 0, \lambda) ,$$

$$u_x(y, \alpha, \lambda) = e^{i\lambda\varphi(x, x-y, \alpha)} a(x, x-y, \alpha, \lambda) .$$

On n'est pas obligé de travailler seulement avec des germes, si $V \subset \subset \mathbb{C}^{2n}$ est ouvert et φ et a sont définis dans un voisinage de $\bar{V} = \{(x, y, \alpha) \in \bar{V} ; x = y = \alpha_x\}$ et $\sigma_A = 0$ comme symbole formel alors il existe un symbole $b(x, y, \alpha, \lambda)$, défini dans un voisinage de \bar{V} tel que $a d_\alpha = e^{-i\lambda\varphi} d_\alpha (e^{i\lambda\varphi} b)$ dans les symboles formels. De plus si a est un symbole classique analytique, on peut choisir b pareil.

Aussi comme dans la section 4, si A et B sont deux opérateurs de la forme (5.8) pas forcément avec la même phase alors on obtient $A \circ B$, soit en appliquant A sous le signe somme de B , soit en appliquant B sous le signe somme de A . De plus, la formule habituelle est valable pour $\sigma_{A \circ B}$.

Soit maintenant $V \subset \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de (x_0, ξ_0) et a et φ comme ci-dessus et définis dans des voisinages complexes de \bar{V} . Soit $\chi(x, y, \alpha) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ à support près de \bar{V} avec $\bar{V} \cap \text{supp}(\chi-1) = \emptyset$. Alors on a la "réalisation" de l'opérateur A définie par

$$(5.9) \quad A^V u(x, \lambda) =$$

$$= \lambda^{3n/2} \iint_{\alpha \in V} e^{i\lambda\varphi(x, y, \alpha)} a(x, y, \alpha, \lambda) \chi(x, y, \alpha) u(y, \lambda) dy d\alpha ,$$

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) .$$

Ainsi $A^V : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Grâce à (5.2), A^V est indépendant du choix de χ modulo un opérateur dont le noyau distribution est à décroissance exponentielle dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (c.a.d. il existe $C > 0$ telle que $e^{\lambda C} k(x, y, \lambda)$ est borné en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uniformément par rapport à λ). De même si l'on remplace a par un symbole équivalent, A^V reste inchangé modulo le même type "d'opérateur négligeable".

Si $\sigma_A = 0$ comme symbole formel alors comme on vient de le remarquer $e^{i\lambda\varphi} a d_\alpha \sim d_\alpha (e^{i\lambda\varphi} b)$ et si le bord de V est assez régulier la formule de Stokes montre que

modulo un opérateur négligeable,

$$(5.10) \quad A^V u(x, \lambda) \equiv \lambda^{3n/2} \iint_{\alpha \in \partial V} e^{i\lambda\varphi(x, y, \alpha)} \chi b u(y) dy .$$

Quand $\sigma_A = 1$ on appelle

$$\Pi_{\alpha, \lambda}(x, y) = e^{i\lambda\varphi(x, y, \alpha)} a(x, y, \alpha, \lambda)$$

une résolution de l'identité et on écrit formellement

$$I = \int \Pi_{\alpha, \lambda} d\alpha .$$

Lemme 5.1 : Soit $\psi(x)$ une fonction analytique définie près de x_0 avec $\text{Im } \psi(x_0) = 0$, $\psi'(x_0) = \xi_0$ et telle que $\text{Im } \psi(x) > 0$ pour x réel. Soit aussi $b(x, \lambda)$ un symbole analytique défini près de x_0 . Alors pour x dans un voisinage réel de x_0 on a modulo une fonction négligeable (c.a.d. à décroissance exponentielle dans C^∞) :

$$A^V(b(\cdot, \lambda) e^{i\lambda\psi(\cdot)}) \equiv c(x, \lambda) e^{i\lambda\psi(x)}$$

où $c(x, \lambda)$ est un symbole analytique défini par

$$c e^{i\lambda\psi} = A(b e^{i\lambda\psi}) \text{ dans } H_{-\text{Im } \psi, x_0} .$$

(Il est sous-entendu que le support de χ soit assez petit pour que $A^V(b e^{i\lambda\psi})$ soit défini près de x_0).

Démonstration : On écrit :

$$(5.11) \quad \begin{aligned} & A^V(b e^{i\lambda\psi})(x) = \\ & = \lambda^{3n/2} \iint_{\substack{\alpha \in V \\ y \in \mathbb{R}^n}} e^{i\lambda(\varphi(x, y, \alpha) + \psi(y))} \chi(x, y, \alpha) a(x, y, \alpha, \lambda) b(y, \lambda) dy d\alpha \end{aligned}$$

Pour $x = x_0$, la phase $\varphi + \psi$ a un point critique non dégénéré en $y = \alpha_x = x_0$, $\alpha_x = \xi_0$ et

$$\text{Im}(\varphi + \psi) \geq C(|y - \alpha_x|^2 + |x - \alpha_x|^2) .$$

Ceci n'est pas assez pour que $\alpha \in V$, $y \in \mathbb{R}^n$ soit un bon contour, car il manque un terme $C |\alpha_\xi - \xi_0|^2$.

Soit alors $0 \leq \tilde{\chi}(x, y, \alpha) \in C_0^\infty$ une fonction qui vaut 1 près de \overline{V} et à support dans la région où $x = 1$. D'après la formule de Stokes (en y) on peut remplacer le contour réel dans (5.11) par le contour

$$\Gamma_\delta(x) : \begin{cases} \alpha \in V \\ \tilde{y} = y + i\delta \tilde{\chi}(x, y, \alpha) \overline{\partial_y(\varphi + \psi)} \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n . \end{cases}$$

Pour $(\alpha, \tilde{y}) \in \Gamma_\delta$ et $\delta > 0$ assez petit on a avec des nouvelles constantes > 0 .

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi + \psi &\geq C(|y - \alpha_x|^2 + |x - \alpha_x|^2 + \tilde{\chi} |\partial_y(\varphi + \psi)|^2) \\ &\geq C'(|y - \alpha_x|^2 + |x - \alpha_x|^2 + |\alpha_\xi - \partial_x \psi|^2) . \end{aligned}$$

Donc $\Gamma_\delta(x_0)$ est un bon contour le long duquel la fonction troncature n'intervient que dans la région où $\operatorname{Im} \varphi + \psi > 0$.

Quand x est voisin de x_0 on a toujours (5.12) mais le contour ne passe pas forcément par le point critique. Analysant la situation dans des coordonnées du Lemme de Morse on constate néanmoins que après une déformation supplémentaire ($= \theta(|x - x_0|)$) qui ne change pas le contour dans la région de troncature, on obtient un bon contour et on s'est ramené à la situation de la section 4. $\#$

Remarque 5.2 : Soient $\Pi_{\alpha, \lambda} = a(x, y, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\varphi}$, $\tilde{\Pi}_{\alpha, \lambda} = \tilde{a} e^{i\lambda\tilde{\varphi}}$ des résolutions de l'identité que l'on réalise à l'aide de fonctions troncature comme ci-dessus. Alors $\Pi_{\alpha, \lambda} \circ \Pi_{\beta, \lambda}$ est négligeable pour $\alpha \neq \beta$. Ceci est évident pour $\alpha_x \neq \beta_x$ et se démontre par la même déformation de contour que dans la preuve du Théorème 5.1 quand $\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_\xi \neq \beta_\xi$.

Théorème 5.3 : Soit A comme avant, et

$$B u(x, \lambda) = \iint e^{i\lambda\psi(x, y, \alpha)} b(x, y, \alpha, \lambda) u(y) dy d\alpha$$

un autre opérateur du même type. Soit c(x, y, \alpha, \lambda) le symbole donné dans $H_{-Im \psi}$ par

SPECTRE SINGULIER

$$A(e^{i\lambda\psi(\cdot, y, \alpha)} b(\cdot, y, \alpha, \lambda)) = e^{i\lambda\psi(x, y, \alpha)} c(x, y, \alpha, \lambda) .$$

Alors si $U \subset\subset V \subset\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont des ouverts (assez petits pour que A^V, B^U soient définis) on a modulo un opérateur négligeable :

$$A^V \circ B^U \equiv C^U$$

où C^U est une réalisation de

$$C^U u(x, \lambda) = \iint e^{i\lambda\psi} c^U u \, dy \, d\alpha .$$

6. SPECTRE SINGULIER ANALYTIQUE ESSENTIELLEMENT D'APRÈS BROS-IAGOLNITZER

Dans cette section on introduit le spectre singulier analytique ou front d'onde dans l'esprit de Bros-Iagolnitzer (voir [B-I]). Rappelons que leur définition a été suivie par celles de Sato [S] et Hörmander [H] et que Bony [Bo] a montré l'équivalence de toutes ces définitions, même dans le cadre des hyperfonctions en ce qui concerne les définitions de Sato et Bros-Iagolnitzer. Dans le cadre plus simple des distributions nous montrerons l'équivalence entre $WF_{a, \text{Sato}}$ et

$WF_{a, \text{Bros-Iagolnitzer}}$. Voir aussi Lebeau [L] et livre à paraître de Hörmander.

Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ et $\varphi(x, \alpha)$ une fonction analytique définie dans un voisinage de (x_0, α_0, ξ_0) telle que

$$(6.1) \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_x = \alpha_\xi \quad \text{pour} \quad x = \alpha_x$$

$$(6.2) \quad \text{Im} \varphi \geq C |x - \alpha_x|^2 \quad \text{pour} \quad x, \alpha \text{ réels} .$$

Soit $a(x, \alpha, \lambda)$ un symbole analytique classique elliptique défini près de (x_0, α_0, ξ_0) .

Définition 6.1 : Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert contenant x_0 . On dit que $u = 0$ (microlocalement) en (x_0, ξ_0) si

$$\int e^{i\lambda\varphi(x, \alpha)} a(x, \alpha, \lambda) \chi(x) \overline{u(x)} \, dx$$

est à décroissance exponentielle quand $\lambda \rightarrow +\infty$, uniformément pour α dans un voisinage réel de (x_0, ξ_0) . Ici $\chi \in C_0^\infty(X)$ vaut 1 près de x_0 .

Cette définition ne dépend pas du choix de χ .

Proposition 6.2 : La définition 6.1 ne dépend pas du choix de (a, φ) .

Démonstration : Supposons que $u = 0$ microlocalement près de (x_0, ξ_0) pour le choix (a, φ) et soit $(\tilde{a}, \tilde{\varphi})$ un autre choix. L'opérateur pseudodifférentiel dans le domaine complexe

$$Au(x, \lambda) = \iint e^{i\lambda(\varphi(x, \alpha) - \overline{\varphi(y, \alpha)})} a(x, \alpha, \lambda) u(y, \lambda) dy d\alpha$$

est de symbole elliptique σ_A et admet donc une paramétrix dans des espaces H_{ψ, x_0} avec ψ convenable. On peut alors trouver un symbole analytique classique $\tilde{b}(x, \alpha, \lambda)$ défini près de (x_0, x_0, ξ_0) tel que

$$A(\tilde{b}(\cdot, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}}) = \tilde{a}(x, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}}.$$

D'après les résultats de la section 4, si $(x_0, \xi_0) \in V \subset\subset W \subset\subset \mathbb{R}^{2n}$ où V, W sont des ouverts suffisamment petits on obtient pour $\alpha \in V$ modulo une fonction négligeable (c.a.d. à décroissance exponentielle dans C_0^∞)

$$(6.3) \quad A^W(\tilde{b}(\cdot, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}}) \equiv \tilde{a}(x, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}(x, \alpha)}.$$

Cette relation exprime $\tilde{a} e^{i\lambda\tilde{\varphi}}$ comme une superposition de fonctions $a e^{i\lambda\varphi}$:

$$(6.4) \quad \tilde{a}(x, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\tilde{\varphi}(x, \alpha)} \equiv \int_{\beta \in W} a(x, \beta, \lambda) e^{i\lambda\varphi(x, \beta)} f(\alpha, \beta, \lambda) d\beta$$

où

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = \int e^{-i\lambda\overline{\varphi}(x, \beta) + i\lambda\tilde{\varphi}(x, \alpha)} \tilde{b}(x, \alpha, \lambda) dx$$

est à croissance tempérée en λ . Si l'on choisit W assez petit pour que l'intégrale dans la Définition 6.1 soit uniformément à décroissance exponentielle pour $\alpha \in W$, alors pour $\alpha \in V$ et modulo des termes à décroissance exponentielle uniforme :

$$(6.5) \quad \int e^{i\lambda\tilde{\varphi}(x, \alpha)} \tilde{a}(x, \alpha, \lambda) \chi(x) \overline{u(x)} dx \\ \equiv \int_{\beta \in W} f(\alpha, \beta, \lambda) \int e^{i\lambda\varphi(x, \beta)} a(x, \beta, \lambda) \chi(x) \overline{u(x)} dx d\beta \equiv 0. \quad \#$$

SPECTRE SINGULIER

A l'aide de la Proposition 6.2 on voit que l'ensemble des points $(x, \xi) \in T^*X \setminus 0$ où $u = 0$ est un ensemble conique (et trivialement ouvert). On désigne par $WF_a(u)$ son complément dans $T^*X \setminus 0$. C'est le spectre singulier analytique ou front d'onde analytique de u . Soit $SS_a(u)$ le support singulier analytique, c'est-à-dire le plus petit fermé de X en dehors duquel u est analytique. Si $\pi : T^*X \setminus 0 \rightarrow X$ est la projection naturelle, alors on a le

Théorème 6.3 : Pour tout $u \in \mathcal{D}'(X)$ on a $\pi(WF_a(u)) = SS_a(u)$.

Démonstration : Soit d'abord $x_0 \in X \setminus SS_a(u)$ et supposons sans perte de généralité que $u \in \mathcal{S}'(X)$. Ecrivant $\alpha = (x, \xi)$ on peut alors étudier

$$(6.6) \quad \int e^{i\lambda((x-y)\xi + i(x-y)^2/2)} u(y) dy$$

pour x près de x_0 et $\xi \neq 0$. Soit $0 \leq \chi \in C_0^\infty(X)$ à support dans un petit voisinage de x_0 où u est analytique et avec $\chi(x_0) = 1$. Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit on peut remplacer \mathbb{R}^n par le contour complexe

$$\Gamma_\epsilon : y \rightarrow y - i\epsilon \chi(y)\xi .$$

Alors pour x voisin de x_0 et $\xi \in$ compact de $\dot{\mathbb{R}}^n$ on constate que l'intégrale (6.6) est uniformément à décroissance exponentielle quand $\lambda \rightarrow \infty$. Donc $(x_0, \xi) \notin WF_a(u)$ pour $\forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n$ et on a montré que $\pi(WF_a(u)) \subset SS_a(u)$.

Pour montrer l'inclusion opposée on suppose que $(x_0, \xi) \notin WF_a(u)$ pour $\forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n$. Considérons l'identité

$$(6.7) \quad \delta(x) = \int e^{ix\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} ,$$

où l'intégrale est interprétée comme une intégrale oscillante par exemple comme la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(6.7) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{i x\xi - \epsilon \xi^2/2} d\xi .$$

Suivant Lebeau [L] on va remplacer \mathbb{R}_ξ^n par le contour complexe $\xi \rightarrow \zeta = \xi + \frac{i}{2} |\xi|x$. Le long de ce contour on a

$$e^{ix\xi} = e^{ix\xi - |\xi|x^2/2}, \quad d\xi_j = d\xi_j + \frac{i}{2} x_j d|\xi|.$$

Puisque $d|\xi| = \sum \frac{\xi_k}{|\xi|} d\xi_k$ on obtient

$$d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n = \left(1 + \frac{i}{2} \sum_1^n \frac{x_j \xi_j}{|\xi|}\right) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n = a(x, \xi) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

Passant par les intégrales (6.7) on montre alors facilement que

$$(6.8) \quad \delta(x) = \int e^{i x\xi - |\xi|x^2/2} a(x, \xi) d\xi / (2\pi)^n$$

au sens des intégrales oscillantes. (En effet avec (6.7) l'argument ne marche que pour $|x|$ petit, mais l'intégrale (6.8) est évidemment analytique en dehors de 0 donc 0 partout dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

Donc

$$(6.9) \quad u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} a(x-y, \xi) u(y) dy d\xi$$

où l'intégrale a un sens comme limite dans \mathcal{D}' après introduction du facteur de convergence $e^{-\varepsilon\xi^2/2}$.

La proposition 6.2 (et sa preuve) montre que

$$\int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} a(x-y, \xi) u(y) dy$$

est à décroissance exponentielle uniforme quand $|\xi| \rightarrow \infty$, pour x dans un voisinage complexe de x_0 . Alors (6.9) montre que u est analytique en x_0 . $\#$

Le résultat suivant est dû à Sato [S] dans le cadre des hyperfonctions et aussi à Hörmander [H] dans le cadre des distributions.

Théorème 6.4 : Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques défini sur un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$. Soit $p(x, \xi)$ son symbole principal et supposons que $p(x_0, \xi_0) \neq 0$ où $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$. Alors si $u \in \mathcal{D}'(X)$ nous avons $u = 0$ en (x_0, ξ_0) ssi $Pu = 0$ en (x_0, ξ_0) . En particulier si P est elliptique en x_0 et Pu est analytique en x_0 alors u est analytique en x_0 .

SPECTRE SINGULIER

Démonstration : On peut supposer que $u \in \mathcal{E}'(X)$. Alors avec a, φ comme dans la Définition 6.1

$$\int e^{i\lambda\varphi(x,\alpha)} a(x,\alpha,\lambda) \overline{Pu(x)} dx = \int e^{i\lambda\varphi(x,\alpha)} b(x,\alpha,\lambda) u(x) dx$$

où b est le symbole elliptique donné par $b e^{i\lambda\varphi} = P^* (a e^{i\lambda\varphi})$. Il suffit alors d'appliquer la Proposition 6.2. $\#$

On établit maintenant l'équivalence entre les définitions de Bros-Iagolnitzer et de Sato. Ceci est un cas particulier d'un résultat de Bony [Bo] qui a montré que toutes notions "raisonnables" de $WF_a(u)$ vérifiant certaines propriétés fonctorielles coïncident (et ceci même dans le cadre des hyperfonctions).

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un cône ouvert et connexe. Soit $W \subset \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et u une fonction holomorphe dans $W \cap (\mathbb{R}^n \times i\Gamma)$. On dit que u est à croissance tempérée s'il existe des constantes $C > 0, N > 0$ telles que

$$|u(z)| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-N}.$$

Alors $\lim_{t \rightarrow 0} u(x+ity_0) \in \mathcal{D}'(W_{\mathbb{R}})$ existe pour tout $y_0 \in \Gamma$ et la limite est indépendante

de y_0 . Pour la démonstration de ce fait on peut facilement se ramener au cas où Γ est de la forme $|y'| < C y_1, y = (y_1, y')$ et on montre ensuite que dans un voisinage $V(x_1)$ d'un point $x_1 \in W_{\mathbb{R}}$ on a

$$(6.10) \quad u(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{N+1} v_{N+1}(z),$$

où v_{N+1} est continue sur $V(x_1) \cap (\mathbb{R}^n \times i\overline{\Gamma})$. On évitera les détails. On écrit

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x+ity_0) = b_{\Gamma}(u).$$

Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ alors localement près d'un point $x_0 \in X$ on peut écrire $u = \sum_{j=1}^N b_{\Gamma_j}(u_j)$ où les u_j sont à croissance tempérée comme ci-dessus. (Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ on peut par exemple décomposer $\hat{u} = \sum_{j=1}^N \hat{u}_j$ tel que les \hat{u}_j sont à support dans des cônes convenables).

Théorème 6.5 : Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$, $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$. Alors $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$ ssi

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des cones ouverts convexes } \Gamma_1, \dots, \Gamma_N \subset \{y \in \mathbb{R}^n ; y \cdot \xi_0 < 0\}, \\ \text{un voisinage complexe } W \text{ de } x_0 \text{ et des fonctions holomorphes } u_j \text{ à crois-} \\ \text{sance tempérée sur } W \cap (\mathbb{R}^n \times i\Gamma_j), 1 \leq j \leq N, \text{ tels que} \\ u = \sum_1^N b_{\Gamma_j}(u_j) \text{ sur } W_{\mathbb{R}}. \end{array} \right.$$

Démonstration : On suppose d'abord (6.11). Sans perte de généralité on peut prendre $N = 1$ et après avoir remplacé u_1 par une primitive itérée on peut supposer que u_1 soit continue.

Alors par la formule de Stokes, pour (x, ξ) dans un voisinage conique de (x_0, ξ_0)

$$(6.12) \quad \int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} u(y) dy \\ = \int_{\gamma_1} e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} u_1(y) dy ,$$

où pour éviter les fonctions troncature on a aussi supposé que $u \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$. Ici γ_1 est un contour de la forme $y \rightarrow y + i\epsilon x(y)y_0$, où $\epsilon > 0$ est petit, $y_0 \in \Gamma_1$, $|y_0| = 1$, $0 \leq x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x(x_0) > 0$ et $\text{supp } x$ est dans un petit voisinage de x_0 . Le long de γ_1 on a

$$\text{Im } (x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2 = \frac{|\xi|}{2} ((x - \text{Re } y)^2 - \epsilon^2 x(\text{Re } y)^2) - \epsilon x(\text{Re } y) (y_0 \cdot \xi) > 0$$

quand (x, ξ) est dans un petit voisinage conique de (x_0, ξ_0) et $\epsilon > 0$ est suffisamment petit. Alors l'intégrale (6.12) est à décroissance exponentielle et $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$.

On suppose maintenant que $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$. Alors si W est un petit voisinage complexe de x_0 et $V \subset \mathbb{R}^n$ un petit voisinage conique de ξ_0 , nous savons par la Proposition 6.2 que l'intégrale

$$(6.13) \quad \int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} a(x-y, \xi) u(y) dy$$

est à décroissance exponentielle sur $W \times V$. Ici a est le même symbole que dans (6.8).

SPECTRE SINGULIER

Pour $\xi_1 \in \mathbb{R}^n \setminus V$ soit Γ_{ξ_1} un cône fermé d'intérieur non-vidé tel que

$$y \xi_1 > 0, \quad y \xi_0 < 0, \quad \forall y \in \Gamma_{\xi_1}.$$

Soit aussi $\Gamma_{\xi_1}^*$ un voisinage conique fermé de ξ_1 , tel que $y\xi > 0$ sur $\Gamma_{\xi_1} \times \Gamma_{\xi_1}^*$. On peut trouver ξ_1, \dots, ξ_N tels que

$$\mathbb{R}^n \setminus V = \bigcup_1^N \Gamma_{\xi_j}^*.$$

Alors comme dans la démonstration du Théorème 6.3 on obtient modulo une fonction analytique près de x_0 :

$$(6.14) \quad u(x) \equiv \sum_1^N \iint e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2} a(x-y, \xi) \chi_j(\xi/|\xi|) u(y) dy \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \\ = \sum_1^N u_j(x)$$

où $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma_{\xi_j}^*$, $\sum_1^N \chi_j = 1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus V$. Il est facile de voir que $u_j(x)$ est la valeur au bord de

$$u_j(z) = \iint e^{i(z-y)\xi - |\xi|(z-y)^2/2} a(z-y, \xi) \chi_j(\xi/|\xi|) u(y) dy \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

qui est une fonction holomorphe à croissance tempérée dans $\tilde{W} \cap (\mathbb{R}^n \times i \Gamma_{\xi_j}^*)$, si \tilde{W} est un petit voisinage complexe de x_0 . #

Pour terminer cette section nous aurions dû aussi établir les propriétés fonctionnelles de $WF_a(u)$: comportement de WF_a pour produit tensoriel, image directe et réciproque, action des opérateurs intégraux. Cela peut se faire le long des mêmes lignes, voir aussi Laubin [Lau].

7. TRANSFORMATION DE FOURIER-BROS-IAGOLNITZER (FBI)

Ces types de transformation ont été introduits et étudiés par beaucoup de mathématiciens et physiciens. Pour se restreindre seulement aux travaux en équations aux dérivées partielles on peut citer Kawai-Kashiwara [], Boutet de Monvel [B2] Lebeau [L], Trepreau [T], Hörmander [Livre à paraître], Cordoba-Fefferman [C-F], Unterberger [U], Boutet de Monvel-Sjöstrand [B-Sj], Melin-Sjöstrand [M-Sj 2], Sjöstrand [Sj 5]. Voici encore une autre version.

Soit $\varphi(x,y)$ une fonction holomorphe définie dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$, telle que

$$(7.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\eta_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$(7.2) \quad \text{Im} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

$$(7.3) \quad \det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

On introduit $\varphi_1(x,y) = -\text{Im} \varphi(x,y)$ qui est donc une fonction pl.h. avec $\frac{2}{i} \partial \varphi_1 = \partial \tilde{\varphi}$ et

$$(7.1) \quad \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\eta_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$(7.2) \quad \nabla_y^2 \varphi_1(x_0, y_0) \Big|_{\mathbb{R}^n} < 0,$$

$$(7.3) \quad \det \nabla_x \nabla_y \varphi_1(x_0, y_0) \neq 0.$$

Ici ∇ désigne le gradient au sens réel.

Pour $x \in \mathbb{C}^n$ voisin de x_0 , la fonction $\varphi_1(x, \cdot) \Big|_{\mathbb{R}^n_y}$ admet un maximum strict en un point $y = y(x)$ voisin de y_0 . C'est l'unique point réel (près de y_0) où $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ est réel et on pose

$$(y(x), \eta(x)) = (y(x), -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x))) = (y(x), -\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y(x))) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0.$$

TRANSFORMATION DE FBI

Lemme 7.1 : L'application $x \rightarrow (y(x), \eta(x))$ est un difféomorphisme d'un voisinage complexe de x_0 sur un voisinage réel de (y_0, η_0) .

Démonstration : L'application $(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) \rightarrow x \in \mathbb{C}^n$ est bien définie sur un voisinage complexe de (y_0, η_0) . La restriction à \mathbb{R}^{2n} donne alors un inverse à droite de l'application $x \rightarrow (y(x), \eta(x))$. Il suffit alors de remarquer que \mathbb{C}^n et \mathbb{R}^{2n} ont la même dimension réelle. #

Dans la suite on travaille localement près de x_0 où de y_0 , mais pour ne pas alourdir les formules on les présente comme si elles étaient globales et le lecteur devra rajouter dans sa tête les voisinages convenables.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, soit $\Gamma_y = \{x \in \mathbb{C}^n ; y(x) = y\}$. Alors les Γ_y forment une fibration d'un voisinage de x_0 . Chaque Γ_y est de dimension réelle n . En plus Γ_y est totalement réelle, c.a.d. $T_x(\Gamma_y) \cap i T_x(\Gamma_y) = \{0\}$, $x \in \Gamma_y$. En effet,

$$T_x(\Gamma_y) = \{t_x \in \mathbb{C}^n ; \varphi_{yx}'' t_x \in \mathbb{R}^n\} .$$

Pour x dans un voisinage de x_0 on pose

$$\phi(x) = \varphi_1(x, y(x)) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_1(x, y) .$$

ϕ est réel-analytique et aussi plurisous-harmonique en tant que supremum d'une famille de fonctions pluri (-sous)-harmoniques. Avec $d(x, \Gamma_y) =$ distance de x à Γ_y , on a même

$$\phi(x) \geq \varphi_1(x, y) + C d(x, \Gamma_y)^2, \quad C > 0$$

ce qui montre que ϕ est en effet strictement pluri sous harmonique.

On introduit le difféomorphisme (canonique) complexe local

$$\mathcal{X} : (y, -\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}) \rightarrow (x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x})$$

d'un voisinage complexe de (y_0, η_0) sur un voisinage complexe de (x_0, ξ_0) où

$$\xi_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0) . \text{ Soit aussi } \Lambda_\phi = \{(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}) ; x \in \mathbb{C}^n\} . \text{ Alors}$$

$$\Lambda_\phi = \mathcal{X}(T^*\mathbb{R}^n).$$

Soit $a(x,y,\lambda)$ un symbole analytique classique et elliptique d'ordre 0, défini dans un voisinage de (x_0, y_0) . Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ un petit voisinage de y_0 , $X \in C_0^\infty(Y)$ égale à 1 près de y_0 . Alors si $X \subset \mathbb{C}^n$ est un petit voisinage de x_0 on pose

$$(7.4) \quad Tu(x,\lambda) = \int e^{i\lambda\varphi(x,y)} a(x,y,\lambda) X(y) u(y) dy$$

pour $x \in X$, $u \in \mathcal{D}'(Y)$. (On choisira X assez petit pour que $\mathcal{X}^{-1}(\Pi^{-1}(X) \cap \Lambda_\phi) \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ se projette dans un ouvert où $X = 1$). Il est clair que $T : \mathcal{D}'(Y) \rightarrow H_\phi^{loc}(X)$. Si l'on écrit $\alpha = (y(x), n(x))$, $\psi(y, \alpha) = \varphi(x, y) + i\phi(x)$ il devient clair que T permet de caractériser $WF_a(u)$.

Proposition 7.2 : Soit $u \in \mathcal{D}'(Y)$, $x_1 \in X$. Alors $(y(x_1), n(x_1)) \notin WF_a(u)$ si et seulement si $Tu(x,\lambda) = 0$ dans H_{ϕ, x_1} .

On s'intéresse maintenant au lien entre $\tilde{T}u$ et Tu , si \tilde{T} est une autre tf. de FBI donnée par (7.4) avec (φ, a) remplacé par $(\tilde{\varphi}, \tilde{a})$ où $\tilde{\varphi}, \tilde{a}$ sont définis près de $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}(x_0, y_0) = -n_0$. L'idée naturelle est de donner un sens à la relation $\tilde{T}u = (\tilde{T}T^{-1})Tu$. Comme dans la section 4 on peut inverser T formellement par un opérateur de la forme

$$(7.5) \quad Sv(y,\lambda) = \lambda^n \int e^{-i\lambda\varphi(x,y)} b(x,y,\lambda) v(x,\lambda) dx.$$

En général on ne peut pas espérer avoir $u \equiv STu$ modulo une fonction analytique pour $u \in \mathcal{D}'(Y)$, puisque Tu ne décrit u que microlocalement près de $(y_0, \lambda\xi_0)$. Néanmoins on cherche un contour aussi bon que possible dans (7.5), c.a.d. un contour sur lequel

$$-\varphi_1(x,y) + \phi(x) = -\varphi_1(x,y) + \varphi_1(x,y(x)) \sim |y-y(x)|^2$$

est aussi petit que possible. Le choix naturel est de prendre Γ_y sur lequel $-\varphi_1(x,y) + \phi(x) = 0$. Même le contour Γ_y n'est pas tout à fait bon quand $v \in H_\phi$ mais si $v \in H_\psi$ où $\psi \leq \phi$, $\psi(x_0) = \phi(x_0)$, $\nabla^2 \psi(x_0)|_{\Gamma_{y_0}} < \nabla^2 \phi(x_0)|_{\Gamma_{y_0}}$ alors Γ_{y_0} est

un bon contour et donc Sv est bien définie et d'après la section 4 on a $TSv \equiv v$ modulo équivalence dans H_ψ dans un voisinage de x_0 .

TRANSFORMATION DE FBI

Montrons que malgré cette difficulté on peut définir $\tilde{T}S$ comme opérateur $H_\phi \rightarrow H_\phi$.

Lemme 7.3 : Pour x dans un voisinage de \tilde{x}_0 la fonction $(y, z) \rightarrow \tilde{\varphi}_1(x, y) - \varphi_1(z, y) + \phi(z)$ a un col près de (y_0, x_0) , donné par $y = \tilde{y}(x) = y(z)$, $\tilde{\eta}(x) = \eta(z)$. La valeur critique est $\tilde{\phi}(x)$.

Démonstration : Le point indiqué est bien un point critique et la valeur critique est bien $\tilde{\phi}(x)$ il s'agit donc de montrer que le Hessien est non-dégénéré de signature 0. Ceci peut se faire directement on montre d'abord sans trop de difficultés que le Hessien est non-dégénéré. La signature est 0 parce que sur le contour $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \Gamma_y$ on a $\tilde{\varphi}_1(x, y) - \varphi_1(z, y) + \phi(z) \leq \tilde{\phi}(x)$ et une perturbation standard de ce contour donne un bon contour. Une manière plus simple encore est d'utiliser les résultats généraux de la section 11 (Exercice). #

Comme dans la section 4 on peut maintenant définir l'opérateur $\tilde{T}S : H_\phi^{loc}(X) \rightarrow H_\phi^{loc}(\tilde{X})$ par

$$(7.8) \quad (\tilde{T}S)u(x, \lambda) = \lambda^n \iint_{V_x} e^{i\lambda(\tilde{\varphi}(x, y) - \varphi(z, y))} \tilde{a}(x, y, \lambda) b(z, y, \lambda) u(z, \lambda) dz dy$$

où V_x désigne un bon contour et X, \tilde{X} sont des petits voisinages de x_0 et \tilde{x}_0 respectivement. En particulier $(TS)u \sim u$ dans $H_\phi^{loc}(X)$.

Proposition 7.4 : Pour $u \in \mathcal{D}'(Y)$ on a $\tilde{T}u \sim (TS)Tu$ dans $H_\phi^{loc}(\tilde{X})$. (Si \tilde{X} est un petit voisinage de \tilde{x}_0).

Démonstration : Si $\psi(y)$ est une fonction de classe C^∞ plurisous-harmonique définie près de y_0 et telle que $\psi(y_0) = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}(y_0) = \eta_0$, $\psi(y) \leq 0$ pour y réel, et si $u \in H_\psi^{loc}(\tilde{Y})$ (où $\tilde{Y} \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert avec $\tilde{Y} \cap \mathbb{R}^n = Y$), alors $Tu \in H_{\psi^*}^{loc}(X)$ où $\psi^*(x)$ est la valeur critique de $y \rightarrow \varphi_1(x, y) + \psi(y)$. Pour estimer $\psi^*(x)$ on applique le lemme suivant de Melin-Sjöstrand [M-S].

Lemme 7.5 : Soit $f(z, w)$ une fonction C^∞ réelle définie près de $(0, 0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$. On suppose que $f(x, w) \leq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et que $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0, 0) = 0$ mais que $x = 0$ soit un col pour $f(z, 0)$. Si $z(w)$ désigne le point critique près de 0 de $z \rightarrow f(z, w)$, alors pour w dans un voisinage de 0 on a $f(z(w), w) \leq -C|\text{Im } z(w)|^2$ où $C > 0$.

Preuve du Lemme : On choisit des coordonnées réelles $C^\infty \tilde{y}(z,w) = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{x}(z,w) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ comme dans le Lemme de Morse :

$$f(z,w) - f(z(w),w) = \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 .$$

Comme nous avons vu dans la section 2 on retrouve \mathbb{R}_z^n comme un graphe $\tilde{y} = h(\tilde{x},w)$ où h est une fonction réelle lisse avec $h(0,0) = 0$. On constate alors d'une part que $|\text{Im } x(w)| \sim |h(0,w)|$ et d'autre part puisque $f \leq 0$ pour $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = h(0,w)$ que $f(z(w),w) \leq -|h(0,w)|^2$. $\#$

Appliquons maintenant le lemme à $y \rightarrow \varphi_1(x,y) + \psi(y) - \phi(x)$. On trouve alors que $\psi^*(x) \leq \phi(x) - C |\text{Im } \tilde{y}(x)|^2$, où $\tilde{y}(x)$ est le point critique complexe de $y \rightarrow \varphi_1(x,y) + \psi(y)$. Aussi $\psi^*(x_0) = \phi(x_0)$. Si l'on restreint x à Γ_{y_0} on sait que $\mathbb{R}^n \ni y \rightarrow$

$\varphi_1(x,y) + \psi(y) - \phi(x)$ atteint son maximum strict en $y = y_0$ où la valeur est 0. Alors pour $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\nabla_{\text{Re } y}, \text{Im } y (\varphi_1(x,y) + \psi(y) - \phi(x))| \sim |x-x_0| + |y-y_0| .$$

Donc $|\text{Im } \tilde{y}(x)| \sim |x-x_0|$ et d'après le Lemme 7.5 ,

$$(7.9) \quad \psi^*(x) \leq \phi(x) - C |x-x_0|^2 \quad \text{pour } x \in \Gamma_{y_0} .$$

Il est alors clair que $T : H_\psi^{1\text{loc}} \rightarrow H_{\psi^*}^{1\text{loc}}$ admet comme inverse $S : H_{\psi^*}^{1\text{loc}} \rightarrow H_\psi^{1\text{loc}}$ (défini avec Γ_y comme contour d'intégration dans (7.5)). Aussi pour $u \in H_\psi^{1\text{loc}}$ on a bien $\tilde{T}u \sim (\tilde{T}S)Tu$ dans $H_{\psi^*}^{1\text{loc}}$ si $\tilde{\psi}^*$ est définie de la même manière que ψ^* .

Soit V un petit voisinage réel de (y_0, η_0) de \mathbb{R}^{2n} et I^V une réalisation de l'identité comme dans la section 5. On trouve alors que pour $u \in \mathcal{D}'$:

$$\tilde{T}u \sim \tilde{T} I^V u \text{ dans } H_\psi^{1\text{loc}}, \quad Tu \sim T I^V u \text{ dans } H_\psi^{1\text{loc}} .$$

D'autre part, $\tilde{T} I^V u \sim (\tilde{T}S) T I^V u$ dans $H_{\psi^*}^{1\text{loc}}$ puisque $I^V u = \int_{\alpha \in V} .u_\alpha(x,\lambda) dx$ où

$u_\alpha \in H_{\psi_\alpha}$ et ψ_α est essentiellement une fonction comme ci-dessus. Ceci achève la démonstration de la Proposition 7.4. $\#$

TRANSFORMATION DE FBI

Dans notre discussion nous n'avons pas utilisé le fait que \tilde{T} soit à symbole elliptique. On peut alors considérer le cas particulier ; $\tilde{T} = \lambda^{-m} T \circ P$, où P est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques. Alors d'après l'astuce de Kuranishi,

$$\tilde{T} S = \lambda^{-m} T P S = \tilde{P}$$

est un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0. On voit immédiatement que les symboles principaux de P et de \tilde{P} sont liés par la relation classique $\tilde{p} \circ \mathcal{X} = p$ où on rappelle que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_T$ est la transformation canonique donnée par \mathcal{X} :

$$(y, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}) \rightarrow (x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}).$$

Exemple 7.6 : $\varphi(x,y) = i(x-y)^2/2$, $\varphi_1(x,y) = -\text{Re}(x-y)^2/2$. Pour y réel, $\varphi_1(x,y) = -(\text{Re } x-y)^2/2 + (\text{Im } x)^2/2$, donc $\Phi(x) = (\text{Im } x)^2/2$, $\Lambda_\Phi : \xi = -\text{Im } x$. Si l'on prend $a = 1$ dans (7.4) alors T et P commutent quand P est un opérateur à coefficients constants.

Dans le reste de cette section nous allons montrer comment transformer un opérateur de type principal (mais pas forcément à symbole principal réel) en \tilde{D}_{x_n} par une transformation de FBI convenable. Ce résultat dans un autre formalisme est dû à Trepreau [T] qui a développé une idée de Kashiwara et Kawai.

Soit $p(y,n)$ une fonction analytique définie près du point $(y_0, n_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ vérifiant $p(y_0, n_0) = 0$, $dp(y_0, n_0) \neq 0$.

Lemme 7.7 : Il existe une fonction holomorphe définie près de (x_0, y_0) (où $x_0 \in \mathbb{C}^n$ est un point convenable) qui satisfait à (7.1)-(7.3) et

$$(7.10) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} = p(y, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}) .$$

Démonstration : On pose d'abord

$$(7.11) \quad \varphi(x', 0, y) = \frac{i}{2} (x' - y')^2 - n_0^n y^n + i C (y^n - y_0^n)^2$$

où C doit vérifier $\text{Re } C > 0$. (On note les coordonnées $x = (x^1, \dots, x^n) = (x', x^n)$). Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ donné par $\text{Re } x_0' = y_0'$, $\text{Im } x_0' = -n_0'$, $x_0^n = 0$. L'équation (7.10) donne alors φ dans un voisinage de (x_0, y_0) et (7.2) est vérifiée puisque $\text{Re } C > 0$. On a

aussi (7.1) et pour avoir (7.3) on peut d'abord supposer (après un changement de coordonnées réel en y) que $\frac{\partial p}{\partial \eta^n}(y_0, \eta_0) \neq 0$ ou bien $\left[\frac{\partial p}{\partial \eta^n}(y_0, \eta_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial y^n}(y_0, \eta_0) \neq 0 \right]$. Alors on peut trouver C avec $\text{Re } C > 0$ telle que

$$(7.12) \quad \frac{\partial}{\partial y^n} p(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}) \neq 0 \text{ en } (x_0, y_0).$$

Maintenant on a les équivalences :

$$(7.3)$$

\Leftrightarrow

La différentielle de $y \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est bijective en (x_0, y_0)

\Leftrightarrow

La différentielle de $y \rightarrow (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, p(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}))$ est bijective en (x_0, y_0)

\Leftrightarrow

$$(7.12)$$

La dernière équivalence résulte du fait que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y^n} = 0$, $\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} \neq 0$

en (x_0, y_0) . $\#$

Soit maintenant P un opérateur pseudodifférentiel classique formel d'ordre 0 de symbole principal p . Il est alors bien connu (Mizohata [M], Hörmander [H], Sato-Kawai-Kashiwara [SKK]) que l'on peut trouver un symbole analytique formel d'ordre 0 elliptique dans un voisinage de (x_0, y_0) tel que formellement

$$(7.13) \quad \tilde{D}_{x^n} - {}^t P(y, \tilde{D}_y, \lambda) (a(x, y, \lambda) e^{i\lambda \varphi(x, y)}) = 0$$

(Nous donnerons une preuve de ce fait dans la section 9). Ici φ est la fonction donnée dans le Lemme 7.7. (a est déterminé en résolvant les équations de transport classiques en chaque degré d'homogénéité). Nous avons alors démontré :

Théorème 7.8 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel formel analytique classique d'ordre 0 défini près de (y_0, η_0) dont le symbole principal p vérifie $\frac{\partial p}{\partial \eta^n}(y_0, \eta_0) \neq 0$, $p(y_0, \eta_0) = 0$. On peut alors trouver une tf. de FBI T tel que formellement

$$\tilde{D}_{x^n} T = T P.$$

Soit maintenant P un opérateur différentiel dont le symbole principal vérifie les hypothèses du Théorème 7.8. On identifie P à un opérateur pseudodifférentiel en

TRANSFORMATION DE FBI

posant $P(x, \tilde{D}_x, \lambda) = \lambda^{-m} P(x, D_x)$ où m est l'ordre de P . Soit u une distribution définie près de y_0 et supposons que

$$(7.14) \quad (y_0, \eta_0) \notin WF_a(Pu) .$$

Disons que P est hypoelliptique analytique dans les germes si (7.14) entraîne que $(y_0, \eta_0) \notin WF_a(u)$.

Soit $U = Tu \in H_{\Phi, x_0}$. Alors d'après le Théorème 7.8 la propriété (7.14) équivaut à

$$(7.15) \quad \tilde{D}_{x^n} U = 0 \quad \text{dans } H_{\Phi, x_0} .$$

Plus explicitement, sous l'hypothèse (7.14) il existe un voisinage V de x_0 et un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$(7.16) \quad \tilde{D}_{x^n} U(x, \lambda) = \mathcal{O}(e^{\lambda(\Phi(x) - \varepsilon_0)}) , \quad x \in V .$$

On peut supposer que $V = V' \times V''$, où V'' est un disque centré en $x_0'' = 0$ et V' est un voisinage de x_0' . Quitte à diminuer V avec ε_0 fixé on pourra supposer que

$\Phi(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{4} \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_0) + \frac{\varepsilon_0}{4}$ sur V Alors on obtient de (7.16) que

$$(7.17) \quad |U(x, \lambda) - U(x', 0, \lambda)| = \mathcal{O}(e^{\lambda(\Phi(x_0) - 3\varepsilon_0/4)})$$

et que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(7.18) \quad |U(x', 0, \lambda)| \leq C_\varepsilon e^{\lambda(\Psi_V(x') + \varepsilon)} , \quad x' \in V' .$$

où $\Psi_V(x') = \inf_{x'' \in V''} \Phi(x')$ (de classe Lipschitz). Si $\Psi_V(x') < \Phi(x_0)$ on déduit que $U = 0$

dans H_{Φ, x_0} , donc que $(y_0, \eta_0) \notin WF_a(u)$. Plus généralement soit $\tilde{\Psi}_V(x') = \sup f(x')$,

où $f(x')$ est pluri-sous-harmonique et $f \leq \Psi_V(x')$ sur V' . Puisque $U(x', 0, \lambda)$ est holomorphe on sait que $\log |U(x', 0, \lambda)|$ est pl.s.h. . Donc par (7.18) :

$$(7.19) \quad |U(x', 0, \lambda)| \leq C_\varepsilon e^{\lambda(\tilde{\Psi}_V(x') + \varepsilon)} , \quad x' \in V'$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Quand on diminue V alors Ψ_V et $\hat{\Psi}_V$ augmentent. Notre discussion donne immédiatement :

Théorème 7.9 : Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques, dont le symbole principal satisfait aux hypothèses du Théorème 7.8. On suppose en plus que pour tout $V = V' \times V^n$ on ait $\hat{\Psi}_V < \Phi(x_0)$ dans un voisinage de x_0 . Alors P est h.e.a. dans les germes en (y_0, η_0) .

En utilisant la version initiale de cette méthode, Trepreau [T] a démontré que les opérateurs sous-elliptiques au sens de Egorov sont h.e.a. .

8. THÉORÈME D'UNICITÉ DE HOLMGREN ET EXTENSIONS

Rappelons d'abord le théorème classique de Holmgren :

Théorème 8.1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de 0 et P un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω à coefficients analytiques de la forme

$$P = D_{x^n}^m + \sum_{j=1}^m A_j(x, D_{x'}) D_{x^n}^{m-j}.$$

Alors si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Pu = 0$, $u|_{x^n < 0} = 0$ on a $u = 0$ dans un voisinage de 0.

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \{x^n \geq 0\}$, $0 \in \text{supp } u$ alors u ne peut pas être analytique dans un voisinage de 0 et il existe donc $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $(0, \xi) \in \text{WF}_a(u)$. Nous avons le résultat suivant qui se trouve comme une remarque de Kashiwara dans Sato-Kawai-Kashiwara [SKK] et qui a été démontré aussi dans une forme légèrement plus faible par Hörmander [H].

Théorème 8.2 : Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \{x^n \geq 0\}$, $0 \in \text{supp } u$. Alors $(0, (0, \dots, 0, 1))$ et $(0, (0, \dots, -1))$ appartiennent à $\text{WF}_a(u)$.

Pour $n = 1$ la démonstration de ce théorème est assez simple si l'on utilise la définition de WF_a en termes de valeurs au bord. En dimension supérieure on peut se ramener au cas $n = 1$ en utilisant la convexification standard dans la démonstration du Théorème de Holmgren et des images directes. Comme Hörmander [H] et Sato-Kawai-Kashiwara [SKK] l'ont bien remarqué le Théorème 8.2 donne le Théorème 8.1. En effet pour P et u comme dans le Théorème 8.1 on a $p(0, (0, \dots, \pm 1)) \neq 0$ et donc

THÉORÈME DE HOLMGREN

$(0, (0, \dots, \pm 1)) \notin WF_a(u)$.

Le Théorème 8.2 résulte facilement du résultat suivant dû à Kashiwara (le "Water Melon").

Théorème 8.3 : Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, supp $u \subset \{x^n \geq 0\}$. Alors si $(0, \eta_0) \notin WF_a(u)$ pour
un $\eta_0 \neq 0$, on a aussi $(0, (\eta_0', t)) \notin WF_a(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Il y a un résultat encore plus fin dû à Kashiwara, lié à la deuxième microlocalisation. Ce résultat et des généralisations de ce résultat seront discutés dans la section 16. Sous les hypothèses du Théorème 8.2 on sait qu'il existe un point $(0, \xi_0) \in WF_a(u)$. Alors le Théorème 8.3 montre que $(0, (\xi_0', t)) \in WF_a(u)$ et en faisant tendre $t \rightarrow \pm \infty$ on obtient $(0, (0, \dots, \pm 1)) \in WF_a(u)$. Donc le Théorème 8.3 \Rightarrow Théorème 8.2.

Nous avons appris l'idée essentielle de la démonstration suivante de A. Grigis et P. Schapira pendant le Colloque de Marathéa en Septembre 1980. Hörmander a également produit une démonstration récente et semblable.

Preuve du Théorème 8.3 : On pourrait travailler avec une tf. de FBI arbitraire et cela montrerait mieux des aspects invariants, mais pour ne pas trop compliquer les choses on travaillera avec la transformation de l'Exemple 7.6. Nous pouvons supposer que $u \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } u \subset \{x^n \geq 0\}$ et nous posons alors pour $x \in \mathbb{C}^n$:

$$U(x, \lambda) = \int e^{-\lambda(x-y)^2/2} u(y) dy .$$

Alors $U \in H_{\phi}^{loc}(\mathbb{C}^n)$ où

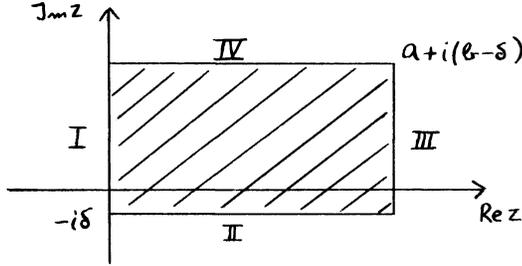
$$(8.1) \quad \phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\text{Im } x)^2 & \text{si } \text{Re } x^n \geq 0 \\ \frac{1}{2} [(\text{Im } x)^2 - (\text{Re } x^n)^2] & \text{si } \text{Re } x^n \leq 0 . \end{cases}$$

L'observation cruciale est maintenant que $x^n \rightarrow \phi(x)$ est harmonique dans la région $\text{Re } x^n \leq 0$.

Lemme 8.4 : Soit $\varphi(z) = 0$ dans le demi-plan supérieur et $= (\text{Im } z)^2/2$ dans le demi-plan inférieur. Si $a, b, c > 0$ il existe une fonction continue $\psi(z) \leq \varphi(z)$ sur le rectangle $R : \text{Re } z \in [0, a], |\text{Im } z| \leq b$ avec $\psi(x) < \varphi(x)$ pour $x \in [0, a[$ telles que

$|u(z)| \leq \exp \lambda \psi$ sur R si $\lambda > 0$ et u est une fonction holomorphe, continue sur R vérifiant $|u(z)| \leq \exp \lambda \varphi(z)$ sur R et $|u(z)| \leq \exp \lambda(\varphi(z) - c)$ pour $z \in i[-b, b]$.

Démonstration du Lemme 8.4 : Pour $0 < \delta < b$ on considère le rectangle fermé Ω :



dont le bord est $I \cup II \cup III \cup IV$ comme sur la figure. Alors $\frac{1}{\lambda} \log |u| - \delta^2/2 \leq 0$ sur $II \cup III \cup IV$ et $\frac{1}{\lambda} \log |u| - \delta^2/2 \leq -c \sin \frac{\pi}{b} (y+\delta)$ sur I . Par le principe du maximum on a donc $\frac{1}{\lambda} \log |u| - \delta^2/2 \leq -c w(z)$ sur Ω , où $w(z) = f(x) \sin(\frac{\pi}{b} (y+\delta))$ est la fonction harmonique donnée par

$$f(x) = \left(e^{\frac{\pi}{b} a} - e^{-\frac{\pi}{b} a} \right)^{-1} \left(e^{-\frac{\pi}{b} (x-a)} - e^{\frac{\pi}{b} (x-a)} \right)$$

Ici $f(x) > 0$ pour $0 \leq x \leq a$ et donc $-c w(x) + \delta^2/2 < 0$ sur tout intervalle compact $\subset [0, a]$ si $\delta > 0$ assez petit. Ceci donne donc le Lemme. $\#$

Le Lemme est encore valable si l'on remplace l'axe réel par l'axe imaginaire, R par un rectangle \tilde{R} symétrique pour l'axe imaginaire et φ par la fonction

$$\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left((\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 \right) & , \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \frac{1}{2} (\operatorname{Im} z)^2 & , \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$$

Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \subset \{x^n \geq 0\}$, $(0, \eta_0) \notin \operatorname{WF}_a(u)$ alors $U \in H_{\tilde{\varphi}}^{1, \text{loc}}$ où $\tilde{\varphi} \leq \varphi$ (où φ est donnée par (8.1)) avec inégalité stricte dans un voisinage de $i\eta_0$. Il suffit alors d'appliquer la forme modifiée du Lemme 8.4 aux fonctions $x^n \rightarrow \exp(-\lambda (\operatorname{Im} x')^2/2) x U(x, \lambda)$ pour x' proche de $i\eta_0'$ et on déduit que $U \in H_{\tilde{\varphi}}^{1, \text{loc}}$ où $\tilde{\varphi} \leq \varphi$ avec inégalité stricte près de tout point $i(\eta_0', t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ceci donne le Théorème. $\#$

On peut noter comme curiosité que si η_0 est de la forme $(0, \dots, 0, \pm 1)$ alors

THÉORÈME DE HOLMGREN

$U = 0$ dans $H_{\phi,0}$. Donc pour x réel, voisin de 0 on a

$$u(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \int e^{-\lambda(x-y)^2/2} u(y) dy = 0$$

Ceci donne une démonstration plus directe du Théorème 8.2 où l'on n'utilise pas le fait que $\partial \text{supp}(u) \subset \text{Supp Sing}_a(u)$.

Nous allons maintenant discuter des extensions du Théorème de Holmgren au cas d'une hypersurface qui peut être caractéristique. Il s'agit des extensions purement géométriques du Théorème de Holmgren classique et le " WF_a " n'intervient pas. Le résultat le plus remarquable dans cette direction est dû à Bony [Bo 2]. Nous présenterons ici une amélioration de ce résultat qui contient aussi des résultats de Hörmander [H 4]. On ne discutera pas ici le cas beaucoup plus difficile de coefficients C^∞ , ni certains résultats de Baouendi-Zachmanoglou, concernant l'unicité à partir d'une sous-variété de codimension ≥ 2 .

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $K \subset X$ un ensemble fermé. Suivant Bony on définit le fibré conormal de K :

Définition 8.5 : $N^*K = \{(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0 ; x_0 \in K \text{ et il existe } h \in C^\infty(X; \mathbb{R}) \text{ telle que } \xi_0 = \pm h'(x_0) \text{ et } h|_K \text{ admet un maximum local en } x_0\}$.

On peut décrire N^*K comme les points (x_0, ξ_0) où ξ_0 est normal à une hypersurface H qui touche K en x_0 est telle que K soit "localement d'un seul côté de H ". Si K est une sous-variété lisse alors N^*K est le fibré conormal habituel. Le lecteur est encouragé à calculer N^*K quand $K \subset \mathbb{R}^n$ est un quadran fermé ou bien le complément d'un quadran ouvert. Il verra alors que N^*K n'est pas nécessairement fermé. Le Théorème 8.2 prend la forme plus invariante :

Théorème 8.6 : Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ alors $N^* \text{supp } u \subset WF_a(u)$.

Nous allons maintenant établir un résultat entièrement géométrique sur N^*K qui entraînera les différentes extensions du Théorème de Holmgren. Si $f(x, \xi)$ est une fonction C^∞ réelle, définie près de $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$ on définit son champ Hamiltonien $H_f = \sum \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ et on remarque que f est constante le long des courbes intégrales de H_f puisque $H_f(f) = 0$. Soit $h(x)$ une fonction à valeurs réelles

définies près de x_0 avec $h'(x_0) = \xi_0$. Alors la théorie de Hamilton-Jacobi nous dit que le problème

$$(8.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(x, \varphi'_x) = 0 \\ \varphi(0, x) = h(x) \end{cases}$$

admet une solution C^∞ unique dans un voisinage convenable de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si l'on introduit

$$\Lambda_{\varphi_t} = \{(x, \varphi'_x(t, x))\} \quad , \quad \Lambda_h = \{(x, h'_x(x))\}$$

(localement, près de (x_0, ξ_0)), alors $\varphi(t, \cdot)$ est déterminée à une constante C_t près, par le fait (bien connu) que

$$(8.3) \quad \Lambda_{\varphi_t} = \exp(t H_f) (\Lambda_h) .$$

La constante C_t est déterminée par

$$(8.4) \quad \varphi(t, x_t) - \varphi(0, x_0) = \int_0^t (\sum f^{(j)}(x_s, \xi_s) \xi_s^j - f(x_s, \xi_s)) ds ,$$

$$\text{où } (x_s, \xi_s) = \exp(s H_f) (x_0, \xi_0) .$$

Théorème 8.7 : Soit $K \subset X$ un fermé, $(x_0, \xi_0) \in N^*K$ et $f(x, \xi)$ une fonction C^∞ réelle, définie près de (x_0, ξ_0) et telle que $f|_{N^*K} = 0$. Alors pour $t_0 > 0$ assez petit, exp $t H_f(x_0, \xi_0) \in N^*K$ quand $|t| \leq t_0$.

Démonstration : Soit $h(x)$ une fonction réelle C^∞ , telle que $\xi_0 = h'(x_0)$ et telle que $h|_K$ admet un maximum (ou minimum) local isolé en x_0 . Soit φ la solution de (8.2). Alors si W est un petit voisinage de x_0 et $|t|$ suffisamment petit nous savons que $\varphi(t, \cdot)|_{K \cap W}$ atteint son maximum dans l'intérieur de W sur un ensemble $A_t \subset \partial K$ qui est uniformément compact dans W . Soit

$$\phi(t) = \max_{K \cap W} \varphi(t, \cdot) .$$

THÉORÈME DE HOLMGREN

Si l'on écrit $\Phi(t) = \varphi(t, x_t)$, $\Phi(s) = \varphi(s, x_s)$, $x_t \in A_t$, $x_s \in A_s$ on obtient

$$|\Phi(t) - \Phi(s)| \leq \begin{cases} \varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_t) & \text{si } \Phi(t) \geq \Phi(s) \\ \varphi(s, x_s) - \varphi(t, x_s) & \text{si } \Phi(t) \leq \Phi(s) \end{cases},$$

c.a.d.

$$|\Phi(t) - \Phi(s)| \leq \max (|\varphi(t, x_t) - \varphi(s, x_t)|, |\varphi(t, x_s) - \varphi(s, x_s)|).$$

Or,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_t) = -f(x_t, \varphi'_x(x_t)) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_s) = -f(x_s, \varphi'_x(x_s)) = 0,$$

puisque $f|_{N^*K} = 0$. Donc $|\Phi(t) - \Phi(s)| \leq C |t-s|^2$ c.a.d. $\Phi'(t) = 0$ et Φ est indépendant de t .

On pose maintenant $g(x) = h(x) - (x-x_0)^2$ de manière que g ait les mêmes propriétés que h et on désigne par $\psi(t, x)$ la solution de (8.2) avec h remplacé par g . Alors pour $|t|$ suffisamment petit,

$$(8.5) \quad \max_{K \cap W} \varphi(t, \cdot) = \max_{K \cap W} \psi(t, \cdot) = h(x_0) = g(x_0).$$

D'autre part, avec $(x_t, \xi_t) = \exp(t H_f)(x_0, \xi_0)$ on obtient de (8.3), (8.4) :

$$(8.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x_t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x_t) = \xi_t \\ \varphi(t, x_t) = \psi(t, x_t). \end{cases}$$

Les dérivées secondes ne changent pas beaucoup si $|t|$ est petit et donc

$$(8.7) \quad \psi(t, x) \leq \varphi(t, x) - \frac{1}{2} (x-x_t)^2, \quad x \in W.$$

Soit $\tilde{x}_t \in K$ un point où $\psi(t, \cdot)|_{K \cap W}$ atteint son maximum. Alors (8.5) et (8.7) mon-

trent que $\tilde{x}_t = x_t$, puisque sinon on aurait $\phi(t) > \psi(t)$. Donc par (8.6) on a $(x_t, \xi_t) \in N^*K$. $\#$

Le Théorème 8.7 généralise un résultat de Bony [Bo 2] :

Corollaire 8.8 : Soit $K \subset X$ un ensemble fermé, $(x_0, \xi_0) \in N^*K$. Soient $f(x, \xi)$, $g(x, \xi)$ deux fonctions C^∞ définies près de (x_0, ξ_0) , telles que $f|_{N^*K} = g|_{N^*K} = 0$. Alors le crochet de Poisson ;

$$\{f, g\} \stackrel{def}{=} \sum \left[\frac{\partial f}{\partial \xi^j} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \right]$$

s'annule sur N^*K .

Démonstration : On peut supposer que f est réelle. Alors $\{f, g\} = H_f g = 0$ puisque la courbe intégrale de H_f issue d'un point de N^*K reste dans N^*K pour des temps assez petits. $\#$

Retournons maintenant au Théorème de Holmgren. Soit $h(x)$ une fonction C^∞ réelle définie dans un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$ avec $dh \neq 0$, $h(x_0) = 0$, pour un $x_0 \in X$. On pose

$$X_{\pm} = \{x \in X ; h(x) \gtrless 0\} \quad , \quad \xi_0 = h'(x_0) \quad .$$

Soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel sur X à coefficients analytiques de symbole principal $p(x, \xi)$. Soit $I(p, x_0, \xi_0)$ le plus petit ensemble de germes de fonctions C^∞ en (x_0, ξ_0) qui contient toute fonction qui s'annule sur $\{(x, \xi) ; p(x, \xi) = 0\}$ et qui est fermé pour les crochets de Poisson : $f, g \in I \Rightarrow \{f, g\} \in I$. Alors I est un idéal parce que

$$a \{f, g\} = \{af, g\} - \{f, ag\} \quad , \quad a \in C^\infty \quad , \quad f, g \in I \quad .$$

Dans le Théorème suivant la partie (A) est dû à Bony [Bo 2] et la partie (B) généralise un résultat de Hörmander [H 4].

Théorème 8.9 : S'il existe $u \in \mathcal{D}'(X)$ avec $Pu = 0$, $x_0 \in \text{supp } u \subset \bar{X}_+$, alors

(A) $f(x_0, \xi_0) = 0$ pour toute $f \in I(p, x_0, \xi_0)$.

THÉORÈME DE HOLMGREN

(B) Si $f \in I(p, x_0, \xi_0)$ est à valeurs réelles alors pour $|t|$ suffisamment petit on
 $a x_t \in \bar{X}_+$, où $(x_t, \xi_t) = \exp t H_f(x_0, \xi_0)$.

Démonstration : Soit $K = \text{supp } u$. Alors $N^*K \subset p^{-1}(0)$ par le Théorème 8.6 (où directement par le Théorème de Holmgren classique). Donc si f et g sont des germes de fonctions C^∞ qui s'annulent sur $p^{-1}(0)$, elles s'annulent aussi sur N^*K et donc $\{f, g\}|_{N^*K} = 0$ par le Corollaire 8.8. Par itération on trouve $f|_{N^*K} = 0$ pour toute $f \in I(p, x_0, \xi_0)$ ce qui donne (A) et (B) résulte du Théorème 8.7. $\#$

Pour illustrer le résultat le lecteur pourra réfléchir au cas trivial où P est donné par un champ de vecteurs. Il y a aussi des applications moins évidentes : Soit $i P = Q_1 + i Q_2$ ou $-P = \sum_1^d Q_j^2$ où Q_1, \dots, Q_d sont des champs de vecteurs analytiques et réels.

Rappelons d'abord un Théorème de Nagano [N] :

Théorème 8.10 : Soient Q_1, \dots, Q_d des champs de vecteurs réels et analytiques, définis près de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit \mathcal{L} l'algèbre de Lie engendrée par Q_1, \dots, Q_d et de ses commutateurs. Soit $k = \dim \mathcal{L}(x_0)$ où $\mathcal{L}(x_0) = \{v(x_0) ; v \in \mathcal{L}\}$. Alors il existe une variété réel-analytique $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k , telle que $x_0 \in \Gamma$ et $\mathcal{L}(x) = T_x(\Gamma)$ pour tout $x \in \Gamma$. (De plus Γ sera unique dans des voisinages "convenables" de x_0 si l'on demande en plus que Γ soit connexe, fermé).

Des Théorèmes 8.9, 8.10 on déduit le résultat suivant de Zachmanoglou [Z].

Théorème 8.11 : Soit $i P = Q_1 + i Q_2$ ou $-P = \sum_1^d Q_j^2$, où les Q_j sont des champs de vecteurs réels et analytiques sur X . S'il existe $u \in \mathcal{D}'(X)$ telle que $Pu = 0$, $x_0 \in \text{supp } u \subset \bar{X}_+$, alors

(A) Tout $Q \in \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_d)$ est tangent à $\{h = 0\}$ en x_0 .

(B) Si $\Gamma = \Gamma(Q_1, \dots, Q_d)$ est la feuille de Nagano connexe fermée dans un petit voisinage sphérique de x_0 , alors dans un petit voisinage de x_0 on a
 $\Gamma(Q_1, \dots, Q_d) \subset \partial \text{supp } u \subset \bar{X}_+$.

Preuve du Théorème de Nagano (Derridj [D]). On démontre le Théorème dans le cas

plus général où on a un ensemble dénombrable de générateurs définis dans un voisinage complexe de Ω de $x_0 = 0$. Les cas $k = 0$, $k = n$, $n = 1$ sont triviaux. On suppose par récurrence que le Théorème soit vrai en dimension $n-1$. Soit $0 < k < n$ la dimension de $\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \dots)(0)$. On peut supposer que $Q_1(0) \neq 0$ et après changement de coordonnées que $Q_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Pour $j \geq 2$ on peut remplacer Q_j par $Q_j -$

$f_j(x) \frac{\partial}{\partial x^1}$, avec $f_j(x)$ holomorphes dans Ω , sans changer $\mathcal{L}(x)$, $x \in \Omega$. On choisit $f_j(x)$ comme le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x^1}$ dans l'expression de Q_j et on est donc ramené au cas où $Q_j = Q_j(x, \frac{\partial}{\partial x^1})$ pour $j \geq 2$ et $Q_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $x = (x^1, x')$. Nous avons

$$Q_j = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_1^\nu Q_{j,\nu}(x', \frac{\partial}{\partial x^1}), \quad j \geq 2 \text{ et on remarque que}$$

$$(\text{Ad } Q_1)^\mu Q_j = \mu! Q_{j,\mu} + x^1 R_{j,\mu}(x, \frac{\partial}{\partial x^1}),$$

ce qui montre que $\mathcal{L}'(x') \subset \mathcal{L}(0, x')$ si \mathcal{L}' désigne l'algèbre de Lie engendrée par les $Q_{j,\nu}$. En particulier $\dim \mathcal{L}'(0) = k-1$ et si Γ' est une feuille intégrale pour \mathcal{L}' (qui existe par l'hypothèse d'induction) alors on peut prendre $\Gamma =]-\epsilon, \epsilon[\times \Gamma'$.

9. ÉTUDE DES OPÉRATEURS DE TYPE PRINCIPAL PAR LA MÉTHODE D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Dans cette section on montrera deux résultats sur la propagation des singularités analytiques pour des opérateurs de type principal. Le premier est dû à N. Hanges [Ha], les deux sont d'ailleurs des cas particuliers d'une conjecture de Hanges qui a été démontré par Hanges et l'auteur dans [Ha-Sj] et avec encore plus de marge des cas particuliers des résultats de la section 15 (obtenus en collaboration avec A. Grigis et P. Schapira). Nous allons quand même traiter ces deux cas à part pour montrer comment la méthode d'optique géométrique s'intègre de manière simple avec le point de vue de Bros-Iagolnitzer. Cela nous donnera aussi un prétexte de plus pour traiter les équations de transport de manière directe.

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$ et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques de symbole principal p . On suppose que $p(x_0, \xi_0) = 0$.

Théorème 9.1 (Hanges [Ha]) : On suppose que H_p admet une courbe intégrale réelle $\gamma : [-a, a] \rightarrow T^*X \setminus 0$ avec $\gamma(0) = (x_0, \xi_0)$. Si $u \in \mathcal{D}'(X)$, $WF_\alpha(Pu) \cap \gamma([-a, a]) = \emptyset$ alors ou bien $\gamma([-a, a]) \subset WF_\alpha(u)$ ou bien $\gamma([-a, a]) \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$.

OPÉRATEURS DE TYPE PRINCIPAL

Quand p est réel ceci est un résultat classique de Sato-Kawai-Kashiwara [SKK] et Hörmander [H]. Quand p n'est pas réel le résultat est en général faux pour des singularités mod C^∞ .

Preuve du Théorème 9.1 : Pour $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi)$, soit

$$v(x, \alpha, \lambda) = e^{i\lambda\psi(x, \alpha)} \quad , \quad \psi(x, \alpha) = (x - \alpha_x)\alpha_\xi + \frac{i}{2} (x - \alpha_x)^2 \quad .$$

Soit $Q(x, \tilde{D}_x, \lambda) = \lambda^{-m} P^*(x, D_x)$, où m est l'ordre de P . Pour α voisin de (x_0, ξ_0) , x voisin de x_0 , $t \in [-a, a]$ et $a > 0$ assez petit nous allons construire approximativement $w(t, x, \alpha, \lambda) = \exp(-it \lambda Q) (v)$. (Par un argument de recouvrement il suffit de montrer le Théorème pour $a > 0$ assez petit). Plus explicitement on veut résoudre approximativement

$$(9.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{D}_t + Q) w = 0 \\ w(0, x, \alpha, \lambda) = v(x, \alpha, \lambda) \quad . \end{array} \right.$$

On procède par la méthode d'optique géométrique. Soit d'abord $\varphi(t, x, \alpha)$ la solution (locale) de l'équation eiconale :

$$(9.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q(x, \varphi'_x) = 0 \quad , \quad \varphi(0, x, \alpha) = \psi(x, \alpha)$$

puisque γ est aussi une bicaractéristique pour $q = \bar{p}$ on vérifie aisément que avec $(x_t, \xi_t) = \gamma(t)$ et pour $\alpha = (x_0, \xi_0)$:

$$(9.3) \quad \varphi(t, x_t, \alpha) = 0, \quad \varphi'_x(t, x_t, \alpha) = \xi_t \quad , \quad \text{Im } \varphi''_{xx}(t, x_t, \alpha) > 0 \quad .$$

Quand α est près de (x_0, ξ_0) alors $\varphi(t, \cdot, \alpha)$ est une petite perturbation de $\varphi(t, \cdot, \alpha_0)$, $\alpha_0 = (x_0, \xi_0)$ et donc $\inf \text{Im } \varphi(t, \cdot, \alpha)$ est proche de 0 et atteint en un point $\tilde{x}_t(\alpha)$ proche de x_t . De plus $\tilde{\xi}_t(\alpha) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \tilde{x}_t, \alpha)$ est proche de ξ_t .

On cherche maintenant w sous la forme $a(t, x, \alpha, \lambda) \exp i\lambda \varphi(t, x, \alpha)$ où $a = \sum_0^\infty a_k(t, x, \alpha) \lambda^{-k}$ doit être un symbole classique analytique. Substitution dans (9.1) donne alors la suite d'équations de transport :

$$(9.4) \quad \begin{array}{l} L a_0 = 0 \quad , \quad a_0|_{t=0} = 1 \quad , \\ L a_1 + f_1(a_0) = 0 \quad , \quad a_1|_{t=0} = 0 \quad , \\ \vdots \\ L a_k + f_k(a_0, \dots, a_{k-1}) = 0 \quad , \quad a_k|_{t=0} = 0 \\ \vdots \end{array}$$

où $L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_1^n q^{(j)}(x, \phi'_x) \frac{\partial}{\partial x_j} + s(x, \alpha)$ avec $s(x, \alpha)$ analytique et $f_k(a_0, \dots, a_{k-1})$

est une expression linéaire à coefficients analytiques, des dérivées de a_0, \dots, a_{k-1} . Il est évident que l'on peut résoudre ses équations successivement dans un domaine complexe indépendant de k . Il est moins évident que a devient un symbole analytique mais ce fait (bien connu) sera établi plus loin.

Désignons par $a(t, x, \alpha, \lambda)$ aussi une réalisation. Alors $(\tilde{D}_t + Q)w$ est à décroissance exponentielle uniforme et $w(0, x, \alpha, \lambda) = v(x, \alpha, \lambda)$ si $w = a \exp i\lambda\phi$. Sans perte de généralité on peut supposer que u est à support dans un petit voisinage de x_0 . Alors pour α dans un petit voisinage de α_0 et $t \in [-a, a]$ nous avons modulo des termes à décroissance exponentielle uniforme :

$$(9.5) \quad \begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial t} (w(t, \cdot, \alpha, \lambda), u)_{L^2} &\equiv \lambda^{1-m} (P^* w, u)_{L^2} \equiv \\ &\equiv \lambda^{1-m} (w(t, \cdot, \alpha, \lambda), Pu)_{L^2} \equiv 0 \quad , \end{aligned}$$

où la dernière équivalence résulte du fait que $\gamma([-a, a]) \cap WF_a(Pu) = \emptyset$. Si $\gamma(t_0) \notin WF_a(u)$ pour $t_0 \in [-a, a]$ alors $(w(t_0, \cdot, \alpha, \lambda), u)_{L^2} \equiv 0$ pour α dans un voisinage de α_0 et intégrant (9.5) de 0 à t_0 on obtient $(v(\cdot, \alpha, \lambda), u)_{L^2} \equiv 0$ et donc que $\gamma(0) \notin WF_a(u)$. Modifiant un peu notre argument on obtient aussi $\gamma(t_1) \notin WF_a(u)$ pour tout $t_1 \in [-a, a]$. $\#$

Théorème 9.2 : Soit $\Gamma \subset p^{-1}(0)$ une sous-variété réel analytique, connexe de dimension 2 dont l'espace tangent en chaque point est engendré par $H_{Re} p, H_{Im} p$. Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $\Gamma \cap WF_\alpha(Pu) = \emptyset$ alors ou bien $\Gamma \subset WF_\alpha(u)$ ou bien $\Gamma \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$.

Démonstration : On procède comme dans la démonstration du Théorème 9.1 avec la différence que la variable réelle t est maintenant remplacée par une variable complexe

OPÉRATEURS DE TYPE PRINCIPAL

z et que " $\frac{\partial}{\partial t}$ " sera remplacé par " $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ". Soit q l'extension holomorphe de \bar{p} et considérons le complexifié $\tilde{\Gamma}$ de Γ dans un voisinage du point $\alpha_0 = (x_0, \xi_0) \in \Gamma$. Alors H_p et H_q (vus comme des champs de vecteurs réels dans le domaine complexe) sont tangents à $\tilde{\Gamma}$ et si $\rho \in \tilde{\Gamma}$ est un point proche de α_0 alors $\{\exp z H_q(\rho) ; z \in \mathbb{C} \cap \text{voisinage de } 0\}$ coupe Γ transversalement en un point proche de α_0 .

Donc pour $z \in \mathbb{C} \cap \text{voisinage de } 0$ nous avons

$$(9.6) \quad \gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(f(z, \bar{z})H_q) \circ \exp(z H_p) (\alpha_0) \in \Gamma$$

où $f(z, \bar{z})$ est une fonction réel-analytique. De plus on voit facilement que γ est un difféomorphisme local ce qui permet de paramétriser Γ localement par $z \in \mathbb{C}$.

Soit $v(x, \alpha, \lambda)$ comme avant. Par une construction d'optique géométrique en deux étapes on peut alors construire comme dans la preuve du Théorème 9.1 :

$$(9.7) \quad \begin{aligned} w(z, x, \alpha, \lambda) &= \exp(\lambda f(z, \bar{z})P^*) \circ \exp(\lambda z P)v \\ &= a(z, x, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\varphi(z, x, \alpha)} \end{aligned}$$

pour (z, x, α) dans un voisinage de $(0, x_0, \alpha_0)$. Si l'on note $\gamma(z) = (x_z, \xi_z)$ alors pour $\alpha = (x_0, \xi_0)$ on a toujours (9.3) avec " t " remplacée par " z ".

Soit maintenant $r_0 > 0$ assez petit, mais indépendant de $u \in \mathcal{D}'(X)$ et supposons que $WF_a(Pu) \cap \{\gamma(z) \in \Gamma ; |z| \leq r_0\} = \emptyset$ sans perte de généralité on peut aussi supposer que le support de u est dans un petit voisinage de x_0 . Soit alors

$$U(z, \lambda) = (w(z, \cdot, \alpha, \lambda), u)_{L^2},$$

alors pour $|z| \leq r_0$ et α dans un petit voisinage de α_0 on obtient modulo des termes à décroissance exponentielle uniforme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U &\equiv \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (P^* \exp \lambda f(z, \bar{z})P^* \circ \exp \lambda z P v, u)_{L^2} \\ &\equiv \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (w, Pu)_{L^2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Après modification par un terme $\equiv 0$ on peut supposer que U est holomorphe.

Supposons maintenant que $\gamma(z_0) \notin WF_a(u)$ pour un z avec $|z| \leq r_0$. Alors pour (z, α) dans un voisinage de (z_0, α_0) nous avons $U \equiv 0$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons $U(z, \alpha, \lambda) = \mathcal{O}(e^{\varepsilon \lambda})$ pour $|z| \leq r_0$ si α est assez proche de α_0 . Appliquant une transformation de Möbius et le Théorème des 3 cercles de Hadamard on trouve $U(0, \alpha, \lambda) \equiv 0$ pour α dans un voisinage de α_0 et donc que $\alpha_0 \notin WF_a(u)$. Le Théorème résulte ensuite d'un argument géométrique simple. $\#$

Pour terminer cette section nous traiterons les équations de transport. Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x}, \lambda)$ un opérateur pseudodiff. analytique, formel, classique, d'ordre 0, défini près de $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^{2n}$ tel que $p(x_0, \xi_0) = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) \neq 0$ pour le symbole principal p . Soit $\varphi(x)$ une fonction holomorphe définie près de x_0 et qui vérifie

$$(9.8) \quad p(x, \varphi'(x)) = 0 \quad , \quad \varphi'(x_0) = \xi_0 \quad .$$

Soit $H \subset \mathbb{C}^n$ une hypersurface complexe, passant par x_0 , telle que $\frac{\partial p}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) \frac{\partial}{\partial x}$ soit transverse à H en x_0 . Après un changement de variables on se ramène au cas $x_0 = 0$, $H : x_n = 0$.

Théorème 9.3 : Soient $v(x, \lambda)$, $w(x', \lambda)$ des symboles analytiques classiques formels d'ordre 0 définis près de 0 dans \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^{n-1} respectivement. Alors il existe un symbole u dans la même classe tel que

$$(9.9) \quad \lambda e^{-i\lambda\varphi} P e^{i\lambda\varphi} u = v \quad , \quad u|_H = w \quad .$$

Démonstration : Par l'astuce de Kuranishi et c.c. nous savons déjà que $e^{-i\lambda\varphi} P e^{i\lambda\varphi}$ est un opérateur pseudodifférentiel et le problème est réduit au cas $\xi_0 = 0$, $\varphi = 0$. Après un changement de variables qui ne modifie pas H on peut aussi supposer que $\frac{\partial p}{\partial \xi'}(x, 0) = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \xi^n}(x, 0) = i$ c.a.d. $p(x, \xi) = i\xi_n + \mathcal{O}(|\xi|^2)$.

Si l'on écrit $P = \sum_0^{\infty} p_k(x, \xi) \lambda^{-k}$, $p_0 = p$, alors la première partie de (9.9) devient

$$(9.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} + p_1(x, 0) u(x, \lambda) + \lambda Au = v$$

où

OPÉRATEURS DE TYPE PRINCIPAL

$$(9.11) \quad A = \sum_{k+|\alpha| \geq 2} \frac{\lambda^{-k}}{k!} p_k^{(\alpha)}(x,0) \tilde{D}_x^\alpha,$$

et comme nous avons déjà remarqué, si l'on regroupe les termes avec la même homogénéité dans (9.10) alors on trouve une suite d'équations de transport qui vont déterminer u de manière unique dans un voisinage convenable de 0. On remarque aussi que $A = \sum_2^\infty \lambda^{-k} A_k$ est un opérateur différentiel d'ordre infini du même type que dans la section 1.

Soit

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{C}^n ; \frac{|x'|}{R} + \frac{|x_n|}{r} \leq 1 \right\}$$

où $R, r > 0$ sont assez petits pour que $\bar{\Omega}$ soit contenu dans le domaine de définition de v . On suppose sans perte de généralité que $w = 0$. Après conjugaison avec

$\exp \int_0^{x_n} p_1 dx_n$ dans (9.10) on peut aussi supposer que $p_1(x,0) = 0$. Pour $0 \leq t \leq r$ on définit $\Omega_t \subset \mathbb{C}^n$ par $\frac{|x'|}{R-t} + \frac{|x_n|}{r-t} \leq 1$. Soit $a(x)$ holomorphe sur $\Omega = \Omega_0$ et telle

que pour un $k > 1$:

$$\sup_{\Omega_t} |a| \leq C(a,k) t^{-k}, \quad 0 < t \leq r.$$

Soit

$$(\partial_{x_n})^{-1} a = \int_0^{x_n} a(x', y_n) dy_n$$

Alors $\sup_{\Omega_t} |(\partial_{x_n})^{-1} a| \leq C(a,k) \int_t^\infty s^{-k} ds = \frac{C(a,k)}{(k-1)t^{k-1}}$. Soit maintenant $a = \sum_2^\infty a_k(x) \lambda^{-k}$ un symbole d'ordre - 2 sur Ω tel que

$$(9.12) \quad \|a_k\|_{\Omega_t} = \sup_{\Omega_t} |a_k| \leq \frac{f(a,k) k^k}{t^k}, \quad 0 < t \leq r$$

où la suite des (meilleures) constantes $f(a,k)$ est au plus à croissance exponentielle. Alors $b = (\frac{1}{\lambda} \partial_{x_n})^{-1} a = \sum_1^\infty b_k \lambda^{-k}$ où $b_k = (\partial_{x_n})^{-1} a_{k+1}$ et donc

$$(9.13) \quad \|b_k\|_{\Omega_t} \leq \frac{f(a,k+1)}{k t^k} (k+1)^{k+1} \leq 2e \frac{f(a,k+1)k^k}{t^k} .$$

donc $f(b,k) \leq 2e f(a,k+1)$ si l'on définit $f(b,k)$ comme dans (9.12). Soient

$$\|a\|_{\mu} = \sum_2^{\infty} f(a,k) \mu^k, \quad \|b\|_{\mu} = \sum_1^{\infty} f(b,k) \mu^k$$

Alors,

$$(9.14) \quad \|b\|_{\mu} \leq 2e \sum_1^{\infty} f(a,k+1) \mu^k = \frac{2e}{\mu} \|v\|_{\mu} .$$

L'équation (9.10) avec donnée initiale 0 peut s'écrire

$$(9.15) \quad u + \left(\frac{1}{\lambda} \partial_{x_n}\right)^{-1} Au = \tilde{v}, \quad \text{où } \tilde{v} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_{x_n}\right)^{-1} v .$$

Ici \tilde{v} est d'ordre 0. Si l'on définit $\|A\|_{\mu}$ comme dans la section 1 alors $\|A\|_{\mu} = \mathcal{O}(\mu^2)$. Comme dans la section 1 on voit aussi que $\|Au\|_{\mu} \leq \|A\|_{\mu} \|u\|_{\mu}$. Donc avec (9.14) on obtient

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} \partial_{x_n}\right)^{-1} Au \right\| < C_{\mu} \|u\|_{\mu}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de μ . Il est alors clair que $\|u\|_{\mu} < \infty$ pour μ assez petit. Donc u est un symbole analytique. $\#$

Voir aussi la Remarque 12.13.

10. LA MÉTHODE DES LAGRANGIENNES NON-CARACTÉRISTIQUES

Il s'agit de vieilles idées qui sont bien connues par exemple dans le contexte du Théorème de Holmgren. Elles sont également bien connues dans le contexte micro-local, par les experts de la théorie des hyperfonctions. Classiquement on cherche à déformer des hypersurfaces ou domaines pour obtenir des résultats de prolongement. Nous donnerons ici une version assez directe à l'aide des espaces H_{φ} . On démontrera aussi quelques résultats de propagation de singularités qui malheureusement sont tous contenus dans les résultats de la section 15 (obtenus ultérieurement). Il n'est cependant pas du tout clair que la méthode plus élaborée des sections 12, 13, 14

(et qui contient d'ailleurs implicitement des déformations non-caractéristiques) soit dans tous les cas la meilleure.

Soit $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $\phi \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ une fonction réelle. Ici $C^{1,1}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ dont les dérivées premières sont de classe Lipschitz sur $\bar{\Omega}$. Soit $P(x, \xi, \lambda)$ un symbole analytique classique d'ordre 0, défini dans un voisinage de $\Lambda_\phi = \{(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)) ; x \in \bar{\Omega}\}$. Pour $u \in H_\phi^{1,loc}(\Omega)$ on pose alors

$$(10.1) \quad Pu(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\theta} P(x, \theta, \lambda) \chi(x, y) u(y) dy d\theta$$

où $\Gamma(x)$ est le contour singulier : $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) + \frac{i}{C_0} \frac{(x-y)}{|x-y|}$ et où $\chi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \chi(x, y) &= 1 \quad \text{pour } |x-y| \leq \frac{1}{2C_1} d(x, C\Omega) , \\ \chi(x, y) &= 0 \quad \text{pour } |x-y| \geq \frac{1}{C_1} d(x, C\Omega) . \end{aligned}$$

(L'existence d'une telle fonction sera établie dans la section 12). Ici les constantes $C_0 > 0$ et $C_1 > 1$ doivent être assez grandes pour que (x, θ) reste bien dans le domaine de définition de $P(x, \theta, \lambda)$ pour $(y, \theta) \in \Gamma(x)$, $(x, y) \in \text{supp } \chi$. On demande aussi que

$$(10.2) \quad \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) - \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(y) \right| \leq \frac{1}{4C_0} \quad \text{pour } |x-y| \leq \frac{1}{C_1} d(x, C\Omega) .$$

Alors sur $\Gamma(x) \cap \text{supp } \chi$ on a

$$\left| e^{i\lambda(x-y)\theta - \lambda(\phi(x) - \phi(y))} \right| \leq e^{-\frac{3\lambda}{4C_0} |x-y|} .$$

Pour $u \in H_\phi^{1,loc}(\Omega)$ on a

$$(10.3) \quad \bar{\partial} Pu \in L_{\phi_1}^{2,loc} , \quad \phi_1(x) = \phi(x) - \frac{3}{8C_0 C_1} d(x, C\Omega) .$$

Pour $\phi \in C^2$ ceci résulte de la formule pour $\bar{\partial} Pu$ que l'on établira dans la section 12 et pour $\phi \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ on obtient ensuite (10.3) par un simple argument de régularisation.

Plus généralement, si $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $\left| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4C_0}$ alors pour $u \in H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$ on a $Pu \in L_{\varphi}^{2,loc}(\Omega)$, $\bar{\partial} Pu \in L_{\varphi_1}^{2,loc}(\Omega)$, où $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{4C_0 C_1} d(x, C\Omega)$.
 En effet, pour $|x-y| \leq \frac{1}{C_1} d(x, C\Omega)$, $(y, \theta) \in \Gamma(x)$ on a

$$\left| e^{i\lambda(x-y)\theta - \lambda(\varphi(x) - \varphi(y))} \right| = \left| e^{i\lambda(x-y)\theta - \lambda(\phi(x) - \phi(y)) - \lambda((\varphi - \phi)(x) - (\varphi - \phi)(y))} \right|$$

$$\leq e^{-\frac{\lambda}{2C_0} |x-y|}.$$

Si près d'un point $x_0 \in \Omega$, φ est aussi de classe $C^{1,1}$ et $P_{\varphi}u$ dénote un opérateur muni d'un contour régulier adapté à φ , alors pour $u \in H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$ on a $Pu - P_{\varphi}u = 0$ dans H_{φ, x_0} . Ceci se démontre par la formule de Stokes.

Proposition 10.1 : Soient P, Ω, ϕ comme ci-dessus, vérifiant (10.2) et soit $\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{1,1}(\Omega)$, telle que

$$(10.4) \quad \varphi|_{\partial\Omega} \geq \hat{\phi}|_{\partial\Omega}, \quad \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{i} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4C_0},$$

$$(10.5) \quad \varphi(x) < \hat{\phi}(x) \Rightarrow p(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \neq 0.$$

Ici $\hat{\phi} \leq \phi$ est dans $C(\bar{\Omega})$. Si $u \in H_{\hat{\phi}}^{loc}(\Omega)$, $Pu \in L_{\hat{\phi}}^{2,loc}$, alors $u \in H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$.

Démonstration : Soit $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Alors si P_{φ} désigne l'opérateur P muni d'un contour régulier $\Gamma(x)$ convenable, adapté à φ , on trouve à l'aide de la formule de Stokes que pour toute fonction u , holomorphe dans Ω ,

$$\| Pu - P_{\varphi}u \|_{L_{\varphi}^2(\Omega_1)} \leq C e^{-\varepsilon\lambda} \| u \|_{L_{\varphi}^2(\Omega_2)},$$

où $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ et $C, \varepsilon > 0$. Ici $\| \cdot \|_{L_{\varphi}^2(\Omega_1)}$ désigne la norme L^2 sur Ω_1 pour la mesure $e^{-2\lambda\varphi(x)} L(dx)$. Si Q_{φ} désigne l'opérateur, obtenu en remplaçant $P(x, \theta)$ par $q(x) = p(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x})$ dans la formule intégrale pour $P_{\varphi}u(x)$ on voit que

$$\| Q_{\varphi}u - P_{\varphi}u \|_{L_{\varphi}^2(\Omega_1)} \leq C \lambda^{-1/2} \| u \|_{L_{\varphi}^2(\Omega_2)}.$$

LAGRANGIENNES NON-CARACTÉRISTIQUES

Avec $\Gamma(x)$ choisit convenablement, on trouve à l'aide de la phase stationnaire comme dans l'exemple 2.6, que

$$\|Qu - q.u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq C e^{-\varepsilon \lambda} \|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_2)} .$$

Donc pour toute fonction u holomorphe dans Ω ,

$$\|Pu - q.u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq C \lambda^{-1/2} \|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_2)} .$$

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, prenons maintenant $\Omega_1 = \{x \in \Omega ; \varphi(x) < \tilde{\varphi}(x) - \varepsilon\}$. Alors $\frac{1}{|q|}$ est borné sur Ω_1 et on trouve

$$\|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq C \|q.u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq C_1 (\|Pu\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} + \lambda^{-1/2} \|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_2)}) .$$

Donc pour λ assez grand :

$$\|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq 2C_1 (\|Pu\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} + \lambda^{-1/2} \|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_2 \setminus \Omega_1)}) .$$

Nous avons $\varphi \geq \tilde{\varphi} - \varepsilon$ dans $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ et si u vérifie les hypothèses de la proposition on en déduit que :

$$\|u\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leq C(\varepsilon) e^{2\varepsilon \lambda} .$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, Ω_1 tend vers $\{x \in \Omega ; \varphi(x) < \tilde{\varphi}(x)\}$ et on trouve bien $u \in H_\varphi^{1oc}(\Omega)$.

#

Dans les applications on a $u \in H_{\Phi}^{1,loc}(W)$ où $W \subset \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert et $\Omega \subset \subset W$, $\Phi \in C^{1,1}(\bar{W})$ et $P_{\Phi} u|_{\Omega} \in L_{\Phi-2\varepsilon}^{2,loc}(\Omega)$ pour un $\varepsilon > 0$. Ici $P_{\Phi} u$ est défini avec un contour régulier adapté à Φ . Quitte à modifier $\varepsilon > 0$ on a plus explicitement

$$(10.6) \quad P_{\Phi} u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\theta} P(x, \theta, \lambda) u(y) dy d\theta$$

où $\Gamma(x)$ est le contour $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}(x) + \frac{i}{C_0 d_0}(\overline{x-y})$, $|x-y| \leq d_0$, où $d_0 < d(\Omega, CW)$ est assez petit pour que

$$\left| \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}(x) - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}(y) \right) \right| \leq \frac{1}{4C_0} \text{ pour } x \in \Omega, |x-y| \leq d_0.$$

Comme avant on peut remplacer $\Gamma(x)$ dans (10.6) par le contour singulier

$$\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}}(x) + \frac{i}{C_0} \frac{(\overline{x-y})}{|x-y|} \text{ et avec } x \text{ et } P \text{ comme avant (et } C_1 > 0 \text{ telle que}$$

$$\frac{d(x, C\Omega)}{C_1} \leq d_0) \text{ on obtient}$$

$$(10.7) \quad P u - P_{\Phi} u \in L_{\Phi_1}^{2,loc}(\Omega).$$

Ici Φ_1 est défini dans (10.3).

Supposons maintenant en plus, que $u \in H_{\tilde{\Phi}}^{1,loc}(\Omega)$, où $\tilde{\Phi} \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ et

$$\left| \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right) \right| \leq \frac{1}{4C_0}. \text{ Alors on obtient } P u \in L_{\min(\tilde{\Phi}, \max(\Phi_1, \Phi-2\varepsilon))}^{2,loc}(\Omega). \text{ Puisque}$$

$$\min(a, \max(b, c)) \leq \max\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}\right) \text{ on a alors}$$

$Pu \in L^{2,loc}$
 $\max \left(\frac{1}{2} (\phi + \tilde{\phi}) - \frac{3}{16C_0 C_1} d(x, C\Omega), \frac{\phi + \tilde{\phi}}{2} - \varepsilon \right)$. On peut toujours supposer que $\tilde{\phi} \leq \phi$,

quitte à remplacer $\tilde{\phi}$ par $\min(\phi, \tilde{\phi})$, et alors

$$Pu \in L^{2,loc} \max \left(\frac{1}{2} (\phi + \tilde{\phi}) - \frac{3}{16C_0 C_1} d(x, C\Omega), \phi - \varepsilon \right) (\Omega).$$

Corollaire 10.2 : Soient Ω , C_0 , C_1 comme précédemment, $\Omega \subset\subset W$ où W est un ouvert, $\phi \in C^{1,1}(\bar{W})$. On suppose que $u \in H_{\phi}^{loc}(W)$, $P_{\phi}u|_{\Omega} \in L_{\phi-2\varepsilon}^{2,loc}(\Omega)$ où $\varepsilon > 0$ et P_{ϕ} est donné par (11.6) avec d_0 vérifiant les conditions supplémentaires données après (11.6).

Soit $\tilde{\phi} \leq \phi$ une fonction Lipschitzienne sur $\bar{\Omega}$ telle que $\left| \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) \right| \leq \frac{1}{4C_0}$ et supposons que $u \in H_{\tilde{\phi}}^{loc}(\Omega)$. Soit $\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{1,1}(\Omega)$ telle que $\varphi \geq \tilde{\phi}$ sur $\partial\Omega$, $\left| \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) \right| \leq \frac{1}{4C_0}$ et $p(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \neq 0$ sur Ω . Si en plus $\varphi \geq \max \left(\frac{1}{2} (\phi + \tilde{\phi}) - \frac{3}{16C_0 C_1} d(x, C\Omega), \phi - \varepsilon \right)$, alors $u \in H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$.

Ici on peut diminuer Ω sans changer ε , C_0 , C_1 et le Corollaire 10.2 est encore valable (mais il faut en général modifier le choix de φ).

Comme la première application nous allons démontrer un résultat important de Kawai-Kashiwara [KK] sur la propagation des singularités analytiques pour des opérateurs microhyperboliques. Soit d'abord $p(x)$ réel-analytique défini près de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $y_0 \in \mathbb{R}^n$ on dit que p est microhyperbolique en x_0 dans la direction y_0 , s'il existe un voisinage réel V_0 de x_0 et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $p(x+it y_0) \neq 0$ pour $x \in V_0$, $0 < t \leq \varepsilon_0$. D'après une version microlocale du théorème des tubes de Bochner dû à Kashiwara [K] (voir aussi Komatsu [Ko]) il existe alors des voisinages réels V de x_0 et W de y_0 tels que $p(x+ity) \neq 0$ pour $x \in V$, $y \in W$, $0 < t \leq \varepsilon_0$. Cette "stabilité" dans la définition de microhyperbolicité est très importante, une première conséquence est que la définition s'étend au cas où \mathbb{R}^n est remplacé par une variété analytique et y_0 par un vecteur tangent. Si l'on remplace x par (x, ξ) et $p = p(x, \xi)$ est le symbole principal d'un opérateur différentiel P , on a alors une définition évidente de microhyperbolicité pour P en un point $(x_0, \xi_0) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ dans une direction réelle $(y_0, \eta_0) \in T_{(x_0, \xi_0)}(T^* \mathbb{R}^n \setminus 0)$.

Théorème 10.3 (Kashiwara-Kawai [KK]) : Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques défini dans un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$. Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$ et $\psi(x, \xi) \in C^2(V)$ une fonction réelle, nulle en (x_0, ξ_0) , telle que P soit microhyperbolique en (x_0, ξ_0) dans la direction H_ψ . Ici $V \subset T^*X \setminus 0$ est un voisinage de (x_0, ξ_0) . Si $u \in \mathcal{D}'(X)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(Pu)$, $\{(x, \xi) \in V ; \psi(x, \xi) < 0\} \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$, alors $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$.

Démonstration : Sans perte de généralité on peut supposer que ψ est analytique. Pour $\delta > 0$ assez petit on pose

$$\tilde{\psi} = \psi - \frac{\delta^3}{2} + \delta((x-x_0)^2 + (\xi-\xi_0)^2) .$$

On peut aussi remplacer V par la boule $(x-x_0)^2 + (\xi-\xi_0)^2 \leq \delta^2$. Alors P est microhyperbolique en tout point de \bar{V} dans la direction $H_{\tilde{\psi}}$ et $\tilde{\psi}(x_0, \xi_0) < \psi(x_0, \xi_0) = 0$ pendant que $\tilde{\psi} > \psi$ sur ∂V . Donc

$$(10.8) \quad WF_\alpha(u) \cap \partial V \cap \{\tilde{\psi} \leq 0\} = \emptyset$$

et il suffit de montrer

$$(10.9) \quad WF_\alpha(u) \cap V \cap \{\tilde{\psi} < 0\} = \emptyset .$$

On fait maintenant une tf. de FBI ; T qui transforme $T^*\mathbb{R}^n$ en Λ_{ϕ_0} et par abus de notation on désigne encore par $P, p, \tilde{\psi}$ les quantités transformées. On sait donc que $p|_{\Lambda_{\phi_t}} \neq 0$ si ϕ_t est telle que $\Lambda_{\phi_t} = \exp i t H_{\tilde{\psi}}(\Lambda_{\phi_0})$, $0 < t \leq t_0$.

En général, si $q(x, \xi)$ est holomorphe et $\varphi(x)$ est une fonction réelle de classe C^2 qui vérifie $q(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) = 0$, alors les champs de vecteurs réels $\widehat{H}_q, \widehat{H}_{iq}$ associés à H_q et H_{iq} sont tangents à $\Lambda_\varphi = \{\xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\}$. (Aussi, comme on le verra dans la section 11, $\text{Re } q$ et $\text{Im } q$ sont en involution pour la forme symplectique réelle $\text{Im } \sigma = \text{Im} \sum_1^n d\xi_j \wedge dx_j$, et Λ_φ est une variété Lagrangienne pour cette forme). Appliquant ces observations à $\tau + i\tilde{\psi}(x, \xi)$ on voit que l'on peut prendre $\phi_t = \phi(t, x)$ comme la solution du système de Hamilton-Jacobi (en involution pour $\text{Im } \sigma$)

$$(10.10) \quad \begin{cases} \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} + i \tilde{\psi}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}) = 0 \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) \end{cases}$$

Ici on se restreint à $0 < t \leq \varepsilon_0$ et on observe que

$$\phi(t, x) = \phi_0(x) + \frac{t}{2} \tilde{\psi}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi_0}{\partial x}) + \mathcal{O}(t^2) .$$

Soit $\tilde{V} \subset \mathbb{C}_x^n$ l'ensemble qui correspond à V et W un petit voisinage \tilde{V} . Les hypothèses sur $WF_a(u)$ entraînent que $U = Tu \in H_{\tilde{\phi}}^{loc}(W)$ où $\tilde{\phi} \leq \phi_0$ et $\tilde{\phi} < \phi$ sur $\partial \tilde{V} \cap \{\tilde{\psi} \leq 0\}$. Ici $\tilde{\phi}$ est une petite perturbation de ϕ_0 dans la norme de C^2 et pour un $\varepsilon > 0$ assez petit nous avons $PU \in H_{\phi_0 - 2\varepsilon}^{loc}(\tilde{V})$. Alors pour $t_0 > 0$ assez petit on a $\phi(t_0, x) \geq \tilde{\phi}$ sur $\partial \tilde{V}$ et même

$$\phi(t_0, x) \geq \max \left(\frac{1}{2} (\phi_0 + \tilde{\phi}) - \frac{3}{16C_0C_1} d(x, C\tilde{V}), \phi_0 - \varepsilon \right) \text{ dans } \tilde{V} .$$

En effet, cette inégalité est triviale quand $\tilde{\psi} \geq C t_0$ car alors $\phi(t_0, x) \geq \phi_0$ et dans la région $\tilde{\psi} \leq C t_0$ et pour $t_0 > 0$ assez petit on a

$$\frac{1}{2} (\phi_0 + \tilde{\phi}) - \frac{3}{16C_0C_1} d(x, C\tilde{V}) \leq \phi - a ,$$

où $a > 0$ ne dépend pas de t_0 .

On peut alors appliquer le Corollaire 10.2 avec $\varphi = \phi(t_0, x)$ et on trouve $U \in H_{\tilde{\psi}, t_0}^{loc}(\tilde{V})$ pour $0 < t_0 \leq \varepsilon_0$ si ε_0 est assez petit. Donc $U = 0$ dans H_{ϕ_0, x_1} pour

tout $x_1 \in \tilde{V}$ avec $\tilde{\psi}(x_1) < 0$, et par FBI inverse on obtient (10.9).

#

Comme notre deuxième application nous allons considérer certaines "perturbations" d'opérateurs étudiés par Bony-Schapira [Bo-Sch]. Soit $V \subset T^*\mathbb{R}^n$ la variété involutive donnée par $\xi'' = 0$, où on écrit $x = (x', x'')$, $\xi = (\xi', \xi'')$, $\xi'' \in \mathbb{R}^d$. Soit $\Gamma_0 \subset V$ la feuille bicaractéristique donnée par $x' = 0$, $\xi' = (1, 0, \dots, 0)$, $\xi'' = 0$. On considère un opérateur différentiel P , à coefficients analytiques, défini dans un voisinage X de 0, tel que le symbole principal p vérifie dans un voisinage W de $(0, \eta_0) = (0, (1, 0, \dots, 0))$ les conditions :

(10.11) $p = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2)$, où $d_{\Gamma_0} = d_{\Gamma_0}(x, \xi)$ désigne la distance de (x, ξ) à Γ_0 ,

(10.12) $p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^4)$, $\nabla p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2)$,

(10.13) Sur Γ_0 on a $\langle v, p''v \rangle \neq 0$ pour tout vecteur tangent réel $v = (t_x, t_\xi)$ avec $t_\xi \neq 0$.

L'hypothèse (10.12) entraîne que $T_{\Gamma_0} V$ est dans le noyau de p'' et (10.13) est une condition d'ellipticité transversale (par rapport à V). A l'aide de (10.12), (10.13) on obtient dans un petit voisinage complexe de $(0, \eta_0)$:

(10.14) $p(x, \xi) \neq 0$ pour $|\operatorname{Im} \xi''| + |x'|^2 + |\xi' - \eta_0'|^2 < \frac{1}{C_0} |\operatorname{Re} \xi''|$,

si la constante C_0 est assez grande. En effet, il suffit d'écrire le développement de Taylor :

(10.15) $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, \xi)(\xi'')^\alpha + \mathcal{O}\left((|x'|^2 + |\xi' - \eta_0'|^2)|\xi''| + |x'|^4 + |\xi' - \eta_0'|^4\right)$

Théorème 10.4 : Supposons en plus que $\Gamma_0 \cap W$ soit connexe. Si $u \in \mathcal{D}'(X)$, $WF_\alpha(Pu) \cap W \cap \Gamma_0 = \emptyset$, alors ou bien $\Gamma_0 \cap W \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$, ou bien $\Gamma_0 \cap W \subset WF_\alpha(u)$.

Ce résultat est dû à Bony-Schapira dans le cas où (10.11), (10.12) sont remplacées par la condition plus forte : $p = \mathcal{O}(d_V^2)$. Le résultat sera encore généralisé dans la section 15.

Preuve du Théorème 10.4 : On applique d'abord la tf. de FBI

(10.16) $Tu(x, \lambda) = \int e^{i\lambda(i(x-y)^2/2 - y \eta_0)} u(y) dy$

pour laquelle $\Phi = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} x)^2$, $\Lambda_\Phi : \xi = -\operatorname{Im} x$. Le point $(0, \eta_0)$ se transforme en $(0, 0)$, le complexifié $V^{\mathbb{C}}$ de V est conservé pendant que la feuille complexe $\Gamma_0^{\mathbb{C}}$ devient $\tilde{V} : x' = \xi' = 0, \xi'' = 0$. Si \tilde{p} est le symbole principal de l'opérateur transformé, \tilde{P} , alors (10.14) devient

$$(10.14) \quad \tilde{p}(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } |\operatorname{Im} \xi''| + |x'|^2 + |\xi'|^2 < \frac{1}{C_0} |\operatorname{Re} \xi''| ,$$

dans un voisinage de (0,0).

En termes de fonctions poids (10.14) s'écrit

$$(10.14) \quad \tilde{p}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)) \neq 0 \text{ pour}$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \operatorname{Re} x''} \right| + |x'|^2 + \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right|^2 < \frac{1}{C_0} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \operatorname{Im} x''} \right|$$

et $(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x})$ dans un voisinage de (0,0).

Nous avons besoin du Lemme suivant ;

Lemme 10.5 : Pour tous $r_1, r_2 \in]0, 1]$, $C > 0$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et une fonction $\varphi_0(x'') \in C^{1,1}(\{| \operatorname{Re} x''| \leq r_1, | \operatorname{Im} x''| \leq r_2\})$ telle que $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{1}{2} (\operatorname{Im} x'')^2$, φ_0 est radiale en $\operatorname{Im} x''$ et $\left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial \operatorname{Re} x''} \right| \leq \frac{1}{C} \frac{\partial \varphi_0}{\partial |\operatorname{Im} x''|}$, $\varphi_0 = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} x'')^2$ quand $| \operatorname{Re} x''| = r_1$ où $| \operatorname{Im} x''| = r_2$, $\varphi_0 = 0$ pour $| \operatorname{Im} x''| \leq \varepsilon (r_1^2 - | \operatorname{Re} x''|^2)$. Finalement on peut choisir ε, φ_0 telles que $\| \varphi_0 \|_{C^{1,1}} \leq \tilde{C}$, où \tilde{C} est une constante qui ne dépend pas de r_1, r_2, C .

Preuve du Lemme 10.5 : Soit

$$\chi(x'') = \frac{(| \operatorname{Im} x''| - \varepsilon (r_1^2 - | \operatorname{Re} x''|^2))_+}{(r_2 - \varepsilon (r_1^2 - | \operatorname{Re} x''|^2))} ,$$

où $a_+ = \max(a, 0)$. Alors $\chi(x'')$ est Lipschitzienne et même C^∞ là où $\chi \neq 0$. Dans la région $\chi \neq 0$, on obtient les estimations uniformes en r_1, r_2 et $\varepsilon \leq r_2/2r_1^2$:

$$\frac{\partial}{\partial |\operatorname{Im} x''|} \chi \sim \frac{1}{r_2} , \quad \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} x''} \chi = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{r_2}\right) ,$$

$$\nabla_{x''}^2 \chi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_2 |\operatorname{Im} x''|}\right) .$$

On pose alors $\varphi_0(x'') = \frac{1}{2} r_2^2 \chi^2$ et on vérifie les propriétés voulues (avec $\varepsilon > 0$ assez petit).

#

On se place maintenant dans un domaine :

$$\Omega : |\operatorname{Re} x''| < r_1, |\operatorname{Im} x''| < r_2, |x'| < |\operatorname{Im} x''|,$$

avec r_1, r_2 assez petits. Avec $C = C_0$ où C_0 est donnée dans (10.14) on choisit $\varphi_0(x'')$ comme dans le lemme et avec une constante $C_1 > 0$ assez grande on considère

$$\psi_t(x) = |x'|^2 + C_1 |\operatorname{Im} x''| |x'|^2 + \varphi_0(x'') + t(\operatorname{Im} x'')^2$$

pour $0 \leq t \leq 1$. On prendra $r_2 < \frac{1}{C_1}$. Alors ψ_t est continue sur $\bar{\Omega}$ et de classe $C^{1,1}$ sur Ω . La norme $C^{1,1}$ de ψ_t peut être majorée par une constante qui ne dépend pas de r_0, r_1, C_1, C_0 (quitte à choisir " ε " assez petit dans le Lemme (10.5)). Ainsi ψ_t sera aussi proche de $\frac{1}{2} (\operatorname{Im} x'')^2$ que l'on veut dans la norme C^1 , quitte à choisir $r_2 > 0$ assez petit.

Nous avons $\psi_t|_{\partial\Omega} \geq |x'|^2 + \varphi_0(x'')|_{\partial\Omega} \geq \frac{1}{2} |\operatorname{Im} x''|^2|_{\partial\Omega}$. Si C_1 est assez grand, $0 < t \leq 1$ on a aussi dans Ω

$$\left| \frac{\partial \psi_t}{\partial \operatorname{Re} x''} \right| + |x'|^2 + \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x'} \right|^2 < \frac{1}{C_0} \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial \operatorname{Im} x''} \right|$$

Si r_2 est assez petit, en fonction aussi de $U = Tu$, on peut alors appliquer le Corollaire 10.2 avec $\varphi = \psi_t$, $0 < t \leq 1$. Faisant tendre t vers 0 on obtient :

$$(10.17) \quad Tu \in H_{\psi_0}^{1, \text{loc}}(\Omega).$$

La seule contrainte sur r_1 est qu'il soit assez petit pour que l'on ne rencontre pas la région correspondant à $WF_a(Pu)$. Soit $\rho_1 < r_1$. Alors pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit on a $\psi_0(x) = |x'|^2 + C_1 |\operatorname{Im} x''| |x'|^2 \leq 2|x'|^2$ pour $|x'| \leq |\operatorname{Im} x''| \leq \varepsilon_0, |\operatorname{Re} x''| \leq \rho_1$. Puisque $\frac{1}{2} |\operatorname{Im} x''|^2 \leq 2|x'|^2$ pour $|\operatorname{Im} x''| \leq |x'|$ on a donc

$$(10.18) \quad Tu \in H_{2|x'|^2}^{1, \text{loc}},$$

dans la région $|\operatorname{Re} x''| \leq \rho_1, |\operatorname{Im} x''| \leq \varepsilon_0, |x'| \leq \varepsilon_0$. Ici $2|x'|^2$ est trivialement

LAGRANGIENNES NON-CARACTÉRISTIQUES

pluri harmonique en x'' et on peut appliquer le principe de maximum à $x'' \rightarrow e^{-2\lambda|x''|^2} Tu$ pour conclure que si $Tu = 0$ dans $H_{\phi,0}$ alors $Tu = 0$ dans $H_{\phi,(x'_0,0)}$ pour tout x'_0 réel avec $|x'_0| < \rho_1$. Nous avons alors montré que si $(0, \eta_0) \notin WF_a(u)$ alors $(x'_0, 0, \eta_0) \notin WF_a(u)$ pour $|x'_0| < \rho_1$. Le même argument marche si l'on remplace $(0, \eta_0)$ par un autre point sur $\Gamma_0 \cap W$ et on obtient le Théorème 10.4. #

La version invariante du Théorème 10.4 est la suivante : Soit $\Gamma \subset T^*X \setminus 0$ une sous-variété réel-analytique connexe et isotrope pour la 2-forme symplectique. On suppose alors que le symbole principal p vérifie dans un voisinage de Γ :

$$(10.19) \quad p = \mathcal{O}(d_{\Gamma}^2),$$

(10.20) Si V est une sous-variété involutive dont Γ est une feuille bicaractéristique, alors

$$\forall p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma}^2), \quad p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma}^4),$$

(10.21) $\langle p^{\nu}, \nu \rangle \neq 0$ pour tout $0 \neq \nu \in N_{\Gamma}(V)$.

Il est facile de voir que (10.20), (10.21) ne dépendent pas du choix de V car pour $\rho \in \Gamma$ on a $T_{\rho}(V) = T_{\rho}(\Gamma)^{\perp}$, l'espace orthogonal de $T_{\rho}(\Gamma)$ pour la forme symplectique.

Soit \mathcal{K} une transformation canonique qui envoie V localement sur $\xi'' = 0$. Alors modulo un changement de variables en y , il est bien connu qu'il existe une fonction $\varphi(x, \eta)$ réelle et analytique de $2n$ variables telle que \mathcal{K} soit donnée par $(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(x, \eta), \eta) \rightarrow (x, \frac{\partial \varphi}{\partial x})$ et bien entendu $\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \eta} \neq 0$. On peut alors considérer l'opérateur Fourier intégral formel, $Ru(x, \lambda) = \iint e^{i\lambda(\varphi(x, \eta) - y\eta)} u(y) dy d\eta$ et faire le composé formel $T \circ R$ où T est comme avant. Pour calculer ce composé, on applique t_{R_y} sur le noyau $K(x, y, \lambda)$ de T et on trouve alors une nouvelle Tf. de FBI, \tilde{T} qui transforme P en un opérateur \tilde{P} du même type que dans la démonstration du Théorème 10.4. On obtient alors,

Théorème 10.4' : Sous les hypothèses plus générales (10.19)-(10.21), où $\Gamma \subset T^*X \setminus 0$ est une variété réel-analytique isotrope et connexe, si $u \in \mathcal{D}'(X)$, $\Gamma \cap WF_{\alpha}(Pu) = \emptyset$, alors ou bien $\Gamma \cap WF_{\alpha}(u) = \emptyset$ ou bien $\Gamma \subset WF_{\alpha}(u)$.

Ce Théorème s'applique au Laplacien de Kohn sur une hypersurface réelle de \mathbb{C}^2 qui contient une courbe complexe, voir la section 15.

11. VERS UNE THEORIE GENERALE

Dans la partie géométrique on s'est inspiré de Schapira [Sch] qui a observé l'intérêt de distinguer entre $\text{Re } \sigma$ et $\text{Im } \sigma$ quand on travaille dans le domaine complexe. Ici $\sigma = \sum d\zeta_j \wedge dz_j$, $z_j = x_j + iy_j$, $\zeta_j = \xi_j + i \eta_j$,

$$\text{Re } \sigma = \frac{1}{2} (\sigma + \bar{\sigma}) = \sum d\xi_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge dy_j$$

$$\text{Im } \sigma = \frac{1}{2i} (\sigma - \bar{\sigma}) = \sum d\xi_j \wedge dy_j + d\eta_j \wedge dx_j .$$

On vérifie que $\text{Re } \sigma$ et $\text{Im } \sigma$ sont des formes symplectiques réelles, c.a.d. des 2-formes fermées et non-dégénérées. Par exemple $\text{Im } \sigma$ devient la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}_X^{2n} \times \mathbb{R}_\Xi^{2n}$ si l'on pose $X = (y, x)$, $\Xi = (\xi, \eta)$.

Nous avons donc une géométrie symplectique complexe et deux géométries symplectiques réelles données par σ , $\text{Re } \sigma$, $\text{Im } \sigma$. Etudions d'abord la relation entre les champs Hamiltoniens. Soit $r = p + iq$ une fonction holomorphe (définie sur un ouvert de \mathbb{C}^{2n}). Les équations de Cauchy-Riemann ; $\bar{\partial}p + i \bar{\partial}q = 0$, $\partial p - i \partial q = 0$ entraînent $\partial p = i \partial q$, $\bar{\partial} r = 2i \bar{\partial} q$. Soit $H_r \in T_{1,0}(\mathbb{C}^{2n}) \subset \mathbb{C} \otimes T(\mathbb{C}^{2n})$ le vecteur Hamiltonien (holomorphe) défini en tout point par $H_r \lrcorner \sigma = -dr$ (où on observe que σ est une $(2,0)$ -forme et dr est une $(1,0)$ -forme). Explicitement, $H_r = \sum \frac{\partial r}{\partial \zeta_j} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j}$. Par définition on a donc (en tout point) $\langle \sigma, t \wedge H_r \rangle = - \langle dr, t \rangle$ pour tout $t \in T_{1,0}(\mathbb{C}^{2n})$. Cette relation est encore vraie trivialement pour $t \in T_{0,1}(\mathbb{C}^{2n})$ donc pour $t \in \mathbb{C} \otimes T(\mathbb{C}^{2n})$ et en particulier pour $t \in T(\mathbb{C}^{2n})$. Soit \hat{H}_r le champ de vecteurs, réel, associé à H_r , c.a.d. $\hat{H}_r \in T(\mathbb{C}^{2n})$ est défini par $H_r - \hat{H}_r \in T_{0,1}$. Alors $\langle \sigma, t \wedge (\hat{H}_r - H_r) \rangle = 0$ pour $\forall t \in \mathbb{C} \otimes T(\mathbb{C}^{2n})$ donc $\langle \sigma, t \wedge \hat{H}_r \rangle = - \langle dr, t \rangle$ et on déduit que

$$(11.1) \quad \hat{H}_r \lrcorner \sigma = -dr .$$

Séparant les parties réelles et imaginaires on obtient

THÉORIE GÉNÉRALE

$$(11.2) \quad \widehat{H}_r \lrcorner \operatorname{Re} \sigma = - dp \quad , \quad \widehat{H}_r \lrcorner \operatorname{Im} \sigma = - dq \quad .$$

Soient d'autre part $H_p^{\operatorname{Im} \sigma}$, $H_p^{\operatorname{Re} \sigma}$ les champs Hamiltoniens pour $\operatorname{Im} \sigma$ et $\operatorname{Re} \sigma$ respectivement. Alors par définition

$$(11.3) \quad H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Im} \sigma = H_p^{\operatorname{Re} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma = - dp$$

$$(11.4) \quad H_q^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Im} \sigma = H_q^{\operatorname{Re} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma = - dq \quad .$$

Comparant avec (11.2) on trouve

$$(11.5) \quad \widehat{H}_r = - H_p^{\operatorname{Re} \sigma} = H_q^{\operatorname{Im} \sigma} \quad .$$

La même discussion s'applique aussi à $i r = - q + i p$:

$$(11.6) \quad \widehat{H}_{i r} = H_q^{\operatorname{Re} \sigma} = H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \quad .$$

Une conséquence immédiate est que p et q sont en involution pour $\operatorname{Im} \sigma$:

$$\{p, q\}^{\operatorname{Im} \sigma} = H_p^{\operatorname{Im} \sigma}(q) = - H_q^{\operatorname{Re} \sigma}(q) = 0 \quad .$$

En général, les champs Hamiltoniens conservent la forme symplectique :

$$\mathcal{L}_{H_p^\omega}(\omega) = 0 \quad ,$$

où ω est une forme symplectique réelle, p est une fonction réelle de classe C^2 et \mathcal{L} désigne "dérivée de Lie".

Proposition 11.1 : Soit $p(z, \bar{z})$ une fonction réelle de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{C}^{2n} . Alors

$$\mathcal{L}_{H_p^{\operatorname{Im} \sigma}}(\operatorname{Re} \sigma) = \frac{2}{i} \bar{\partial} p \quad .$$

Preuve : On a

$$(11.7) \quad \mathcal{L}_{H_p^{\operatorname{Im} \sigma}}(\operatorname{Re} \sigma) = H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner d \operatorname{Re} \sigma + d(H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma) = d(H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma)$$

puisque $d \operatorname{Re} \sigma = 0$. Pour calculer $H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma$ en un point donné, on peut supposer que p est linéaire, donc pl.h. ; $r = p + iq$, $\bar{\partial}r = 0$. Alors par (11.6) :

$$H_p^{\operatorname{Im} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma = -H_q^{\operatorname{Re} \sigma} \lrcorner \operatorname{Re} \sigma = dq = \partial q + \bar{\partial}q = \frac{1}{i} \partial p - \frac{1}{i} \bar{\partial} p .$$

Substitution dans (11.7) donne

$$\mathcal{L}_{H_p^{\operatorname{Im} \sigma}} (\operatorname{Re} \sigma) = (\partial + \bar{\partial}) \left(\frac{1}{i} \partial p - \frac{1}{i} \bar{\partial} p \right) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial p . \quad \#$$

Suivant la terminologie de Schapira [Sch], on dit qu'une variété Λ dans \mathbb{C}^{2n} est I-Lagrangienne (resp. \mathbb{R} -Lagrangienne) si Λ est Lagrangienne pour $\operatorname{Im} \sigma$ ($\operatorname{Re} \sigma$). Si Λ est une variété I-Lagrangienne C^∞ , telle que $\Lambda \ni (z, \zeta) \rightarrow z \in \mathbb{C}^n$ soit un difféomorphisme local, alors puisque $d(\operatorname{Im}(\zeta d\zeta)|_\Lambda) = \operatorname{Im} \sigma|_\Lambda = 0$, il existe localement une fonction φ réelle C^∞ sur Λ , telle que

$$\operatorname{Im}(\zeta d\zeta) = -d\varphi ,$$

c.a.d.

$$\frac{1}{2i} \zeta d\zeta - \frac{1}{2i} \bar{\zeta} d\bar{\zeta} = -d\varphi - \bar{\partial}\varphi .$$

Considérant φ comme une fonction de z on trouve alors l'expression locale pour Λ :

$$\zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

Inversement si Λ est de cette forme alors Λ est I-Lagrangienne. (On écrira $\Lambda = \Lambda_\varphi$).

Les variétés qui sont à la fois I et \mathbb{R} -Lagrangiennes sont précisément les variétés Lagrangiennes complexes. Une telle variété Λ s'écrit en coordonnées holomorphes, canoniques, convenables : $\zeta = \frac{\partial r}{\partial z}$, où r est holomorphe. Alors $\Lambda = \Lambda_\varphi$ où $\varphi = -\operatorname{Im} r$.

On dit que Λ est \mathbb{R} -symplectique, si $\operatorname{Re} \sigma|_\Lambda$ est non-dégénérée. Comme exemple on observe que $T^*\mathbb{R}^n$ est I-Lagrangienne et \mathbb{R} -symplectique. Une variété I-Lagrangienne de la forme $\Lambda = \Lambda_\varphi$ est \mathbb{R} -symplectique ssi la forme de Levi ; $\bar{\partial} \partial \varphi$ est non dégénérée. En effet, puisque $\zeta dz = \frac{2}{i} \partial \varphi$ sur Λ et $\sigma = d(\zeta dz)$, on obtient

$$(11.8) \quad \operatorname{Re} \sigma|_{\Lambda} = (\partial + \bar{\partial}) \zeta \, dz|_{\Lambda} = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi .$$

Pour décider si φ est strictement pl.s.h. il faut savoir aussi quelque chose sur le choix des coordonnées (z, ζ) et plus particulièrement sur le choix d'une variété \mathbb{C} -Lagrangienne F (c.a.d. une variété complexe, Lagrangienne) que l'on ramène à $z = 0$.

Pour analyser ce problème on commence par l'étude de la situation linéaire. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$ un espace (linéaire) I-Lagrangien et F un espace \mathbb{C} -Lagrangien t.q. $F \pitchfork \Lambda$ où " \pitchfork " désigne intersection transversale, c.a.d. $F + \Lambda = \mathbb{C}^{2n}$. Alors après transformation \mathbb{C} -canonique (linéaire) on peut ramener F à $z = 0$ et Λ à $\Lambda = \Lambda_{\varphi}$ où φ est une forme quadratique réelle sur \mathbb{C}^n .

Définition 11.2 : On dit que Λ est F -pseudoconvexe si φ est pl.s.h.

Cette définition ne dépend pas du choix de transformation \mathbb{C} -canonique, qui ramène F à $x = 0$. En effet, si \mathcal{H} est \mathbb{C} -canonique avec $\mathcal{H}(F) = F$ (supposant que F est déjà donné par $x = 0$) alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_1(y, n) = (y, n + Ay)$ où A est une matrice symétrique et $\mathcal{H}_2(y, n) = (B^{-1}y, {}^t B n)$ où B est inversible. Il est évident que \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 conservent la pluri-sous-harmonicité pour les fonctions génératrices.

Soit $L^k(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des plans I-Lagrangiens avec $\operatorname{Re} \sigma|_{\Lambda}$ de rang $2k$. $L^0(\mathbb{C}^{2n})$ est alors l'ensemble des plans \mathbb{C} -Lagrangiens et $L^n(\mathbb{C}^{2n})$ est l'ensemble des plans I-Lagrangiens et \mathbb{R} -symplectiques. Soit $(L^0 \times L^k)^t = \{(F, \Lambda) \in L^0 \times L^k ; F \pitchfork \Lambda\}$.

Proposition 11.3 : Soit $(F, \Lambda) \in (L^0 \times L^k)^t$ tel que Λ soit F -ps.c. . Alors pour $(\tilde{F}, \tilde{\Lambda}) \in (L^0 \times L^k)^t$ les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes :

- (i) $\tilde{\Lambda}$ est \tilde{F} -ps.c.
- (ii) $(\tilde{F}, \tilde{\Lambda})$ et (F, Λ) appartiennent à la même composante connexe de $(L^0 \times L^k)^t$.

Démonstration : On suppose (i). Après une première déformation par une famille continue d'applications \mathbb{C} -canoniques on peut supposer que $F = \tilde{F} = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} ; x = 0\}$. Alors $\Lambda = \Lambda_{\varphi}$, $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{\varphi}}$ où les matrices de Levi de φ et $\tilde{\varphi}$ ont le même rang k . On peut alors trouver une déformation continue $[0, 1] \ni t \rightarrow \varphi_t$ de formes quadratiques réelles telles que $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \tilde{\varphi}$ est telle que $\operatorname{rang} \mathcal{L}_{\varphi_t}$ soit constant, où \mathcal{L}_{φ_t}

désigne la matrice de Levi. Alors $t \rightarrow (F, \Lambda_{\varphi_t})$ donne une déformation voulue.

Supposons maintenant (ii). Soit (F_t, Λ_t) , $0 \leq t \leq 1$, une courbe dans $(L^0 \times L^k)^t$ avec $(F_0, \Lambda_0) = (F, \Lambda)$, $(F_1, \Lambda_1) = (\tilde{F}, \tilde{\Lambda})$. On peut alors trouver une famille continue de transformations \mathbb{C} -canoniques \mathcal{H}_t avec $\mathcal{H}_t(F_t) = F$. Donc par transformation canonique (dépendant continûment de t) on ramène F_t à $x = 0$ et Λ_t à Λ_{φ_t} où φ_t varie continûment avec t et le rang de \mathcal{L}_{φ_t} est constant. Alors la pluri-sous-harmonicité de $\varphi = \varphi_0$ est conservée par la déformation et en particulier φ_1 est pl.s.h. . Donc $\tilde{\Lambda}$ est \tilde{F} -pseudoconvexe. $\#$

Quand Λ est I-Lagrangien et \mathbb{R} -symplectique, alors Λ est un espace totalement réel et on peut définir l'application $\mathbb{C}^{2n} \ni u \rightarrow \bar{u} \in \mathbb{C}^{2n}$ comme l'unique application anti-linéaire, égale à l'identité sur Λ . (On peut trouver des coordonnées \mathbb{C} -canoniques telles que Λ s'identifie avec \mathbb{R}^{2n}). Si F est un espace \mathbb{C} -Lagrangien, alors $F \not\equiv \Lambda$ ssi la forme Hermitienne $\frac{1}{i} \sigma(u, \bar{u})$ sur $F \times F$ est non-dégénérée. Disons que F est strictement négative par rapport à Λ , si cette forme est définie négative. Cette propriété est évidemment stable par déformations continues dans $(L^0 \times L^n)^t$ et inversement si (F, Λ) et $(\tilde{F}, \tilde{\Lambda})$ ont tous les deux cette propriété, on peut après une première déformation continue supposer que $\Lambda = \tilde{\Lambda} = \mathbb{R}^{2n}$. Alors on vérifie facilement que F et \tilde{F} sont de la forme $\xi = \frac{2}{i} \frac{\partial f}{\partial x}$, $\tilde{\xi} = \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ où f, \tilde{f} sont pluri-harmoniques, > 0 sur \mathbb{R}^n . Il y a alors une déformation évidente de F en \tilde{F} .

Proposition 11.4 : Soit $(F, \Lambda) \in (L^0 \times L^n)^t$. Alors Λ est F -pseudoconvexe ssi F est strictement négatif par rapport à Λ .

Démonstration : D'après la Proposition 11.3 et les remarques précédentes il suffit de trouver un seul couple $(F, \Lambda) \in (L^0 \times L^n)^t$ qui a les deux propriétés. On prend $F : x = 0$, $\Lambda = \Lambda_\varphi$ avec $\varphi = \frac{1}{2} |x|^2$. Evidemment Λ est F -pseudoconvexe. Nous avons $\Lambda : \xi = \frac{1}{i} \bar{x}$ et $u \rightarrow \bar{u}$ devient $(y, n) \rightarrow (\frac{1}{i} \bar{n}, \frac{1}{i} \bar{y})$. Donc pour $u = (0, n) \in F$:

$$\frac{1}{i} \sigma(u, \bar{u}) = \frac{1}{i} \sigma((0, n), (\frac{1}{i} \bar{n}, 0)) = - |n|^2$$

ce qui montre que F est négatif par rapport à Λ . $\#$

Soit toujours $\Lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$ un espace I-Lagrangien. Si $\Lambda^{\text{Re } \sigma} (\Lambda^\sigma)$ désigne l'espace

orthogonal par rapport à $\text{Re } \sigma$ (σ) on pose $L = \Lambda^{\text{Re } \sigma} \cap \Lambda = \Lambda^\sigma$. On constate que L est \mathbb{C} -isotrope et si $V = L^\sigma$ est l'espace \mathbb{C} -involutif correspondant, alors $\Lambda \subset V$. Si $d = \dim_{\mathbb{C}} L$, alors $\dim_{\mathbb{C}} V = 2n-d$ et $V/V^\sigma = V/L$ est un espace \mathbb{C} -symplectique de dimension $2(n-d)$. Si Λ' est l'image de Λ dans V/L , alors Λ' est \mathbb{R} -Lagrangien et \mathbb{R} -symplectique (de dimension réelle $2(n-d)$). Dans des coordonnées \mathbb{C} -symplectiques convenables $(x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'')$ on a

$$(11.9) \quad \Lambda = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} ; \xi'' = 0, (x', \xi') \in \mathbb{R}^{2(n-d)}\} .$$

Soit maintenant $F \subset \mathbb{C}^{2n}$ un espace \mathbb{C} -Lagrangien transverse à Λ . Alors F est transverse à V et $V \cap F$ est de dimension $n-d$, transverse à L dans V . Donc la projection $F' \subset V/L$ de $V \cap F$ est de dimension $n-d$, clairement \mathbb{C} -Lagrangien et transverse à Λ' . On peut maintenant choisir des coordonnées \mathbb{C} -symplectiques telles que $F : x = 0, V : \xi'' = 0$. On paramétrise V/L par (x', ξ') et alors F' est donné par $x' = 0$ pendant que $\Lambda' : \xi' = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x'}$. Alors $\Lambda : \xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'}$, c.a.d. $\xi'' = 0$, $(x', \xi') \in \Lambda'$ et on déduit que Λ est F -ps.c. $\Leftrightarrow \Lambda'$ est F' - ps.c.

Proposition 11.5 : Soient $(F_0, \Lambda), (F_1, \Lambda) \in (L^0 \times L^{n-d})^t$ où Λ est à la fois F_0 et F_1 -pseudocconvexe. Alors il existe une déformation continue $[0, 1] \ni t \rightarrow F_t$ de plans \mathbb{C} -Lagrangiens transverses à Λ , qui relie F_0 à F_1 .

Démonstration : On réduit d'abord Λ à la forme (11.9). D'après la discussion autour de la Proposition 11.4 on sait alors que F'_0 et F'_1 sont de la forme

$$- x' = \frac{2}{i} \frac{\partial \psi_j(\xi')}{\partial \xi'} , \quad j = 0, 1$$

où ψ_j sont pl.h. et < 0 sur \mathbb{R}^{n-d} . Rappelant aussi que V est de la forme $\xi'' = 0$ on constate que les projections $F_j \ni (x, \xi) \rightarrow \xi \in \mathbb{C}^n$ sont bijectives et donc que F_j est de la forme

$$- x = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} , \quad j = 0, 1$$

où φ_j sont pl.h. et $\varphi_j(\xi', 0) = \psi_j(\xi')$. Pour conclure, il suffit de prendre

$$F_t : - x = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi} \quad \text{où } \varphi_t = (1-t)\varphi_0 + t\varphi_1 . \quad \#$$

Définition 11.6 : Soient $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}^{2n}$ deux espaces I-Lagrangiens et $F \subset \mathbb{C}^{2n}$ un espace \mathbb{C} -Lagrangien. On dit que $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à F , si $\mathcal{H}(\Lambda_j) = \Lambda_{\varphi_j}$ avec $\varphi_1 \leq \varphi_2$ pluri-sous-harmoniques, si \mathcal{H} est une tf. \mathbb{C} -canonique telle que $\mathcal{H}(F) : x=0$.

Cette Définition ne dépend pas du choix de \mathcal{H} . Elle est aussi indépendante du choix de F pourvu que Λ_2 soit F -pseudoconvexe :

Proposition 11.7 : Soient $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à F et soit \tilde{F} un espace \mathbb{C} -Lagrangien tel que Λ_2 soit \tilde{F} pseudoconvexe. Alors $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à \tilde{F} .

Nous pouvons donc définir une relation évidente " $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ " et on remarque que si $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ et $\Lambda_2 \leq \Lambda_3$, alors $\Lambda_1 \leq \Lambda_3$. Si $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ et $\Lambda_2 \in L^0$, alors $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Preuve de la Proposition 11.7 : D'après la Proposition 11.5 on peut trouver une famille continue $[0,1] \ni t \rightarrow F_t \in L^0$ telle que $F_0 = F$, $F_1 = \tilde{F}$ et telle que Λ_2 soit F_t -pseudoconvexe pour $\forall t$. Soit \mathcal{H}_t une famille continue de transformations \mathbb{C} -canoniques avec $\mathcal{H}_t(F_t) = \{x=0\}$. Alors $\mathcal{H}_t(\Lambda_2) = \Lambda_{\varphi_{2,t}}$ où $\varphi_{2,t}$ est pl.s.h. et la matrice de Levi $\mathcal{L}_{\varphi_{2,t}}$ est de rang constant k .

Pour $t \in [0,a[$ avec $a > 0$ assez petit on sait que $F_t \not\cap \Lambda_1$ et donc que $\mathcal{H}_t(\Lambda_1) = \Lambda_{\varphi_{1,t}}$ où $\varphi_{1,t}$ est pl.s.h., car la matrice de Levi est de rang constant. De plus le rang de $\varphi_{2,t} - \varphi_{1,t}$ est constant (mesurant la dimension de $\Lambda_2 \cap \Lambda_1$) et $\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0} \geq 0$, par hypothèse. Donc $\varphi_{2,t} - \varphi_{1,t} \geq 0$ pour $t \in [0,a[$.

Ici on remarque que si $f \leq g$ sont des formes quadratiques pl.s.h. que l'on décompose $f = f_g + f_h$, $g = g_g + g_h$ comme au début de la section 3, alors avec $\mathcal{J} f(x) = f(ix)$, on déduit de $f_h \leq g$, que $-f_h \leq \mathcal{J} g$, c.a.d. $f_h \geq -\mathcal{J} g$. Donc $-\mathcal{J} g \leq f \leq g$, et dans notre situation

$$-\mathcal{J} \varphi_{2,t} \leq \varphi_{1,t} \leq \varphi_{2,t} .$$

Donc $F_a \not\cap \Lambda_1$ et il est clair qu'en fait $F_t \not\cap \Lambda_1$ pour $\forall t \in [0,1]$ et que $\varphi_{1,t}$ est pl.s.h., $\varphi_{1,t} \leq \varphi_{2,t}$.

#

Toujours dans la situation linéaire on discute maintenant les fonctions phase.

Définition 11.8 : La forme quadratique réelle $\varphi(x, \theta)$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$ est appelée "phase admissible" si

- 1° φ est pl.s.h. .
- 2° \exists une forme quadratique sous harmonique $\psi(x, w), w \in \mathbb{C}^M$ telle que $\varphi(x, \theta) + \psi(x, w)$ soit non-dégénérée de signature 0.

Remarque 11.9 : Dans 2° on peut toujours remplacer ψ par une forme pl.h. majorée par ψ . On peut donc supposer que ψ est pl.h. et après une légère perturbation que $\psi(0, w)$ est non-dégénérée. Si $\tilde{\psi}(x) = v.c. \int_w \psi(x, w)$ alors $\tilde{\psi}(x) + \varphi(x, \theta)$ est non-dégénérée de signature 0. Dans 2° on peut donc prendre $\psi = \psi(x)$ pl.h. .

Remarque 11.10 : Si $\varphi(x, \theta)$ est admissible et $\tilde{\varphi}(x, \theta) \leq \varphi$ une forme quadratique pl.s.h. alors $\tilde{\varphi}$ est admissible. Remarquons aussi qu'une phase $\varphi(x, \theta)$ admissible, est toujours non-dégénérée au sens de Hörmander [H3], c.a.d. que l'application $(x, \theta) \rightarrow \nabla_{\theta} \varphi(x, \theta)$ est surjective. Cela résulte du fait que $(x, \theta) \rightarrow (\nabla_x(\varphi(x, \theta) + \psi(x)), \nabla_{\theta} \varphi(x, \theta))$ est bijective, si ψ est comme dans la Définition 11.8. Donc si φ est une phase admissible, on sait que toute forme pl.s.h. $\tilde{\varphi} \leq \varphi$ est non-dégénérée au sens de Hörmander.

Exemple 11.11 : Soit $N = n$, $\varphi(x, \theta) = |\bar{x} - \theta|^2$. C'est une phase strictement pl.s.h. non-dégénérée au sens de Hörmander avec variété critique

$$C_{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, \theta) \in \mathbb{C}^{n+N} ; \nabla_{\theta} \varphi = 0 \right\} = \left\{ (x, \theta) ; \theta = \bar{x} \right\} .$$

φ n'est pas admissible car $\varphi \geq 0$ et la fonction 0 est pl.h. mais pas admissible. D'autre part les fonctions $\varphi_t(x, \theta) = |\bar{x} - \theta|^2 - t|\bar{x} + \theta|^2, 0 < t \leq 1$ sont pl.s.h. non-dégénérées de signature 0, donc admissibles, et φ_1 est pl.h. .

Soient $\varphi(x, \theta), \psi(x)$ comme dans la Définition 11.8, avec $\psi(x)$ pl.h. . On pose

$$\Lambda_{\psi} = \left\{ \left(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \right) ; x \in \mathbb{C}^n \right\}$$

$$\Lambda_{\varphi} = \left\{ \left(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \theta) \right) ; \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(x, \theta) = 0 \right\} .$$

Nous avons déjà vu que Λ_ψ est \mathbb{C} -Lagrangienne, et on montre que Λ_φ est I-Lagrangien : en effet, l'application $C_\varphi \ni (x, \theta) \rightarrow (x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \in \mathbb{C}^{2n}$ est injective donc Λ_φ est de dimension réelle $2n$, et $\text{Im } \sigma|_{\Lambda_\varphi} = \text{Im } d(\xi \, dx)|_{\Lambda_\varphi} \simeq \text{Im } d(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx)|_{C_\varphi} = \text{Im } d(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx + \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \, d\theta)|_{C_\varphi} = \text{Im } d \frac{2}{i} \partial \varphi|_{C_\varphi} = \text{Im } \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi|_{C_\varphi} = 0$ puisque $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$ est réelle.

La non-dégénérescence de $\psi(x) + \varphi(x, \theta)$ équivaut à la transversalité de Λ_φ et de $\Lambda_{-\psi}$.

Proposition 11.12 : Soit $\psi(x)$ pl.h. et $\varphi(x, \theta)$ une phase admissible. Alors $\psi(x) + \varphi(x, \theta)$ est non-dégénérée de signature 0 ssi Λ_φ est $\Lambda_{-\psi}$ pseudoconvexe.

Démonstration : De remplacer (φ, ψ) par $(\varphi + \psi, 0)$ équivaut à la transformation \mathbb{C} -canonique $(x, \xi) \rightarrow (x, \xi + \frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x))$. On peut donc supposer que $\psi = 0$, c.a.d. $\Lambda_{-\psi}$ est donné par $\xi = 0$. Si φ est de signature 0, alors $H(\xi) = \text{v.c.}_{(x, \theta)}(\varphi(x, \theta) + \text{Im } x\xi)$ est pl.s.h. et Λ_φ est donnée par $-x = \frac{2}{i} \frac{\partial H}{\partial \xi}$, ce qui montre que Λ_φ est $\Lambda_{-\psi}$ -pseudoconvexe.

Inversement, soit Λ_φ $\Lambda_{-\psi}$ -pseudoconvexe et soit $\psi_0(x)$ pl.h. telle que $\varphi + \psi_0$ soit non-dégénérée de signature 0. Alors Λ_φ est $\Lambda_{-\psi_0}$ -pseudoconvexe et d'après la Proposition 11.5 on peut trouver une homotopie $[0, 1] \ni t \rightarrow F_t \in L^0$ avec $F_0 = \Lambda_{-\psi_0}$, $F_1 = \Lambda_{-\psi}$, et avec F_t transverse à Λ_φ . Après une perturbation on peut supposer en plus que les F_t sont transverses à $x = 0$ et donc de la forme $\Lambda_{-\psi_t}$ avec ψ_t pl.h., $\psi_1 = \psi$. Alors $\psi_t + \varphi$ est non-dégénérée et donc de signature constante = 0. $\#$

Le même argument de perturbation que dans la Remarque 11.9 montre que la Proposition reste vraie quand $\psi = \psi(x, w)$ est pl.h. sur \mathbb{C}^{n+M} . Soient maintenant $\varphi_1(x, \theta)$, $\varphi_2(x, \tilde{\theta})$ deux phases admissibles, alors de dire que $\varphi_1(x, \theta) + \varphi_2(x, \tilde{\theta})$ est non-dégénérée de signature 0 est équivalente à la condition que $\varphi_1(x, \theta) + \varphi_2(y, \tilde{\theta}) - \text{Im}(x-y)w$ soit non-dégénérée de signature 0 sur $\mathbb{C}_{x, y, w, \theta, \tilde{\theta}}^{3n+N+\tilde{N}}$, donc avec $\psi = -\text{Im}(x-y)w$ et $\varphi = \varphi_1(x, \theta) + \varphi_2(y, \tilde{\theta})$ on obtient

Proposition 11.12' : Soient $\varphi_1(x, \theta)$, $\varphi_2(x, \tilde{\theta})$ deux phases admissibles. Alors $\varphi_1(x, \theta) + \varphi_2(x, \tilde{\theta})$ est non-dégénérée de signature 0 ssi $\Lambda_{\varphi_1} \times \Lambda_{\varphi_2}$ est F-pseudoconvexe. Ici $F \subset \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n}$ est le fibré conormal de la diagonale,

$$F = \left\{ (x, \xi, x, -\xi) \in \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} ; (x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \right\} = N^*(\{x=y\}) .$$

Remarque 11.13 : Si (x, θ) est admissible et $\psi(x, \theta) \leq \varphi(x, \theta)$ pluri-sous-harmonique alors $\Lambda_\psi \leq \Lambda_\varphi$. En effet il suffit de répéter la première partie de la preuve de la Proposition 11.12, en utilisant encore le Lemme fondamental. Remarquons aussi que pour $F \in L^0$, $\Lambda \in L^k$ est F-pseudoconvexe ssi $\tilde{\lambda} \not\equiv F$ pour tout $\tilde{\lambda} \leq \Lambda$. Dans un sens ce la résulte de la définition de " \leq " et de son invariance, dans l'autre sens, supposons que $\tilde{\lambda} \not\equiv F$ pour $\forall \tilde{\lambda} \leq \Lambda$, et soit $F_0 \in L^0$ tel que Λ soit F_0 -pseudoconvexe. (L'existence de F_0 résulte de la discussion avant la Proposition 11.5). Après une petite perturbation de F_0 on peut supposer que $F_0 \not\equiv F$ et donc après tf. canonique que $F_0 = \{x=0\}$, $F = \{\xi=0\}$. Alors $\Lambda = \Lambda_\varphi$ où $\varphi(x)$ est pl.s.h. non-dégénérée de signature 0. La proposition 11.12 montre alors que Λ est F-pseudoconvexe.

On discute maintenant la situation non-linéaire. Dans la suite on s'occupera uniquement de la théorie (micro-)locale et les différentes fonctions de phase et variétés ne sont que des germes, définis près de certains points fixés. (Néanmoins le Théorème 11.17 ci-dessous devrait pouvoir servir comme point de départ pour une théorie globale). Toutes les phases et variétés ci-dessous sont supposées être de classe C^∞ . (Il semble possible cependant de relâcher cette hypothèse de régularité et de considérer des phases de classe $C^{1,1}$ et des variétés I-Lagrangiennes de classe Lipschitz).

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$ une variété I-Lagrangienne C^∞ définie près de $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^{2n}$ (contenant ce point), et $F \subset \mathbb{C}^{2n}$ une variété \mathbb{C} -Lagrangienne définie près de (x_0, ξ_0) qui coupe Λ transversalement en (x_0, ξ_0) . Après une transformation \mathbb{C} -canonique \mathcal{K} , on peut se ramener au cas $(x_0, \xi_0) = (0, 0)$, $F = \{x=0\}$ et Λ est alors de la forme Λ_φ où $\varphi(x)$ est C^∞ , réelle, définie dans un voisinage de 0.

Définition 11.14 : On dit que Λ est F-pseudoconvexe en (x_0, ξ_0) , si φ est pl.s.h. dans un voisinage de 0.

La pluri-sous-harmonicité de φ près de 0 équivaut à dire que $T_{(y, \eta)}(\Lambda_\varphi)$ est

$T_{(y, n)}(\{x=y\})$ -pseudoconvexe pour $n = \frac{2}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y)$ et tout y près de 0 et nos résultats sur la F-pseudoconvexité dans le cas linéaire montrent alors que la Définition 11.14 ne dépend pas du choix de la transformation \mathbb{C} -canonique, qui ramène F à $\{x=0\}$, et (x_0, ξ_0) à $(0,0)$. De plus, si Λ est F-pseudoconvexe en (x_0, ξ_0) , et \tilde{F} une autre variété \mathbb{C} -Lagrangienne passant par (x_0, ξ_0) , alors Λ est \tilde{F} pseudoconvexe en (x_0, ξ_0) ssi $T_{(x_0, \xi_0)}(\Lambda)$ est $T_{(x_0, \xi_0)}(\tilde{F})$ pseudoconvexe.

Comme avant on a une relation d'ordre partiel. Si Λ_1, Λ_2 sont des germes de variétés I-Lagrangiennes en (x_0, ξ_0) et F une variété \mathbb{C} -Lagrangienne en (x_0, ξ_0) on dit que $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à F en (x_0, ξ_0) si $\mathcal{H}(\Lambda_j) = \Lambda_{\varphi_j}$ avec $\varphi_1 \leq \varphi_2$ pluri-sous-harmoniques, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Ici \mathcal{H} est une transformation \mathbb{C} -canonique avec

$\mathcal{H}(x_0, \xi_0) = (0,0)$, $\mathcal{H}(F) = \{x=0\}$. Vérifions d'abord que cette définition ne dépend pas du choix de \mathcal{H} . D'abord on a bien l'invariance voulue si l'on remplace \mathcal{H} par $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}$, où \mathcal{H}_1 est linéaire avec $\mathcal{H}_1(\{x=0\}) = \{x=0\}$. Il suffit alors de considérer le cas où l'on remplace \mathcal{H} par $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}$ où \mathcal{H}_2 vérifie $\mathcal{H}_2((0,0)) = (0,0)$, $d\mathcal{H}_2(0,0) = I$. Alors si $\varphi(x, n)$ est la fonction génératrice (holomorphe) de \mathcal{H}_2 avec $\varphi(0,0) = 0$ on a $\varphi(x, n) = x n + \mathcal{O}(|x|^3 + |n|^3)$. Avec $\phi(x, n) = -\text{Im } \varphi(x, n)$, $\mathcal{H}_2(\Lambda_{\varphi_j}) = \Lambda_{\tilde{\varphi}_j}$, on a

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \text{v.c.}_{(y, n)}(\phi(x, n) + \text{Im } y \cdot n + \varphi_j(y))$$

et le lemme fondamental montre que $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ sont pl.s.h. et que $\tilde{\varphi}_1 \leq \tilde{\varphi}_2$ près de 0.

Le même type de raisonnement donne aussi l'indépendance de F .

Proposition 11.15 : Soit $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à F en (x_0, ξ_0) et soit \tilde{F} une autre variété \mathbb{C} -Lagrangienne passant par (x_0, ξ_0) telle que Λ_2 soit \tilde{F} -pseudoconvexe. Alors $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ relativement à \tilde{F} .

On a donc défini la notion " $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ en (x_0, ξ_0) ".

Définition 11.16 : Une fonction réelle (C^∞) $\varphi(x, \theta)$ définie près de $(x_0, \theta_0) \in \mathbb{C}^{n+N}$ est une phase admissible si φ est pl.s.h. et s'il existe une fonction pl.s.h. $\psi(x, w)$, $w \in \mathbb{C}^M$ telle que $\psi(x, w) + \varphi(x, \theta)$ ait un col en (x_0, θ_0, w_0) .

THÉORIE GÉNÉRALE

Comme dans la situation linéaire, on constate que les phases admissibles sont des phases non-dégénérées au sens de Hörmander, et que dans la Définition 11.16 il suffit de considérer des fonctions $\psi = \psi(x)$ pluri-harmoniques. Si $\psi(x, w)$ est une phase pl.h. non-dégénérée et $\nabla(\psi + \varphi) = 0$ en (x_0, θ_0, w_0) alors Λ_φ est $\Lambda_{-\psi}$ -pseudoconvexe en $(x_0, \xi_0) = (x_0, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0))$ ssi $\varphi + \psi$ a un col en (x_0, θ_0, w_0) . (Ici la variété I-Lagrangienne est définie comme auparavant). Si $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $\varphi_1(x_0, \theta_0) = \varphi_2(x_0, \theta_0)$, φ_1 pl.s.h. et φ_2 admissible, alors $\Lambda_{\varphi_1} \leq \Lambda_{\varphi_2}$.

Si $\varphi(x, \theta)$ est une phase admissible définie près de (x_0, θ_0) on désigne par I_φ l'espace des objets formels

$$u(x, \lambda) = \int a(x, \theta, \lambda) d\theta, \quad a(x, \theta, \lambda) \in H_{\varphi, (x_0, \theta_0)}.$$

Bien entendu, si $\theta \rightarrow \varphi(x_0, \theta)$ a un col en θ_0 on a un choix de bon contour et on trouve $u \in H_{\varphi, x_0}$ où $\phi(x) = v.c._\theta(\varphi(x, \theta))$. En général on ne cherche pas à définir $u(x, \lambda)$ directement, mais on observe que si $\psi(x, w)$ est une autre phase admissible t.q. $\varphi(x, \theta) + \psi(x, w)$ ait un col en (x_0, θ_0, w_0) avec valeur critique 0, alors si $v(x, \lambda) = \int b(x, w, \lambda) \in I_\psi$ on peut définir le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \iiint_{\Gamma} a(x, \theta, \lambda) b(x, w, \lambda) dx d\theta dw$$

modulo le signe (qui dépend d'un choix d'orientation sur Γ et modulo un terme qui décroît exponentiellement. Ici Γ est un bon contour pour $\varphi + \psi$.

Si $\tilde{\varphi}(x, \tilde{\theta})$ est une autre phase admissible avec $\tilde{\varphi}(x_0, \tilde{\theta}_0) = \varphi(x_0, \theta_0)$, $\frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}(x_0, \tilde{\theta}_0) = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, \theta_0) = \xi_0$, $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\tilde{\varphi}}$ alors $\psi + \varphi$ a un col en (x_0, θ_0, w_0) ssi $\psi + \tilde{\varphi}$ a un col en $(x_0, \tilde{\theta}_0, w_0)$, en effet, la Proposition 11.12' est valable aussi dans le cas non-linéaire. Nous allons identifier $u \in I_\varphi$ et $\tilde{u} \in I_{\tilde{\varphi}}$ si $\langle u, v \rangle \equiv \langle \tilde{u}, v \rangle$ modulo un terme exponentiellement petit, pour toutes $v \in I_\psi$ et toutes ψ comme ci-dessus. On écrit alors $u \equiv \tilde{u}$.

Théorème 11.17. (Equivalence des phases) : Soient $\varphi(x, \theta)$, $\tilde{\varphi}(x, \tilde{\theta})$ deux phases admissibles définies près de $(x_0, \hat{\theta}_0)$ et $(x_0, \tilde{\theta}_0)$ respectivement, avec $\varphi(x_0, \theta_0) = \tilde{\varphi}(x_0, \tilde{\theta}_0)$, $\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, \theta_0) = \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}(x_0, \tilde{\theta}_0) \stackrel{def}{=} \xi_0$, $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\tilde{\varphi}}$. Alors $I_\varphi \equiv I_{\tilde{\varphi}}$.

Démonstration : Après multiplication de I_φ et $I_{\tilde{\varphi}}$ par $e^{\lambda h(x)}$ où $h(x)$ est holomorphe, on peut se ramener au cas où $\xi_0 = 0$ et $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\tilde{\varphi}}$ est pseudoconvexe par rapport à $\xi_0 = 0$. On se ramène aussi facilement au cas $x_0 = 0, \theta_0 = 0, \tilde{\theta}_0 = 0$. Donc $\varphi(x, \theta)$ et $\tilde{\varphi}(x, \tilde{\theta})$ ont des cols en (x_0, θ_0) et $(x_0, \tilde{\theta}_0)$ respectivement et comme avant, on introduit la fonction pl.s.h. :

$$H(\xi) = \text{v.c. } (\varphi(x, \theta) + \text{Im } x\xi) = \text{v.c. } (\tilde{\varphi}(x, \tilde{\theta}) + \text{Im } x\xi) .$$

Pour $u = \int a(x, \theta, \lambda) d\theta \in I_\varphi$ on peut définir la transformée de Fourier.

$$\mathcal{F}u(\xi, \lambda) = \iint a(x, \theta, \lambda) e^{-i\lambda x\xi} dx d\theta \in H_{H,0}$$

et de même on définit $\mathcal{F}\tilde{u} \in H_{H, \xi_0}$ pour $\tilde{u} \in I_{\tilde{\varphi}}$. L'application $H_{\varphi, (x_0, \theta_0)} \ni a(x, \theta, \lambda) \rightarrow \mathcal{F}u \in H_{H,0}$ n'est pas injective et on rajoute donc (comme avant) des variables θ^* duales aux θ , et on définit une transformée de Fourier plus complète :

$$T a(\xi, \theta^*, \lambda) = \iint a(x, \theta, \lambda) e^{-i\lambda(x\xi + \theta\theta^*)} dx d\theta \in H_{\mathcal{K}, (0,0)} ,$$

où $\mathcal{K}(\xi, \theta^*) = \text{v.c. } (x, \theta) (\varphi(x, \theta) + \text{Im}(x\xi + \theta\theta^*))$ est pl.s.h. avec un col en $(0,0)$. D'après la Proposition 3.3, $T : H_{\varphi, (0,0)} \rightarrow H_{\mathcal{K}, (0,0)}$ est bijective avec l'inverse

$$a(x, \theta, \lambda) = S T a(x, \theta, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n+N} \iint e^{i\lambda(x\xi + \theta\theta^*)} (T a)(\theta, \theta^*, \lambda) d\xi d\theta^* .$$

Lemme 11.18 : $\mathcal{F} : I_\varphi \rightarrow H_{H,0}$ est surjective.

Démonstration : D'après notre discussion, il suffit d'étendre tout élément $f(\xi, \lambda) \in H_{H,0}$ en un élément $g(\xi, \theta^*, \lambda) \in H_{\mathcal{K}, (0,0)}$: $g(\xi, 0, \lambda) = f(\xi, \lambda)$. On le fait pour une variable à la fois, et il suffit donc de considérer le cas où $\theta^* = z$ est une seule variable complexe. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}), = 1$ près de 0. Alors on pose d'abord $\tilde{g}(\xi, z, \lambda) = f(\xi, \lambda) \chi(\lambda z) \in L^2_{\mathcal{K}, (0,0)}$. On cherche ensuite g sous la forme $\tilde{g} + z k(\xi, z, \lambda)$. Il suffit alors de résoudre $\bar{\partial} k = -\frac{f(\xi, \lambda)}{z} \bar{\partial}(\chi(\lambda z))$ dans $L^2_{\mathcal{K}, (0,0)}$. Se plaçant dans un petit voisinage pseudoconvexe de $(0,0)$ on trouve alors $k \in L^2_{\mathcal{K}, (0,0)}$ par les résultats standards sur la résolubilité de $\bar{\partial}$ de Hörmander [H2]. $\#$

THÉORIE GÉNÉRALE

Soit maintenant $\psi(x,w)$ admissible telle que $\varphi + \psi$ ait un col en $(0,0,w_0)$ de valeur critique 0. Soient $v = \int b(x,w,\lambda) \in H_\psi$, $u = \int a(x,\theta,\lambda)d\theta \in H_\varphi$, $A(\xi,\theta^*,\lambda) = Ta$. Alors avec un contour naturel :

$$\langle u,v \rangle \equiv \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n+N} \iiint e^{i\lambda(x\xi+\theta\theta^*)} b(x,w,\lambda) A(\xi,\theta^*,\lambda) d\xi d\theta^* d\theta dx dw d_n .$$

La fonction poids $\psi(x,w) + \mathcal{L}(\xi,\theta^*) - \text{Im}(x\xi+\theta\theta^*)$ a un col par rapport à toutes les variables, mais aussi par rapport aux variables (θ,θ^*) . Après une déformation de contour on peut alors d'abord appliquer la phase stationnaire en $\theta\theta^*$ et on obtient (puisque $A(\xi,0,\lambda) = \mathcal{F}u(\xi,\lambda)$)

$$\langle u,v \rangle \equiv \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iiint e^{i\lambda x\xi} b(x,w,\lambda) \mathcal{F}u(\xi,\lambda) dx dw d\xi .$$

On a la même formule avec u remplacée par $\hat{u} \in I_\varphi$. Si $\hat{u} \in I_\varphi$ est donnée on peut d'après le Lemme 11.18, trouver $u \in I_\varphi$ avec $\mathcal{F}u = \mathcal{F}\hat{u}$ dans $H_{H,0}$ et alors $\langle u,v \rangle \equiv \langle \hat{u},v \rangle$.

Remarque 11.19 : Si $a(x,\theta,\lambda)d\theta = \frac{1}{i\lambda} d_\theta b(x,\theta,\lambda)$ dans $H_{\varphi,(x_0,\theta_0)}$ avec $b \in H_{\varphi,(x_0,\theta_0)}^\#$ alors $\int a(x,\theta,\lambda) d\theta \equiv 0$ dans I_φ . Inversement, si $\int a(x,\theta,\lambda) d\theta \equiv 0$ dans I_φ , et même $\mathcal{F}u \equiv 0$ alors $Ta(\xi,\theta^*,\lambda) \equiv \sum_1^N A_j(\xi,\theta^*,\lambda)\theta_j^*$ dans $H_{\mathcal{L},(\xi_0,0)}$ avec $A_j \in H_{\mathcal{L},(\xi_0,0)}$.

(Cette décomposition qui ne résulte pas directement de la formule de Taylor est laissée comme exercice). Par la formule de Fourier inverse, on obtient

$$a(x,\theta,\lambda) = \sum \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta_j} b_j(x,\theta,\lambda)$$

où

$$b_j = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n+N} \iint e^{i\lambda(x\xi+\theta\theta^*)} A_j d\xi d\theta^* \in H_{\varphi,(x_0,\theta_0)} .$$

Donc $a(x,\theta,\lambda)d\theta = \frac{1}{i\lambda} d_\theta b(x,\theta,\lambda)$ avec

$$b = \sum (-1)^{j+1} a_j d\theta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\theta_j} \wedge \dots \wedge d\theta_N .$$

#

Exemple 11.20 : On considère la phase

$$\varphi = \operatorname{Im} x \operatorname{Re} \theta + C_1 (\operatorname{Im} x)^2 + C_2 (\operatorname{Im} \theta)^2$$

avec $C_1, C_2 > 0$. C'est clairement une phase non-dégénérée avec $C_\varphi : \operatorname{Im} x = 0, \operatorname{Im} \theta = 0$. La matrice de Levi est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x} \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x} \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} C_1 I & -\frac{1}{4i} I \\ -\frac{1}{4i} I & \frac{1}{2} C_2 I \end{pmatrix}$$

Donc φ est pluri-sous-harmonique si $C_1 C_2 \geq \frac{1}{4}$. Sous cette hypothèse vérifions que φ est admissible : Soit $\psi(x)$ une forme quadratique pl.h. et < 0 sur \mathbb{R}^n . Alors $\psi(x) \leq -C_3 (\operatorname{Re} x)^2 + C_4 (\operatorname{Im} x)^2$ pour $C_3 > 0, C_4 > 0$. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}^{2n}$ l'espace de dimension réelle $2n$, donné par $\operatorname{Im} x = -\varepsilon \operatorname{Re} \theta, \operatorname{Im} \theta = 0$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi + \psi|_{\Gamma} &\leq -\varepsilon (\operatorname{Re} \theta)^2 + (C_1 + C_4) (\varepsilon \operatorname{Re} \theta)^2 - C_3 (\operatorname{Re} x)^2 \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{Re} \theta)^2 - C_3 (\operatorname{Re} x)^2, \end{aligned}$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Donc Γ est un bon contour pour $\varphi + \psi$ et par conséquent $\varphi + \psi$ est non-dégénérée de signature 0. Finalement on trouve

$$\Lambda_\varphi = \left\{ (x, -\theta) ; \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} \theta = 0 \right\} = \Gamma^* \mathbb{R}^n.$$

Exemple 11.21 : Voici un deuxième exemple de phase admissible qui engendre $\Gamma^* \mathbb{R}^n$: Soit $\varphi(\theta, y), \varphi_1(\theta, y) = -\operatorname{Im} \varphi(\theta, y), \Phi(\theta) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_1(\theta, y)$ comme au début de la section 7, vérifiant (7.1)-(7.3). On considère alors la phase pl.s.h. :

$$\tilde{\varphi}(y, \theta) = -\varphi_1(\theta, y) + \Phi(\theta).$$

Soit $\psi(y)$ une fonction pl.h. avec $\frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\eta_0, \nabla^2 \psi|_{\mathbb{R}^n} < 0$. On vérifie alors que pour $\varepsilon > 0$ assez petit le contour

$$\left\{ (y, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n ; \theta \in \Gamma(y) \right\} \ni (y, \theta) \rightarrow (y - \varepsilon \nabla_y (\tilde{\varphi}(y, \theta) + \psi(y)), \theta)$$

THÉORIE GÉNÉRALE

est un bon contour pour $\tilde{\varphi} + \psi$. Ici ∇_y désigne le gradient au sens réel sur \mathbb{C}^n , c'est donc un vecteur dans \mathbb{C}^n . Ayant montré que $\tilde{\varphi}$ est admissible, on trouve ensuite que C_φ est donnée par $\theta \in \Gamma(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ et que $\Lambda_\varphi = \Gamma^* \mathbb{R}^n$.

Pour terminer cette section on discute finalement les opérateurs intégraux de Fourier. Si $\varphi(x, \theta)$, $\psi(x, w)$ sont des phases admissibles telles que $\varphi(x, \theta) + \psi(x, w)$ ait un col en (x_0, θ_0, w_0) nous avons vu que cette condition équivaut à la $N^*(\{x=y\})$ -pseudoconvexité de $\Lambda_\varphi \times \Lambda_\psi$ en $(x_0, \xi_0, x_0, -\xi_0)$, $\xi_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, \theta_0)$. Ecrivons alors $\Lambda_\varphi \# \Lambda_\psi$. Quand ψ est pl.h. alors $\Lambda_{-\psi}$ est \mathbb{C} -Lagrangienne et une troisième condition équivalente est que Λ_φ soit $\Lambda_{-\psi}$ -pseudoconvexe.

Soit maintenant $\varphi_1(y, \omega)$ une phase admissible, définie près de $(y_0, \omega_0) \in \mathbb{C}^{n_y + N_\omega}$ et $\varphi(x, y, \theta)$ une phase admissible définie près de $(x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{C}^{n_x + n_y + N_\theta}$. On suppose que

$$-\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0, \theta_0) = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y_0, \omega_0) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0,$$

et on pose

$$\xi_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0, \theta_0).$$

Introduisons l'hypothèse géométrique suivante :

(H) Il existe une phase admissible $\psi(x, w)$ définie près de $(x_0, w_0) \in \mathbb{C}^{n_x + N_w}$ avec $\xi_0 = -\frac{2}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, w_0)$, telle que

$$\Lambda_\varphi \# \Lambda_\psi \times \Lambda_{\varphi_1}.$$

Plus explicitement, $\psi(x, w) + \varphi(x, y, \theta) + \varphi_1(y, \omega)$ doit avoir un col en $(x_0, y_0, w_0, \theta_0, \omega_0)$ et l'hypothèse (H) équivaut à dire que

$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, y, \theta) + \varphi_1(y, \omega)$$

est une phase admissible avec y, θ, ω comme variables de fibre. Si l'on introduit la relation I-canonique $\Lambda_\varphi^1 = \{(x, \xi, y, -\eta) ; (x, \xi, y, \eta) \in \Lambda_\varphi\}$, alors la condition (H)

entraîne que $T_{(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0)}(\Lambda'_\varphi) \bar{\cap} (T_{(x_0, \xi_0)}(\mathbb{C}^{2n_x}) \times T(\Lambda_{\varphi_1}))$ et comme observé par Hörmander [H3], cette transversalité seule entraîne que $C_\varphi(\Lambda_{\varphi_1})$ est une variété (I-)Lagrangienne. Bien entendu,

$$\Lambda_{\varphi_2} = \Lambda'_\varphi(\Lambda_{\varphi_1}) .$$

Soit maintenant $u(y, \lambda) = \int f(y, \omega, \lambda) d\omega \in I_{\varphi_1}$, $A(x, y, \lambda) = \int a(x, y, \theta, \lambda) d\theta \in I_\varphi$. Alors sous l'hypothèse (H)

$$Au(x, \lambda) = \int A(x, y) u(y, \lambda) dy = \iiint a(x, y, \theta, \lambda) u(y, \omega, \lambda) dy d\theta d\omega$$

est un élément de I_{φ_2} . Avec ψ comme dans (H) c.a.d. $\Lambda_\psi \# \Lambda_{\varphi_2}$ et normalisée avec une constante telle que $\psi(x_0, w_0) + \varphi(x_0, y_0, \theta_0) + \varphi_1(y_0, \omega_0) = 0$, soit

$$v(x, \lambda) = \int g(x, w, \lambda) dw \in I_\psi .$$

Alors on peut définir

$$\begin{aligned} \langle v, Au \rangle &= \iiint a(x, y, \theta, \lambda) g(x, w, \lambda) f(y, \omega, \lambda) dx dy d\theta dw d\omega \\ &= \langle A, v \otimes u \rangle . \end{aligned}$$

Il est clair que si $\tilde{\varphi}(x, y, \tilde{\theta})$ vérifie $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\tilde{\varphi}}$, $\nabla \tilde{\varphi}(x_0, y_0, \tilde{\theta}_0) = \nabla \varphi(x_0, y_0, \theta_0)$, $\tilde{\varphi}(x_0, y_0, \tilde{\theta}_0) = \varphi(x_0, y_0, \theta_0)$ et si $\tilde{A} \in I_{\tilde{\varphi}}$ vérifie $\tilde{A} \equiv A$, alors $\tilde{A}u \equiv Au$. De même, si $\tilde{u} \in I_{\tilde{\varphi}}$, $\tilde{u} \equiv u$, alors $Au \equiv A\tilde{u}$. En effet,

$$\langle v, Au \rangle = \langle A, v \otimes u \rangle = \langle {}^t A v, u \rangle \equiv \langle {}^t A v, \tilde{u} \rangle = \langle v, A\tilde{u} \rangle .$$

Ecrivons maintenant $I_{\Lambda_{\varphi_1}}$, I_{Λ_φ} , ... à la place de I_{φ_1} , I_φ , ... où les phases sont maintenant normalisées : $\varphi_1(y_0, \omega_0) = \varphi(x_0, y_0, \theta_0) = \dots = 0$. Alors tout $A \in I_{\Lambda_\varphi}$ donne sous l'hypothèse (H) une application bien définie (modulo le signe) ; $A : I_{\Lambda_{\varphi_1}} \rightarrow I_{\Lambda_{\varphi_2}}$. Soit maintenant $B \in I_{\Lambda_{\tilde{\varphi}}}$, où $\tilde{\varphi}(z, x, \tilde{\theta})$ est une phase admissible telle que

ÉTUDE PRÉCISÉE

$(\tilde{\varphi}, \varphi_2)$ vérifie (H). Alors on a un opérateur $B : I_{\Lambda_{\varphi_2}} \rightarrow I_{\Lambda_{\varphi_3}}$ où $\Lambda_{\varphi_3} = \Lambda'_{\tilde{\varphi}}(\Lambda_{\varphi_2})$. On peut alors former $C = B \circ A : I_{\Lambda_{\varphi_1}} \rightarrow I_{\Lambda_{\varphi_3}}$. Ici $C \in I_{\psi}$ où $\psi = \tilde{\varphi}(z, x, \tilde{\theta}) + \varphi(x, y, \theta)$ est une phase admissible avec $(\tilde{\theta}, y, \theta)$ comme variables de fibre et (ψ, φ_1) vérifie (H). Bien entendu, $\Lambda'_{\psi} = \Lambda'_{\tilde{\varphi}} \circ \Lambda'_{\varphi}$.

Remarque 11.22 : Dans le cas $n_x = n_y$, et quand φ est pluri-harmonique et Λ'_{φ} est le graphe d'une transformation \mathbb{C} -canonique \mathcal{X} , alors la condition (H) est automatique pour toute phase admissible (normalisée ...) φ_1 . En effet il suffit de le vérifier dans le cas linéaire : Soit $\psi(x)$ pl.h. t.q. $\Lambda_{\psi} \# \mathcal{X}(\Lambda_{\varphi_1})$, c.a.d. $(\Lambda_{\varphi_1})^{\flat}$ est $\Lambda_{-\psi}$ -pseudoconvexe. Soit $[0, 1] \ni t \rightarrow \varphi_{1,t}$ une déformation continue décroissante de phases admissibles avec $\varphi_{1,0} = \varphi_1$, $\varphi_{1,1}$ pl.h. Alors $\mathcal{X}(\Lambda_{\varphi_{1,t}}) \leq \mathcal{X}(\Lambda_{\varphi_1})$ donc

$\Lambda_{\psi} \# \mathcal{X}(\Lambda_{\varphi_{1,t}})$. Puisque alors

$$\psi(x) + \varphi(x, y, \theta) + \varphi_{1,t}(y, \omega)$$

est non dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$ et de signature 0 pour $t = 1$, $\psi + \varphi + \varphi_1$ est non dégénérée de signature 0 et on a donc (H).

12. ÉTUDE PRÉCISÉE DES OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS DANS UN DOMAINE COMPLEXE

Dans cette section et la suivante on établira des résultats un peu techniques qui serviront dans la démonstration du Théorème 14.1.

Le premier travail sera d'établir l'existence (sans doute classique) de fonctions troncature convenables. Soit $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Pour $0 < a < b$ on pose $\Omega_{a,b} = \{x \in \Omega ; a \leq d(x, \mathbb{C}\Omega) \leq b\}$. On choisit une famille $0 \leq \chi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2/2, 4\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ telle que $\chi_{\varepsilon}(x) = 1$ sur $\Omega_{\varepsilon, 2\varepsilon}$, et $|\partial^{\alpha} \chi_{\varepsilon}(x)| \leq C_{\alpha} \varepsilon^{-|\alpha|}$. Avec $\varepsilon_j = 2^{-j}$ on pose

$$\rho(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_j \chi_{\varepsilon_j} \in C^{\infty}(\Omega)$$

qui est une somme localement finie avec au plus 3 termes $\neq 0$ en tout point. En plus il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(12.1) \quad \frac{1}{C} d(x) \leq \rho(x) \leq C d(x) \quad , \quad d(x) = d(x, C\Omega) \quad ,$$

et

$$(12.2) \quad \frac{|\nabla^k \rho|}{\rho} = O(\rho^{-k}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad .$$

Soit $0 \leq \psi \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{C}^n ; |x| < 1\})$ avec $\int \psi(x) L(dx) = 1$ et posons

$$\psi_\varepsilon(x, y) = (\rho(x)\varepsilon)^{-n} \psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon \rho(x)}\right) \in C^\infty(\Omega \times \Omega) \quad .$$

Alors $\text{supp } \psi_\varepsilon \subset \{(x, y) \in \Omega \times \Omega ; |x-y| \leq \varepsilon \rho(x)\}$ et

$$\int \psi_\varepsilon(x, y) L(dy) = 1$$

Utilisant (12.2) on montre sans difficulté que

$$|\nabla^k \psi_\varepsilon| = O((\varepsilon \rho(x))^{-(k+n)}) \quad ,$$

donc

$$\|\nabla^k \psi_\varepsilon(x, y)\|_{L^1_y} = O((\varepsilon \rho(x))^{-k}) \quad .$$

On pose

$$d_\varepsilon(x) = \int d(y) \psi_\varepsilon(x, y) L(dy)$$

et puisque $|d(x)-d(y)| \leq |x-y|$ on a

$$\frac{|d_\varepsilon(x)-d(x)|}{d(x)} \leq C_0 \cdot \varepsilon \quad .$$

De plus

$$\frac{|\nabla^k d_\varepsilon|}{d} = O((\varepsilon d)^{-k})$$

Proposition 12.1 : Soit $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $0 < C_1 < C_2 < 1$. Alors il existe $\chi(x, y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ telle que supp χ soit convexe pour tout $x \in \Omega$ et ,

ÉTUDE PRÉCISÉE

$$(12.3) \quad \text{supp } \chi \subset \{(x, y) ; |x-y| \leq C_2 d(x)\} ,$$

$$(12.4) \quad \chi(x, y) = 1 \text{ pour } |x-y| \leq C_1 d(x) ,$$

$$(12.5) \quad \nabla^k \chi = \mathcal{O}(d^{-k}) , \quad k = 0, 1, 2 \dots .$$

Démonstration : Soit $0 \leq \tilde{\psi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, à support convexe dans $|x| < C_2$ et égale à 1 dans un voisinage de $|x| \leq C_1$. Alors, si $\varepsilon > 0$ est assez petit on peut prendre $\chi(x, y) = \tilde{\psi}\left(\frac{x-y}{d(x)}\right)$.

On aura aussi besoin de rappeler une version de la formule de Stokes. Pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, soit Γ_t le contour donné par $x \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $x \in W$, où W est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^k$ et f est de classe C^1 . On pose $v = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$ que l'on peut considérer comme une section du fibré normal de (l'image de) Γ_0 . Soit ω une k -forme différentielle de classe C^1 sur \mathbb{R}^n telle que $\Pi_x(f^{-1}(\text{supp } \omega)) \subset\subset W$, où $\Pi_x : [-\varepsilon, \varepsilon] \times W \rightarrow W$ est la projection naturelle.

Lemme 12.2 : Dans la situation ci-dessus

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \int_{\Gamma_t} \omega = \int_{\Gamma_0} v \lrcorner d\omega .$$

Démonstration : Par la formule de Stokes

$$\int_{\Gamma_s} \omega - \int_{\Gamma_0} \omega = \int_0^s \int_{0 \in x \in W} f^*(d\omega) .$$

On peut écrire $f^*d\omega = g(t, x) dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, où g est continue. Alors

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{s=0} \int_{\Gamma_s} \omega = \int_W g(0, x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Ici $g(0, x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner f^*d\omega = f^*(v \lrcorner \omega)$.

#

Soit $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, $\varphi \in C^2(\Omega)$, et $P(x, \varepsilon, \lambda)$ un symbole analytique défini dans un voisinage de $\Lambda_\varphi = \left\{ (x, \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; x \in \overline{\Omega}) \right\}$. Soit aussi χ comme dans le Lemme 12.2 et $C > 0$. Alors pour $u \in C^1(\Omega)$ on définit $Pu \in C^1(\Omega)$ par :

$$(12.6) \quad \begin{aligned} Pu(x, \lambda) &= (P_{\chi, \varphi, C} u)(x, \lambda) = \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\eta} P(x, \eta, \lambda) \chi(x, y) u(y) dy d\eta \end{aligned}$$

où $\Gamma(x)$ est le contour singulier :

$$(12.7) \quad \eta = \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{(x-y)}}{|x-y|} .$$

Bien entendu on choisira $C_1 < C_2$ et C assez petits pour que (x, η) soit dans le domaine de définition de P , pour $(y, \eta) \in \Gamma(x)$, $(x, y) \in \text{supp } \chi$. Rappelons que (12.6) s'écrit après paramétrisation

$$(12.6) \quad Pu(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) (x-y) - C\lambda |x-y|} k(x, y, \lambda) u(y, \lambda) L(dy)$$

où $\text{supp } k \subset \text{supp } \chi$ et dans le cas où P est un symbole d'ordre 0 :

$$(12.8) \quad |k(x, y, \lambda)| \leq \text{Const. } |x-y|^{-n} .$$

Il faut d'abord examiner la dépendance de φ et de C dans (12.6) :

Proposition 12.3 : Soit $(\tilde{\varphi}, \tilde{C})$ avec les mêmes propriétés que (φ, C) . Alors

$$(12.9) \quad P_{\chi, \varphi, C} u - P_{\chi, \tilde{\varphi}, \tilde{C}} u = \int_0^1 A_t u dt ,$$

où

$$(12.10) \quad \begin{aligned} A_t u(x, \lambda) &= \\ &= \sum_j \sum_k (-1)^{k+n} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma_t(x)} e^{i\lambda(x-y)\eta} P(x, \eta, \lambda) \left(\frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) + i(\tilde{C}-C) \frac{\overline{x_k - y_k}}{|x-y|}\right) \\ &\quad \cdot \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial \bar{y}_j} u(y) \overline{dy}_j \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_k \wedge \dots \wedge d\eta_n . \end{aligned}$$

ÉTUDE PRÉCISÉE

Ici $\Gamma_t(x)$ est le contour

$$\eta = (1-t) \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{(x-y)}{|x-y|} \right) + t \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}(x) + \tilde{C} i \frac{(x-y)}{|x-y|} \right),$$

et \wedge indique que le facteur en dessous est supprimé.

Remarque 12.4 : Dans le cas où P est d'ordre 0, si l'on écrit $\varphi_t = (1-t)\varphi + t\tilde{\varphi}$, $C_t = (1-t)C + t\tilde{C}$, alors (12.10) montre que $A_t u = B_t \frac{1}{\lambda} \bar{\partial} u + D_t u$ où

$$(12.11) \quad B_t v(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint e^{2\lambda \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \cdot (x-y) - \lambda C_t |x-y|} b_t(x, y, \lambda) v(y, \lambda) L(dy),$$

$$|b_t| \leq \frac{\lambda \text{ Const.}}{|x-y|^{n-1}}, \quad \text{supp } b_t \subset \text{supp } x$$

$$(12.12) \quad D_t u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint e^{2\lambda \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \cdot (x-y) - \lambda C_t |x-y|} d_t(x, y, \lambda) u(y, \lambda) L(dy),$$

$$|d_t| \leq \text{Const.} \frac{|\nabla_y \chi(x, y)|}{|x-y|^{n-1}} \leq \text{Const.} |x-y|^{-n}.$$

Démonstration de la Proposition 12.3 : On procède d'abord formellement, comme si les contours Γ_t étaient de classe C^1 . Alors d'après la Proposition 12.1 on obtient (12.9) avec

$$A_t u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint_{\Gamma_t(x)} e^{i\lambda(x-y)n} P(x, n, \lambda) v \lrcorner (\bar{\partial}_y \chi(x, y) u(y)) \wedge dy \wedge dn,$$

où $v = (0, v_n)$, $v_n = \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right) + i(\tilde{C}-C) \frac{(x-y)}{|x-y|}$ (considéré comme vecteur réel). De plus,

$$\begin{aligned} v \lrcorner (\bar{\partial}_y \chi u) \wedge dy \wedge dn &= \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \left(\frac{2}{i} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) + i(\tilde{C}-C) \frac{(x_k - y_k)}{|x-y|} \right) \bar{\partial}_y \chi u. \end{aligned}$$

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge dn_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dn_k} \wedge \dots \wedge dn_n.$$

Introduisant ici la formule explicite pour $\bar{\partial}_y(xu)$, on obtient (12.10). Pour justifier ce calcul formel, on approche les contours singuliers $\Gamma_t(x)$ par les contours réguliers

$$\Gamma_{t,\epsilon}(x) : \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} + i C_t \frac{(\overline{x-y})}{\sqrt{\epsilon^2 + |x-y|^2}},$$

et on voit que toutes les intégrales tendent uniformément par rapport à t vers les intégrales correspondantes, quand $\epsilon \rightarrow 0$. La proposition en résulte alors, puisque l'argument avec la formule de Stokes devient rigoureux pour les contours $\Gamma_{t,\epsilon}$. $\#$

On s'intéresse maintenant à $\bar{\partial} Pu$. En général, si $\Gamma(x)$ est de la forme $\eta = f(x, x-y)$, alors $\Gamma(x+\delta x)$ est de la forme $\eta = f(x+\delta x, x+\delta x-y)$, et avec $\omega = y-\delta x$ comme nouveau paramètre on peut représenter $\Gamma(x+\delta x)$ par

$$y = \omega + \delta x, \quad \eta = f(x, x-\omega) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \cdot \delta \bar{x},$$

c.a.d. on pourra prendre $v = (\delta x, \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x})$ quand on cherche à appliquer la Proposition 12.1.

Pour calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} Pu$ il faut prendre v dans l'espace tangent complexifié $\mathbb{C} \otimes T \mathbb{C}^{2n}$. On trouve finalement

$$v = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{2}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}_j \partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{2}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} = (v_y, v_\eta)$$

où e_j est le j :ième vecteur de base \mathbb{C}^n . Donc, en employant aussi le même argument de régularisation que ci-dessus on trouve :

$$(12.13) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} Pu(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\eta} P(x, \eta, \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} x(x, y)\right) u(y) dy \wedge d\eta \\ + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)\bar{\eta}} P(x, \eta, \lambda) v \lrcorner (\bar{\partial}_y(xu) \wedge dy \wedge d\eta).$$

Ici $v \lrcorner (\bar{\partial}_y(xu) \wedge dy \wedge d\eta)$ s'annule quand φ est pl.h. et s'analyse comme avant pendant que

ÉTUDE PRÉCISÉE

$$\nu_y \lrcorner (\bar{\partial}(xu) \wedge dy \wedge d\eta) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_j} \lrcorner \frac{\partial xu}{\partial \bar{y}_j} d\bar{y}_j \wedge dy \wedge d\eta = \frac{\partial xu}{\partial \bar{y}_j} dy \wedge d\eta .$$

On obtient alors

Proposition 12.5 : Avec Pu comme dans (12.6), (12.7) nous avons

$$(12.14) \quad \frac{1}{\lambda} \bar{\partial} Pu = Au + B \frac{1}{\lambda} \bar{\partial} u ,$$

où

$$(12.15) \quad Au = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) (x-y)^{-\lambda} C |x-y|} a(x,y,\lambda) u(y) L(dy)$$

$$(12.16) \quad Bv = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) (x-y)^{-\lambda} C |x-y|} b(x,y,\lambda) v(y) L(dy)$$

et dans le cas où P est d'ordre 0 alors a et b vérifient les inégalités

$$(12.17) \quad |a| \leq \frac{(\text{Const.})}{\lambda} |\nabla \chi(x,y)| \cdot |x-y|^{-n}$$

$$(12.18) \quad |b| \leq (\text{Const.}) |x-y|^{-n} , \quad (\text{supp } b \subset \text{supp } \chi) .$$

Pour étudier la composition, nous prenons maintenant un deuxième opérateur $Q = Q_{\chi,\varphi,C}$ du type (12.6), avec le même contour, et fonction troncature. Alors,

$$(12.19) \quad \begin{aligned} P \circ Q u(x,\lambda) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \iiint_{\Gamma_0} e^{i\lambda((x-y)\eta + (y-z)\zeta)} P(x,\eta,\lambda) Q(y,\zeta,\lambda) \chi(x,y) \chi(y,z) \\ &\quad u(z) dz d\zeta dy d\eta , \end{aligned}$$

où Γ_0 est le contour

$$\Gamma_0 : \begin{cases} \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-y}}{|x-y|} \\ \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) + C i \frac{\overline{y-z}}{|y-z|} . \end{cases}$$

Pour pouvoir "appliquer P sous le signe somme de Q" on aimerait remplacer Γ_0 par le contour

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} + C i \frac{\overline{x-y}}{|x-y|} \\ \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} \end{cases} .$$

On déforme alors Γ_0 en Γ_1 par les contours intermédiaires :

$$\Gamma_t : \begin{cases} \eta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + t C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} + C i \frac{\overline{x-y}}{|x-y|} \\ \zeta = (1-t) \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) + C i \frac{\overline{y-z}}{|y-z|} \right) + t \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} \right) . \end{cases}$$

Le facteur phase devient sur Γ_t :

$$\begin{aligned} & \exp i\lambda \left[(x-y) \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-y}}{|x-y|} + t C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} \right) \right. \\ & \left. + (y-z) \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + (1-t) \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right) + (1-t) C i \frac{\overline{y-z}}{|y-z|} + t C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|} \right) \right] \\ & = \exp i\lambda \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-z) + C i |x-y| + t C i |x-z| + (1-t) C i |y-z| \right. \\ & \quad \left. + (1-t) \frac{2}{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right) (y-z) \right) \end{aligned}$$

On suppose maintenant que x est choisie telle que

$$(12.20) \quad \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) - \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| \leq \frac{1}{12} C \quad \text{sur } \text{supp } x .$$

Utilisant aussi que

$$\frac{1}{2} |x-y| + \frac{1}{2} |x-z| + \frac{1}{2} |y-z| \leq |x-y| + t|x-z| + (1-t) |y-z|$$

on obtient sur Γ_t :

$$(12.21) \quad \left| e^{i\lambda((x-y)\eta + (y-z)\zeta)} \right| \leq \exp \lambda \left(2 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-z) - \frac{C}{3} (|x-y| + |y-z| + |x-z|) \right) .$$

ÉTUDE PRÉCISÉE

Avec un champ de déplacement $v = (v_y, v_z, v_n, v_\zeta) = (0, 0, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1))$ on a la formule de Stokes (que l'on peut justifier par régularisation des contours)

$$(12.22) \quad \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \left(\iiint_{\Gamma_0} \dots dz d\zeta dy dn - \iiint_{\Gamma_1} \dots dz d\zeta dy dn \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \iiint_{\Gamma_t} e^{i\lambda((x-y)\eta + (y-z)\zeta)} P(x, \eta, \lambda) Q(y, \zeta, \lambda)$$

$$\left(v \lrcorner \bar{\partial}_{(y,z)} \left(x(x,y) \chi(y,z) u(z) \right) \wedge dz d\zeta dy dn \right) dt$$

Ici la forme différentielle est une somme de termes de quatres types différents que l'on peut résumer en écrivant

$$\mathcal{O}(1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} x(x,y) \chi(y,z) u(z) d\bar{y}_j \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} x(x,y) \chi(y,z) u(z) d\bar{z}_j \end{array} \right\} \wedge dz \wedge dy \wedge \left\{ \begin{array}{l} d\zeta \wedge dn_1 \dots \wedge \widehat{dn_k} \wedge \dots \wedge dn_n \\ d\zeta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\zeta_k} \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge dn \end{array} \right.$$

Quand on paramétrise le long de Γ_t , on fait intervenir des mineurs d'ordre $2n-1$ du Jacobien

$$(12.23) \quad J = \det \frac{\partial(\eta, \zeta)}{\partial(y, \bar{z})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

où

$$(12.24) \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x-z|}\right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y-z|}\right) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|y-z|} + \frac{1}{|x-z|}\right) .$$

La restriction de $v \downarrow \bar{\partial}_{(y,z)} \chi(x,y) \chi(y,z) u(z) dz d\zeta dy d\eta$ à Γ_t s'écrit donc comme une somme de termes du type

$$(12.25) \quad \mathcal{O}(1) \left\{ \begin{array}{l} |\nabla_{y,z} \chi(x,y) \chi(y,z)| \cdot u(z) \\ \text{ou bien} \\ \chi(x,y) \chi(y,z) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \end{array} \right\} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \cdot \frac{1}{|y-z|^\beta} \cdot \frac{1}{|x-z|^\gamma} L(dy dz),$$

où $\alpha \leq n, \beta \leq n, \gamma \leq n, \alpha + \beta + \gamma \leq 2n-1$.

Dans le support de $\nabla_{y,z}(\chi(x,y) \chi(y,z))$ on a d'après (12.3), (12.4) que $|x-y| \leq C_2 d(x, C\Omega), |y-z| \leq C_2 d(y, C\Omega)$ et que $|x-y| \geq C_1 d(x, C\Omega)$ ou bien $|y-z| \geq C_1 d(y, C\Omega)$. Alors $d(y, C\Omega) \geq (1-C_2) d(x, C\Omega)$ et on obtient :

$$(12.26) \quad \begin{array}{l} \text{Nous avons } |\nabla_{y,z} \chi(x,y) \chi(y,z)| = \mathcal{O}(1) \frac{1}{d(x, C\Omega)} \text{ et dans} \\ \text{le support de cette quantité, ou bien } |x-y| \geq C_1 d(x, C\Omega) \\ \text{ou bien } |y-z| \geq C_1(1-C_2) d(x, C\Omega), \text{ et } |x-y|, |y-z|, |x-z| = \\ \mathcal{O}(d(x, C\Omega)). \end{array}$$

Il est maintenant clair que l'intégrale à droite dans (12.22) converge et que (12.22) est vérifiée.

Supposons maintenant que P, Q soient d'ordre 0. Alors (12.22) et la discussion après donnent

$$(12.27) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \left(\iiint_{\Gamma_0} \dots dz d\zeta dy d\eta - \iiint_{\Gamma_1} \dots dz d\zeta dy d\eta \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \int_0^1 \iiint e^{\lambda(2 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \cdot (x-z) - \frac{C}{3} (|x-y| + |y-z| + |x-z|))} \\ & \quad \left(\tilde{a}_t(x,y,z,\lambda) u(z) + \tilde{b}_t(x,y,z,\lambda) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) L(dy dz) dt \end{aligned}$$

ÉTUDE PRÉCISÉE

où

$$(12.28) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_t \text{ et } \tilde{b}_t \text{ sont respectivement des sommes finies de termes du type} \\ \mathcal{O}(1) \frac{1}{d(x, C\Omega)} \cdot \frac{1}{|x-y|^\alpha} \cdot \frac{1}{|y-z|^\beta} \cdot \frac{1}{|x-z|^\gamma} \text{ et } \mathcal{O}(1) \frac{1}{|x-y|^\alpha} \cdot \\ \frac{1}{|y-z|^\beta} \cdot \frac{1}{|x-z|^\gamma} \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \leq n, \alpha + \beta + \gamma \leq 2n-1. \text{ De plus} \\ |x-y|, |y-z|, |x-z| = \mathcal{O}(d(x, C\Omega)) \text{ dans le support de } \tilde{a}_t \text{ et } \tilde{b}_t \text{ et} \\ |x-y| \text{ ou } |y-z| \geq C_1(1-C_2) d(x, C\Omega) \text{ dans le support de } \tilde{a}_t. \end{array} \right.$$

Dans (12.27) on intègre en y et pour cela on majore $|x-y|^{-\alpha} |y-z|^{-\beta}$ par $|x-y|^{-(\alpha+\beta)} + |y-z|^{-(\alpha+\beta)}$ et on constate que

$$\begin{aligned} & \lambda^{2n} \int e^{-\lambda \frac{C}{6} (|x-y| + |y-z|)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \cdot \frac{1}{|y-z|^\beta} L(dy) \\ & = \mathcal{O}(\lambda^{\alpha+\beta}) = \mathcal{O}(\lambda^{2n-1-\gamma}) \end{aligned}$$

Avec $C_3 = \frac{1}{6} C_1(1-C_2)$ on a donc

$$(12.29) \left\{ \begin{array}{l} \lambda^{2n} \int e^{-\frac{\lambda C}{3} (|x-y| + |y-z|)} \tilde{a}_t L(dy) = a_t \text{ est une somme finie de} \\ \text{termes du type } \mathcal{O}(1) \lambda^{2n-1-|\gamma|} \frac{1}{d(x, C\Omega)} \cdot \frac{1}{|x-z|^\gamma} e^{-\lambda C C_3 d(x, C\Omega)} \\ \text{avec } 0 \leq \gamma \leq n. \text{ De plus, } |x-z| = \mathcal{O}(d(x, C\Omega)) \text{ et } d(z, C\Omega) \geq \\ \frac{1}{\mathcal{O}(1)} d(x, C\Omega) \text{ dans le support de ces termes.} \end{array} \right.$$

$$(12.30) \left\{ \begin{array}{l} \lambda^{2n} \int e^{-\frac{\lambda C}{3} (|x-y| + |y-z|)} \tilde{b}_t L(dy) = b_t \text{ est une somme finie de} \\ \text{termes du type } \mathcal{O}(1) \lambda^{2n-1-|\gamma|} \frac{1}{|x-z|^\gamma} \text{ à support dans } |x-y| = \\ \mathcal{O}(d(x, C\Omega)), d(z, C\Omega) \geq \frac{1}{\mathcal{O}(1)} d(x, C\Omega). \end{array} \right.$$

Bien entendu $a = \int_0^1 a_t d_t$ et $b = \int_0^1 b_t d_t$ vérifient aussi (12.29) et (12.30)

respectivement, et (12.22) devient

$$(12.31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{2n} \left(\iiint_{\Gamma_0} \dots dz d\zeta dy d\eta - \iiint_{\Gamma_1} \dots dz d\zeta dy d\eta \right) \\ & = \int e^{\lambda(2 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-z) - \frac{C}{3} |x-z|)} a(x,z,\lambda) u(z) L(dz) \\ & + \int e^{\lambda(2 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \cdot (x-z) - \frac{C}{3} |x-z|)} b(x,z,\lambda) \frac{\partial u}{\partial z} L(dz) . \end{aligned} \right.$$

Examinons maintenant l'intégrale le long de Γ_1 dans (12.27) qui se réduit à

$$(12.32) \quad \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint \tilde{R}(x,z,\zeta,\lambda) e^{i\lambda(x-z)\zeta} u(z) dz \wedge d\zeta$$

$$\zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + C i \frac{\overline{x-z}}{|x-z|}$$

où avec $\Gamma : \tau = -C i \overline{\tau}/|t|$,

$$(12.33) \quad \begin{aligned} & \tilde{R}(x,z,\zeta,\lambda) = \\ & = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint_{\Gamma} e^{-i\lambda t\tau} P(x,\zeta+\tau,\lambda) Q(x+t,\zeta,\lambda) \chi(x,x+t) \chi(x+t,z) dt \wedge d\tau \\ & = \chi(x,z) R(x,\zeta,\lambda) + \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \chi(x,z) \iint_{\substack{(t,\tau) \in \Gamma \\ |t| \geq C_1 d(x)}} e^{-i\lambda t\tau} P Q \chi(x,x+t) dt \wedge d\tau \end{aligned}$$

$$(12.34) \quad \begin{aligned} & + \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint_{\Gamma} e^{-i\lambda t\tau} P Q \chi(x,x+t) (\chi(x+t,z) - \chi(x,z)) dt \wedge d\tau , \\ & R(x,\zeta,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \iint_{\Gamma \cap \{|t| \leq C_1 d(x, C\Omega)\}} e^{-i\lambda t\tau} P(x,\zeta+\tau,\lambda) Q(x+t,\zeta,\lambda) dt \wedge d\tau . \end{aligned}$$

ÉTUDE PRÉCISÉE

L'avant-dernier terme dans (12.33) est $\mathcal{O}(1) e^{-\lambda C C_1 d(x)/2}$. Pour examiner le dernier terme de (12.33) on distingue deux cas. Le premier cas est quand $|x-z| \leq C_1 d(x)/4$. Alors $|t| \geq C_1 d(x)/4$ dans le support de $\chi(x+t, z) - \chi(x, z)$ et on majore le dernier terme de (12.33) par $\mathcal{O}(1) e^{-\lambda C C_1 d(x)/5}$. Dans le deuxième cas, $|x-z| \geq C_1 d(x)/4$ et on se contente de la majoration $\mathcal{O}(1)$. On obtient donc

$$(12.35) \quad \check{R}(x, z, \zeta, \lambda) = \chi(x, z) R(x, \zeta, \lambda) + \chi(x, z) k_1(x, z, \zeta, \lambda) + k_2(x, z, \zeta, \lambda)$$

où $k_1 = \mathcal{O}(1) e^{-\lambda C C_1 d(x)/5}$ et $k_2 = \mathcal{O}(1)$ est à support dans $\{(x, z) \in \text{supp } \chi \circ \text{supp } \chi; |x-z| \geq C_1 d(x)/4\}$. Pour résumer :

$$(12.36) \quad \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{2n} \iiint_{\Gamma_1} e^{i\lambda((x-y)\eta + (y-z)\zeta)} P(x, \eta, \lambda) Q(y, \zeta, \lambda) \chi(x, y) \chi(y, z) u(z) dz d\zeta dy d\eta =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\lambda(x-z)\zeta} (R(x, \zeta, \lambda) \chi(x, z) + k_1(x, z, \zeta, \lambda) \chi(x, z) + k_2(x, z, \zeta, \lambda))$$

$$\zeta = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\overline{(x-z)}}{|x-z|} u(z) dz d\zeta .$$

On obtient alors le résultat sur la composition :

Proposition 12.6 : Soit $\Omega \subset \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $P(x, \xi, \lambda)$, $Q(x, \xi, \lambda)$ des symboles analytiques d'ordre 0, définis dans un voisinage de $\left\{ (x, \frac{2}{\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) + \xi) ; x \in \overline{\Omega} ; |\xi| \leq 3C \right\}$. On définit les opérateurs $P_{\chi, \varphi, C}$, $Q_{\chi, \varphi, C}$ comme dans (12.6) avec χ comme dans la Proposition 12.1, vérifiant aussi (12.20). Alors avec R donné par (12.34) on a pour $u \in C^1(\Omega)$:

$$P_{\chi, \varphi, C} \circ Q_{\chi, \varphi, C} u = R_{\chi, \varphi, C} u + A u + B \frac{1}{\lambda} \overline{\partial} u ,$$

où

$$A u(x, \lambda) = \int e^{\lambda(2 \operatorname{Re} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)(x-z) - C|x-z|/3)} a(x, z, \lambda) u(z) L(dz) ,$$

$$E v(x, \lambda) = \int e^{\lambda(2 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)(x-z) - C|x-z|/3)} b(x, z, \lambda) v(z) L(dz),$$

Ici $a(x, z, \lambda)$, $b(x, z, \lambda)$ sont à support dans $(\operatorname{supp} \lambda) \circ (\operatorname{supp} \lambda)$. a est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma} \left(\frac{1}{\lambda d(x, C\Omega)} + 1 \right) e^{-\lambda C_4 d(x, C\Omega)}, \quad 0 \leq \gamma \leq n$$

avec $C_4 = \min(C C_3, C C_1/5) = C C_3$. De même b est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq n.$$

Nous allons utiliser ce résultat dans le cas où P est un symbole elliptique classique et Q est le symbole de la paramétrix formelle. Alors modulo une erreur exponentiellement petite on a $R = 1$. On veut alors estimer la différence entre l'identité et $1_{\chi, \varphi, C}$.

Pour ceci on va d'abord étudier l'intégrale

$$(12.37) \quad I(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma} e^{-i\lambda x \xi} u(x) dx d\xi$$

où $u \in C_0^1(\mathbb{C}^n)$, et Γ est un contour de la forme $\xi = f(x)$ où f est de classe C^1 en dehors de 0 et vérifie

$$(12.38) \quad |df| = \mathcal{O}(1) \frac{|f|}{|x|}$$

$$(12.39) \quad |x f(x)| \sim |x| |f(x)|, \quad \operatorname{Im} x f(x) \leq 0$$

(12.40) Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$|x| |f(x)| = \mathcal{O}(|x|^{\varepsilon_0}), \quad x \rightarrow 0$$

Les conditions (12.38), (12.40) assurent que l'intégrale $I(\lambda)$ converge. Soit

$$(12.41) \quad g_\lambda(t) = - \left(\frac{1}{i\lambda t} + \frac{n-1}{(i\lambda t)^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{(i\lambda t)^3} + \dots + \frac{(n-1)!}{(i\lambda t)^n} \right)$$

ÉTUDE PRÉCISÉE

Alors on a

Lemme 12.7 : Dans la situation ci-dessus, on a

$$(12.42) \quad I(\lambda) = \\ = u(0) - \sum_j \sum_k \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\Gamma} (-1)^{n+j+1} e^{-i\lambda x \xi} g_{\lambda}(x\xi) \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \overline{dx_k} \wedge dx \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \dots \wedge d\xi_n$$

Ici les conditions (12.38)-(12.40) assurent la convergence des intégrales dans (12.42) comme on verra dans la démonstration.

Démonstration du Lemme 12.7 : Soit

$$U = \sum_1^n (-1)^{j+n+1} g_{\lambda}(x\xi) \xi_j e^{-i\lambda x \xi} u(x) dx d\xi_1 \dots \widehat{d\xi_j} \dots d\xi_n .$$

Un calcul montre alors que

$$(12.43) \quad dU = u(x) e^{-i\lambda x \xi} dx d\xi \\ + \sum_j \sum_k (-1)^{j+n+1} e^{-i\lambda x \xi} g_{\lambda}(x\xi) \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \overline{dx_k} \wedge dx \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_j} \dots \wedge d\xi_n .$$

Avec $\Gamma_{\varepsilon} = \Gamma \setminus \{(x, \xi) \in \Gamma ; |x| \leq \varepsilon\}$ on a

$$I(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\Gamma_{\varepsilon}} e^{-i\lambda x \xi} u(x) dx d\xi$$

et la formule de Stokes et (12.43) donnent

$$(12.44) \quad I_{\varepsilon}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\partial \Gamma_{\varepsilon}} U - \sum_j \sum_k \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\Gamma_{\varepsilon}} (-1)^{j+n+1} e^{-i\lambda x \xi} g_{\lambda}(x\xi) \xi_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \overline{dx_k} \wedge dx \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge d\xi_n .$$

Les intégrales de la double somme sont du type

$$\mathcal{O}_{\lambda}(1) \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{|xf(x)|^n} + \frac{1}{|xf(x)|} \right) |f(x)| \cdot \frac{|f(x)|^{n-1}}{|x|^{n-1}} L(dx) = \mathcal{O}_{\lambda}(1) \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{2n-1}} L(dx)$$

et convergent donc quand $\epsilon \rightarrow 0$, vers les intégrales correspondantes de (12.42).

On étudie ensuite

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\partial\Gamma_\epsilon} U &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n u(0) \int_{\partial\Gamma_\epsilon} \sum (-1)^{j+n+1} \frac{(n-1)!}{(i\lambda x \xi)^n} \xi_j \, dx \, d\xi_1 \dots \widehat{d\xi_j} \dots d\xi_n \\ &= u(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon(\lambda) \quad , \\ \mathcal{J}_\epsilon(\lambda) &= - \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\partial\Gamma_\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+n+1}}{(i x \xi)^n} \xi_j \, dx \, d\xi_1 \wedge \dots \widehat{d\xi_j} \dots \wedge d\xi_n \end{aligned}$$

La $(2n-1)$ -forme que l'on intègre ici est fermée, donc $\mathcal{J}_\epsilon(\lambda)$ ne change pas si l'on déforme ϵ ou f . On peut donc se ramener au cas $\epsilon = 1$, $f(x) = -i\bar{x}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\epsilon(\lambda) &= \mathcal{J}_1(\lambda) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\partial\{|x| \leq 1\}} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n+j+1}}{i^n} \bar{x}_j \, dx \, d\bar{x}_1 \dots \widehat{d\bar{x}_j} \dots d\bar{x}_n \\ &= \frac{n!}{(2\pi)^n i^n} \int_{|x| \leq 1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n = \frac{n!}{\pi^n} \int_{|x| \leq 1} L(dx) = 1 \end{aligned}$$

Faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$ dans (12.44) on obtient alors le Lemme. #

Plus généralement si $\Gamma(x)$ est un contour de la forme $n = \xi(x) + f_x(y-x)$ où la fonction f_x vérifie (12.38)-(12.40), alors on obtient

$$\begin{aligned} (12.45) \quad &\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)_n} u(y) \, dy \wedge d_n \\ &= u(x) - \sum \sum \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{i\lambda(x-y)_n} g_\lambda((y-x) \cdot (n-\xi(x))) (n-\xi(x))_j \\ &\quad (-1)^{j+n+1} \frac{\partial u}{\partial y_k}(y) \, \overline{dy_k} \wedge dy \wedge d_n^1 \dots \widehat{d_n^j} \dots d_n^n \quad . \end{aligned}$$

Revenant à la situation initiale on trouve

ÉTUDE PRÉCISÉE

$$\begin{aligned}
 & 1_{\chi, \varphi, C} u(x, \lambda) - u(x, \lambda) = \\
 & = - \sum \sum \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n (-1)^{j+n+1} \int \int_{\eta = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + Ci \frac{(x-y)}{|x-y|}} e^{i\lambda(x-y)\eta} g_\lambda \left(\frac{C}{\lambda} |x-y|\right) \frac{Ci(\bar{x}_j - \bar{y}_j)}{|x-y|} x \\
 & \quad \frac{\partial}{\partial y_k} (\chi(x, y) u(y)) \overline{dy}_k \wedge dy \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \dots \wedge d\eta_n .
 \end{aligned}$$

On obtient la :

Proposition 12.8 : Soient $\Omega, \varphi, \chi, C, u$ comme dans la Proposition 12.6. Alors

$$1_{\chi, \varphi, C} u = u + A u + B \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}$$

avec A et B de la même forme que dans la Proposition 12.6. Ici a et b sont à support dans $\text{supp } \chi$ et a est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma} \frac{1}{\lambda d(x, C\Omega)} e^{-\frac{2}{3} C C_1 \lambda d(x, C\Omega)}, \quad n \leq \gamma \leq 2n-1$$

pendant que b est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma}, \quad n \leq \gamma \leq 2n-1 .$$

Toujours sous les hypothèses de la Proposition 2.6 on suppose que P est elliptique (classique) et que Q soit une réalisation de sa paramétrix formelle. Alors dans une région où $d(x, C\Omega)$ est borné inférieurement on obtient de (12.36) et la méthode de la phase stationnaire :

$$(12.46) \quad R(x, \zeta, \lambda) = 1 + \mathcal{O}(1) e^{-C_5 \lambda} .$$

La constante $C_5 > 0$ dépend d'une part de l'estimation du reste dans la formule de phase stationnaire, et d'autre part du choix de Q qui est déterminé seulement modulo un terme exponentiellement petit. Bien que C_5 soit difficile à expliciter on constate néanmoins que si les différentes données du problème dépendent de paramètres mais varient dans des ensembles compacts alors on peut choisir la même

constante $C_5 > 0$ indépendante des paramètres.

Quand $d(x, C\Omega)$ est petit on remplace d'abord le domaine d'intégration dans (12.34) par un domaine $|t| \leq \text{Const.}$ et (12.46) est alors valable pour la nouvelle intégrale. Ceci produit une erreur supplémentaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) \lambda^n \iint e^{-i\lambda t\tau} dt d\tau &= \mathcal{O}(1) e^{-\lambda C_1 d(x, C\Omega)/2} \\ C_1 d(x, C\Omega) &\leq |t| \leq \text{const.} \\ \tau &= -C_1 \frac{\bar{t}}{|t|} \end{aligned}$$

Donc avec une nouvelle constante C_5 , à laquelle nos remarques d'uniformité s'appliquent toujours, on obtient

$$(12.47) \quad R(x, \zeta, \lambda) = 1 + \mathcal{O}(1) e^{-C_5 d(x, C\Omega)\lambda} .$$

Ceci avec les propositions 12.6 et 12.8 donne alors

Proposition 12.9 : On fait les mêmes hypothèses que dans la Proposition 12.6. En plus on suppose que P est un symbole elliptique classique et que Q est une réalisation du symbole paramétrisé formel. Alors

$$(12.48) \quad P_{\chi, \varphi, C} \circ Q_{\chi, \varphi, C} u = u + A u + B \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial z}$$

où A et B sont de la même forme que dans la Proposition 12.6. Ici $a(x, z, \lambda)$, $b(x, z, \lambda)$ sont à support dans $\text{supp } \chi \circ \text{supp } \chi$. a est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma} \left(\frac{1}{\lambda d(x, C\Omega)} + 1 \right) e^{-C_5 \lambda d(x, C\Omega)}, \quad 0 \leq \gamma \leq 2n-1$$

et b est une somme finie de termes

$$\mathcal{O}(1) \frac{\lambda^{2n-\gamma}}{|x-z|^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq 2n-1 .$$

On a $C_5 > 0$.

Pour terminer cette section nous allons montrer un résultat de surjectivité pour

ÉTUDE PRÉCISÉE

certaines opérateurs elliptiques. Sur Ω on fait une hypothèse supplémentaire :

(12.49) Ω est strictement pseudoconvexe à bord C^∞ .

Il existe alors une fonction $0 \leq \omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ qui est équivalente à $d(x, C\Omega)$, et strictement pluri-sur-harmonique.

Lemme 12.10 : Pour tout entier $N \geq 0$, la fonction

$$g_N(x, \lambda) = \log \left(1 + \frac{1}{\lambda\omega(x)} + \dots + \frac{1}{(\lambda\omega(x))^N} \right) = \log (h_N(x, \lambda))$$

est pluri-sous-harmonique sur Ω , quand $\lambda \geq 1$.

Preuve : Soit $\ell(y) = \sum_0^N \frac{1}{y^k}$, $y > 0$. Alors $\ell'(y) = - \sum_0^N \frac{k}{y^{k+1}} < 0$ et $\ell''(y) = \sum_0^N \frac{k(k+1)}{y^{k+2}} > 0$. Aussi $(\ell')^2 = \sum_0^N \sum_0^N \frac{jk}{y^{j+k+2}}$ et

$$\ell \ell'' = \sum_0^N \sum_0^N \frac{k(k+1)}{y^{j+k+2}} = \sum_0^N \sum_0^N \frac{1}{y^{j+k+2}} \cdot \frac{1}{2} (j(j+1) + k(k+1))$$

Donc $(\ell')^2 \leq \ell \ell''$ et on en déduit, que si $k(y) = \log \ell(y)$, alors

$$k'(y) = \frac{\ell'}{\ell} \leq 0$$

$$k''(y) = \frac{\ell \ell'' - (\ell')^2}{\ell^2} \geq 0$$

Avec $k_\lambda(y) = k(\lambda y)$ on a toujours $k'_\lambda \leq 0$, $k''_\lambda \geq 0$, et un calcul simple montre alors que $g_N(x) = k_\lambda(\omega(x))$ est pl.s.h. #

Si φ est une fonction Lipschitzienne sur $\bar{\Omega}$ et réelle, on désigne par $L_{\varphi}^{2,N}$ l'espace des fonctions sur Ω qui sont de classe L^2 pour la densité $(h_N(x, \lambda) e^{\lambda\varphi(x)})^{-2} L(dx)$.

Si φ_0, φ_1 sont deux fonctions réelles et Lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$ on pose

$$H_{\varphi_0, \varphi_1}^N = \left\{ u \in L_{\varphi_0}^{2,N} ; \frac{1}{\lambda} \bar{\partial} u \in L_{\varphi_1}^{2,N+1} \right\},$$

$$H_{\varphi_0}^N = \left\{ u \in L_{\varphi_0}^{2,N} ; \bar{\partial}u = 0 \right\} .$$

Ces espaces qui dépendent de λ sont équipés avec les normes évidentes.

Soit maintenant $\varphi_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ une fonction réelle et pl.s.h., et $P(x, \xi, \lambda)$ un symbole analytique classique d'ordre 0, défini dans un voisinage de Λ_{φ_0} . Avec $C_0 > 0$ et $\chi_0 \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ comme auparavant, on peut alors définir l'opérateur

$$\tilde{P} = P_{\varphi_0, C_0, \chi_0} .$$

On suppose que (φ_0, C_0, χ_0) vérifie (12.20). La Proposition 12.5 montre que

$$\tilde{P} : H_{\varphi_0}^N \rightarrow H_{\varphi_0, \check{\varphi}}^N$$

est uniformément borné par rapport à $\lambda \geq 1$, si

$$\check{\varphi} = \varphi_0(x) - \frac{C_0 C_1}{2} d(x, C\Omega) ,$$

où la constante C_1 est donnée dans le Lemme 12.1.

Soit maintenant $[0, 1] \ni t \rightarrow \varphi_t \in C^2(\bar{\Omega})$ une famille continue décroissante de fonctions pl.s.h., vérifiant

$$(12.50) \quad \varphi_t \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0 \Big|_{\partial\Omega} ,$$

$$(12.51) \quad \left| \frac{2}{t} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - \frac{2}{t} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \right| \leq \min \left(\frac{C_0}{12} , \frac{C_0 C_1}{2} \right) .$$

Alors $\varphi_t \geq \check{\varphi}$ et la Proposition 12.5 montre que $\tilde{P} : H_{\varphi_t, \varphi_s}^N \rightarrow H_{\varphi_t, \varphi_s}^N$ est uniformément

borné pour $0 \leq t \leq s \leq 1$.

Théorème 12.11 : Soient $P, \tilde{P} = P_{\varphi_0, C_0, \chi_0}$, φ_t comme ci-dessus et supposons en plus que P soit elliptique sur $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} \Lambda_{\varphi_t}$. Alors il existe un entier $M > 0$ et des opérateurs

ÉTUDE PRÉCISÉE

$$E : H_{\varphi_0, \varphi_1}^0 \rightarrow H_{\varphi_0}^M, \quad K : H_{\varphi_0, \varphi_1}^0 \rightarrow L_{\varphi_1}^{2, M}, \quad \lambda \geq 1$$

de norme $\mathcal{O}(\lambda^M)$ tels que $\tilde{P}E = I + K$.

Démonstration : Soit $Q(x, \xi, \lambda)$ un symbole paramétrix pour P , défini dans un petit voisinage de $U \wedge_{\varphi_t}$. Puisque le domaine de définition de Q en général est plus petit que celui de P on n'est pas sûr de pouvoir définir $Q_{\varphi_0, C_0, \chi_0}$. Par contre, si $C \in]0, C_0]$ est assez petite et $\chi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ comme dans le Lemme 12.1 avec $\text{supp } \chi \subset \{(x, y) ; \chi_0(x, y) = 1\}$ assez proche de la diagonale, on peut s'arranger pour que (φ_t, C, χ) vérifie (12.20) pour $0 \leq t \leq 1$ et l'opérateur $Q_t = Q_{\varphi_t, C, \chi}$ soit bien défini. De même on peut définir $P_t = P_{\varphi_t, C, \chi}$. Posons $\varphi_s = \varphi_1$ pour $s \geq 1$.

Lemme 12.12 : Il existe un nombre $\gamma > 0$ tel que pour $t \in [0, 1]$, $N \geq 0$, $\lambda \geq 1$:

$$(12.52) \quad P_t \text{ et } Q_t \text{ sont bornés } H_{\varphi_t, \varphi_{t+\gamma}}^N \rightarrow H_{\varphi_t, \varphi_{t+\gamma}}^N \text{ et } L_{\varphi_t}^{2, N} \rightarrow L_{\varphi_t}^{2, N}, \text{ uniformément par rapport à } \lambda \text{ et } t.$$

$$(12.53) \quad P_t Q_t = I + K_t, \text{ où } K_t : H_{\varphi_t, \varphi_{t+\gamma}}^N \rightarrow L_{\varphi_{t+\gamma}}^{2, N+1} \text{ est uniformément borné}$$

$$(12.54) \quad \tilde{P} - P_t : H_{\varphi_t, \varphi_{t+\gamma}}^N \rightarrow L_{\varphi_{t+\gamma}}^{2, N+1} \text{ est uniformément borné.}$$

Aussi, (12.53) reste vraie avec P_t remplacé par \tilde{P} .

Preuve du Lemme 12.12 : (12.52) résulte de la Proposition 12.5 (voir aussi (12.6), (12.8)). (12.53) résulte de la Proposition 12.9. Finalement (12.54) résulte de la Proposition 12.3 et la Remarque 12.4, si l'on remplace χ_0 par $\tilde{\chi}$. #

Par "récurrence" supposons que pour un certain t et un certain N il existe des opérateurs

$$H_{\varphi_0, \varphi_1}^0 \ni v \begin{cases} \longrightarrow u_t \in H_{\varphi_0}^N \\ \searrow w_{t+\gamma} \in H_{\varphi_{t+\gamma}, \varphi_1}^{N+1} \end{cases}$$

de norme $\mathcal{O}(\lambda^N)$ tels que $\tilde{P} u_t = v + w_{t+\gamma}$. Soit alors $h_{t+\gamma} = -Q_{t+\gamma} w_{t+\gamma} \in H_{\varphi_{t+\gamma}, \varphi_{t+2\gamma}}^{N+1}$ et $g_{t+2\gamma} \in L_{\varphi_{t+2\gamma}}^{2, N+2}$ la solution de norme minimale de $\bar{\partial} g_{t+2\gamma} = -\bar{\partial} h_{t+\gamma}$, qui existe à cause du Lemme 12.10. Alors uniformément,

$$\begin{aligned} \|g_{t+2\gamma}\|_{L_{\varphi_{t+2\gamma}}^{2, N+1}} &\leq \mathcal{O}(1) \|\bar{\partial} h_{t+\gamma}\|_{L_{\varphi_{t+2\gamma}}^{2, N+2}} \leq \mathcal{O}(\lambda) \|h_{t+\gamma}\|_{H_{\varphi_{t+\gamma}, \varphi_{t+2\gamma}}^{N+1}} \\ &\leq \mathcal{O}(\lambda) \|w_{t+\gamma}\|_{H_{\varphi_{t+\gamma}, \varphi_{t+2\gamma}}^{N+1}} \end{aligned}$$

On pose $u_{t+\gamma} = u_t + h_{t+\gamma} + g_{t+2\gamma} \in H_{\varphi_0}^{N+2}$. Alors

$$\tilde{P} u_{t+\gamma} = v + (w_{t+\gamma} - \tilde{P} Q_{t+\gamma} w_{t+\gamma}) + \tilde{P} g_{t+2\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} v + w_{t+2\gamma}.$$

Puisque $u_{t+\gamma} \in H_{\varphi_0}^{N+2}$ et $v \in H_{\varphi_0, \varphi_1}^0$ on a $\frac{1}{\lambda} \bar{\partial} w_{t+2\gamma} \in L_{\varphi_1}^{2, N+3}$ et

$$\left\| \frac{1}{\lambda} \bar{\partial} w_{t+2\gamma} \right\| \leq \mathcal{O}(1) (\|u_{t+\gamma}\| + \|v\|)$$

pour les normes correspondantes. D'autre part $\tilde{P}(g_{t+2\gamma}) \in L_{\varphi_{t+2\gamma}}^{2, N+2}$ ainsi que

$w_{t+\gamma} - \tilde{P} Q_{t+\gamma} w_{t+\gamma}$. Donc $w_{t+2\gamma} \in L_{\varphi_{t+2\gamma}}^{2, N+2}$ et nous avons vérifié que $w_{t+2\gamma} \in H_{\varphi_{t+2\gamma}, \varphi_1}^{N+2}$.

Notre pas de récurrence nous a permis de remplacer t par $t+\gamma$ et montre aussi que l'hypothèse de récurrence est correcte pour $t = 0$. Au bout de $[\frac{1}{\gamma}] + 1$ pas on arrive à $t = 1$ et le Théorème 12.10 est démontré.

‡

D'AUTRES PRÉPARATIONS

Remarque 12.13 : Considérons un opérateur

$$P = \tilde{D}_t^m + A_1(t, x, \tilde{D}_x) \tilde{D}_t^{m-1} + \dots + A_m(t, x, \tilde{D}_x)$$

pour $t \in D_r = \{t \in \mathbb{C} ; |t| < r\}$, où A_j sont des réalisations d'opérateurs pseudo-différentiels dépendant holomorphiquement de t , avec $A_j : H_{\varphi_0, \varphi_1}^N(\Omega) \rightarrow H_{\varphi_0, \varphi_1}^N(\Omega)$

uniformément bornés pour un certain N et pour $\lambda \geq 1$, $|t| < r$. Alors pour $v_0, v_1, \dots, v_{m-1} \in H_{\varphi_0, \varphi_1}^N$ on a par des arguments abstraits faciles, une solution holomorphe $D_r \ni t \rightarrow u(t, x, \lambda) \in H_{\varphi_0, \varphi_1}^N$ telle que $P u = 0$, $\tilde{D}_t^j u|_{t=0} = v_j$. De plus

$$(12.55) \quad \|u(t, \cdot, \lambda)\|_{H_{\varphi_0, \varphi_1}^N} \leq e^{C|t|\lambda} (\|v_0\|_{H_{\varphi_0, \varphi_1}^N} + \dots + \|v_{m-1}\|_{H_{\varphi_0, \varphi_1}^N})$$

où la constante C dépend seulement d'une majoration uniforme sur les normes des A_j . En principe, on doit pouvoir dans certains cas améliorer (12.55), par exemple en utilisant la méthode des déformations non-caractéristiques. Le cas le plus simple est probablement quand $m = 1$ qui donnerait sans doute un traitement alternatif de la méthode d'optique géométrique (y compris les équations de transport). Un autre cas intéressant serait quand P est microhyperbolique à partir de $\mathbb{R}_{t, \tau}^2 \times \Lambda_{\varphi_0}$ dans la direction $\tau = 1$, $t = 0$, $x = \xi = 0$, où très probablement on a une amélioration substantielle de (12.55) pour t réel. Cette remarque un peu vague ne sera pas exploitée dans le reste de ce cours, mais peut se révéler utile dans une approche plus constructive (paramétrices, solutions nulles et.c) et aussi dans les problèmes aux limites.

13. D'AUTRES PRÉPARATIONS

Dans cette section on étudie d'abord l'aspect que prend le produit L^2 :

$$(13.1) \quad \langle u_1, u_2 \rangle = \int u_1(y) u_2(y) dy$$

au niveau des transformations de FBI. Ensuite comme application on donne une nouvelle définition de WF_a (proche d'une définition de O.Liess [Li]). Finalement on donnera quelques précisions techniques sur la transformée de Fourier. Le travail

dans cette section servira dans la démonstration du Théorème 14.1.

On se donne comme dans la section 7, deux transformations de FBI ; T_1 et T_2 , définies microlocalement près de $(y_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $(y_0, -\eta_0)$ respectivement :

$$(13.2) \quad U_j(x, \lambda) = \int e^{i\lambda\varphi_j(x, y)} a_j(x, y, \lambda) u_j(y, \lambda) dy = T_j u_j .$$

Ici a_j sont des symboles analytiques elliptiques classiques d'ordre $n/2$. Comme dans la section 7 on introduit aussi $\phi_j(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} -\text{Im } \varphi_j(x, y)$. Les fonctions ϕ_j et U_j sont alors définies près de $x_0^j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, 2$, correspondant respectivement à (y_0, η_0) et $(y_0, -\eta_0)$. Quand $u_j \in \mathcal{D}'$ sont indépendants de λ , nous avons vu que $v_j \in H_{\phi_j}^{loc}$ (sur des ouverts convenables). D'autre part nous pouvons formellement T_1 et T_2 :

$$(13.3) \quad u_j(y, \lambda) = \int e^{-i\lambda\varphi_j(x, y)} b_j(x, y, \lambda) U_j(x, \lambda) dx ,$$

où les b_j sont aussi des symboles classiques analytiques elliptiques d'ordre $n/2$. Alors formellement :

$$(13.4) \quad \langle u_1, u_2 \rangle = \iiint_{\Gamma} e^{-i\lambda(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(z, y))} b_1(x, y, \lambda) b_2(z, y, \lambda) U_1(x, \lambda) U_2(z, \lambda) dx dy dz ,$$

où l'on cherche un contour Γ bien adapté à la fonction de poids

$$(13.5) \quad \tilde{\phi}(x, z, y) = \phi_1(x) + \text{Im } \varphi_1(x, y) + \phi_2(z) + \text{Im } \varphi_2(z, y) .$$

Notant comme dans la section 7, par $(y_j(x), \eta_j(x)) \in \Gamma^* \mathbb{R}^n \setminus 0$, $j = 1, 2$, le point qui correspond à $x \in \mathbb{C}^n$, on définit "l'anti-diagonale" $\Delta \subset \mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_z^n$ (dans un voisinage de (x_0^1, x_0^2) par les équations $y_1(x) = y_2(x)$, $\eta_1(x) + \eta_2(x) = 0$. Pour $(x, z) \in \Delta$, la fonction $y \rightarrow \tilde{\phi}(x, z, y)$ a un col en $y = y_1(x) = y_2(x)$ et $\Delta_y^2 \tilde{\phi} \Big|_{\mathbb{R}_y^n} > 0$,

$\Delta_y^2 \Big|_i \mathbb{R}_y^n < 0$. La valeur critique est 0, et on choisit le contour

$$\Gamma_{\Omega, C} : (x, z) \in \Delta, x \in \Omega, y = y_1(x) + it, t \in \mathbb{R}^n, |t| \leq C.$$

Ici $C > 0$ est une constante dont le choix sera négligeable, et $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un voisinage ouvert de x_0^1 .

Soit $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = f(\Omega)$ où f est l'application de graphe Δ . Alors pour $U_j \in L_{\Phi_j}^2(\Omega_j)$ on pose

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\Omega_1} &= \\ (13.6) \quad &= \iiint_{\Gamma_{\Omega_1, C}} e^{-i\lambda(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(z, y))} b_1(x, y, \lambda) b_2(z, y, \lambda) U_1(x, \lambda) U_2(z, \lambda) dy dx dz \\ &= \iint_{(x, z) \in \Delta, x \in \Omega_1} e^{\lambda\psi(x, z)} g(x, z, \lambda) U_1(x, \lambda) U_2(z, \lambda) dx dz. \end{aligned}$$

Ici la dernière équation résulte de la méthode de la phase stationnaire, g est un symbole elliptique classique d'ordre $n/2$ et $\psi(x, z) = v.c. (-i(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(z, y)))$. Clairement

$$(13.7) \quad \operatorname{Re} \psi(x, z) + \Phi_1(x) + \Phi_2(z) \Big|_{\Delta} = 0,$$

$$(13.8) \quad \nabla(\operatorname{Re} \psi(x, z) + \Phi_1(x) + \Phi_2(z)) = 0 \text{ sur } \Delta.$$

Aussi $dx dz \Big|_{\Delta} = \mathcal{O}(1) L(dx)$ et on obtient immédiatement :

Proposition 13.1 : Pour $U_j \in L_{\Phi_j}^2(\Omega_j)$ on a

$$(13.9) \quad |\langle U_1, U_2 \rangle| \leq C_0 \lambda^{n/2} \|U_1\|_{L_{\Phi_1}^2} \|U_2\|_{L_{\Phi_2}^2}.$$

Ce résultat est encore valable si l'on remplace ϕ_1, ϕ_2 par deux autres fonctions continues réelles ϕ'_1, ϕ'_2 vérifiant (13.7).

Soit maintenant $P(x, \tilde{D}_x, \lambda)$ un opérateur pseudodifférentiel analytique, classique formel défini près de (y_0, η_0) , alors nous avons vu dans la section 7 qu'il existe des opérateurs pseudodifférentiels de la même classe ; P_j , $j = 1, 2$ définis près de

$$\Lambda_{\phi_j} = \left\{ \left(x, \frac{2}{1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x) \right) ; x \in \bar{\Omega}_j \right\} \text{ (si } \Omega_1 \text{ est assez petit), tels que formellement}$$

$$P_1 T_1 = T_1 P, P_2 T_2 = T_2 P. \text{ De plus}$$

$$\left({}^t P_1(x, \tilde{D}_x, \lambda) - {}^t P_2(y, \tilde{D}_y, \lambda) \right) \left(g(x, y, \lambda) e^{\lambda \psi(x, y)} \right) = 0$$

formellement. Pour Ω_1 assez petit et P d'ordre 0 nous avons alors la

Proposition 13.2 : On réalise $P_j = P_{j, \phi_j, \chi_j, C_0}$ comme dans la section 12. Ici $C_0 > 0$ est fixée, et les fonctions $\chi_j \in C^\infty(\Omega_j \times \Omega_j)$ sont données par le Lemme 12.1 avec $C_2 = 2 C_1$ (pour se fixer les idées). Alors, si les constantes $C > 0, C_1 > 0$ sont assez petites, il existe une constante $C_3 > 0$, telle que :

$$\text{Si } \phi'_j, \phi''_j \in \text{Lip}(\bar{\Omega}_j) \text{ vérifient } |\nabla(\phi'_j - \phi_j)| \leq C, |\nabla(\phi''_j - \phi_j)| \leq C,$$

$$\text{Re } \psi + \phi'_1 + \phi'_2 - \min(C, \frac{C_0 C_1}{2} d(x, C\Omega_1)) \Big|_{\Delta} \leq 0, \text{ Re } \psi + \phi''_1 + \phi''_2 \Big|_{\Delta} \leq 0,$$

$$\text{Re } \psi + \phi'_1 + \phi''_2 \Big|_{\Delta} \leq 0 \text{ et si } U_j \in L^2_{\phi'_j}(\Omega_j), \bar{\partial} U_j \in L^2_{\phi''_j}(\Omega_j), \text{ alors}$$

$$(13.10) \quad \left| \langle P_1 U_1, U_2 \rangle - \langle U_1, P_2 U_2 \rangle \right| \\ C_3 \lambda^{n/2} \left(\|U_1\|_{\phi'_1} \|U_2\|_{\phi'_2} + \|\bar{\partial} U_1\|_{\phi''_1} \|U_2\|_{\phi'_2} + \|U_1\|_{\phi'_1} \|\bar{\partial} U_2\|_{\phi''_2} \right).$$

La constante C dépend de C_0 mais peut être choisie indépendante de Ω_1 et de x .

Démonstration : On écrit :

$$(13.11) \quad \begin{aligned} & \langle P_1 U_1, U_2 \rangle = \\ & = \iiint_{\Gamma_0} e^{\lambda\psi(x,z)} g(x,z,\lambda) \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n e^{i\lambda(x-\tilde{x})\theta} P_1(x,\theta,\lambda) x_1(x,\tilde{x}) U_1(\tilde{x},\lambda) \\ & \quad U_2(z,\lambda) dx dz d\tilde{x} d\theta . \end{aligned}$$

où Γ_0 est le contour donné par $(x,z) \in \Delta$, $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x) + i C_0 \frac{\overline{(x-\tilde{x})}}{|x-\tilde{x}|}$. Pour $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i(\pi-s)}$, $0 \leq s \leq \pi$ on pose $x_t = (1-t)x + t\tilde{x}$, $\tilde{x}_t = tx + (1-t)\tilde{x}$, et on remarque que $|x_t - \tilde{x}_t| = |x - \tilde{x}|$, $|x_t|^2 + |\tilde{x}_t|^2 = |x|^2 + |\tilde{x}|^2$, $|dx_t d\tilde{x}_t| = |dx d\tilde{x}|$. On introduit les contours

$$\Gamma_t : (x_t, z) \in \Delta, \quad \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x_t) + i C_0 \frac{\overline{(x-\tilde{x})}}{|x-\tilde{x}|} .$$

Puisque " $(x_t, z) \in \Delta$ " s'écrit aussi $z = f(x_t)$ et $|x_t - x| \leq |x - \tilde{x}|$, on peut associer à cette déformation un champ de déplacement $v = \mathcal{O}(|x - \tilde{x}|)$. L'intégrale (13.11) avec Γ_0 remplacé par Γ_1 est :

$$I = \iint_{(x,y) \in \Delta} U_1(x,\lambda) {}^tP_1(e^{\lambda\psi(\cdot,z)} g(\cdot,z,\lambda))(x) U_2(z,\lambda) dx dz$$

où tP_1 est une réalisation évidente du transposé formel de P_1 . Par la formule de Stokes (que l'on peut justifier avec des tronçures et régularisations de contours) on obtient

$$(13.12) \quad \begin{aligned} & \langle P_1 U_1, U_2 \rangle - I = \\ & = \int_0^1 dt \iiint_{\Gamma_t} e^{\lambda\psi(x,z) + i\lambda(x-\tilde{x})\theta} g(x,z,\lambda) \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n P_1(x,\theta,\lambda) (v \cdot \bar{\partial} (x_1(x,\tilde{x}) U_1(\tilde{x},\lambda) \\ & \quad U_2(z,\lambda) dx d\tilde{x} d\theta dy)) \\ & = \int_0^1 dt \iint e^{\lambda\psi(x,f(x_t)) + 2\lambda \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x_t)(x-\tilde{x}) - \lambda C_0 |x-\tilde{x}|} \left(\frac{\lambda}{|x-\tilde{x}|}\right)^n x \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(\lambda^{n/2}) d(x) \left| \frac{\partial}{\partial(x, \tilde{x}, z)} (x_1(x, \tilde{x}) U_1(\tilde{x}, \lambda) U_2(f(x_t), \lambda)) \right| L(dx d\tilde{x}) .$$

A cause de la dérivation du triple produit on obtient ensuite 3 termes que l'on peut traiter de la même manière. On se contente donc d'estimer le terme qui contient $|\bar{\partial} x_1|$. Puisque $d(x)|\bar{\partial} x_1| = \mathcal{O}(1)$ est à support dans $C_1 d(x) \leq |x - \tilde{x}| \leq C_2 d(x)$, on peut écrire ce terme (avec majorations uniformes en t) :

$$(13.13) \quad \text{II} = \iint k_t(x, \tilde{x}, \lambda) U_1'(\tilde{x}, \lambda) U_2'(f(x_t), \lambda) L(dx d\tilde{x}) ,$$

où $U_j' = e^{-\lambda \phi_j'}$, et

$$(13.14) \quad k_t(x, \tilde{x}, \lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{n/2}) \left| \frac{\lambda}{x - \tilde{x}} \right|^n \exp \lambda(\text{Re } \psi(x, f(x_t)) + 2 \text{Re } \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x_t)(x - \tilde{x}) - C_0 |x - \tilde{x}| + \phi_1'(\tilde{x}) + \phi_2'(f(x_t)))$$

est à support dans $|x - \tilde{x}| \in [C_1 d(x), C_2 d(x)]$. Maintenant $\phi_1'(x) + \phi_2'(f(x_t)) + \text{Re } \psi(x, f(x_t)) \leq \frac{C_0 C_1}{2} d(x) + \frac{C_0}{6} |x - \tilde{x}| \leq \frac{2C_0}{3} |x - \tilde{x}|$ sur $\text{supp } k_t$, si C et C_1 sont assez petits. L'exposant dans (13.14) est donc

$$\begin{aligned} &\leq \lambda(\phi_1'(\tilde{x}) - \phi_1'(x) + 2 \text{Re } \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x_t)(x - \tilde{x}) - \frac{C_0}{3} |x - \tilde{x}|) \\ &\leq -\lambda C_0 |x - \tilde{x}|/6 \end{aligned}$$

si C et C_1 sont assez petites. Donc

$$k_t(x, \tilde{x}, \lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{n/2}) \frac{\lambda^n}{|x - \tilde{x}|^n} e^{-\lambda C_0 |x - \tilde{x}|/6}$$

et les intégrales $\int |k_t(x, \tilde{x}, \lambda) L(dx)$ et $\int |\tilde{k}_t(x_t, \tilde{x}_t, \lambda) L(d\tilde{x}_t)$ sont donc uniformément $\mathcal{O}(\lambda^{n/2})$. Ici on a posé $\tilde{k}_t(x_t, \tilde{x}_t, \lambda) = k_t(x, \tilde{x}, \lambda)$.

On peut alors majorer l'intégrale (13.13) :

$$\begin{aligned}
 |II| &\leq \frac{T}{2} \iint |k_t(x, \tilde{x}, \lambda)| |U_1'(\tilde{x}, \lambda)|^2 L(dx d\tilde{x}) + \\
 &+ \frac{1}{2T} \iint |\tilde{k}_t(x_t, \tilde{x}_t, \lambda)| |U_2'(f(x_t))|^2 L(dx_t d\tilde{x}_t) \\
 &\leq \text{Const. } \lambda^{n/2} \left(\frac{T}{2} \|U_1'\|^2 + \frac{1}{2T} \|U_2'\|^2 \right)
 \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2 sans poids. Avec $T = \|U_1'\|^{-1} \|U_2'\|$ on trouve, $|II| \leq \text{const. } \lambda^{n/2} \|U_1'\| \cdot \|U_2'\|$. Les deux autres termes de (13.12) peuvent être estimés de la même manière, et on trouve que $|\langle P_1 U_1, U_2 \rangle - I|$ est majoré par le second membre de (13.10). De même on majore

$$\left| \langle U_1, P_2 U_2 \rangle - \iint_{\Delta} U_1 t_{P_2} (e^{\lambda\psi g}) U_2 dx dz \right|$$

et la majoration de

$$\left| \iint_{\Delta} U_1 (t_{P_1} - t_{P_2}) (e^{\lambda\psi g}) U_2 dx dz \right|$$

est encore plus facile puisque

$$\left| (t_{P_1} - t_{P_2}) (e^{\lambda\psi g}) \Big|_{\Delta} \right| \leq e^{\lambda \left(\text{Re } \psi(x, f(x)) - \min(C, \frac{C_0 C_1}{2} d(x)) \right)} \lambda^{n/2} . \quad \#$$

Nous allons utiliser notre produit scalaire pour établir une définition alternative du WF_a , proche d'une définition de O. Liess [Li]. Soient donc T_1, T_2 comme avant, W une petite boule centrée en $(y_0, -\tau_0)$ et

$$\Pi_{\alpha, \lambda}(x, y) = e^{i\lambda\phi(x, y, \alpha)} a(x, y, \alpha, \lambda)$$

une résolution de l'identité, définie pour $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ dans un voisinage de \bar{W} . Soit u une distribution définie dans un voisinage de y_0 , qui contient la projection de \bar{W} .

Alors $U(x, \lambda) = T_2 \int_{\alpha \in W} \Pi_{\alpha, \lambda} u d\alpha$ est bien définie dans un voisinage $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ de \bar{W}_2 ,

si W_2 est la projection dans \mathbb{C}_x^n de $\mathcal{H}_{T_2}(W)$. Alors $U \in H_{\tilde{\phi}_2}(\Omega_2)$ où $\tilde{\phi}_2 = \phi_2$ sur \bar{W}_2 , $\tilde{\phi}_2 < \phi_2$ dans $\Omega_2 \setminus \bar{W}_2$. Soient W_1, Ω_1 les ensembles correspondants associés à T_1 et

\langle, \rangle le produit scalaire associé. Quitte à prendre W assez petit on peut supposer que Ω_1 soit pseudoconvexe et même une boule.

Soit maintenant $\varphi \leq \Phi_1$ une fonction pl.s.h. de classe C^2 , définie dans un voisinage de $\bar{\Omega}_1$ et telle que $\varphi(x_0^1) = \Phi_1(x_0^1)$ où $x_0^1 \in \mathbb{C}^n$ est le point qui correspond à (y_0, η_0) par \mathcal{H}_{T_1} .

Proposition 13.3 : S'il existe $C > 0, \epsilon > 0$ telles que

$$|\langle u, U \rangle| \leq C e^{-\epsilon \lambda} \|u\|_{H_\varphi(\Omega_1)}, \quad u \in H_\varphi(\Omega_1),$$

alors $(y_0, -\eta_0) \notin WF_\alpha(u)$.

Démonstration : Pour $a > 0$, soit $\tilde{\varphi}_a$ le supremum des fonctions pl.s.h. sur Ω_1 plus petites où égales à $\min(\Phi_1, \varphi + a)$. Alors pour $a > 0$ assez petit nous avons $\tilde{\varphi}_a = \Phi_1$ dans la boule autour de x_0^1 de rayon $\delta_0 a$. Ici $\delta_0 > 0$ est une constante qui ne dépend pas de a . En effet, pour $|x| \leq \delta_0 a$, soit \mathcal{H}_x la transformation canonique avec $\mathcal{H}_x(x_0^1, \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x_0^1)) = (x, \frac{2}{T} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x))$ qui est de la forme $\mathcal{H}_T \circ \tilde{\mathcal{H}}_x \circ \mathcal{H}_T^{-1}$ où $\tilde{\mathcal{H}}_x$ est une translation. A l'aide du Lemme fondamental on montre alors que $\mathcal{H}_x(\Lambda_\varphi) = \Lambda_{\varphi_x}$, où $\varphi_x \leq \Phi$ est pl.s.h. et $\varphi_x(x) = \Phi(x)$. De plus, $\varphi_x = \varphi + \mathcal{O}(|x|) = \varphi + \mathcal{O}(\delta_0 a) \leq \varphi + a$ si δ_0 est assez petit.

Soit maintenant $\psi(x)$ une fonction pl.h. telle que $\psi(x) - \Phi_1(x) \sim -|x - x_0^1|^2$. Pour $r > 0$ petit, soit $x_r \in C_0^\infty(\{|x - x_0^1| < \delta_0 r\})$ telle que $x_r(x) = 1$ pour $|x - x_0^1| \leq \delta_0 r/2$. Alors, si $v \in H_\psi(\Omega_1)$ nous savons que

$$\begin{aligned} \|\bar{\partial} x_r v\|_{L_{\varphi_r}^2(\Omega_1)} &= \|v \bar{\partial} x_r\|_{L_{\Phi_1}^2(\Omega_1)} \\ &\leq \mathcal{O}(e^{-Cr^2 \lambda} \|v\|_{H_\psi(\Omega_1)}) . \end{aligned}$$

D'AUTRES PRÉPARATIONS

Il existe donc $w \in L^2_{\tilde{\varphi}_r}(\Omega_1)$ telle que $\bar{\partial} w = \bar{\partial} x_r v$, $\|w\|_{L^2_{\tilde{\varphi}_r}} \leq \mathcal{O}(e^{-Cr^2\lambda} \|v\|_{L^2_{\psi}})$.
 Alors $x_r v - w \in H^2_{\tilde{\varphi}_r}(\Omega_1)$ et $\|x_r v - w\|_{H^2_{\tilde{\varphi}_r}(\Omega_1)} \leq \mathcal{O}(1) \|v\|_{H^1_{\psi}(\Omega_1)}$. Maintenant $v - x_r v$
 est à décroissance exponentielle dans $L^2_{\phi_1}(\Omega_1)$. Plus précisément

$$\langle v, U_2 \rangle = \langle x_r v, U_2 \rangle + \mathcal{O}(e^{-Cr^2\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}(\Omega_1)})$$

où pour simplifier les formules, on suppose que $\|U_2\|_{H_{\phi_2}} = \mathcal{O}(\lambda^{-n/2})$. D'autre part,

$$\langle x_r v, U_2 \rangle = \langle x_r v - w, U_2 \rangle + \langle w, U_2 \rangle,$$

et puisque $w = \mathcal{O}(e^{-Cr^2\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}})$ dans $L^2_{\phi_1} \supset L^2_{\tilde{\varphi}_r}$ on a $\langle w, U_2 \rangle = \mathcal{O}(e^{-Cr^2\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}})$.
 Puisque $\tilde{\varphi}_r \leq \varphi + r$ on a $\|x_r v - w\|_{H^1_{\psi}} = \mathcal{O}(e^{r\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}})$ et donc par notre hypothèse de départ,

$$\langle x_r v - w, U_2 \rangle = \mathcal{O}(e^{(r-\varepsilon)\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}}).$$

Avec $r = \varepsilon/2$, $\hat{\varepsilon} = \min(\varepsilon/2, C(\varepsilon/2)^2)$ on obtient alors

$$(13.15) \quad \langle v, U_2 \rangle = \mathcal{O}(e^{-\hat{\varepsilon}\lambda} \|v\|_{H^1_{\psi}(\Omega)})$$

Si $\psi = \text{Re } f$, où f est holomorphe, on peut prendre $v = a(x, \lambda) e^{\lambda f}$, où a est un symbole analytique classique elliptique. Alors il est facile de voir que $v \equiv T_1^{\hat{v}}$ où $\hat{v}(y, \lambda) = \hat{a}(y, \lambda) e^{i\lambda \tilde{f}}$ avec $\text{Im } \tilde{f} \sim |y - y_0|^2$ dans le domaine réel. De plus, modulo un terme exponentiellement petit,

$$\langle v, U_2 \rangle \equiv \int \hat{v}(y, \lambda) u(y) dy$$

et cette dernière intégrale est donc à décroissance exponentielle. Ceci est pratiquement la définition du fait que $(y_0, -n_0) \notin WF_a(u)$. Pour terminer la démonstration il suffit de faire varier \tilde{f} légèrement d'un paramètre α proche de $(y_0, -n_0)$. L'intégrale correspondante $\int \hat{v}(y, \alpha, \lambda) u(y) dy$ est toujours à décroissance exponentielle

puisque (13.15) nous laisse une marge. $\#$

Pour terminer cette section, on fait quelques précisions sur la transformée de Fourier. Soit $\varphi \in C^2$ pl.s.h. définie près de 0 dans \mathbb{C}^n et supposons que

$$(13.16) \quad \varphi(0) = 0, \quad \nabla\varphi(0) = 0, \quad \nabla_x^2 \varphi(0) \Big|_{\mathbb{R}^n} < 0.$$

Pour $\xi \in \mathbb{C}^n$ voisin de 0 on pose $\varphi^*(\xi) = v.c._\xi(\varphi(x) + \text{Im } x\xi)$ et on remarque que φ^* vérifie aussi (13.16). En effet pour x, ξ réels et proches de 0, on a $\varphi(x) + \text{Im } x\xi \leq 0$ et $|\nabla_x(\varphi(x) + \text{Im } x\xi)| \sim |x| + |\xi|$. Donc, si $x(\xi) \in \mathbb{C}^n$ est le point critique de $x \rightarrow \varphi(x) + \text{Im } x\xi$, on voit que $|\text{Im } x(\xi)| \sim |\xi|$ quand ξ est réel. Utilisant que $\nabla_x^2 \varphi \Big|_{\mathbb{R}^n} > 0$ on obtient $\varphi^*(\xi) \leq -\frac{1}{C} |\text{Im } x(\xi)|^2 \leq -\frac{1}{C} |\xi|^2$ pour ξ réel et donc que $\nabla_\xi^2 \varphi^*(0) \Big|_{\mathbb{R}^n} < 0$. c.q.f.d.

Soient $B_{\mathbb{C}^n}(0, r)$, $B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ les boules ouvertes centrées en 0 de rayon r dans \mathbb{C}^n et \mathbb{R}^n respectivement. Pour $r_1 > 0$ petit et $u \in H_\varphi(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_1))$ on pose

$$(13.17) \quad \mathcal{F}u(\xi, \lambda) = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1/2)} e^{-i\lambda x\xi} u(x, \lambda) dx.$$

Si $r_2 > 0$ est assez petit on constate comme dans la section 3, que $\mathcal{F}u \in H_{\varphi^*}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_2))$ et même que

$$(13.18) \quad \|\mathcal{F}u\|_{H_{\varphi^*}(r_2)} \leq C \lambda^{-n/2} \|u\|_{H_\varphi(r_1)},$$

pour les normes correspondantes. En effet, modulo une erreur exponentiellement petite on peut déformer le contour en $x(\xi) + B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1/2)$. Pour $v \in H_{\varphi^*}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_2))$ on pose de la même manière

$$(13.19) \quad \mathcal{G}v(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2/2)} e^{i\lambda x\xi} v(\xi, \lambda) d\xi,$$

et alors pour $r_3 > 0$ assez petit (en fonction de r_2) on a $\mathcal{G}v \in H_\varphi(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_3))$ et

D'AUTRES PRÉPARATIONS

$$(13.20) \quad \| \mathcal{G} v \|_{H_\varphi(r_3)} \leq c \cdot \lambda^{n/2} \| v \|_{H_{\varphi^*}(r_2)}$$

Proposition 13.4 : Choisissant successivement $r_1, r_2, r_3 < r_1$ assez petits, on a pour toute $u \in H_\varphi(B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1))$:

$$(13.21) \quad u = \mathcal{G} \mathcal{F} u + w \quad \text{dans } B_{\mathbb{R}^n}(0, r_3) \quad ,$$

où

$$(13.22) \quad \| w \|_{H_\varphi(r_3)} \leq C \cdot e^{-\lambda/C} \| u \|_{H_\varphi(r_2)} \quad .$$

Ici les constantes r_1, r_2, r_3, C peuvent être choisies indépendantes de φ , si φ varie dans un compact de $C^2(\Omega)$, où Ω est un voisinage de 0 (et si φ vérifie (13.16)).

Démonstration : Dans l'intégrale

$$\mathcal{G} \mathcal{F} u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\substack{\eta \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2/2) \\ y \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1/2)}} e^{i(x-y)\eta} u(y, \lambda) dy d\eta$$

on déforme d'abord le contour en η en un "bon contour" $\Gamma^*(x)$ avec le même bord que $B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2/2)$ le long duquel on a

$$\varphi^*(\eta) - \text{Im } x\eta \leq \varphi(x) - C |x-\eta(x)|^2$$

où $\eta(x)$ est le point critique pour $\eta \rightarrow \varphi^*(\eta) - \text{Im } x\eta$. Ensuite pour chaque $\eta \in \Gamma^*(x)$ on déforme $B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1/2)$, sans bouger le bord, en un bon contour $\Gamma(\eta)$ le long duquel

$$\varphi(y) + \text{Im } y\eta \leq \varphi^*(\eta) - C |y-\eta(\eta)|^2.$$

On obtient alors un bon contour pour $(y, \eta) \rightarrow \varphi(y) - \text{Im } (x-y)\eta$ et après des déformations supplémentaires on se ramène (modulo une erreur exponentiellement petite) à un contour régulier standard pour lequel on peut appliquer l'exemple 2.6 où bien le Lemme 12.7, pour conclure.

#

14. UN RÉSULTAT GÉNÉRAL SUR LA PROPAGATION DES SINGULARITÉS

Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques défini près d'un point $y_0 \in \mathbb{R}^n$, soit $Q = {}^tP$ et p, q les symboles principaux de P, Q . On fixe un point $(y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, où $p(y_0, \eta_0) = 0$ et on s'intéresse à la propagation des singularités analytiques près de $(y_0, -\eta_0)$ pour une distribution u définie près de y_0 , telle que $(y_0, -\eta_0) \notin WF_a(Pu)$. On introduit pour cela une condition qui porte sur Q .

Soit $\Lambda \leq T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ un germe de variété I-Lagrangienne en (y_0, η_0) , on désigne par $\Lambda_{\mathbb{R}}$ les points de $\Lambda \cap T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ qui correspondent aux points avec $\varphi_0 = \Phi$ après une transformation canonique associée à une transformation de FBI qui transforme $T^*\mathbb{R}^n$ en Λ_{Φ} , Λ en Λ_{φ_0} avec $\varphi_0 \leq \Phi$, $\varphi_0(x_0) = \Phi(x_0)$. (Ici x_0 est le point qui correspond à (y_0, η_0)). Soit $r(x, \xi)$ une fonction réelle et analytique définie près de (y_0, η_0) avec $r(y_0, \eta_0) = 0$. On fait l'hypothèse de non-microcaractéristicité suivante :

(H) Il existe $\theta \in [0, \pi]$, $\varepsilon > 0$ et un voisinage complexe V de (y_0, η_0) tels que

$$q(\exp(i\theta t H_r)(x, \xi) + (y, \eta)) \neq 0 \text{ pour } 0 < t \leq \varepsilon ,$$

$$(x, \xi) \in V \cap \Lambda , (y, \eta) \in \mathbb{C}^{2n} \text{ avec } |(y, \eta)| \leq \varepsilon t .$$

Ici, après une petite perturbation de θ , on peut toujours supposer que $\theta \in]0, \pi[$. Le résultat principal, qui a été obtenu par N. Hanges-J. Sjöstrand [Ha-Sj] dans le cas \mathbb{C} -Lagrangien, est alors :

Théorème 14.1 : On suppose (H). Soit $u(y)$ une distribution définie près de y_0 telle que $(y_0, -\eta_0) \notin WF_a(Pu)$ et $V'_{\mathbb{R}} \cap \Lambda'_{\mathbb{R}} \cap \{(y, \eta) ; r(y, -\eta) > 0\} \cap WF_a(u) = \emptyset$, où $V'_{\mathbb{R}}$ est un voisinage réel de (y_0, η_0) . Alors $(y_0, \eta_0) \notin WF_a(u)$.

Ici on écrit en général $K' = \{(y, \eta) ; (y, \eta) \in K\}$. Le reste de cette section est consacré à la démonstration du Théorème 14.1, qui est techniquement plus compliquée que celle du résultat correspondant dans Hanges-Sjöstrand [Ha-Sj], mais qui est basée sur les mêmes idées.

PROPAGATION DES SINGULARITÉS

Nous allons d'abord "convexifier" la surface $r = 0$, en posant

$$r_\delta(y, \eta) = r(y, \eta) + \frac{\delta^3}{2} - \delta((y-y_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2),$$

où $\delta > 0$ est à choisir assez petit, pour que (H) reste valable avec r remplacé par r_δ et $\bar{W} \subset V_{\mathbb{R}}$, si $W = \{(y, \eta) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0 ; (y-y_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2 < \delta^2\}$. Alors

$$(14.1) \quad WF_a(u) \cap \Lambda'_R \cap \partial W' \cap \{(x, \xi) ; r_\delta(x, -\xi) \geq 0\} = \emptyset,$$

puisque $r_\delta < r$ sur ∂W . On remarque aussi que $r_\delta(y_0, \eta_0) > 0$. Ecrivant $r_1 = r_\delta$ on rajoute $n-1$ fonctions réelles et analytiques r_2, \dots, r_n telles que dr_1, \dots, dr_n sont indépendantes, $\{r_j, r_k\} = 0, \forall j, k$ et $r_2(y_0, \eta_0) = \dots = r_n(y_0, \eta_0) = 0$. Ceci peut être fait de telle manière que les r_1, \dots, r_n soient des fonctions analytiques de δ . Pour $t \in \mathbb{C}^n$ assez petit on introduit la variété I-Lagrangienne

$$\Lambda_t = \exp t_1 H_{r_1} \circ \dots \circ \exp t_n H_{r_n} (\Lambda).$$

Soit maintenant T une transformation de FBI définie dans un voisinage de (y_0, η_0) avec transformation canonique \mathcal{X}_T , on écrit $(x_0, \xi_0) = \mathcal{X}_T(y_0, \eta_0)$, $\Lambda_\phi = \mathcal{X}_T(T^*\mathbb{R}^n)$, $\Lambda_{\varphi_0} = \mathcal{X}_T(\Lambda)$ où ϕ est strictement pl.s.h., φ_0 est pl.s.h., $\varphi_0(x) \leq \phi(x)$ avec égalité en x_0 . Soient $\tilde{r}_j = r_j \circ \mathcal{X}_T^{-1}$, $\tilde{\lambda}_t = \mathcal{X}_T(\Lambda_t)$. Alors $\tilde{\lambda}_t = \Lambda_{\varphi_t}$ où $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ résoud le problème

$$(14.2) \quad \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}_j} + \tilde{r}_j(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}}) = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$(14.3) \quad \varphi(0, x) = \varphi_0(x).$$

Ici (14.2) consiste de $2n$ équations réelles, en involution pour $\text{Im } \sigma$, ce qui entraîne l'existence et l'unicité locale de φ . En plus la variété I-Lagrangienne $\Lambda_\varphi = \left\{ (t, x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \right\}$ est feuilletée par les variétés intégrales (pour la géométrie \mathbb{C} -symplectique) de $\{H_{f_1}, \dots, H_{f_n}\}$, où $f_j = r_j + \tilde{r}_j(x, \xi)$. Ces feuilles sont évidemment de dimension complexe n .

Lemme 14.2 : La fonction φ est pluri-sous-harmonique et la matrice de Levi :

$$\mathcal{L}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{t}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \bar{x}} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \bar{t}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \bar{x}} \end{pmatrix}$$

est partout de rang $\leq n$.

Démonstration : \mathcal{L}_φ mesure la \mathbb{C} -linéarité de $T\Lambda_\varphi$ et il est clair que les vecteurs tangents des projections dans $\mathbb{C}^{2n}_{(t,x)}$ des feuilles intégrales de $\{H_{f_1}, \dots, H_{f_n}\}$ sont dans le noyau de ${}^t\mathcal{L}_\varphi$. Donc le rang de \mathcal{L}_φ est au plus n . Ce rang est également constant sur la projection de chaque feuille. Pour montrer la pluri-sous-harmonicité il suffit alors de le faire en un point de chaque feuille et on prendra celui avec $t = 0$. Si $v \in \mathbb{C}^{2n}$ est un vecteur tangent arbitraire dans un tel point on décompose $v = v' + v''$ où v' est tangent à $t = 0$ et v'' est tangent à la projection de la feuille. Alors $v'' \in \text{Ker } {}^t\mathcal{L}_\varphi$ et donc $\langle v, \mathcal{L}_\varphi \bar{v} \rangle = \langle v', \mathcal{L}_{\varphi_0} \bar{v}' \rangle \geq 0$, ce qui montre que φ est pluri-sous-harmonique.

Séparant (14.2) en parties réelles et imaginaires on obtient

$$(14.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \text{Im } t_j} = \text{Re } \tilde{\gamma}_j(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \text{Re } t_j} = \text{Im } \tilde{\gamma}_j(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \end{array} \right. ,$$

donc

$$(14.5) \quad \begin{aligned} \varphi(t,x) &= \varphi_0(x) + \langle \tilde{\gamma}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)), \text{Im } t \rangle + \mathcal{O}(|\varphi_0 - \varphi|^{1/2} |t| + |t|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2} \varphi(x) + \langle \tilde{\gamma}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}), \text{Im } t \rangle + \mathcal{O}(|t|^2) . \end{aligned}$$

Avec $\theta \in]0, \pi[$ comme dans l'hypothèse (H) on pose

$$\Gamma_{\varepsilon_0} = \left\{ t \in \mathbb{C}^n ; t_1 = e^{i\theta} s, 0 < s \leq \varepsilon_0, t' \in \mathbb{R}^{n-1}, |t'| \leq \varepsilon_0 |t_1| \right\} .$$

PROPAGATION DES SINGULARITÉS

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ une petite boule ouverte centrée en x_0 . Prenant Ω suffisamment petit on peut rendre la norme de $\varphi_0 - \phi$ dans $C^1(\bar{\Omega})$ aussi petite que l'on veut. Soit Q l'image de Q par T , que l'on réalise sur $H_\phi(\Omega)$ comme dans la section 12. Alors si Ω et ε_0 sont assez petits on a le :

Lemme 14.3 : Pour tout $t \in \Gamma_{\varepsilon_0}$ et toute $v \in H_{\varphi_t}(\Omega)$, il existe $\tilde{v} \in H_{\varphi_t}^{M_t}(\Omega)$, $w \in L_{\widehat{\varphi}_t}^{2, M_t}(\Omega)$ telles que pour $\lambda \geq 1$:

$$(14.6) \quad \tilde{Q}v = v + w$$

$$(14.7) \quad \|\tilde{v}\|_{H_{\varphi_t}^{M_t}} \leq C_t \lambda^{M_t} \|v\|_{H_{\varphi_t}}$$

$$(14.8) \quad \|w\|_{L_{\widehat{\varphi}_t}^{2, M_t}} \leq C_t \lambda^{M_t} \|v\|_{H_{\varphi_t}} .$$

Ici C_t, M_t sont des fonctions croissantes de $1/|t_1|$ et $\widehat{\varphi}_t = \varphi_t - |t_1|C d(x, C\Omega)$, où $C > 0$ est indépendante de t .

Démonstration : On peut supposer que $x_0 = 0$ et on pose alors $\varphi_{t,s}(x) = \varphi_t(x) - s(R-|x|)^2$, où R est le rayon de Ω . Alors le symbole principal de \tilde{Q} est $\neq 0$ sur $\Lambda_{\varphi_{t,s}} \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{C}_\xi^n)$, si $t \in \Gamma_{\varepsilon_0}$, $0 \leq s \leq a|t_1|$, si $a > 0$ est assez petit et il suffit d'appliquer le Théorème 12.11 pour conclure. $\#$

Soit $\tilde{W} \subset \mathbb{C}_x^n$ la projection de $\mathcal{X}_T(W)$ (où l'on rappelle que W est la boule de rayon δ autour de (y_0, n_0)). Si $\delta > 0$ est assez petit en fonction de Ω ,

$$(14.9) \quad WF_a(Pu) \cap \overline{\tilde{W}} = \emptyset ,$$

$$(14.10) \quad \tilde{W} \subset \subset \Omega \text{ et } \widehat{\varphi}_t < \phi \text{ sur } \overline{\tilde{W}} \text{ pour } t \in \Gamma_{\varepsilon_0} .$$

Ceci est possible car (14.5) montre que $\varphi_t(x) \leq \phi + \mathcal{O}(\delta|t_1| + |t_1|^2)$ dans une boule autour de x_0 , de rayon proportionnel à δ .

Soit $\pi_{\alpha,\lambda}$ une résolution de l'identité définie pour α dans un voisinage de \bar{W}' et rappelons que $[P, \pi_{\alpha,\lambda}]d\alpha \equiv d_\alpha \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}$ modulo un opérateur à noyau exponentiellement petit dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, où $\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}$ est une famille Fourier intégrale avec les mêmes phases que $\pi_{\alpha,\lambda}$. Soit $U = \int_{W'} \pi_{\alpha,\lambda} u d\alpha$, $U' = T'U$, où T' est une transformation de FBI, définie microlocalement dans un voisinage de $(y_0, -\eta_0)$. Soit ϕ' la fonction poids associée à T' et $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$ l'ouvert qui correspond à Ω via $\mathcal{H}_{T'}$, $\circ \mathcal{H}_{T'}^{-1}$. Alors $U' \in H_\psi(\Omega')$, où ψ est une fonction continue réelle sur $\bar{\Omega}'$, $= \phi'$ dans \bar{W}' et $< \phi'$ dans $\bar{\Omega}' \setminus \bar{W}'$. Ici \tilde{W}' désigne la projection de $\mathcal{H}_{T'}(W')$. Par $< , >$ on désigne le produit scalaire, défini dans la section précédente, avec $(T_1, T_2, \Omega_1, \Omega_2) = (T, T', \Omega, \Omega')$.

Si $\delta > 0$ est assez petit et $\varepsilon_0 > 0$ assez petit en fonction de δ nous avons :

Proposition 14.4 : Pour $t \in \Gamma_{\varepsilon_0}$, $v \in H_{\varphi_t}(\Omega)$,

$$(14.11) \quad | \langle v, U' \rangle | \leq C_t \lambda^{M_t} \| v \|_{H_{\varphi_t}}$$

Ici C_t, M_t sont des fonctions croissantes de $1/|t_1|$.

Démonstration : Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, égale à 1 dans un voisinage de \bar{W}' . Si " \equiv " dénote "égalité modulo un terme majorable par le second membre de (14.11), on a $\langle v, U' \rangle \equiv \langle v, \chi U' \rangle \equiv \langle \tilde{Q}\tilde{v}, \chi U' \rangle$. Du fait que $\chi U'$ est à support compact, on peut appliquer la Proposition 13.2 avec $\phi_1' = \varphi_t$, $U_1 = \tilde{v} \in H_{\phi_1'}^N(\Omega)$ (à la place de $H_{\phi_1'}(\Omega)$) ; $\phi_2' = \psi$ et ϕ_2'' convenable, pour conclure que

$$\langle \tilde{Q}\tilde{v}, \chi U' \rangle \equiv \langle \tilde{v}, \tilde{P}\chi U' \rangle \equiv \langle \tilde{v}, \chi \tilde{P}U' \rangle ,$$

où \tilde{P} est l'image de P par T' , réalisé dans $H_{\phi_1'}(\Omega')$ comme dans la section 12. De plus

$$(14.12) \quad \langle \tilde{v}, \chi \tilde{P}U' \rangle \equiv \langle \tilde{v}, \chi T'P \int_{\alpha \in W'} \pi_{\alpha,\lambda} u d\alpha \rangle \equiv \int_{\partial W'} \langle \tilde{v}, \chi T' \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda} u \rangle .$$

PROPAGATION DES SINGULARITÉS

Si $x'_\alpha \in \Omega'$ est le point qui correspond à α , alors $T' \tilde{\Pi}_{\alpha, \lambda} u \in H_{\phi'_\alpha}$ où $\phi'_\alpha(x) \leq \phi'(x) - C|x-x'_\alpha|^2$, et pour majorer la dernière intégrale de (14.12) on distingue entre deux cas :

I, Si α est dans un voisinage de $\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \partial W' \cap \{r_1 \geq 0\}'$, alors $\alpha \notin WF_a(u)$ par hypothèse et on obtient uniformément en α :

$$(14.13) \quad \langle \tilde{V}, \chi T' \tilde{\Pi}_{\alpha, \lambda} u \rangle \equiv 0 .$$

II, Si α est dans un compact de $(\partial W' \setminus \Lambda_{\mathbb{R}}^1) \cup (\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \partial W' \cap \{r_1 < 0\}')$. Alors pour r, ε_0 assez petits, $t \in \Gamma_\varepsilon$, $|x-x(\alpha)| \leq r$ on a $\varphi_t(x) \leq \phi(x)$. Ici $x(\alpha)$ dénote la projection de $\mathcal{X}_T(\alpha_x, -\alpha_\xi)$. Alors on a encore (14.13). $\#$

Soit $r_0 > 0$ un nombre assez petit pour que $\varphi(t, x)$ soit bien définie dans un voisinage de $\{t \in \mathbb{C}^n ; |t| \leq r_0\} \times \bar{\Omega}$. Pour $v \in H_\varphi(\{ |t| < r_0 \} \times \Omega)$, considérons la fonction $f(t, \lambda) = \langle v_t, U' \rangle$, $v_t = v(t, x, \lambda)$, qui est holomorphe en t . Nous avons le résultat suivant pour r_0 et Ω assez petits, $\delta > 0$ assez petit en fonction de Ω :

Proposition 14.5 : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r_\varepsilon > 0, C_\varepsilon > 0$ telles que

$$(14.14) \quad |f(t, \lambda)| \leq C_\varepsilon \lambda^{C_\varepsilon} e^{\varepsilon \lambda \operatorname{Im} t_1} \|v\|_{H_\varphi(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_\varepsilon) \times \Omega)} ,$$

pour toute $v \in H_\varphi(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_\varepsilon) \times \Omega)$, quand $\operatorname{Im} t_1 \geq 0, \operatorname{Im} t' = 0, |t_1| \leq r_\varepsilon, |t'| \leq r_\varepsilon$.

Démonstration : Pour t' réel et $|t| \leq r_0/2$, on a

$$(14.15) \quad |f(t, \lambda)| \leq C_0 \lambda^{C_0} e^{\lambda C_0 |\operatorname{Im} t_1|} \|v\|_{H_\varphi}$$

D'autre part, si $\theta \in]0, \pi[$ est donné par (H) et $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, nous avons pour $\rho > 0, \arg t_1 = \theta, t' \in \mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon_0 \geq |t_1| \geq \rho \geq |t'|/\varepsilon_0$, l'inégalité

$$(14.16) \quad |f(t, \lambda)| \leq C_\rho \lambda^{C_\rho} \|v\|_{H_\varphi}$$

Ici on peut supposer que $C_\rho \geq C_0$, et on pose alors

$$(14.17) \quad h_\rho(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{|f(t, \lambda)|}{C_\rho \lambda^\rho \|v\|_{H_\varphi}} .$$

Alors (14.15) entraîne que $h_\rho(t, \lambda) \leq C_0 \operatorname{Im} t_1$, pour $\operatorname{Im} t_1 \geq 0$, t' réel, et (14.16) montre que $h_\rho(t, \lambda) \leq 0$ pour $\rho \leq |t_1| \leq \varepsilon_0$, $|t'| \leq \varepsilon_0 \rho$, $\arg t_1 = \theta$, $t' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Pour $t' \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixé avec $|t'| \leq \varepsilon_0 \rho$, on pose $t_1 = \rho e^{i\theta} + w$ et en imitant la démonstration du Théorème de Phragmen-Lindelöf on va établir des majorations séparément dans les secteurs I : $\arg w \in [0, \theta]$, II : $\arg w \in [\theta, \pi]$. Avec $\rho \leq \varepsilon_0/2$ on considère dans $I \cap \{|w| \leq \varepsilon_0/2\}$ la fonction $h_\rho(t, \lambda) - C_0 \rho \sin \theta - C_1 \operatorname{Im} w^\alpha = g_\rho$, où $1 < \alpha < \pi/\theta$. Alors avec $C_1 > 0$ assez grande, on obtient $g_\rho \leq 0$ sur la frontière et donc à l'intérieur par le principe du maximum. D'autre part, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\tau_{\varepsilon'} > 0$ tel que $C_1 \operatorname{Im} w^\alpha \leq \varepsilon' \operatorname{Im} w$, pour $|w| \leq \tau_{\varepsilon'}$, $\arg w \in [0, \theta]$. Alors $h_\rho(t, \lambda) \leq C_0 \rho \sin \theta + \varepsilon' \operatorname{Im} w$, pour ces valeurs de w , et une modification de cet argument donne le même résultat pour $\arg w \in [\theta, \pi]$. Donc pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\tau_{\varepsilon'} > 0$ indépendant de ρ tel que

$$(14.18) \quad h_\rho(t, \lambda) \leq C_0 \rho \sin \theta + \varepsilon' \operatorname{Im} t_1 ,$$

pour t' réel, $|t'| \leq \varepsilon_0 \rho$, $t_1 = \rho e^{i\theta} + w$, avec $\operatorname{Im} w \geq 0$, $|w| \geq \tau_{\varepsilon'}$.

Nous allons fixer d'abord ε' et ensuite ρ , en particulier on s'arrangera pour que $\rho < \tau_{\varepsilon'}$. Posant $\tilde{\tau}_{\varepsilon'} = \frac{1}{2} \tau_{\varepsilon'}$, on obtient alors (14.18) pour t' réel, $|t'| \leq \varepsilon_0 \rho$, $\operatorname{Im} t_1 \geq 0$, $|t_1| \leq \tilde{\tau}_{\varepsilon'}$. Rappelons que $h_\rho \leq 0$ pour t réel. Si $\mu_{\varepsilon'}(t_1)$ est la fonction harmonique dans le demi-disque $\operatorname{Im} t_1 \geq 0$, $|t_1| \leq \tilde{\tau}_{\varepsilon'}$, qui vaut 1 sur $|t_1| = \tilde{\tau}_{\varepsilon'}$, et 0 sur $\operatorname{Im} t_1 = 0$, on a $\mu_{\varepsilon'}(t_1) \leq \frac{C_2}{\tilde{\tau}_{\varepsilon'}} \operatorname{Im} t_1$ dans le demi-disque concentrique de rayon $\frac{1}{2} \tilde{\tau}_{\varepsilon'}$. Ici C_2 est une constante universelle. Le principe du maximum montre alors que

$$h_\rho(t, \lambda) \leq (C_3 \rho \sin \theta + \varepsilon' \frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}) \mu_\varepsilon(t_1) \leq \\ \leq \frac{C_3 \rho}{\frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}} \operatorname{Im} t_1 + C_2 \varepsilon' \operatorname{Im} t_1 ,$$

sur le demi-disque de rayon $\frac{1}{2} \frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit d'abord $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2C_2}$ et ensuite $\rho \leq \frac{\varepsilon \frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}}{2C_3}$. Alors $h_\rho(t, \lambda) \leq \varepsilon \operatorname{Im} t_1$, pour t_1 dans le demi-disque de rayon $\frac{1}{2} \frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}$, t' réel, $|t'| \leq \varepsilon_0 \rho$. $\#$

Il reste à faire un argument de superposition. Soit $f(t)$ la fonction réelle et linéaire sur \mathbb{C}^n donnée par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}}(0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{t}}(0) = 0 ,$$

c.a.d.

$$\frac{\partial f}{\partial \operatorname{Im} t} = - \operatorname{Re} \tilde{r}(x_0, \xi_0) , \quad \frac{\partial f}{\partial \operatorname{Re} t} = - \operatorname{Im} \tilde{r}(x_0, \xi_0) = 0 .$$

D'après le choix de $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_n)$ qui a été fait, on a $f = -a \operatorname{Im} t_1$, $a > 0$. Pour $C > 0$ assez grand, on pose

$$\psi(t, x) = \varphi(t, x) + f(t) - C \operatorname{Re}(t^2) .$$

Alors ψ est pluri-sous-harmonique et $\nabla_t^2 \psi$ est non-dégénérée de signature 0. Donc par le Lemme fondamental $\psi_0^*(x) = v.c. \psi(t, x)$ est aussi une fonction pl.s.h. et on rappelle que ψ_0^* est donnée par une formule de mini-max avec une famille de contours dont fait partie \mathbb{R}_t^n . (On suppose ici, pour éviter des difficultés globales, que Ω, r_0 sont petits et que r_0 est grand par rapport à Ω).

Lemme 14.6 : On a $\psi_0^*(x) \leq \phi(x)$ avec égalité si et seulement si $\varphi_0(x) = \phi(x)$ et $\tilde{r}(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)) = \tilde{r}(x_0, \xi_0)$.

Démonstration : La formule de mini-max montre que

$$\psi_0(x) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \varphi(t, x) + f(t) - C \operatorname{Re}(t^2) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \varphi(t, x) - C t^2$$

avec égalité si et seulement si le point critique est réel. Puisque $\varphi(t, x) \leq \phi(x)$ pour t réel on a bien $\psi_0^*(x) \leq \phi(x)$ et pour avoir égalité il faut que $t = 0$ soit un point critique et $\varphi_0(x) = \phi(x)$, ce qui est justement la condition dans le Lemme.

Proposition 14.7 : Fixant d'abord $r_0 > 0$ et ensuite Ω assez petits on a pour toute $v_0^* \in H_{\psi_0^*}(\Omega)$ deux fonctions $\tilde{v} \in H_{\psi}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_0) \times \Omega)$, $w \in H_{\psi_0^*}(\Omega)$ telles que

$$(14.19) \quad v_0^*(x, \lambda) = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_0/2)} \tilde{v}(t, x, \lambda) dt + w,$$

et

$$(14.20) \quad \|w\|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)} \leq C e^{-\lambda/C} \|v_0^*\|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)}$$

$$\|\tilde{v}\|_{H_{\psi}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_0) \times \Omega)} \leq C \lambda^{3n/2} \|v_0^*\|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)}$$

Ici $r_0, \Omega, C > 0$ sont indépendants du paramètre δ introduit au début de cette section, pourvu que ce paramètre reste assez petit.

Démonstration : Soit $\psi^*(\tau, x) = \operatorname{v.c.}_t(\psi(t, x) + \operatorname{Im} t \cdot \tau)$ qui est une fonction pl.s.h. définie dans un voisinage de $B_{\mathbb{C}^n}(0, r_1) \times \Omega$, $r_1 > 0$. Si $v_0^*(x, \lambda) \in H_{\psi_0^*}(\Omega)$ on peut étendre cette fonction en une variable \tilde{a} la fois résolvant chaque fois un problème de $\bar{\partial}$, jusqu'à une fonction $v^*(\tau, x, \lambda) \in H_{\psi^*}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_1) \times \Omega)$, telle que

$$v^*(0, x, \lambda) = v_0^*(x, \lambda), \quad \|v^*\|_{H_{\psi^*}} \leq C \cdot \lambda^n \|v_0^*\|_{H_{\psi_0^*}}.$$

Ici $r_1 > 0$ est supposé assez petit, mais on peut encore diminuer Ω sans changer r_1 . On pose ensuite

PROPAGATION DES SINGULARITÉS

$$\tilde{v}(t, x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1/2)} e^{it\tau} v^*(\tau, x, \lambda) d\tau \in H_{\psi}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_0) \times \Omega) .$$

Choisissant d'abord $r_0 > 0$ et ensuite Ω assez petits, la Proposition 13.5 nous permet de conclure.

#

Proposition 14.8 : Fixant successivement $r_0 > 0, \Omega, \delta$ (comme au début de cette section) assez petits, on a des constantes $C > 0, \epsilon > 0$ telles que

$$(14.21) \quad | \langle v_0^*, U' \rangle | \leq C e^{-\epsilon\lambda} \| v_0^* \|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)}$$

pour $\forall v_0^* \in H_{\psi_0^*}(\Omega) .$

Le Théorème 14.1 résulte des Propositions 14.8 et 13.4 et le Lemme 14.6.

Démonstration de la Proposition 14.8 : Pour $v_0^* \in H_{\psi_0^*}(\Omega)$, soit \tilde{v} comme dans la Proposition 14.7. Ecrivant

$$\tilde{v} = v(t, x, \lambda) \cdot e^{\lambda(F(t) - Ct^2)}$$

où $F(t) = -a \frac{t_1}{t}$ est la fonction complexe linéaire avec $\text{Re } F = f$, il suffit alors de montrer (14.21) avec v_0^* remplacée par

$$h = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_0/2)} v(t, x, \lambda) e^{\lambda(F(t) - Ct^2)} dt .$$

On a $\| v \|_{H_{\psi}(B_{\mathbb{C}^n}(0, r_0) \times \Omega)} \leq C \cdot \lambda^{3n/2} \| v_0^* \|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)}$ d'après (14.22) et

$$(14.22) \quad \langle h, U' \rangle = \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, r_0/2)} e^{\lambda(F(t) - Ct^2)} \langle v(t, \cdot), U' \rangle dt .$$

Puisque $\left| e^{\lambda(F(t)-Ct^2)} \right| \leq e^{-\lambda C t^2}$ pour t réel et $\varphi(t,x) \leq \phi(x)$ pour t réel il suffit de majorer l'intégrale dans (14.18) avec le domaine d'intégration diminué à $|t'| \leq r_\epsilon$, $|t_1| \leq r_\epsilon$, où $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit et $r_\epsilon > 0$ est donné par la Proposition 14.5. Alors pour t' réel, $|t'| \leq r_\epsilon$, $|t_1| \leq r_\epsilon$, $\text{Im } t_1 \geq 0$ nous avons

$$(14.23) \quad \left| \langle v(t, \cdot), U' \rangle \right| \leq C_\epsilon \lambda^{\frac{C}{\epsilon}} e^{\lambda \epsilon \text{Im } t_1} \|v_0^*\|_{H_{\psi_0^*}(\Omega)}$$

D'autre part, dans la même région, avec $a > 0$,

$$(14.24) \quad \left| e^{\lambda(F(t)-Ct^2)} \right| \leq e^{-\lambda(a \text{Im } t_1 - C(\text{Im } t_1)^2 + C(\text{Re } t_1)^2)}$$

et si l'on choisit $\epsilon \leq a/2$ on peut trouver un contour de la forme $t' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|t'| \leq r_\epsilon$, $t_1 = s + ib \chi(s)$, $-r_\epsilon \leq s \leq r_\epsilon$, $b > 0$, $\chi \in C_0^\infty(-r_\epsilon, r_\epsilon; [0,1])$ avec $\chi(0) > 0$ et b assez petit le long duquel

$$\left| e^{\lambda(F(t)-Ct^2)} \langle v(t, \cdot), U' \rangle \right| \leq C \cdot e^{-\lambda \epsilon_1} \|v_0^*\|_{H_{\psi_0^*}(\Omega_2)}$$

pour un $\epsilon_1 > 0$. On obtient alors l'estimation voulue sur $\langle h, U' \rangle$ après une déformation de contour. $\#$

15. APPLICATIONS DU THÉORÈME 14.1

Comme une première application, on retrouve le Théorème 10.3 sur les opérateurs microhyperboliques. Il suffit en effet de choisir $\Lambda = T^* \mathbb{R}^n$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Dans tout le reste de cette section nous allons choisir Λ de la façon suivante : Soit V une variété involutive analytique réelle, définie près de $(x_0, \xi_0) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$. Soit alors \tilde{V} le germe de variété en (x_0, ξ_0) donnée par la réunion des complexifiées des feuilles bicaractéristiques réelles. Alors $\tilde{V} \subset T^* \mathbb{R}^n$ est une variété I-Lagrangienne, dont la partie réelle est V . La manière la plus simple de le voir est de faire d'abord une transformation canonique réelle, qui ramène V à $\xi'' = 0$ où l'on écrit $\xi = (\xi', \xi'')$, $\xi'' \in \mathbb{R}^d$. Alors \tilde{V} est donnée par $\xi'' = 0$, $(x', \xi') \in \mathbb{R}^{2(n-d)}$ et la

APPLICATIONS

transformation canonique \mathcal{K}_T de la tf. de FBI de l'exemple 7.6 envoie $(T^*\mathbb{R}^n, \tilde{V})$ sur $(\Lambda_\phi, \Lambda_\varphi)$ où $\phi = \frac{1}{2} (\text{Im } x)^2$, $\varphi = \frac{1}{2} (\text{Im } x')^2$.

Du Théorème 14.1 on obtient le résultat suivant qui a été démontré aussi par P. Schapira avec d'autres méthodes :

Théorème 15.1 : Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques, défini près de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $p(x, \xi)$ son symbole principal. Soit V une variété involutive analytique réelle passant par (x_0, ξ_0) et Γ_0 la feuille bicaractéristique de V qui passe par (x_0, ξ_0) . Soit $r(x, \xi)$ une fonction réelle et analytique définie près de (x_0, ξ_0) avec $r(x_0, \xi_0) = 0$. Si $V \leq T^*\mathbb{R}^n$ désigne la variété I-Lagrangienne associée à V on fait l'hypothèse suivante :

$$(15.1) \quad \begin{aligned} & \text{Il existe un voisinage complexe } W \text{ de } (x_0, \xi_0) \text{ et une constante} \\ & C > 0 \text{ tels que } p(\exp t H_{x, \xi}(x, \xi) + (y, \eta)) \neq 0 \text{ pour } (x, \xi) \in V \cap W, \\ & 0 < t \leq 1/C, (y, \eta) \in e^{2n}, |(y, \eta)| \leq t/C. \end{aligned}$$

Alors si $U \subset T^*\mathbb{R}^n$ est un voisinage de (x_0, ξ_0) , $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(Pu)$ et $WF_\alpha(u) \cap U \cap \{(x, \xi) \in \Gamma_0 ; r(x, \xi) > 0\} = \emptyset$, nous avons $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$.

Démonstration : Pour p et V donnés, la condition (15.1) ne dépend que de $dr|_{T(x_0, \xi_0)(\Gamma_0)}$. Dans des coordonnées symplectiques $(x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'')$, telles que V soit donnée par $\xi'' = 0$, si (15.1) est vérifiée pour $(r, (x_0, \xi_0))$, alors il existe un voisinage \tilde{U} de (x_0, ξ_0) dans V et un nombre $\epsilon_0 > 0$ tels que (15.1) soit encore vérifiée si l'on remplace $(r, (x_0, \xi_0))$ par $(h(x, \xi) - h(x_1, \xi_1), (x_1, \xi_1))$ avec $(x_1, \xi_1) \in \tilde{U}$ et $h(x, \xi) = r(x, \xi) - \epsilon(x'' - x_0'')^2 - R((x' - x_0')^2 + (\xi' - \xi_0')^2)$, où $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ et $R > 0$ peut être choisi arbitrairement grand. Alors par un argument géométrique simple (que nous laisserons comme exercice) on montre d'abord qu'il suffit de montrer la version plus faible du Théorème 15.1 obtenue en remplaçant l'hypothèse sur $WF_\alpha(u)$ par $WF_\alpha(u) \cap \{(x, \xi) \in V \cap \tilde{U} ; r(x, \xi) > 0\} = \emptyset$. Ensuite le Théorème 14.1 s'applique avec $\Lambda = \{(x, -\xi) ; (x, \xi) \in \tilde{V}\}$ et r remplacé par $r(x, -\xi)$. #

Tous les résultats ci-dessous ont été obtenus en collaboration avec A. Grigis et P. Schapira et sont annoncés dans [G-Sch-Sj]. A part les contre-exemples, ils

résultent tous du Théorème 15.1. Dans la suite, P désignera un opérateur différentiel à coefficients analytiques, défini près de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dont le symbole $p(x, \xi)$ s'annule en un point $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Théorème 15.2 (Grigis-Schapira-Sjöstrand) : On suppose que p soit transversalement elliptique dans un voisinage U de (x_0, ξ_0) , c.à.d. que dans U, $|p(x, \xi)| \sim d((x, \xi), \Sigma)^m$ où Σ est une variété analytique et $m > 0$ est un entier. On suppose aussi qu'il existe une variété involutive V passant par (x_0, ξ_0) telle que $\Sigma \subset V$ soit invariant par le flot bicaractéristique de V. Soit $\Gamma_0 \subset U$ une feuille bicaractéristique passant par (x_0, ξ_0) (localement unique), qui est connexe. Alors si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\Gamma_0 \cap WF_\alpha(Pu) = \emptyset$, ou bien $\Gamma_0 \subset WF_\alpha(u)$, ou bien $\Gamma_0 \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$.

Démonstration : Il suffit de vérifier (15.1) si $r(x, \xi)$ est une fonction avec $r(x_0, \xi_0) = 0$, $dr|_{\Gamma_0}(x_0, \xi_0) \neq 0$ (et ensuite faire varier (x_0, ξ_0) dans Γ_0). On choisit des coordonnées symplectiques telles que V soit de la forme $\xi'' = 0$. Alors Σ est de la forme $\xi'' = 0$, $u_1(x', \xi') = \dots = u_k(x', \xi') = 0$, où du_1, \dots, du_k sont indépendants. On peut supposer que $r = x_n$. p prend alors la forme

$$(15.2) \quad p = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x, \xi) u^\alpha (\xi'')^\beta .$$

L'hypothèse d'ellipticité transversale entraîne que dans un voisinage complexe de (x_0, ξ_0) , on ait

$$|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} (|u(x', \xi')| + |\xi''|)^m ,$$

quand $|\text{Im}(x', \xi')| + |\text{Im} \xi''| \leq \frac{1}{C} |\text{Re} \xi''|$. Ici $C > 0$ est une constante assez grande.

La validité de (15.1) devient alors évidente. $\#$

Si $\sigma|_\Sigma$ est de rang constant alors $\text{Ker } \sigma|_\Sigma$ donne un système de Frobenius intégrable. On sait (voir Grigis [Gr]) que les feuilles intégrales sont aussi des feuilles bicaractéristiques d'une certaine variété involutive $V \supset \Sigma$. Le Théorème 15.2 donne alors propagation de régularité le long de ces feuilles.

Théorème 15.3 (G-S-S) : Soit p à valeurs réelles et soit $\Gamma_0 \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ une variété isotrope réel-analytique, passant par (x_0, ξ_0) . Soit alors V_0 une variété involutive dont Γ_0 est une feuille bicaractéristique et faisons les hypothèses (10.11), (10.12). Soit r une fonction analytique et réelle sur Γ_0 avec $r(x_0, \xi_0) = 0$ telle que

APPLICATIONS

$$(15.3) \quad \langle H_r, p'' H_r \rangle > 0 \text{ en } (x_0, \xi_0) .$$

(Ici H_r est bien défini dans $T(x_0, \xi_0)(T^*\mathbb{R}^n) / T(x_0, \xi_0)(V_0)$). Alors si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(Pu)$ et $WF_\alpha(u) \cap \{(x, \xi) \in \Gamma_0 ; r(x, \xi) > 0\} = \emptyset$, nous avons $(x_0, \xi_0) \notin WF_\alpha(u)$.

Ce résultat est une amélioration du Théorème 10.4 et il serait intéressant de savoir si l'on peut l'obtenir aussi directement avec la méthode des déformations non-caractéristiques.

Preuve du Théorème 15.3 : On peut trouver des coordonnées symplectiques réelles centrées en (x_0, ξ_0) telles que V_0 soit de la forme $\xi'' = 0$ et $r = -x_n$. Notant $\xi''' = (\xi''', \xi_n)$ on introduit la variété involutive

$$V : \xi_n = R(x'^2 + \xi'^2), \xi''' = 0 .$$

Donc V est tangent à V_0 et

$$(15.4) \quad p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^4) , \quad \nabla p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2) ,$$

où d_{Γ_0} désigne la distance à Γ_0 . Si $R > 0$ est assez grand nous avons aussi sur V :

$$(15.5) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \sim d_{\Gamma_0}^2 , \quad p \sim d_{\Gamma_0}^4 ,$$

puisque $\frac{\partial^2 p}{\partial \xi_n^2} > 0$. Soit \tilde{V} la réunion des complexifiées des feuilles bicaractéristiques de V . Pour $\rho \in \tilde{V}$ on note par $\text{Re } \rho \in V$ le point réel le plus proche sur la même feuille complexe, $|\text{Im } \rho| = |\rho - \text{Re } \rho|$, et $d_{\Gamma_0}(\rho) = d_{\Gamma_0}(\text{Re } \rho)$. Pour $\rho \in \tilde{V}$ on a alors

$$(15.6) \quad \begin{aligned} \nabla p(\rho) &= \nabla p(\text{Re } \rho) + \mathcal{O}(|\text{Im } \rho| d_{\Gamma_0}^2) \\ p(\rho) &= p(\text{Re } \rho) + \mathcal{O}(|\text{Im } \rho| d_{\Gamma_0}^4) \end{aligned}$$

En effet, il suffit d'exprimer ∇p et p sur V dans des coordonnées (t, s) où t est constante sur chaque feuille réelle. Alors, par exemple $p|_V = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha(t, s) t^\alpha$ et

et $p|_{\tilde{V}}$ est donné par la même expression avec s complexe et t réel.

D'après (15.5) et (15.6), pour tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe un voisinage de (x_0, ξ_0) dans \tilde{V} où

$$\begin{aligned} \arg p(\rho) &\in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\quad , \quad |p(\rho)| \sim d_{\Gamma_0}^4 \quad , \\ \arg \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho) &\in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\quad , \quad \left| \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho) \right| \sim d_{\Gamma_0}^2 \quad . \end{aligned}$$

Alors avec $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on obtient par un développement de Taylor à l'ordre 2, que

$$p(\rho + t(e_{\xi_n} + (y, n))) \neq 0$$

si $\rho \in \tilde{V}$ est assez voisin de (x_0, ξ_0) , $0 < t \leq \varepsilon_0$, $(y, n) \in \mathbb{C}^{2n}$, $|(y, n)| \leq \varepsilon_0$. Nous avons donc vérifié (15.1) et nous pouvons appliquer le Théorème 15.1. $\#$

Il est naturel de se demander ce qui arrive si l'on remplace " $p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^4)$ " par " $p|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^3)$ " dans l'hypothèse (10.12). L'exemple suivant (dû à G-S-S) montre que la conclusion du Théorème 15.3 est alors fautive : sur $\mathbb{R}^3_{(x, y, t)}$ on considère l'opérateur

$$(15.7) \quad P = D_t^2 - x^2 D_y D_x + \frac{i}{2} x D_y \quad ,$$

et on observe que $Pu = 0$ si u est de la forme $u = f(\frac{1}{4} t^2 x + y)$. Avec $f = \delta$ on a $WF_a(u) = N^*(\{y + \frac{1}{4} t^2 x = 0\}) = \{(t, x, y, \tau, \xi, \eta) ; y + \frac{1}{4} t^2 x = 0, \tau = \frac{1}{2} t x \eta, \xi = \frac{1}{4} t^2 \eta, \eta \neq 0\}$. Cette variété coupe la feuille isotrope $\Gamma_0 : \tau = 0, \xi = 0, \eta = 1, x = 0, y = 0$ en un seul point pendant que avec $V : \tau = 0$ toutes les hypothèses du Théorème 15.3 sont vérifiées sauf pour (10.12) où on a la version modifiée mentionnée ci-dessus. Ce contre-exemple a été trouvé par la méthode de l'optique géométrique. Dans des coordonnées symplectiques convenables on a alors trouvé une phase réelle ; φ , telle que $p(t, x, \varphi'_t, \varphi'_x) = 0$, et dont la variété Lagrangienne coupe Γ_0 en un seul point. Ici $p = \tau^2 - q(x, \xi)$, $q = \mathcal{O}(|x|^3 + |\xi|^3)$, $\Gamma_0 : x = \xi = 0 ; \tau = 0 (x \in \mathbb{R}^2)$. Si au contraire $q = \mathcal{O}(|x|^4 + |\xi|^4)$ et $p(t, x, \varphi'_t, \varphi'_x) = 0$, on peut montrer avec des développements de Taylor et le Lemme de Grönwall, que si Λ_φ coupe Γ_0 alors $\Gamma_0 \subset \Lambda_\varphi$.

APPLICATIONS

Corollaire 15.4 (G-S-S) : Soit $p = \sum_{j=1}^d p_j^2$ où les fonctions p_j sont réelles et s'annulent en (x_0, ξ_0) . Soit alors $\Gamma_0 \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ une feuille connexe passant par (x_0, ξ_0) comme dans le Théorème de Nagano (c.a.d. l'espace tangent de Γ_0 est en tout point engendré par H_{p_1}, \dots, H_{p_d} et leurs commutateurs itérés). On suppose que

$$(15.8) \quad p|_{\Gamma_0} = 0 \quad .$$

Alors si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\Gamma_0 \cap WF_\alpha(Pu) = \emptyset$, ou bien $\Gamma_0 \subset WF_\alpha(u)$, ou bien $\Gamma_0 \cap WF_\alpha(u) = \emptyset$.

Démonstration : L'hypothèse (15.8) entraîne que Γ_0 soit isotrope. Si V est une variété involutive avec Γ_0 comme feuille bicaractéristique, alors

$$p_j|_V = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2) \quad ,$$

et les hypothèses (10.11), (10.12) sont donc vérifiées. Si r est une fonction sur Γ_0 telle que $H_{p_j}(r)(x_0, \xi_0) \neq 0$ pour au moins un j , alors toutes les hypothèses du Théorème 15.3 sont vérifiées au point $(x_0, \xi_0) \in \Gamma_0$ (si $r(x_0, \xi_0) = 0$). Les résultats géométriques de Bony (Corollaire 8.8 et la partie A du Théorème 8.9) permettent alors de conclure. $\#$

La conclusion du Corollaire est aussi valable pour $p = p_1 + ip_2$ quand $d = 2$ et p_1, p_2 vérifient les hypothèses du Corollaire. Ceci est un résultat de Hanges-Sjöstrand [Ha-Sj] qui utilisaient le cas \mathbb{C} -Lagrangien du Théorème 14.1. Le Corollaire 15.4 est plus général, car si $p = p_1 + ip_2$, il suffit de l'appliquer à l'opérateur $Q = P^*P$, dont le symbole principal est $p_1^2 + p_2^2$.

Dans le reste de cette section on considère des opérateurs transversalement elliptiques à caractéristiques doubles de symbole principal $p \geq 0$. Soit donc $\Sigma \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ une sous-variété analytique passant par (x_0, ξ_0) . On suppose qu'il existe une sous-variété analytique connexe $\Gamma_0 \subset \Sigma$ passant par (x_0, ξ_0) telle que

$$(15.9) \quad T_\rho \Gamma_0 = T_\rho \Sigma \cap T_\rho \Sigma^\perp (= \text{Ker}(\sigma|_\Sigma))$$

en tout point $\rho \in \Gamma_0$. Le symbole principal p doit vérifier

$$(15.10) \quad p \sim d_{\Sigma}^2$$

dans un voisinage de Σ .

Théorème 15.5 (G-S-S) : Sous les hypothèses (15.9), (15.10), si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\Gamma_0 \cap \mathcal{WF}_{\alpha}(Pu) = \emptyset$, alors ou bien $\Gamma_0 \cap \mathcal{WF}_{\alpha}(u) = \emptyset$, ou bien $\Gamma_0 \subset \mathcal{WF}_{\alpha}(u)$.

Démonstration : Γ_0 est isotrope d'après (15.9). Pour $\rho \in \Gamma_0$ on a $T_{\rho}(\Gamma_0)^{\perp} \supset T_{\rho}(\Sigma)$. Soit L_{ρ} l'image de $T_{\rho}(\Gamma_0)^{\perp}$ dans $E_{\rho} = T_{\rho}(T^*\mathbb{R}^n) / T_{\rho}(\Sigma)$. Le Hessien de p induit une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée positive sur E_{ρ} . On désigne par L'_{ρ} l'orthogonal de L_{ρ} pour cette forme. On peut alors trouver une sous-variété $\Sigma_S \subset T^*\mathbb{R}^n$ qui contient Σ , telle que $T_{\rho} \Sigma_S / T_{\rho} \Sigma = L'_{\rho}$ pour $\forall \rho \in \Gamma_0$. Par construction $T_{\rho} \Gamma_0 \cap (T_{\rho} \Sigma_S)^{\perp} = 0$ et Σ_S est symplectique. En effet, si $t \in T_{\rho}(\Sigma_S) \cap T_{\rho}(\Sigma_S)^{\perp}$ alors $t \in T_{\rho}(\Sigma_S) \cap T_{\rho}(\Gamma_0)^{\perp}$ ce qui entraîne $t \in T_{\rho}(\Sigma)$. Donc $t \in T_{\rho}(\Sigma) \cap T_{\rho}(\Sigma)^{\perp} = T_{\rho} \Gamma_0$ et $t = 0$ puisque $T_{\rho}(\Sigma_S)$ est transverse à $T_{\rho} \Gamma_0^{\perp}$.

On choisit maintenant des coordonnées symplectiques locales $(x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'')$ centrées en (x_0, ξ_0) , telles que Σ_S soit de la forme $x'' = \xi'' = 0$ et telles que $\Gamma_0 \subset \Sigma_S$ soit de la forme $y = \eta = 0, \zeta = 0$, où $(x', \xi') = (y, z, \eta, \zeta)$. Par un développement de Taylor sur Σ_S on obtient

$$(15.11) \quad p(x, \xi) = q(x', \xi') + \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ 1 \leq j \leq k_0}} f_{\alpha, j}(x', \xi') p_j(x', \xi') (x'', \xi'')^{\alpha} + \sum_{|\alpha|=2} g_{\alpha}(x, \xi) (x'', \xi'')^{\alpha}.$$

Ici $p_1(x', \xi') = \dots = p_{k_0}(x', \xi') = 0$ sont des équations réelles pour Σ dans Σ_S que l'on peut choisir telles que

$$(15.12) \quad q(x', \xi') = \sum_1^{k_0} p_j(x', \xi')^2.$$

La dernière somme de (15.11) est une forme quadratique définie positive en (x'', ξ'') . Nous avons choisi Σ_S telle que $T_{\rho}(\Sigma_S)$ et $T_{\rho} \Gamma_0^{\perp}$ sont orthogonaux pour $\nabla^2 p$, donc

APPLICATIONS

$$(15.13) \quad f_{\alpha, j} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 ,$$

car $H_{p_j} \in T_{\rho} \Sigma^{\perp} \cap T_{\rho} \Sigma_S = T_{\rho} \Sigma^{\perp} \cap T_{\rho} \Sigma = T_{\rho} \Gamma_0$, donc $dp_j|_{T_{\rho} \Gamma_0^{\perp}} = 0$.

Soit maintenant r une fonction réelle et analytique sur Γ_0 avec $r(x_0, \xi_0) = 0$, $dr \neq 0$. Pour démontrer le Théorème il suffit de montrer qu'il existe une variété involutive V telle que les hypothèses du Théorème 15.1 soient vérifiées. (Ensuite on fait varier r et (x_0, ξ_0)). On peut supposer les coordonnées (y, z, η, ζ) choisies telles que $r = -z_1$. Pour $R > 0$ à choisir assez grand on introduit

$$V' = \left\{ (y, z, \eta, \zeta) \in \Sigma_S ; \zeta_1 = R(y^2 + \eta^2), \zeta' = 0 \right\}$$

où $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$. C'est une variété involutive dans Σ_S et on définit une autre variété involutive

$$V = \left\{ (x, \xi) ; (x', \xi') \in V' \right\} .$$

Soient \tilde{V}' , \tilde{V} les variétés I-Lagrangiennes obtenues en complexifiant les feuilles bicaractéristiques réelles. Comme dans la démonstration du Théorème 15.3, si $R > 0$ est assez grand, alors sur V' :

$$(15.14) \quad q \sim d_{\Gamma_0}^4 , \quad \frac{\partial q}{\partial \zeta_1} \sim d_{\Gamma_0}^2 .$$

de plus $p_j|_{V'} = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2)$, $\nabla q|_{V'} = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2)$. Désormais R est fixé. Si $\alpha \in \tilde{V}'$ on désigne par $\text{Re } \alpha$ le point réel le plus proche sur la même feuille complexifiée, un point $\rho \in \tilde{V}$ sera toujours noté $\rho = (\alpha, \beta)$, où $\alpha \in \tilde{V}'$, $\beta = (x'', \xi'') \in \mathbb{R}^{2k_1}$. Par d_{Γ_0} on désigne la distance de $\text{Re } \alpha$ à Γ_0 .

Puisque $p_j(\alpha) = p_j(\text{Re } \alpha) + \mathcal{O}(|\text{Im } \alpha| d_{\Gamma_0}^2)$ on a pour tout $\varepsilon_0 > 0$ donné ;

$$(15.15) \quad |q(\alpha)| \sim d_{\Gamma_0}^4 , \quad \left| \frac{\partial q}{\partial \zeta_1}(\alpha) \right| \sim d_{\Gamma_0}^2 , \quad |\nabla q| = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2)$$

$$\arg q(\alpha) , \arg \frac{\partial q}{\partial \zeta_1}(\alpha) \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[,$$

pour $\alpha \in \tilde{V}$ suffisamment proche de (x_0, ξ_0) . Soit maintenant $\rho = (\alpha, \beta) \in \tilde{V}$ proche de (x_0, ξ_0) . Par (15.11),

$$(15.16) \quad p(\rho) = p(\operatorname{Re} \rho) + \mathcal{O}(1) |\operatorname{Im} \alpha| (d_{\Gamma_0}^4 + d_{\Gamma_0}^2 |\beta| + |\beta|^2) .$$

Puisque $p(\operatorname{Re} \rho) \sim d_{\Gamma_0}^4 + |\beta|^2$ on obtient que pour tout $\varepsilon_0 > 0$,

$$(15.17) \quad |p(\rho)| \sim d_{\Gamma_0}^4 + |\beta|^2 , \quad \arg p(\rho) \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$$

pour $\rho \in \tilde{V}$ assez voisin de (x_0, ξ_0) .

Puisque $f_{\alpha, j} = 0$ sur Γ_0 on obtient aussi sur \tilde{V}

$$(15.18) \quad \nabla_{\alpha} p = \nabla_{\alpha} q + \mathcal{O}(d_{\Gamma_0} |\beta| + |\beta|^2) .$$

Egalement par (15.11)

$$(15.19) \quad \nabla_{\beta} p = \mathcal{O}(d_{\Gamma_0}^2 + |\beta|) .$$

Aussi

$$(15.20) \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} p(\rho) \right| \sim 1 , \quad \arg \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta_1^2} \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[.$$

A l'aide de (15.15), (15.17)-(15.20) et un développement de Taylor à l'ordre 2 on trouve qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\rho \in \tilde{V}$ assez voisin de (x_0, ξ_0) ;

$$(15.21) \quad \operatorname{Re} p(\rho + t e_{\zeta_1} + w) \geq \frac{1}{C} (d_{\Gamma_0}^4 + t^2 + |\beta|^2)$$

quand $0 < t \leq 1/C$, $w \in \mathbb{C}^{2n}$, $|w| \leq t/C$. Nous avons ainsi vérifié la condition (15.1).

‡

Comme exemple nous allons étudier le Laplacien de Kohn. Soit $\Sigma \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ donnée par $q_1 = \dots = q_d = 0$ où q_1, \dots, q_d sont des fonctions à valeurs complexes et $dq_1, \dots, dq_d, \overline{dq_1}, \dots, \overline{dq_d}$ sont linéairement indépendantes et vérifient

$$(15.22) \quad \{q_j, q_k\} = 0 \quad \text{sur } \Sigma .$$

APPLICATIONS

Alors Σ est de codimension $2d$ et si l'on introduit la matrice de Levi

$\mathcal{L} = \frac{1}{T} (\{\bar{q}_j, q_k\})$ alors en tout point $\rho \in \Sigma$:

$$(15.23) \quad \begin{aligned} T_\rho \Sigma \cap T_\rho \Sigma^\perp &= \left\{ \operatorname{Re} \sum_1^d b_j H_{q_j} ; \mathcal{L} \vec{b} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \sum_1^d b_j H_{q_j} \in T_\rho \Sigma \right\} . \end{aligned}$$

Soit $\Gamma_0 \subset \Sigma$ une sous-variété de dimension $2k$. Les hypothèses du Théorème 15.5 sont alors satisfaites (pour un opérateur transversalement elliptique à caractéristiques doubles de variété caractéristique Σ) si $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} = k$ en tout point de Γ_0 et si les vecteurs tangents de Γ_0 sont de la forme $\operatorname{Re} \sum b_j H_{q_j}$, $b_j \in \mathbb{C}$.

Si $X \subset \mathbb{C}^n$ est une hypersurface et nous considérons le Laplacien de Kohn $P = \square_b$ sur des formes de d^0 arbitraire alors la variété caractéristique est de la forme $q_1 = \dots = q_{n-1} = 0$, où les q_j sont les symboles de $n-1$ champs de vecteurs holomorphes Q_1, \dots, Q_{n-1} indépendants et tangents à X . L'hypothèse (15.22) est alors vérifiée. (P n'est plus un opérateur scalaire, mais le symbole principal est de la forme $p(x, \xi) \operatorname{Id}$ avec p scalaire et les Théorèmes 14.1, 15.1, 15.5 sont encore valables). Si T est un champ de vecteurs réel sur X , indépendant des Q_j, \bar{Q}_j , alors

$$[\bar{Q}_j, Q_k] \equiv \frac{1}{T} c_{jk}(x) T \pmod{(Q, \bar{Q})} ,$$

où la matrice c_{jk} est à un facteur $\neq 0$ près la matrice de Levi

Soit maintenant $G \subset X$ une sous-variété holomorphe de dimension k_0 . On peut supposer que Q_1, \dots, Q_{n-1} ont été choisis tels que Q_1, \dots, Q_{k_0} (et donc aussi $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_{k_0}$) sont tangents à G . Alors $c_{jk} = 0$ sur G pour $1 \leq j, k \leq k_0$. On suppose maintenant que la matrice de Levi est semi-définie dans les points de G . Alors $c_{jk} = 0$ quand j ou k est $\leq k_0$ (ce qui montre que $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} \geq k_0$). Alors $\{q_j, \bar{q}_k\} = 0$ sur $\Sigma|_G$ pour les mêmes valeurs de j, k . Par ailleurs $\{q_j, q_k\} = 0$ sur Σ et les champs $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{k_0} b_j H_{q_j} \right)$ sont tangents à $\Sigma|_G$. Il est facile de voir que ces champs forment un système de Frobenius (invariant) et $\Sigma|_G$ est localement fibré par ses variétés intégrales. Cha-

que variété intégrale Γ_0 est de dimension $2k_0$ et diffeomorphe à G par la projection naturelle. Si l'on suppose que $\dim \text{Ker } \mathcal{L} = k_0$ sur G alors les hypothèses du Théorème 15.5 sont satisfaites pour chaque feuille Γ_0 et on obtient :

Corollaire 15.6 (G-S-S) : Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ une hypersurface réelle et analytique et soit $G \subset X$ une sous-variété holomorphe connexe de dimension complexe k_0 . On suppose la matrice de Levi semi-définie de rang $2n-1-k_0$ en chaque point de G . Soit $P = \square_b$ le Laplacien de Kohn sur X sur des formes de degré arbitraire. Si $u \in \mathcal{D}'(X; \mathcal{F})$ et $Pu \in a(X; \mathcal{F})$ alors, ou bien $G \subset \text{Supp Sing}_\alpha(u)$ ou bien $G \cap \text{Supp Sing}_\alpha(u) = \emptyset$.
 (Ici \mathcal{F} désigne le fibré vectoriel $\Lambda^{0,q} / (\bar{\partial}\rho)$ sur X , où $\Lambda^{0,q}$ est le fibré de $(0,q)$ -formes (q arbitraire) et $(\bar{\partial}\rho) \subset \Lambda^{0,q}$ l'idéal engendré par $\bar{\partial}\rho$, ρ est une fonction de classe C^∞ avec $\rho|_X = 0$, $d\rho \neq 0$ sur X).

L'auteur ne sait pas si le Corollaire 15.6 est encore vrai si $\dim \text{Ker } \mathcal{L} > k_0$ dans certains points de G . Par contre on peut trouver un contre-exemple au Théorème 15.5 si l'on affaiblit l'hypothèse (15.9) à

$$(15.9f) \quad T_\rho \Gamma_0 \subset T_\rho \Sigma \cap T_\rho \Sigma^\perp, \quad \forall \rho \in \Gamma_0.$$

En effet, dans \mathbb{C}^2 , $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, on considère le domaine faiblement pseudoconvexe $\Omega : y_2 > y_1^4$ et on identifie son bord avec $\mathbb{R}^3_{x_1, y_1, x_2}$. Le Laplacien de Kohn sur les fonctions prend alors la forme $\square_b = Z^*Z$, où $Z = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + 4y_1^3 \frac{\partial}{\partial x_2}$ et (15.9 f) est satisfaite avec $\Gamma_0 : y_1 = x_2 = 0$, $\xi_1 = \eta_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. D'autre part, puisque $\frac{1}{9} \text{Re}(z_1^4) + y_1^4 \geq 0$ avec égalité seulement en 0, on constate que la fonction $v(z_1, z_2) = (z_2 + iz_1^4/9)^{-1}$, est holomorphe dans Ω et que si $u(x_1, y_1, x_2) \in \mathcal{D}'(X)$ est sa valeur au bord, alors $WF_a(u)$ est donné par $x_1 = y_2 = x_2 = 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_1 = \eta_1 = 0$. Donc $WF_a(u) \cap \Gamma_0$ est réduit à un point pendant que $\square_b u = 0$.

16. MICROLOCALISATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

La notion de 2^e microsupport à partir d'une variété involutive réelle a été inventé par Kashiwara et développé ensuite par Laurent et d'autres. Voir [KK1], Laurent [La] et un travail à paraître de Laurent-Kashiwara. Dans cette section nous introduirons une notion de deuxième front d'onde analytique à partir d'une variété Lagrangienne réelle. Des résultats préliminaires de Bony et Laurent semblent indiquer

que cette définition (dans le cas d'une variété Lagrangienne réelle) coïncide avec celle du deuxième microsupport. Les techniques employées ici permettent aussi d'introduire des fronts d'ondes d'ordre quelconque ; $WF_a^{(k)}(u)$ et de montrer des relations entre $WF_a^{(k)}(u)$ et $WF_a^{(k+1)}(u)$ entièrement analogues aux résultats connus de Kashiwara et d'autres qui donnent des relations entre $\text{supp}(u)$ et $WF_a(u)$. Peut-être a-t-on aussi des relations entre $WF_a^{(k)}(u)$ et $WF_a^{(k+l)}(u)$. Il semble aussi que les techniques de Laurent [à paraître] permettent de développer des microlocalisations d'ordre supérieur.

Il n'est pas clair pour l'auteur, dans quelle mesure $WF_a^{(3)}(u)$, $WF_a^{(4)}(u)$,... sont des notions intéressantes et non-vides. Nous laissons ces questions parmi d'autres à des futures investigations. Néanmoins, les Théorèmes 16.5 et 16.7 dans le cas $k=2$ constituent aux yeux de l'auteur une justification suffisante pour cette section. (Dans la démonstration du Théorème 16.7, on fait intervenir $WF_a^{(3)}$ au moins implicitement). On peut aussi soupçonner l'existence d'une théorie systématique peut-être dans l'esprit de la section 11, qui permettra de mieux comprendre $WF_a^{(k)}(u)$. Pour ces raisons nous avons choisi de ne pas investir trop de travail ici. Voici quelques points où il faudra un jour revenir :

1° Dans la définition de $WF_a^{(k)}(u)$, on fait certains choix arbitraires et nous n'avons pas montré l'invariance de la définition par rapport à ces choix.

2° Dans quelle mesure peut-on définir les microlocalisations d'ordre supérieur à partir de variétés I-Lagrangiennes, et unifier les sections 14 et 16 ?

3° Jusqu'à quel k est-ce que $WF_a^{(k)}(u)$ contient des renseignements non-triviaux ? Il est probable que $WF_a^{(k)}(u)$ soit invariant pour k homogénéités accumulées. D'autre part on peut modifier les définitions pour avoir des ensembles non-coniques. Voir Remarque 16.10.

Dans cette section on travaillera systématiquement avec la transformation de FBI suivante :

$$T_\lambda u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \int e^{-\lambda(x-y)^2/2} u(y, \lambda) dy ,$$

qui envoie \mathcal{D}' dans H_ϕ^{loc} avec $\phi = \frac{1}{2} (\text{Im } x)^2$.

T_λ admet l'inverse formel

$$T_\lambda^{-1} v(y, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \int e^{\lambda(x-y)^2/2} v(x, \lambda) dx .$$

Sur $H_\Phi(\mathbb{C}^n)$ nous avons aussi le projecteur de Bergmann :

$$S_\lambda u(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^n \int e^{-\lambda(x-\bar{y})^2/4} u(y, \lambda) e^{-\lambda(\text{Im } y)^2} L(dy) .$$

(On le voit en écrivant l'identité comme opérateur pseudo-différentiel et en choisissant le contour $\theta = \frac{i}{4} (x+y-2\bar{y})$). Toujours formellement, on écrit $T_\lambda^{-1} = T_\lambda^{-1} S_\lambda$ et on utilise la phase stationnaire pour réduire l'intégrale double que l'on obtient. Alors on trouve (négligeant dans tous les calculs des facteurs ± 1 et leurs influences accumulées).

$$(16.1) \quad T_\lambda^{-1} v(y, \lambda) = (2i)^{-n/2} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n \int e^{-\lambda(y-\bar{x})^2/2} v(x, \lambda) e^{-\lambda(\text{Im } x)^2} L(dx) .$$

Pour définir $WF_a^{(2)}(u)$ on introduit un petit paramètre $\mu > 0$ et on travaillera avec $T_{\mu\lambda}$ ou plutôt avec

$$(16.2) \quad S_{\mu, \lambda} = T_{\mu\lambda} \circ T_\lambda^{-1} \quad (\text{composition formelle}) .$$

La phase stationnaire donne l'expression (que l'on prendra comme définition).

$$(16.3) \quad S_{\mu, \lambda} u(x, \lambda) = \left(\frac{2\mu}{1+\mu}\right)^{n/2} \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^n \int e^{-\frac{\lambda\mu}{2(1+\mu)} (x-\bar{y})^2} u(y, \lambda) e^{-\lambda(\text{Im } y)^2} L(dy) .$$

Bien entendu, $S_{1, \lambda} = S_\lambda$. Pour localiser la contribution essentielle à cette intégrale on trouve

$$(16.4) \quad \begin{aligned} & \text{Re}\left(-\frac{\lambda\mu}{2(1+\mu)} (x-\bar{y})^2\right) - \frac{\lambda}{2} (\text{Im } y)^2 = \\ & = \frac{\lambda\mu}{2} (\text{Im } x)^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\mu}{1+\mu} (\text{Re } y - \text{Re } x)^2 + \frac{1}{1+\mu} (\text{Im } y - \mu \text{Im } x)^2\right) . \end{aligned}$$

Donc (16.3) définit bien un opérateur uniformément borné par rapport à λ :

$$S_{\mu, \lambda} : H_\Phi(\mathbb{C}^n) \rightarrow H_{\mu\Phi}(\mathbb{C}^n) . \text{ L'inverse de } S_{\mu, \lambda} \text{ est } R_{\mu, \lambda} = S_{\frac{1}{\mu}, \mu\lambda} :$$

$$(16.5) \quad R_{\mu, \lambda} u(x, \lambda) = \left(\frac{2}{1+\mu}\right)^{n/2} \left(\frac{\mu\lambda}{2\pi i}\right)^n \int e^{-\frac{\lambda\mu}{2(1+\mu)}(x-\bar{y})^2} u(y, \lambda) e^{-\mu\lambda(\operatorname{Im} y)^2} L(dy)$$

comme on le voit bien à l'aide de la phase stationnaire. Quand on travaille localement, c.a.d. quand on intègre sur des domaines bornés (convenables) on trouve que $R_{\mu, \lambda}$ inverse $S_{\mu, \lambda}$ modulo des erreurs exponentiellement petites, que l'on contrôle à cause de (16.4). (Remarquons aussi que $S_{\mu, \lambda}$ peut s'écrire avec un bon contour dans $\mathbb{C}_{y,w}^{2n}$ donné par $w = \bar{y}$).

Si

$$(16.6) \quad \mathcal{F}_\lambda u(\xi, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} \int e^{-i\lambda x \xi} u(x, \lambda) dx$$

est la transformée de Fourier, alors

$$(16.7) \quad \begin{aligned} T_\lambda \mathcal{F}_\lambda u(x, \lambda) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \int e^{-\lambda x^2/2 - \lambda(\frac{x}{\lambda} - y)^2/2} u(y, \lambda) dy = \\ &= e^{-\lambda x^2/2} (T_\lambda u)\left(\frac{x}{\lambda}, \lambda\right) \stackrel{\text{def}}{=} (G_\lambda T_\lambda u)(x, \lambda). \end{aligned}$$

Fixons maintenant le cadre géométrique. Soit $\Lambda_1 \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ une variété Lagrangienne réel-analytique, passant par le point $\rho_0^{(1)}$. Si $N(\Lambda_1)$ désigne le fibré normal de Λ_1 on a un isomorphisme $N(\Lambda_1) \simeq T^*\Lambda_1$ engendré par la forme symplectique. Soit alors $\Lambda_2 \subset T^*\Lambda_1 \setminus 0$ une variété Lagrangienne réel-analytique qui passe par $\rho_0^{(2)}$, où $\pi_1(\rho_0^{(2)}) = \rho_0^{(1)}$. Ici $\pi_1 : T^*\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_1$ désigne le projecteur naturel. Ainsi par récurrence on se fixe une suite $(\Lambda_k, \rho_0^{(k)})$, $\rho_0^{(k)} \in \Lambda_k \subset T^*\Lambda_{k-1} \setminus 0$, $\pi_{k-1}(\rho_0^{(k)}) = \rho_0^{(k-1)}$. Si u est une distribution définie dans un voisinage ouvert W_0 de $\pi_0(\rho_0^{(1)})$, nous allons définir $WF_a^{(k)}(u) \subset (T^*\Lambda_{k-1} \setminus 0) \cap \pi_{k-1}^{-1}(W_{k-1})$, où W_{k-1} est un voisinage ouvert convenable de $\rho_0^{(k-1)}$ dans Λ_{k-1} . La définition dépendra de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{k-1}$ mais pas de $\Lambda_k, \Lambda_{k+1}, \dots$. On fera aussi quelques choix arbitraires dont la définition (espérons-le !) ne dépend probablement pas, mais ceci reste à démontrer.

Soit \mathcal{H}_T la transformation conique associée à T et soit \mathcal{H}_1 une transformation canonique réelle que transforme Λ_1 en $\{\xi = 0\}$ avec $\mathcal{H}_1(\rho_0^{(1)}) = (0, 0)$. Alors

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_T \circ \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_T^{-1} \text{ transforme } \Lambda_\phi \text{ en lui-même et } \Lambda_{\varphi_1} \text{ en } \Lambda_0 \text{ si } \Lambda_{\varphi_1} = \mathcal{H}_T(\Lambda_1).$$

Si $\varphi(x,y,\theta)$ est une phase pluriharmonique admissible qui engendre $\tilde{\mathcal{H}}^1$, alors pour tout x voisin de 0, la fonction $(y,\theta) \rightarrow \varphi(x,y,\theta) + \phi(y)$ admet un col et, après modification de φ par une constante, la valeur critique est $\phi(x)$. A l'aide d'une telle phase on peut alors définir un opérateur intégral de Fourier elliptique

$A_1 : H_{\phi, x_1} \rightarrow H_{\phi, 0}$, où $x_1 \in \mathbb{C}^n$ est la projection de $\mathcal{H}_T(\rho_0^{(1)})$. Soit $V_1 = Tu$, où

$u \in \mathcal{D}'(W_0)$. Alors $U_1 = A_1 V_1$ est bien définie à équivalence près dans Ω_1 , où

$\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ est un voisinage ouvert de 0. La définition de $WF_a^{(2)}(u)$ sera donnée en termes de $V_2 = S_{\mu, \lambda} U_1$, mais d'abord on va définir des espaces "H $_{\phi}$ à plusieurs paramètres".

Définition 16.1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, $\varphi \in C(\Omega; \mathbb{R})$. Nous dirons qu'une fonction $u(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_k)$, $x \in \Omega$, $\lambda \geq 1$, $\mu_j > 0$ est dans l'espace $H_{\varphi}^{(k)}(\Omega)$, si u est holomorphe en x et si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $K \subset\subset \Omega$ on a

$$|u(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_k)| \leq e^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k (\varphi(x) + \varepsilon)},$$

pour $x \in K$ et

$$(16.8) \quad 0 < \mu_k \leq f_k(K, \varepsilon), \dots, 0 < \mu_j \leq f_j(K, \varepsilon, \mu_{j+1}, \dots, \mu_k),$$

$$0 < 1/\lambda \leq f_1(K, \varepsilon, \mu_2, \dots, \mu_k).$$

Ici $f_j > 0$ sont des fonctions qui dépendent de u , décroissantes en K et croissantes en $\varepsilon, \mu_2, \dots, \mu_k$. Nous dirons que $u_1 \sim u_2$ dans $H_{\varphi}^{(k)}(\Omega)$, si $u_1 - u_2 \in H_{\varphi_1}^{(k)}$, où

$\varphi_1 \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $\varphi_1 < \varphi$.

On dira que $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k$ sont "comme il faut" en fonction de K, ε et éventuellement d'autres paramètres, si (16.8) est vérifié pour un certain choix de fonctions f_1, \dots, f_k comme ci-dessus. Remarquons que $H_{\varphi}^{(1)}(\Omega) = H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$ et que $H_{\varphi}^{(k)}(\Omega)$ est stable par multiplication avec des puissances de $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_n$.

Proposition 16.2 : Soient $W \subset\subset \Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ des voisinages ouverts de 0, $\varphi \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $\varphi \leq \phi$. Si $U \in H_{\phi}^{(k)}(\Omega)$, on définit alors $V(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}) = S_{\mu_{k+1}, \lambda \mu_2 \dots \mu_k} U$ pour $x \in \tilde{W} = \{x \in \mathbb{C}^n; \text{Re } x \in \mathbb{R}^n \cap W\}$ par l'intégrale (16.3) avec W comme domaine d'in-

tégration. Alors $V \in H_{\phi}^{(k+1)}(\tilde{W})$. Plus précisément, si $U \in H_{\phi}^{(k)}(\Omega)$, alors $V \in H_{\phi}^{(k+1)}(\tilde{W})$, où $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \frac{1}{2} d(\text{Re } x, K)^2$, $K = \{x \in \mathbb{R}^n \cap \bar{W} ; \phi(x) = \phi(x)\}$. Si W' est un autre ouvert comme W et V' la fonction correspondante, $V \sim V'$ dans $H_{\phi}^{(k+1)}(\tilde{W} \cap \tilde{W}')$.

Démonstration : Utilisant (16.3), (16.4), on obtient pour tout $\delta > 0$,

$$|V(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1})| \leq C \lambda^n \mu_{k+1}^{n/2} e^{\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} (\text{Im } x)^2 / 2 + \delta \lambda \mu_2 \dots \mu_k}$$

si $x \in \tilde{W}$, $0 < \mu_{k+1} \leq 1$ et $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k$ sont "comme il faut" en fonction de δ . Si $\epsilon > 0$ on choisit $\delta = \epsilon \mu_{k+1} / 2$, alors pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}$, "comme il faut" en fonction de $\epsilon > 0$ on a

$$|V(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1})| \leq C \lambda^n \mu_{k+1}^{n/2} e^{\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} ((\text{Im } x)^2 / 2 + \epsilon / 2)}$$

pour $\lambda > 0$ assez grande en fonction de μ_2, \dots, μ_{k+1} , ϵ , nous avons $C \lambda^n \mu_{k+1}^{n/2} \leq e^{\epsilon \lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} / 2}$ et il est alors clair que $V \in H_{\phi}^{(k+1)}(\tilde{W})$.

On suppose maintenant que $U \in H_{\phi}^{(k)}(\Omega)$ et on restreint x à un compact dans \tilde{W} . Pour $a > 0$ on découpe W en 2 parties :

$$I : \begin{cases} |\text{Re } y - \text{Re } x|^2 \leq d(\text{Re } x, K)^2 - a \\ |\text{Im } y - \mu_{k+1} \text{Im } x|^2 \leq \mu_{k+1} (d^2 - a) \end{cases}$$

$$II : \quad W \setminus I .$$

Soit $V = V_I + V_{II}$ la décomposition correspondante de V . Pour tout $a > 0$ il existe $\epsilon(a) > 0$ tel que $\phi(y) \leq \phi(x) - 2 \epsilon(a)$, pour $y \in I$, quand μ_{k+1} est assez petit en fonction de a . Donc pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}$ "comme il faut" en fonction de a ,

$$(16.9) \quad |V_I| \leq C \lambda^n \mu_{k+1}^{n/2} e^{\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} (\text{Im } x)^2 / 2 - \epsilon(a) \lambda \mu_2 \dots \mu_k} .$$

D'autre part, à l'aide de (16.3), (16.4) on obtient pour tout $\delta > 0$:

$$(16.10) \quad |V_{II}| \leq C \lambda^n \mu_{k+1}^{n/2} \exp \left[\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} (\text{Im } x)^2 / 2 - \frac{\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1}}{2(1 + \mu_{k+1})} \left(d(\text{Re } x, K)^2 - a \right) + \delta \lambda \mu_2 \dots \mu_k \right],$$

pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k$ "comme il faut" en fonction de δ . Si $\varepsilon > 0$ est donné on peut rendre les exposants dans (16.9) et (16.10) plus petits que

$$\lambda \mu_2 \dots \mu_{k+1} \left((\text{Im } x)^2 / 2 - d(\text{Re } x, K)^2 / 2 + \varepsilon / 2 \right),$$

en prenant d'abord a assez petit dans (16.10), ensuite μ_{k+1} assez petit en fonction de ε, a , et δ assez petit en fonction de $\varepsilon, a, \mu_{k+1}$ et finalement $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k$, "comme il faut" en fonction de $\varepsilon, a, \mu_{k+1}$. Ceci montre que $V \in H_{\Phi}^{(k+1)}(\tilde{W})$. Finalement l'équivalence $V \sim V'$ devient maintenant assez évidente. $\#$

On retourne maintenant à la situation décrite avant la Définition 16.1. Ayant défini $U_1 \in H_{\Phi}(\Omega_1)$, on fixe un voisinage ouvert de 0 ; $W_1 \subset\subset \Omega_1$ et comme dans la Proposition 16.2 nous avons alors $V_2 = S_{\mu_2, \lambda} U_1 \in H_{\Phi}^{(2)}(\tilde{W}_1)$. Soit $v_2 \in T^*\Lambda_1 \setminus 0$ avec $\Pi_1(v_2)$ assez proche de $\rho_0^{(1)}$. Alors $d\mathcal{H}_1(v_2) = (y_2, n_2)$ avec $y_2 \in W_1, n_2 \neq 0$, et on pose $x_2 = y_2 - in_2 \in \tilde{W}_1$. (x_2 est la projection dans \mathbb{C}_x^n de $\mathcal{H}_T(y_2, n_2)$).

Définition 16.3 : On dit que $v_2 \notin WF_a^{(2)}(u)$, si $V_2 \in H_{\Phi}^{(2)}(\tilde{W}_1)$, avec $\varphi \leq \Phi$ continue, $\varphi(x_2) < \Phi(x_2)$.

Ainsi, nous avons défini un ensemble fermé $WF_a^{(2)}(u) \subset T^*\Lambda_1 \setminus 0$ au-dessus d'un voisinage de $\rho_0^{(1)}$. Il ne semble pas trop difficile de montrer que cette définition ne dépend pas du choix de \mathcal{H}_1 et de A_1 et que $WF_a^{(2)}(u)$ est conique pour la structure conique de $T^*\Lambda_1 \setminus 0$. (Si Λ_1 est déjà conique dans $T^*\mathbb{R}^n$, alors $WF_a^{(2)}(u)$ est probablement conique aussi pour la structure conique de $T^*\Lambda_1 \setminus 0$, induite par celle de Λ_1). Pour définir $WF_a^{(3)}(u)$ on répète la même construction, en faisant intervenir aussi Λ_2 . Soit \mathcal{H}_2 une transformation canonique réelle qui envoie $(y_{2,0}, n_{2,0}) = d\mathcal{H}_1(\rho_0^{(2)})$ sur $(0,0)$ et $d\mathcal{H}_1(\Lambda_2)$ sur $\{\eta = 0\}$. Soit alors A_2 un OIF elliptique avec $\mu_2 \lambda$ comme grand paramètre et $\tilde{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{H}_T \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_T^{-1}$ comme transformation canonique associée. On définit alors $U^{(2)}(x, \lambda, \mu_2) = A_2(V^{(2)}) \in H_{\Phi}^{(2)}(\Omega_2)$, où Ω_2 est un

voisinage de 0 dans \mathbb{C}^n , et si $W_2 \subset\subset \Omega_2$ est un autre voisinage ouvert de 0, on définit $\tilde{W}_2 = \{x \in \mathbb{C}^n ; \text{Re } x \in W_2 \cap \mathbb{R}^n\}$ et

$$V^{(3)}(x, \lambda, \mu_2, \mu_3) = S_{\mu_3, \lambda \mu_2} U^{(2)} \in H_{\phi}^{(3)}(\tilde{W}_2) .$$

Si $v_3 \in T^* \Lambda_2 \setminus 0$ et $\Pi_2(v_3)$ est assez voisin de $\rho_0^{(2)}$ alors $x_3 = y_3 - i n_3 \in \tilde{W}_2$, si $(y_3, n_3) = d \mathcal{H}_2(v_3)$.

Définition 16.4 : On dit que $v_3 \notin WF_a^{(3)}(u)$, si $V^{(3)} \in H_{\phi}^{(3)}(\tilde{W}_2)$ où $\phi \leq \Phi$ est continue et $\varphi(x_3) < \Phi(x_3)$.

Par itération, il est maintenant clair comment définir des ensembles fermés $WF_a^{(k)}(u) \subset T^* \Lambda_{k-1} \setminus 0$. A priori $WF_a^{(k)}$ peut dépendre du choix des opérateurs A_1, \dots, A_{k-1} . Nous croyons que ce n'est pas le cas et qu'il est aussi possible d'étudier les homogénéités de $WF_a^{(k)}(u)$.

On peut maintenant montrer une analogie du Théorème 8.3 :

Théorème 16.5 : Soit $H \subset \Lambda_{k-1}$, $k \geq 2$ une hypersurface analytique passant par $\rho_0^{(k-1)}$ que l'on représente par $x_n = 0$ dans des coordonnées convenables x_1, \dots, x_n sur Λ_{k-1} , centrées en $0 = \rho_0^{(k-1)}$. Supposons que $\Lambda_{k-1} \cap \{x_n < 0\} \cap WF_a^{(k-1)}(u) = \emptyset$, dans un voisinage de $\rho_0^{(k-1)}$. Alors,

1° Si $(0, (0, \dots, t)) \notin WF_a^{(k)}(u)$ pour un $t \neq 0$, alors $0 \notin WF_a^{(k-1)}(u)$.

2° Si $(0, \xi) \in WF_a^{(k)}(u)$ alors $(0, (\xi', t)) \in WF_a^{(k)}(u)$ pour $\forall t \in \mathbb{R}$ tels que $(\xi', t) \neq 0$.

Démonstration : On fait essentiellement comme dans la démonstration du Théorème 8.3. N'ayant pas établi l'invariance de $WF_a^{(k)}(u)$ on suppose d'abord que les coordonnées x_1, \dots, x_n sont celles qui interviennent quand on écrit

$$V^{(k)} = S_{\mu_k, \lambda \mu_2 \dots \mu_{k-1}} U^{(k-1)} .$$

Alors $U^{(k-1)} \in H_{\phi}^{(k-1)}$ avec $\varphi(x) \leq \Phi(x)$ et avec inégalité stricte pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x_n < 0$.

La proposition 16.2 montre alors que $V^{(k)} \in H_{\tilde{\varphi}}^{(k)}(\tilde{W}_{k-1})$, où

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\text{Im } x)^2 & \text{pour } \text{Re } x_n \geq 0 \\ \frac{1}{2} ((\text{Im } x)^2 - (\text{Re } x_n)^2) & \text{pour } \text{Re } x_n \leq 0 . \end{cases}$$

Appliquant le principe du maximum comme dans la preuve du Théorème 8.3, on trouve alors 2°. Aussi, sous l'hypothèse de 1°, le principe du maximum montre que $V^{(k)} \sim 0$ dans $H_{\phi}^{(k)}$ dans un voisinage de 0. Appliquant l'inverse de S ; $R_{\mu_k, \lambda \mu_2 \dots \mu_{k-1}}$ avec un μ_k assez petit mais fixé, on trouve que $U^{(k-1)} \sim 0$ dans $H_{\phi}^{(k-1)}$ dans un voisinage de 0, donc (après inversion de A_{k-1}) $\rho_0^{(k-1)} \notin WF_a^{(k-1)}(u)$.

Dans le cas général, on peut se ramener au cas où dans des coordonnées x , utilisées dans la définition de $V^{(k)}$; $U^{(k-1)} \in H_{\phi}^{(k-1)}$ et $\varphi(x) < \Phi(x)$ pour x réel avec $x_n < f(x')$. Ici $f(x') = \mathcal{O}(|x'|^2)$ est analytique. La formule explicite pour $\tilde{\varphi}$ est alors moins agréable, mais $\tilde{\varphi}$ est toujours harmonique sur une famille de courbes complexes dans la région $\text{Re } x_n < f(\text{Re } x')$ et on peut appliquer le principe du maximum sans changement. $\#$

On peut améliorer le Théorème 16.5 si l'on fait intervenir $WF_a^{(k+1)}(u)$ (au moins implicitement) avec un choix convenable de Λ_k . Ainsi nous obtiendrons une analogue d'un résultat de Kashiwara (que nous allons aussi démontrer, voir la Remarque 16.8). Soient x_1, \dots, x_n des coordonnées sur Λ_{k-1} , centrées en $\rho_0^{(k-1)}$ et choisissons $\Lambda_k = T_0^*(\Lambda_{k-1})$. Comme opérateur A_{k-1} on peut alors prendre $G_{\lambda \mu_2 \dots \mu_{k-1}}$ (modulo une translation sans intérêt). Pour préparer les démonstrations, nous allons calculer

$$A = S_{\nu, \lambda} G_{\lambda} T_{\lambda} \quad \text{et} \quad B = S_{\nu, \mu \lambda} G_{\mu \lambda} S_{\mu \lambda, \lambda} .$$

D'abord sur $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n)$ ou bien sur $H_{\frac{1}{\epsilon}} (\text{Im } x)^2 - \epsilon (\text{Re } x)^2 (\mathbb{C}^n)$,

$$A = S_{\nu, \lambda} T_{\lambda} \mathcal{F}_{\lambda} = T_{\nu \lambda} \mathcal{F}_{\lambda} ,$$

et

$$Au(x) = \left(\frac{\nu\lambda}{2\Pi i}\right)^{n/2} \left(\frac{\lambda}{2\Pi}\right)^{n/2} \iint e^{-\nu\lambda(x-\xi)^2/2-i\lambda y\xi} u(y) dy d\xi .$$

Eliminant l'intégrale en ξ par la phase stationnaire, on trouve

$$(16.11) \quad A_{\nu,\lambda} u(x) = \left(\frac{\lambda}{2\Pi i}\right)^n \int e^{-\lambda(y^2/2\nu+ixy)} u(y) dy .$$

Ici pour y réel :

$$(16.12) \quad \operatorname{Re}(-\lambda(y^2/2\nu+ixy)) = \frac{\lambda}{2} (\nu(\operatorname{Im} x)^2 - \frac{1}{2\nu} (y - \nu \operatorname{Im} x)^2) .$$

Ensuite, on calcule sur $H_{\Phi-\varepsilon|x|}^2(\mathbb{C}^n)$, $0 < \varepsilon < 1/4$,

$$(16.13) \quad B = S_{\nu,\mu\lambda} G_{\mu\lambda} T_{\mu\lambda} T_{\lambda}^{-1} = S_{\nu,\mu\lambda} T_{\mu\lambda} \mathcal{F}_{\mu\lambda} T_{\lambda}^{-1} = \\ = A_{\nu,\mu\lambda} \circ T_{\lambda}^{-1} .$$

Vu (16.1) et (16.11) on évalue par la phase stationnaire :

$$(16.14) \quad I = (2i)^{-n/2} \left(\frac{\lambda}{\Pi}\right)^n \left(\frac{\mu\lambda}{2\Pi i}\right)^{n/2} \int e^{-\mu\lambda(z^2/2\nu+ixz)-\lambda(z-\bar{y})^2/2} dz = \\ = \left(\frac{\lambda}{2\Pi i}\right)^n \left(\frac{2\nu\mu}{\nu+\mu}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda\mu}{2(\nu+\mu)} (\bar{y}+i\nu x)^2 - \frac{\mu\nu\lambda}{2} x^2}$$

et on trouve donc (même pour $u \in H_{\Phi}(\mathbb{C}^n)$ à cause de (16.16)),

$$(16.15) \quad B_{\nu,\mu,\lambda} u(x) = \\ = \left(\frac{\lambda}{2\Pi i}\right)^n \left(\frac{2\nu\mu}{\nu+\mu}\right)^{n/2} \int e^{-\frac{\mu\lambda}{2(\mu+\nu)} (\bar{y}+i\nu x)^2 - \frac{\mu\nu\lambda}{2} x^2} u(y) e^{-\lambda(\operatorname{Im} y)^2} L(dy) .$$

De plus,

$$(16.16) \quad \operatorname{Re}\left(-\frac{\mu\lambda}{2(\mu+\nu)} (\bar{y}+i\nu x)^2 - \frac{\mu\nu\lambda}{2} x^2\right) - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{Im} y)^2 = \\ = \frac{\lambda\mu\nu}{2} (\operatorname{Im} x)^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\nu}{\mu+\nu} (\operatorname{Im} y + \mu \operatorname{Re} x)^2 + \frac{\mu}{\mu+\nu} (\operatorname{Re} y - \nu \operatorname{Im} x)^2\right) .$$

Avec le choix de $WF_a^{(k+1)}$ que nous avons fait, nous avons

$$(16.17) \quad V^{(k+1)}(x, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}) \sim B_{\mu_{k+1}, \mu_k, \lambda \mu_2 \dots \mu_{k-1}} U^{(k-1)} .$$

Proposition 16.6 : Soit $k \geq 2$, et supposons que $U^{(k-1)} \in H_\varphi^{(k-1)}$, où $\varphi \leq \phi$. Pour se placer dans la situation non-triviale, on suppose que $0 \in \{x \in \mathbb{R}^n ;$

$\varphi(x) = \phi(x)\} = K$. Alors $V^{(k+1)} \in H_{\tilde{\varphi}}^{(k+1)}$, où

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2} \left((Im x)^2 - \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v > 0}} \frac{1}{v} d(v Im x, K)^2 \right) .$$

Ici $\tilde{d}(\xi) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} d(v \xi, K)$ est une fonction Lipschitzienne, en tant que limite d'une

famille de fonctions, uniformément Lipschitziennes par rapport à v .

Démonstration : Il faut estimer l'intégrale (16.15) avec $v = \mu_{k+1}$, $\mu = \mu_k$ et λ remplacé par $\tilde{\lambda} = \lambda \mu_2 \dots \mu_{k-1}$, $u = U^{(k-1)}$. Soit x dans un compact de \mathbb{C}^n . Pour tout $a > 0$ il existe $v(a) > 0$ tel que

$$\left(\frac{1}{v} d(v Im x, K) \right)^2 \geq \tilde{d}(Im x)^2 - \frac{a}{2}$$

pour $0 < v \leq v(a)$. On découpe alors l'intégrale (16.15) suivant les régions

$$I : \begin{cases} |Re y - v Im x|^2 \leq v^2 (\tilde{d}(Im x)^2 - a) \\ |Im y + \mu Re x|^2 \leq v \mu (\tilde{d}(Im x)^2 - a) \end{cases}$$

$$II = \left[I . \right.$$

Dans la région I nous avons $|Im y| \leq C(\sqrt{v\mu} + \mu)$, $|Re y - v Im x|^2 \leq d(v Im x, K)^2 - \frac{a}{2} v^2$, pour $0 < v \leq v(a)$, donc si μ est assez petit en fonction de v nous avons $\varphi(y) \leq \frac{1}{2} (Im y)^2 - 2 \varepsilon(a, v)$ pour $y \in I$, où $\varepsilon(a, v) > 0$ est une fonction croissante de a et de v . Donc pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k$ "comme il faut" en fonction de a et de $v = \mu_{k+1}$ on obtient pour $y \in I$:

$$|U^{(k-1)}(y, \lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})| \leq e^{\tilde{\lambda}((\text{Im } y)^2/2 - \varepsilon(a, \nu))} .$$

Pour le découpage $V^{(k+1)} = V_I + V_{II}$ on trouve alors

$$(16.18) \quad |V_I| \leq C \tilde{\lambda}^n e^{\tilde{\lambda}\nu\mu(\text{Im } x)^2/2 - \tilde{\lambda} \varepsilon(a, \nu)}$$

pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \mu, \nu$ "comme il faut" en fonction de $a > 0$. D'autre part, pour $y \in II$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{\mu+\nu} (\text{Im } y + \mu \text{Re } x)^2 + \frac{\mu}{\mu+\nu} (\text{Re } y - \nu \text{Im } x)^2 \\ & \geq \frac{\mu\nu}{\mu+\nu} (d^2 - a) = \mu\nu d^2 - \frac{\nu\mu}{\mu+\nu} d^2 - \frac{a\mu\nu}{\mu+\nu} \end{aligned}$$

Avec (16.16) on tire l'estimation

$$(16.19) \quad |V_{II}| \leq C \tilde{\lambda}^n e^{\tilde{\lambda}(\nu\mu(\text{Im } x)^2/2 - \nu\mu d^2/2 + \varepsilon + \frac{\nu\mu^2}{2(\mu+\nu)} d^2 + \frac{a\mu\nu^2}{2(\mu+\nu)})}$$

pour $\forall \varepsilon$ si $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ sont "comme il faut" en fonction de ε .

Si $\delta > 0$ est donné on choisit d'abord $a = \delta/3$ (ainsi $\frac{a\mu\nu^2}{2(\mu+\nu)} \leq \delta\nu\mu/3$), $\nu \leq \nu(a)$, ensuite μ assez petit pour que

$$\frac{\mu}{2(\mu+\nu)} \sup_x (d^2) \leq \frac{\delta}{3} \quad , \quad \mu\nu \sup_x (d^2)/2 \leq \varepsilon(a, \nu)$$

On choisit ensuite $\varepsilon \leq \delta\nu\mu/3$ et il est donc clair que

$$(16.20) \quad |V| \leq 2C \tilde{\lambda}^n e^{\tilde{\lambda}\mu\nu((\text{Im } x)^2/2 - d^2/2 + \varepsilon)}$$

pour $\lambda, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}$ "comme il faut" en fonction de $\delta > 0$. Puisque $2C \tilde{\lambda}^n \leq e^{\delta\tilde{\lambda}\mu\nu}$ pour λ assez grand en fonction de μ_2, \dots, μ_{k+1} on obtient la Proposition. $\#$

Théorème 16.7 : Comme dans la Proposition 16.6 on suppose que $k \geq 2$ et on choisit $\Lambda_k = T_o^*(\Lambda_{k-1})$ (où $o = \rho_o^{(k-1)}$ est l'origine pour des coordonnées locales x_1, \dots, x_n sur Λ_{k-1}). Soit $(0, \xi_o) \in \Lambda_k \cap W_a^{(k)}(u)$ et soit $\Gamma_k^* \subset T_o^*(\Lambda_k) \simeq T_o^*(\Lambda_{k-1})$ le cône

des normales de $\Lambda_k \cap WF_a^{(k)}(u)$ dans Λ_k définies comme dans la section 8. Alors $\Gamma_k^* \subset \Gamma_{k-1}$, où Γ_{k-1} désigne le cône tangent en 0 de $WF_a^{(k-1)}(u) \cap \Lambda_{k-1}$. (Par définition, Γ_{k-1} est l'ensemble des limites $\lambda_\nu x_\nu$, $\nu \rightarrow \infty$, où $x_\nu \in WF_a^{(k-1)}(u) \cap \Lambda_{k-1}$, $x_\nu \rightarrow 0$, $\lambda_\nu > 0$).

Démonstration : Soit $0 \neq t \notin \Gamma_{k-1}$. Alors la Proposition 16.6 montre que $(\rho_0, -t) \notin WF_a^{(k+1)}(u)$, où $\rho_0 = (0, \xi_0) \in \Lambda_k$. Alors la première partie du Théorème 16.5 montre que t n'est pas une normale de $WF_a^{(k)}(u) \cap \Lambda_k$. $\#$

Nous laissons comme exercice de vérifier que le Théorème 16.7 est plus général que le Théorème 16.5.

Remarque 16.8 : Le Théorème 16.7 donne des analogues à un résultat de Kashiwara (voir aussi [KK3]). Ce résultat concerne le cas $k=1$ et peut se formuler mot pour mot comme le Théorème 16.7 en remplaçant seulement " $\lambda_{k-1} \cap WF_a^{(k-1)}(u)$ " par "supp u ". On peut l'obtenir par essentiellement la même démonstration que ci-dessus. Cette démonstration est en effet plus simple, car on travaille avec $A_{\mu, \lambda}$ à la place de $B_{\nu, \mu, \lambda}$.

Remarque 16.9 : On peut affaiblir une des hypothèses dans le Théorème 16.7. Soit en effet $0 \neq t_0 \in T_0(\Lambda_{k-1})$ et supposons qu'il existe une suite $a_\nu \searrow 0$, $\nu \rightarrow \infty$ et un nombre $C > 0$ tels que (pour les coordonnées x_1, \dots, x_n) sur Λ_{k-1} on ait :

$$|x - a_\nu t_0| < C |a_\nu| \Rightarrow x \notin WF_a^{(k-1)}(u) \cap \Lambda_{k-1}.$$

Alors t_0 n'est pas un normal de $WF_a^{(k)}(u) \cap \Lambda_k$ au point $(0, \xi_0)$. Pour le voir on remarque d'abord que si l'on considère seulement les valeurs $\mu_{k+1} = a_1, a_2, \dots$ alors la démonstration de la Proposition 16.6 donne toujours $\nu^{(k+1)} \in H_{\tilde{\varphi}}^{(k+1)}$ où $\tilde{\varphi} \leq \phi$ avec inégalité stricte en $\text{Im } x = t_0$. D'autre part il suffit de pouvoir contrôler $\nu^{(k+1)}$ pour $\mu_{k+1} \in \{a_1, a_2, \dots\}$, pour pouvoir conclure à l'aide du principe du maximum. Peut-être faut-il considérer aussi des définitions modifiées de $WF_a^{(k)}$ où on a besoin de varier $(\lambda, \mu_2, \dots, \mu_k)$ seulement dans certains ensembles discrets ?

Remarque 16.10 : Tous les opérateurs auxiliaires que nous avons donnés explicitement sont en effet des opérateurs intégraux de Fourier (comme dans les sections 4 et 11) donnés avec des contours explicites, et c'est probablement l'aspect des contours qu'il faudra utiliser dans une approche plus invariante de la théorie.

Dans cet ordre d'idées remarquons que l'on peut obtenir un "projecteur de Bergmann approché" dans $H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, si φ est réel-analytique est strictement p.l.s.h., de la manière suivante : soit $\psi(x,y)$ la fonction holomorphe, définie dans un voisinage de $\Delta = \{(x,\bar{x}) ; x \in \Omega\} \subset \mathbb{C}^{2n}$, avec $\psi(x,\bar{x}) = \varphi(x)$. Alors il est bien connu que

$$\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \bar{y}} \neq 0 \quad \text{et} \quad 2 \operatorname{Re} \psi(x,\bar{y}) \leq \varphi(x) + \varphi(y) - C(x)|x-y|^2,$$

$0 < C \in C(\Omega)$, pour (x,y) dans un voisinage de Δ . On peut alors écrire un opérateur d'identité approché sur $H_{\varphi}^{loc}(\Omega)$ sous la forme pseudodifférentielle :

$$Bu(x) = \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^n \iint_{\Gamma(x)} e^{2\lambda(\psi(x,\theta) - \psi(y,\theta))} a(x,\theta,\lambda) u(y,\lambda) dy d\theta$$

avec le bon contour $\Gamma(x) : \theta = \bar{y}$, $|x-y| \leq d(x)$, où $d \in C(\Omega; \mathbb{R}_+)$ est assez petite. Plus explicitement

$$Bu(x) = \lambda^n \iint_{|x-y| \leq d(x)} e^{2\lambda\psi(x,\bar{y})} a(x,\bar{y},\lambda) u(y,\lambda) e^{-2\lambda\varphi(y)} L(dy)$$

ce qui peut être considéré comme un projecteur de Bergmann approché. Nous avons donc un lien direct avec l'aspect des opérateurs de Toeplitz, voir Boutet de Monvel [B2].

BIBLIOGRAPHIE

- [Bo] J.M. Bony :
Équivalence des diverses notions de spectre singulier analytique.
Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1976-77, n° 3.
- [Bo 2] J.M. Bony :
Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy.
C.R.A.S. 268 (1969), 1103-1106.
- [Bo-Sch] J.M. Bony, P. Schapira :
Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26,1(1976), 81-140.
- [B] L. Boutet de Monvel :
Opérateurs pseudo-différentiels analytiques.
Notes polycopiées d'un séminaire à Grenoble 1975-76.
- [B 2] L. Boutet de Monvel :
Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargman, et opérateurs de Toeplitz.
Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, n° II bis.
- [B-K] L. Boutet de Monvel, P. Kree :
Pseudodifferential operators and Gevrey classes.
Ann. Inst. Fourier 17(1967), 295-323.
- [B-Sj] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand :
Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö.
Astérisque 34-35(1976), 123-164.
- [B-I] J. Bros, D. Iagolnitzer :
Support essentiel et structure analytique des distributions.
Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, 1975-76, n°18.
- [C-F] A. Cordoba, C. Fefferman :
Wave packets and Fourier integral operators.
Comm. P.D.E. (1978).

BIBLIOGRAPHIE

- [D] M. Derridj :
Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients analytiques.
Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-71, n°12.
- [Gr] A. Grigis :
Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles.
Astérisque 34-35 (1976), 183-205.
- [Gr-Sch-Sj] A. Grigis, P. Schapira, J. Sjöstrand :
Propagation de singularités analytiques pour des opérateurs à caractéristiques multiples.
C.R.A.S. t. 293(2 nov. 1981), I-397-400.
- [Ha] N. Hanges :
Propagation of analyticity along real bicharacteristics
Duke Math. J. 48 n°1 (1981), 269-277.
- [Ha-Sj] N. Hanges, J. Sjöstrand :
Propagation of analyticity for a class of non-micro-characteristic operators.
A paraître.
- [H] L. Hörmander :
Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients.
Comm. Pure Appl. Math. 24(1971), 671-704.
- [H 2] L. Hörmander :
 L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator.
Acta Math. 113(1965), 89-152.
- [H 3] L. Hörmander :
Fourier integral operators I.
Acta Math. 127(1971), 79-183.
- [H 4] L. Hörmander :
A remark on Holmgren's uniqueness theorem.
J. Diff. Geometry, 6(1971), 129-134.
- [K] M. Kashiwara :
Cours en Japonais. Sagaku no Ayumi, 15, (1970), 19-72.

- [K-K] M. Kashiwara, T. Kawai :
Microhyperbolic pseudodifferential operators I.
J. Math. Soc. Japan 27(1975), 359-404.
- [K-K 2] M. Kashiwara, T. Kawai :
Some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations.
Seminar on micro-local analysis, Ann. of Math. Studies n°93, 39-61.
- [K-K 3] M. Kashiwara, T. Kawai :
Second microlocalisation and asymptotic expansions.
Springer Lecture Notes in Physics 126, 21-76.
- [Ko] H. Komatsu :
A local version of Bochner's tube theorem.
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 19(1972), 201-214.
- [La] Y. Laurent :
Deuxième microlocalisation, condition de Levi pour un système.
Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, n°15.
- [L] G. Lebeau :
Fonctions harmoniques et spectre singulier.
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série, 13(1980), 269-291.
- [Li] O. Liess :
Necessary and sufficient conditions for propagation of analytic singularities for constant coefficient partial differential operators.
Preprint n° 526 Techn. Hochschule Darmstadt, 1980.
- [M-Sj] A. Melin, J. Sjöstrand :
Fourier integral operators with complex valued phase functions.
Springer Lecture Notes in Mathematics 459, 121-223.
- [M-Sj 2] A. Melin, J. Sjöstrand :
Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem.
Comm. P.D.E. 1(1976), 313-400.
- [M] S. Mizohata :
Solutions nulles et solutions non-analytiques.
J. Math. Kyoto Univ., 1-2(1962), 271-302.

BIBLIOGRAPHIE

- [N] T. Nagano :
Linear differential systems with singularities and applications to transitive Lie algebras.
J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 398-404.
- [S] M. Sato :
Hyperfunctions and partial differential equations.
Proc. Int. Conf. Funct. Anal. Tokyo 1969, 91-94.
- [S-K-K] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara :
Microfunctions and pseudodifferential equations.
Springer Lecture Notes in Mathematics, 287.
- [Sch] P. Schapira :
Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions.
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^{ème} série 14(1981), 121-139.
- [Sj] J. Sjöstrand :
Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems.
Comm. P.D.E. 5(1)(1980), 41-94.
- [Sj 2] J. Sjöstrand :
Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems II.
Comm. P.D.E. 5(2)(1980), 187-207.
- [Sj 3] J. Sjöstrand :
Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems III.
Comm. P.D.E. 6(5) (1981), 499-567.
- [Sj 4] J. Sjöstrand :
Analytic singularities and micro-hyperbolic boundary value problems.
Math. Ann. 254(1980), 211-256.
- [Sj 5] J. Sjöstrand :
Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24(1) (1976), 141-155.

- [T] J.M. Trepreau :
Sur la régularité microlocale des opérateurs de type principal.
A paraître.
- [U] A. Unterberger :
Les opérateurs métadifférentiels.
Springer Lecture Notes in Physics 126, 205-241.
- [Z] E.C. Zachmanoglou :
Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations.
Arch. Rat. Mech. Anal. 38(1970), 178-188.
- [Lau] P. Laubin :
Sur le wave front set analytique d'une distribution.
Bull. Acad. Royale de Belgique (1981).

J. SJÖSTRAND
Université Paris Sud
Centre d'Orsay
Département de Mathématiques
Bat. 425
91405 Orsay Cedex
France