MICHEL WALDSCHMIDT

Nombres transcendants : quelques résultats récents

Astérisque, tome 94 (1982), p. 187-196

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__94__187_0>

NOMBRES TRANSCENDANTS : QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

Cet exposé, consacré à quelques résultats récents en théorie des nombres transcendants, poursuit la présentation donnée par Masser à Luminy en 1978, puis par Bertrand à Exeter en 1980.

Nous considérons pour commencer les fonctions entières à valeurs entières, avec le théorème de F. Gramain. Nous étudions ensuite deux problèmes concernant les fonctions elliptiques : d'abord l'indépendance algébrique des valeurs, puis l'étude d'une hauteur p-adique sur une courbe elliptique. Après quelques remarques sur les méthodes, nous parlerons d'approximation diophantienne. Enfin nous reviendrons sur l'indépendance algébrique, mais cette fois-ci pour la fonction exponentielle, et pour des grands degrés de transcendance.

D'autres aspects de ce sujet, notamment ceux qui sont liés aux lemmes de zéros et aux groupes algébriques, ont été développés dans l'exposé de Masser à ces journées arithmétiques de Metz.

§ 1. - Fonctions entières à valeurs entières

Les produits canoniques de Weierstrass permettent de construire la "plus petite" fonction entière non identiquement nulle s'annulant sur un sous-ensemble donné du plan complexe. Ainsi, pour l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers ≥ 0, on trouve la fonction

$$- e^{-\gamma z}/\Gamma(-z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{z}{n})\, e^{z/n} .$$

Pour $\mathbb{Z}$, c'est

$$\frac{1}{\pi}\sin \pi z = z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z}\\ n\neq 0}} (1-\frac{z}{n})\, e^{z/n} .$$

Enfin, pour un réseau $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ de $\mathbb{C}$, on obtient la fonction sigma de Weierstrass associée à $\mathcal{L}$:

$$\sigma(z) = z \prod_{\substack{\omega \in \mathcal{L}\\ \omega \neq 0}} (1-\frac{z}{\omega}) \exp(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}) .$$

Cette fonction apparaîtra à plusieurs reprises au cours de cet exposé.

Une des sources de la méthode de Gel'fond Schneider réside dans les travaux qui ont été développés entre 1914 et 1929 sur les fonctions entières à valeurs entières : au lieu d'étudier les fonctions non identiquement nulles ayant des zéros donnés, on considère les fonctions non polynomiales prenant, aux points considérés, des valeurs entières.

Le premier résultat dans cette direction, et probablement le plus célèbre, est celui de Polya selon lequel la fonction 2^z est la "plus petite" fonction entière transcendante envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. En 1921, Carlson montre que la "plus petite" fonction entière transcendante envoyant $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ est

$$(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^z + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^z .$$

Le problème analogue pour $\mathbb{Z}[i]$ est beaucoup plus délicat. Après les travaux de Fukasawa (1926) et Gel'fond (1929), on savait seulement qu'une fonction f entière non polynomiale qui envoie $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifie

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r^2} \log |f|_r \geq \alpha$$

avec α voisin de 10^{-45} . L'exemple de la fonction sigma associée à $\mathbb{Z}[i]$ montre que, nécessairement, $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Il fallut attendre 50 ans pour que cet encadrement soit amélioré. En 1979, Gruman obtient $\alpha > 0{,}039$, et l'année suivante Masser donne $0{,}17 < \alpha \leq \frac{\pi}{2e}$ (voir [G2]) . Enfin F. Gramain montre, fin 1980, que la "bonne" valeur est

$$\frac{\pi}{2e} = 0{,}5778\ldots .$$

THÉORÈME 1 (F. Gramain [G1]). - Soient K un corps quadratique imaginaire, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, et $-\Delta$ son discriminant. Soit f une fonction entière transcendante vérifiant $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Alors

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \log |f|_r \geq \pi / e\sqrt{\Delta} ,$$

et cette inégalité est la meilleure possible.

La partie principale de la démonstration repose sur une élaboration de la méthode de transcendance de Schneider. Dès 1929 Gel'fond avait noté le lien entre cette question et l'étude arithmétique du nombre e^{π} : c'est en appliquant sa méthode de série d'interpolation à la fonction $e^{\pi z}$ qu'il avait obtenu la transcendance de e^{π} .

A ce propos, les deux problèmes suivants résistent encore.

PROBLÈME 1. - Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $q > 1$, on ait $|e^{\pi} - \frac{p}{q}| > q^{-C}$.

PROBLÈME 2. - Montrer que les deux nombres π et e^{π} sont algébriquement indépendants.

§ 2. - Indépendance algébrique et fonctions elliptiques

La fonction σ associée au réseau $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[i]$ vérifie

$$\sigma(1/2) = 2^{5/4} . \pi^{1/2} . e^{\pi/8} . \Gamma(1/4)^{-2} .$$

Il se pourrait que la solution du problème 2 nécessite la démonstration de l'énoncé plus général suivant :

PROBLÈME 3. - Les nombres π , e^{π} , $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants.

Il y a quelques années, Chudnovsky a montré que les deux nombres π et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants (cf. [C 1], [M]). Bien entendu, un corollaire est la transcendance de $\Gamma(1/4)$, mais on ne connait pas de démonstration directe du corollaire.

Plus récemment, E. Reyssat [R 2] a obtenu de nouveaux résultats d'indépendance algébrique. Ainsi, pour la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - 4x$ de réseau des périodes $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega i$, avec

$$\omega = \frac{1}{2} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \Gamma(1/4)^2/\sqrt{8\pi} ,$$

en notant $\zeta = \sigma'/\sigma$, $\wp = -\zeta'$, et $t = \Gamma(1/4)^2/2\sqrt{\pi}$, il montre que les deux nombres

$$e^{i\pi\sqrt{2}}, \quad \wp(t) + i(\zeta(t) - \frac{2\pi}{t})$$

sont algébriquement indépendants.

Voici un énoncé qu'il obtient pour des fonctions elliptiques plus générales.

THÉORÈME 2 (E. Reyssat [R 2]). - Soit $\mathcal{L}$ un réseau de $\mathbb{C}$ tel que $g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$. Soit u un nombre complexe $\neq 0$ tel que $\mathbb{Z}u \cap \mathcal{L} = 0$ et tel que $\wp(u)$ soit algébrique. Soit $\omega \in \mathcal{L}$; $\omega \neq 0$; notons $\eta = \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$. Alors deux des trois nombres

$$\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u, \quad \exp(i\pi u/\omega), \quad \sigma(u)\exp(-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2)$$

sont algébriquement indépendants.

D'autres énoncés de [R 2] montrent que certains corps ont un degré de transcendance ≥ 3 (voir aussi [C 2], [C 3]).

§ 3. - Hauteur p-adique et transcendance

Sous les hypothèses du théorème 2, la transcendance du nombre $\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u$ a été démontrée par Chudnovsky (voir [C 1]), et celle de $\exp(i\pi u/\omega)$ dans le cas de multiplications complexes par D. Bertrand [Be 5], mais on ne sait pas si le troisième nombre, $\sigma(u)\exp(-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2)$, est transcendant. Même le cas particulier suivant n'est pas connu [Be 2], [Be 5] :

PROBLÈME 4. - Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$. Soit $\hat{h}$ la hauteur de Néron Tate sur E. Si P est un point de $E(\mathbb{Q})$ d'ordre infini, le nombre $\exp(\hat{h}(P))$ est-il transcendant ?

En fait c'est surtout l'analogue p-adique de ce problème qui est intéressant. Soit E une courbe elliptique admettant des multiplications complexes par un corps quadratique imaginaire K, et définie sur une extension finie F de K. Diverses fonctions "hauteur p-adique" sur $E(F)$ ont été introduites et étudiées par Néron, Gross, Bernardi, Oesterlé, Perrin-Riou (voir le Séminaire de Théorie des Nombres Delange-Pisot-Poitou, 1980/81). En général on ne sait pas si les formes bilinéaires associées sont non dégénérées, ou même non identiquement nulles. Voici le seul résultat que l'on connaisse actuellement.

THÉORÈME 3 (D. Bertrand [Be 5]). - On suppose que la courbe elliptique E admet K pour corps de définition. Soit p un nombre premier décomposé dans K, $p = \mathfrak{p} . \overline{\mathfrak{p}}$, et soit $P \in E(K)$. Si $\hat{h}_{\mathfrak{p}}(P) = 0$, alors P est un point de torsion.

La démonstration utilise la méthode de Baker, avec le "lemme de zéros" de Masser et Wüstholz [M-W], en faisant intervenir un groupe algébrique extension de E par $\mathbb{G}_m^2$. C'est aussi la méthode de Baker que Laurent utilise pour étudier les périodes d'intégrales elliptiques de troisième espèce (voir [L 1] et [Be 3] § 1). D'autres résultats de transcendance sur les fonctions sigma et thêta ont été obtenus par D. Bertrand et M. Laurent à partir du critère de Schneider-Lang, donc grâce à la méthode de Gel'fond [L 3], [Be-L], [Be 4].

§ 4. - Les méthodes

Pour traiter ce genre de problèmes il y a essentiellement trois méthodes de transcendance : Gel'fond, Schneider et Baker. Maintenant il y a trois manières différentes, correspondant à ces trois méthodes, de démontrer le théorème suivant de Baker : si $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ sont des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, alors ils sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

Chacune des trois méthodes permet aussi de démontrer l'analogue elliptique de ce résultat dans le cas de multiplication complexe (théorème de Masser). Mais pour l'instant seule la méthode de Gel'fond (via le critère de Schneider Lang) permet de résoudre le cas où il n'y a pas multiplication complexe [Be - M].

La méthode de Baker donne actuellement les meilleures minorations. Mais déjà Yu [Y] a obtenu un énoncé effectif intéressant par la méthode de Schneider. Il n'y a pas d'obstacle théorique à faire de même pour le cas multiplicatif [S]. Enfin la méthode de Schneider en plusieurs variables a d'autres applications [W].

Dans le tableau qui suit, les noms encadrés correspondent aux énoncés quantitatifs (minorations de formes linéaires)

	méthode de Baker	méthode de Gel'fond	méthode de Schneider
cas multiplicatif	$\boxed{\text{Baker}}$	Bertrand-Masser	Sebti
elliptique avec c. m.	$\boxed{\text{Masser}}$	Bertrand-Masser	$\boxed{\text{Yu}}$
elliptique sans c. m.	?	Bertrand-Masser	?

§ 5. - Approximation diophantienne

Les démonstrations d'indépendance linéaire de Bertrand-Masser ([Be -M], [Be 1], [Be 3] § 2, [L 3]) ne semblent pas bien adaptées pour minorer des formes linéaires. Néanmoins la méthode de Gel'fond, qui en est la base, conduit à des résultats effectifs [Bi 1], [Bi 2]. Des mesures d'irrationalité remarquables ont été annoncées par Chudnovsky [C 4], qui combine la méthode de Gel'fond à celle des G-fonctions de Siegel. On trouve dans [C 4] les inégalités suivantes :

$$|\Gamma(1/4) - \frac{p}{q}| > q^{-C} ,$$

et

$$|B(a, b) - \frac{p}{q}| > q^{-C} .$$

A propos de la fonction bêta, rappelons un résultat antérieur de M. Laurent [L 2] : si a et b sont des nombres rationnels avec a, b, $a+b$ non entiers, il existe $C = C(a, b) > 0$ avec la propriété suivante. Soit d un dénominateur commun de a et b. Notons $n = \max(1, \varphi(d)/2)$ où φ est l'indicatrice d'Euler. Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme non nul de degré $\leq D$ et de hauteur $\leq H$ (avec $H \geq e^e$), on a

$$|P(B(a, b))| > \exp\{-C D^n T (\log T)^n\}$$

avec $T = \log H + D \log D$.

L'utilisation des G-fonctions ne permet pas d'obtenir des estimations aussi précises en fonction du degré, mais néanmoins elles permettent d'obtenir des mesures de transcendance. Voici un exemple, dû à Reyssat [Re 3] qui généralise les inégalités "bien connues"

$$|\log 2 - \frac{p}{q}| > q^{-4,62\ldots} \quad \text{et} \quad |\log 3 - \frac{p}{q}| > q^{-14,66\ldots} .$$

Soit $r = \frac{a}{b}$ un nombre rationnel > 1. Soit ξ un nombre algébrique de degré $\leq d$ et de hauteur usuelle (= maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal) majorée par H, avec $H \geq e$. Enfin soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier m tel que

$$d \leq 1 - \frac{m-1+\log b + m\log(r^{1/m}-1)}{m-1+\log b + m\log(r^{1/m}+1)} .$$

Un tel choix est possible, car le second membre est équivalent à $\frac{\log m}{1+\log 2}$ pour $m \to \infty$. Alors

$$|\log r - \xi| > H^{-\varkappa} \quad \text{pour } H \geq H_o(r, d, m, \varepsilon),$$

où

$$\varkappa = (1+\varepsilon)\frac{m(m-1)\left(\log(r^{1/m}-1) - \log(r^{1/m}+1)\right)}{d(m-1+\log b) + (d-1)m\log(r^{1/m}+1) + m\log(r^{1/m}-1)}$$

et $H_o(r, d, m, \varepsilon)$ est une fonction explicite de r, d, m et ε.

D'autre part la thèse de troisième cycle de M. Huttner [H] contient une étude détaillée de l'approximation rationnelle de valeurs de fonctions spéciales.

§ 6. - Indépendance algébrique : grands degrés de transcendance

Les résultats dont nous avons parlé au § 2 donnaient l'indépendance algébrique de 2 ou 3 nombres. Les énoncés concernant l'indépendance algébrique de n nombres, avec n quelconque, sont beaucoup plus rares. Pour la méthode de Gel'fond Schneider la seule démonstration complète publiée d'un tel résultat est celle de Philippon [P] et Reyssat [R 1] qui démontrent par exemple le théorème suivant :

THÉORÈME 4 (Chudnovsky, Philippon, Reyssat). - Soient $x_1, \dots, x_k$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $y_1, \dots, y_\ell$ des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $A \geq 2$ et tout $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ avec $0 < \max |a_i| \leq A$, on ait

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \right| \geq \exp\{-(\log A)^C\},$$

et de même, pour tout $B \geq 2$ et tout $(b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ avec $0 < \max |b_j| \leq B$, on ait

$$\left| \sum_{j=1}^{\ell} b_j y_j \right| \geq \exp\{-(\log B)^C\}.$$

Alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $\ell k + \ell + k$ nombres

$$x_i\,,\ y_j\,,\ e^{x_i y_j}\,,\qquad (1\leq i\leq k\ ,\ 1\leq j\leq \ell)$$

<u>est minoré par</u>

$$\frac{\log\left(1+\frac{k\ell}{k+\ell}\right)}{\log 2}$$

Cet énoncé se trouve déjà dans un preprint (en russe) de Chudnovsky (Kiev 1974) mais la démonstration y est tellement longue et compliquée (et même parfois obscure) que l'auteur a, semble-t-il, renoncé à en rédiger les détails et à la publier. Une excellente discussion de cette méthode a été donnée par Brownawell [Br]. En comparaison, la méthode de Philippon et Reyssat est remarquablement élégante.

Chudnovsky a annoncé de nombreux autres résultats sur les grands degrés de transcendance [C1], [C3], mais sans démonstration. Certaines de ses affirmations ayant maintenant plus de cinq ans d'âge, il convient plutôt de les traiter comme des problèmes ouverts. D'autres, plus récentes, sont un peu trop optimistes (voir l'analyse de [C 3] par D. W. Masser dans Zentralblatt).

Ce domaine vient de connaître de nouveaux développements, grâce à des travaux de Masser et Wüstholz [M - W], et, très récemment, de Philippon. On en reparlera aux prochaines journées arithmétiques.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[Be 1] D. BERTRAND, <u>Variétés abéliennes et formes linéaires d'intégrales elliptiques</u>, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1979-80 (Séminaire Delange-Pisot-Poitou), Progress in Math. vol. 12 (1981), p. 15-27, Birkhäuser Verlag.

[Be 2] D. BERTRAND, <u>Problèmes de transcendance liés aux hauteurs sur les courbes elliptiques</u>, Bulletin de la section des sciences du C.T.H.S., n° 3, p. 55-63.

[Be 3] D. BERTRAND, <u>Abelian functions and transcendence</u>, Proc. of the Exeter Journées Arithmétiques 1980.

[Be 4] D. BERTRAND, <u>Représentations des corps de nombres et théorie de Baker</u>, Séminaire Théorie des Nombres (Bordeaux), 1980-81, n° 14, 6 p.

[Be 5] D. BERTRAND, Valeurs de fonctions thêta et hauteurs p-adiques, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980-81 (Séminaire Delange-Pisot-Poitou), Progess in Math., Birkhäuser Verlag, à paraître.

[Be-L] D. BERTRAND et M. LAURENT, Propriétés de transcendance de nombres liés aux fonctions thêta, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 292 (1981), 747-749.

[Be-M] D. BERTRAND and D.W. MASSER, Linear forms in elliptic integrals, Invent. Math., 58 (1980), 283-288.

[Bi 1] A. BIJLSMA, Algebraic points of abelian functions in two variables, Ann. Fac. Sci. Toulouse, à paraître.

[Bi 2] A. BIJLSMA, Simultaneous approximation of the coordinates of algebraic points of abelian functions, Koninkl. Nederl. Akad. van Wet., à paraître.

[Br] D. BROWNAWELL, On the development of Gel'fond's method, Lecture Notes in Math., 751 (1979), 18-44.

[C 1] G. V. CHUDNOVSKY, Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions, Proc. Intern. Congr. Math., Helsinki (1978), 339-350 (voir M.R. 81 j : 10051).

[C 2] G. V. CHUDNOVSKY, Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points - Elliptic analogue of the Lindemann-Weierstrass theorem, Invent. Math., 61 (1980), 267-290.

[C 3] G. V. CHUDNOVSKY, Indépendance algébrique dans la méthode de Gel'fond-Schneider, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 291 (1980), 365-368 (voir Zbl. 456.10016)

[C 4] G. V. CHUDNOVSKY, Sur la mesure de la transcendance de nombres dépendant d'équations différentielles de type Fuchsien, C.R.Acad. Sc. Paris, Sér. A, 291 (1980), 485-487 (voir aussi les comptes rendus des Journées arithmétiques d'Exeter).

[G 1] F. GRAMAIN, Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond, Invent. Math., 63 (1981), 495-506.

[G 2] F. GRAMAIN, Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond-Gruman-Masser, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980-81 (Séminaire Delange-Pisot-Poitou), Progress in Math. Birkhäuser Verlag, à paraître.

[H] M. HUTTNER, Mesures de l'irrationalité de certains nombres liés aux fonctions hypergéométriques, Thèse de troisième cycle, Lille, 1981.

[L 1] M. LAURENT, Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, I, J. reine angew. Math., 316 (1980), 122-139 ; II, id., à paraître.

[L 2] M. LAURENT, Approximation diophantienne de valeurs de la fonction bêta aux points rationnels, Annales Fac. Sciences Toulouse, 2 (1980), 53-65.

[L 3] M. LAURENT, Indépendance linéaire de valeurs de fonctions doublement quasi-périodiques, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 290 (1980), 397-399.

[M] D. W. MASSER, Some recent results in transcendence theory, Soc. Math. France, Astérisque 61 (1979), 145-154.

[M-W] D. W. MASSER and G. WÜSTHOLZ, Zero estimates on group varieties, Invent. Math., 64 (1981), 489-516.

[P] P. PHILIPPON, Indépendance algébrique de valeurs de fonctions exponentielles p-adiques, J. reine angew. Math., 329 (1981), 42-51.

[R 1] E. REYSSAT, Un critère d'indépendance algébrique, J. reine angew. Math., 329 (1981), 66-81.

[R 2] E. REYSSAT, Propriétés d'indépendance algébrique de nombres liés aux fonctions de Weierstrass, Acta Arithm., à paraître.

[R 3] E. REYSSAT, Approximation algébrique de logarithmes de nombres rationnels, manuscrit.

[S] S. SEBTI-CHAOUNI, Le théorème de Baker par la méthode de Schneider, Thèse de troisième cycle, Paris VI, 1981 (Publ. Math. Univ. P et M. Curie n° 43, 1981).

[W] M. WALDSCHMIDT, Sous-groupes analytiques de groupes algébriques, manuscrit.

[Y] Kun Rui YU, Special linear forms in elliptic logarithms, Oberwolwach, 1981.

-:-:-:-

Michel WALDSCHMIDT
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS CEDEX 05