

Astérisque

J. P. BRASSELET

M. H. SCHWARTZ

Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 93-147

http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__93_0

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES CLASSES DE CHERN
D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE COMPLEXE

J.P. BRASSELET ET M.H. SCHWARTZ

INTRODUCTION

=====

Soit W un ensemble analytique complexe irréductible, de dimension pure $2n$, sous-ensemble d'une variété analytique complexe M de dimension $2N$. Dans [1], l'un d'entre nous a défini (en cohomologie) des classes obstructrices liées à une stratification de W . Elles coïncident avec les classes de Chern usuelles, dans le cas d'une variété analytique complexe. D'autre part, Mac-Pherson [2], en réponse à une conjecture de Deligne et Grothendieck, a montré l'existence (en homologie) de classes de Chern pour les ensembles analytiques complexes.

Le but de ce travail est de montrer le résultat suivant :

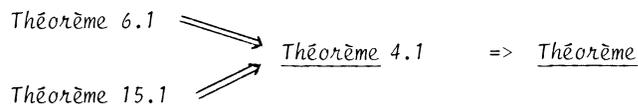
Théorème : Les classes de Mac-Pherson sont images, par isomorphisme d'Alexander $H_W^*(M) \rightarrow H_{2N-*}(W)$, des classes de M.H. Schwartz (*).

Les classes de Mac-Pherson sont construites à l'aide des classes de Chern-Mather. L'essentiel de la démonstration va consister à déterminer un cycle particulier de la classe de Chern-Mather. Le théorème s'en déduira en explicitant un cycle de la classe de Mac-Pherson.

(*) Cette dénomination, utilisée lors de l'exposé, n'est pas celle sous laquelle ces classes ont été introduites ([1] et [5]).

| | <u>Pages</u> |
|---|--------------|
| <u>I - RAPPELS ET RÉSUMÉ DE LA DÉMONSTRATION.</u> - | |
| 1 - Les classes de Chern-Mather $c_M(W)$. | 3 |
| 2 - L'obstruction locale d'Euler. | 3 |
| 3 - Les classes de M.H. Schwartz. | 4 |
| 4 - Un cycle particulier de la classe de Chern-Mather (th. 4.1). | 7 |
| <u>II - DÉFINITION COMBINATOIRE DE LA CLASSE DE CHERN-MATHER.</u> - | |
| 5 - Triangulations de W et de \widehat{W} . | 10 |
| 6 - Le théorème 6.1. | 17 |
| <u>III - CLASSES DE M.H. SCHWARTZ.</u> - | |
| 7 - Construction du prolongement radial local. | 19 |
| 8 - Définition des classes. | 26 |
| <u>IV - LE THÉORÈME DE PROPORTIONNALITÉ.</u> - | |
| 9 - Relèvement des sections de E . | 29 |
| 10 - Une définition équivalente de l'obstruction d'Euler locale. | 30 |
| 11 - Énoncé du théorème de proportionnalité (th. 11.1) | 33 |
| 12 - L'obstruction $\text{Obs}(\widehat{Z}_r, \widehat{E}_r, \widehat{B}^{2P})$ ne dépend que de l'indice $I(\gamma)$ du dernier vecteur de Z_r . | 35 |
| 13 - L'obstruction et proportionnelle à $I(\gamma)$. | 38 |
| 14 - Le coefficient de proportionnalité est l'obstruction d'Euler locale. | 44 |
| 15 - Le théorème 15.1. | 50 |
| <u>BIBLIOGRAPHIE.</u> - | 53 |

Schéma de la démonstration



I - Rappels et résumé de la démonstration.

1) Les classes de Chern-Mather.

Soit W un ensemble analytique complexe, irréductible, et de dimension pure (complexe) n . On suppose que W est un sous-ensemble analytique d'une variété analytique complexe M , de dimension (complexe) N . Notons $T(M)$ le fibré tangent à M et \hat{M} le fibré associé à $T(M)$, de fibre la grassmannienne des sous-espaces de dimension n de \mathbb{C}^N . La projection $\mu : \hat{M} \rightarrow M$ admet, au-dessus de la partie régulière de W , une section, donnée en tout point x , par l'espace vectoriel tangent en x à W . On appelle transformé de Nash, et on note \hat{W} , l'adhérence dans \hat{M} de l'image de cette section. La restriction de μ à \hat{W} est notée $\nu : \hat{W} \rightarrow W$. Enfin, on désigne par \hat{E} le fibré vectoriel de base \hat{W} , restriction du fibré canonique sur \hat{M} .

Les classes de Chern-Mather sont définies par la formule :

$$(1) \quad c_M(W) = \nu_* \beta(c(\hat{E}))$$

où β est l'homomorphisme de dualité de Poincaré, cap-produit par la classe fondamentale (d'orientation) de \hat{W} dans $H_{2n}(\hat{W})$ [3] et où $c(\hat{E})$ désigne la classe de Chern de \hat{E} .

2) L'obstruction locale d'Euler.

Soit a un point de W , et $z = (z_1, \dots, z_N)$ un système de coordonnées locales définies dans M au voisinage de a , telles que $z_i(a) = 0$. La fonction $z \rightsquigarrow ||z||^2 = z_i \bar{z}_i$ est une fonction à valeurs réelles et $d||z||^2$ peut être considéré comme une section du fibré dual, réel, $T(M)^\vee$ orienté par sa structure complexe. On note r la restriction de $d||z||^2$ au dual \hat{E}^\vee de \hat{E} .

Pour tout ϵ , on désigne par B_ϵ la boule de rayon ϵ : $\{z : ||z|| \leq \epsilon\}$ et par S_ϵ la sphère $\{z : ||z|| = \epsilon\}$. Si ϵ est suffisam-

ment petit, la section r est non nulle au-dessus de $v^{-1}(B_\varepsilon - \{0\})$ (*). L'obstruction à étendre r en une section non nulle de \widehat{E}^\vee , au-dessus de $v^{-1}(B_\varepsilon)$, évaluée sur la classe fondamentale d'orientation de $H_{2n}(v^{-1}(B_\varepsilon), v^{-1}(S_\varepsilon))$; \mathbf{Z} est appelée obstruction d'Euler locale de W en a et est notée :

$$(2) \quad \text{Eu}_a(W) = \text{Obs}(r, \widehat{E}^\vee, v^{-1}(B_\varepsilon)).$$

Cette quantité est indépendante des choix effectués [2], nous le redémontrons au paragraphe 10.

3) Les classes de M.H. Schwartz.

Dans la suite, nous noterons $\{V_i\}$ une stratification de W telle que :

- (i) $\{V_i\}$ satisfait aux conditions de Whitney ;
- (ii) l'obstruction d'Euler locale $\text{Eu}_a(W)$ est constante sur chaque strate.

Nous verrons ultérieurement (corollaire 10.2) que (i) implique (ii), donc qu'une telle stratification existe toujours.

On considère M comme munie d'une stratification constituée des strates $\{V_i\}$ de W et de $V_0 = M - W$.

a) Triangulations de W .

Soit (K) une triangulation de M compatible avec la stratification (chaque simplexe ouvert K_α est contenu dans une seule strate), elle-même subdivision barycentrique d'une telle triangulation. On suppose que (K) fait que M une variété combinatoire, et on note (D) une triangulation cellulaire de M , duale de (K) , construite à l'aide d'une subdivision barycentrique (Δ) de (K) .

Toute orientation de (K) (compatible avec les orientations des strates), détermine une orientation de (D) , de manière à ce que l'orientation d'un simplexe K_α^q suivie de celle de la cellule duale D_α^{2N-q} donne l'orien-

(*) En se plaçant dans l'espace \mathbb{C}^N des coordonnées, r ne s'annule en $\widehat{x} = v^{-1}(x)$ que si le n -plan \widehat{x} est orthogonal à Ox . D'après la condition (b) de Whitney, ceci est impossible dans un voisinage assez petit de 0 .

tation de M . On note encore D_α^k la (D) -chaîne cellulaire orientée, élémentaire, que définit la k -cellule D_α^k , munie de son orientation.

Définition 3.1. - On définit δ comme étant l'application qui, à toute (D) -chaîne élémentaire D_α^k , fait correspondre la (D) -cochaîne de degré k , duale de D_α^k et notée $\delta(D_\alpha^k)$. On a :

$$(3) \quad \langle \delta(D_\alpha^k), D_\beta^k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Définitions de E et de E_r .

Soit $x \in M$ et $T(M, x)$ l'espace vectoriel tangent en x à M . Nous dirons qu'un vecteur $X(x)$ de $T(M, x)$ est dans $E(x)$ si $X(x)$ est tangent à la strate de M contenant x . Le sous-espace E de $T(M)$ ainsi défini est muni d'une projection $\eta : E \rightarrow M$. Une section de E au-dessus d'une partie A de M est un champ continu de vecteurs X , défini sur A et tangent en tout point x de A à la strate de M contenant x .

On associe à E , l'espace $E^* = E_1$ des vecteurs non nuls de E et, plus généralement, l'espace E_r des r -repères complexes (ordonnés) tangents aux strates.

Les classes de M.H. Schwartz sont définies comme obstruction à la construction d'une section de E_r au-dessus de W . Pour les calculer, on construit, une section particulière de E_r , appelée champ radial, au-dessus de $W \cap (D)^{2P}$, où $(D)^{2P}$ désigne le $2P$ -squelette de (D) , avec $P = N-r+1$.

Nous rappelons ci-après les propriétés du champ radial. La construction en sera explicitée au paragraphe 7.

c) Propriétés du champ radial.

Dans toute la suite, nous noterons $P = N-r+1$; les champs de r -repères seront notés comme $Z_r = (Z_{r-1}, X_r)$ le dernier vecteur étant individualisé. Nous précisons, au chapitre III, la proposition suivante :

Proposition 3.2. [5].- On peut construire sur $(D)^{2P}$ une section à singularités de E_r , appelée champ radial, notée Z_r et dont les singularités, notées a_k , satisfont aux propriétés suivantes :

(i) Z_r n'a que des points singuliers isolés, ceux-ci sont des zéros du dernier vecteur X_r .

Sur $(D)^{2P-1}$, Z_r n'a pas de point singulier.

Sur $(D)^{2P}$, le champ de $(r-1)$ -repères Z_{r-1} n'a pas de point singulier.

(ii) Soit $a \in V_i^{2s} \cap (D)^{2P}$ un point singulier de Z_r . Si $s > r-1$, l'indice de Z_r en a , noté $I(Z_r, a)$, est égal à l'indice de la restriction de Z_r à $V_i^{2s} \cap (D)^{2P}$, considéré comme champ de r -repères tangent à V_i^{2s} . Si $s = r-1$, on a $I(Z_r, a) = +1$.

(iii) A l'intérieur d'une cellule D_α^{2P} qui rencontre plusieurs strates, Z_r n'a de singularités que sur la strate de dimension la plus petite.

De plus, le champ est sortant de certains tubes $\bigoplus_\mu (V_i)$, voisinages de V_i dans M (définis au (d) du paragraphe 7).

d) Définition des classes.

Soit V_i^{2s} une strate de W et T_i la réunion des cellules fermées de (D) qui rencontrent V_i^{2s} . Le champ Z_r détermine un cocycle d'obstruction (voir [4] ; théorème 32.4 et (b) du paragraphe 8) dans l'espace des (D) -cochaînes de dimension $2P$, $C_{(D)}^{2P}(M, M-T_i)$. On le note \tilde{c}_i et on a :

$$\langle \tilde{c}_i, D_\alpha^{2P} \rangle = \sum_{a_k \in V_i \cap D_\alpha^{2P}} I(Z_r, a_k)$$

Soit T la réunion des cellules fermées de (D) qui rencontrent W ; on note encore \tilde{c}_i l'image de c_i dans $c_{(D)}^{2P}(M, M-T)$ et : $\tilde{c} = \sum_i \tilde{c}_i$, la sommation étant étendue sur les strates V_i de W . On a :

$$(4) \quad \tilde{c} = \sum_i \tilde{c}_i = \sum_{D_\alpha^{2P} \cap W \neq \emptyset} \mu_\alpha \delta(D_\alpha^{2P})$$

où $\mu_\alpha = \sum I(Z_r, a_k)$, la sommation étant étendue sur les singularités a_k de Z_r situées dans $D_\alpha^{2P} \cap W$ (qui, en fait, sont toutes situées dans une même strate).

La classe de \tilde{c} dans $H_W^{2P}(M)$ est la classe de M.H. Schwartz $c^P(W)$, de W .

Dans [5], on montre que cette classe est indépendante de la stratification de Whitney et du champ radial considérés. Il est aussi possible de montrer (de manière très longue...) qu'elle est indépendante des triangulations. Cependant, le théorème que nous nous proposons de démontrer donne une bien meilleure démonstration de ce dernier point. Il permet de montrer aussi que cette classe est bien définie en cohomologie entière.

4) Un cycle particulier de la classe de Chern-Mather.

Nous démontrerons, aux paragraphes 6 et 15 les théorèmes 6.1 et 15.1 qui impliquent, de manière immédiate le théorème 4.1 ci-dessous. Nous montrons ici que le théorème principal est conséquence de ce théorème 4.1 et du corollaire 10.2.

Théorème 4.1.- Soit $\tilde{c} = \sum_{D_\alpha^{2P} \cap W \neq \emptyset} \mu_\alpha \delta(D_\alpha^{2P})$ un cocycle de la classe

de M.H. Schwartz $c^P(W)$; la classe de Chern-Mather de degré $r-1$ contient le cycle :

$$\sum_{K_\alpha^{2r-2} \subset W} \text{Eu}_{a_\alpha}(W) \mu_\alpha K_\alpha^{2r-2}$$

où μ_α est le coefficient du cocycle \tilde{c} relatif à la cellule D_α^{2P} duale de K_α^{2r-2} , et où a_α est un point quelconque de K_α^{2r-2} .

Démonstration du théorème, à partir du théorème 4.1.

Comme l'obstruction d'Euler est constante sur chaque strate, on peut trouver des entiers n_i tels que, pour tout point a de W , on ait :

$\sum_i n_i \text{Eu}_a(\bar{V}_i) = 1$. (Procéder par dimension décroissante des strates : si les entiers sont déterminés sur les strates V_j telles que $V_i \subset \bar{V}_j$, alors l'équation $\sum_j n_j \text{Eu}_a(\bar{V}_j) + n_i \text{Eu}_a(\bar{V}_i) = 1$ détermine n_i , puisque, pour $a \in V_i$, $\text{Eu}_a(\bar{V}_i) = 1$).

La classe de Mac-Pherson, de degré $r-1$, est définie par :

$$c_{r-1}(W) = c_{M,r-1}(\sum_i n_i \bar{V}_i) = \sum_i n_i \text{incl}_* c_{M,r-1}(\bar{V}_i)$$

où incl désigne l'inclusion de \bar{V}_i dans W ([2], Paragraphe 2).

En partant d'un cocycle de la classe de M.H. Schwartz, tel que (4), on peut appliquer le théorème 4.1. à chaque \bar{V}_i . La classe de Mather $c_{M,r-1}(\bar{V}_i)$ contient le cycle :

$$\sum_{K_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i} \text{Eu}_{a_\alpha}(\bar{V}_i) \mu_\alpha K_\alpha^{2r-2}$$

et donc, la classe de Mac-Pherson contient le cycle :

$$\sum_i n_i \sum_{K_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i} \text{Eu}_{a_\alpha}(\bar{V}_i) \mu_\alpha K_\alpha^{2r-2}.$$

Dans cette somme, le coefficient de $\mu_\alpha K_\alpha^{2r-2}$ est : $C_\alpha = \sum_i n_i \text{Eu}_{a_\alpha}(\bar{V}_i)$, la sommation étant étendue sur les strates V_i telles que $K_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i$. Il vient $C_\alpha = 1$, on obtient donc un cycle de la classe de Mac-Pherson de la forme :

$$\sum_{K_\alpha^{2r-2} \subset W} \mu_\alpha K_\alpha^{2r-2}$$

L'isomorphisme d'Alexander $H^{2P}(M, M-W) \longrightarrow H_{2r-2}(W)$ est induit par l'isomorphisme :

$$C_{(D)}^{2P}(M, M-\overset{\circ}{T}) \longrightarrow C_{2r-2, (K)}(W)$$

qui, à la (D)-cochaîne $\delta(D_\alpha^{2P})$ telle que $D_\alpha^{2P} \cap W \neq \emptyset$, fait correspondre la (K)-chaîne K_α^{2r-2} ([3] ; Définition de l'isomorphisme d'Alexander). Par cet isomorphisme, le cycle que nous venons de déterminer est image du cocycle (4). On en déduit le théorème.

Remarque. - Nous avons, en fait, montré le résultat suivant :

Soit (K) une triangulation simpliciale de M compatible avec une stratification de Whitney et soit Z_r un champ radial défini sur le $2P$ -squelette $(D)^{2P}$ d'une décomposition cellulaire duale de (K). On note $I(Z_r, a)$ l'indice de Z_r en son point singulier a et D_α^{2P} la cellule duale de K_α^{2r-2} . Alors la classe de Mac-Pherson de degré $r-1$ contient le cycle

$$\sum_{\substack{\square \\ K_\alpha^{2r-2} \subset W}} \mu_\alpha K_\alpha^{2r-2} \quad \text{où} \quad \mu_\alpha = \sum_{\substack{\square \\ a_k \in D_\alpha^{2P} \cap W}} I(Z_r, a_k).$$

II - Définition combinatoire de la classe de Chern-Mather.

5) Triangulations de W et de \hat{W} .

Dans la suite, nous noterons $\overset{\circ}{W}$ l'ensemble des points réguliers de W .

Lemme 5.1. - Soit $x \in V_i^{2s}$, alors :

$$\text{si } s = n, \quad \dim v^{-1}(x) = 0$$

$$\text{si } s \leq n-1, \quad \dim_{\mathbb{R}} v^{-1}(x) = 2d \leq 2n-2s-2.$$

Démonstration : Nous pouvons munir \hat{W} d'une stratification $\{\hat{V}_j\}$ telle que, pour tout j , la restriction de v à \hat{V}_j soit une application de rang constant de \hat{V}_j sur une strate V_i . $v^{-1}(V_i^{2s})$ est alors réunion de strates de \hat{W} sur chacune desquelles, la restriction de v est de rang constant. Les strates de dimension maximum de $v^{-1}(V_i^{2s})$ sont donc de dimension $2s + 2d$. D'autre part, $v^{-1}(V_i^{2s})$ est un sous-ensemble analytique de \hat{M} contenu dans l'adhérence de la variété $v^{-1}(\overset{\circ}{W})$. On a :

$$\dim v^{-1}(V_i^{2s}) = 2s + 2d < \dim v^{-1}(\overset{\circ}{W}) = 2n$$

d'où le résultat.

Nous supposons la condition suivante vérifiée. Nous pensons qu'elle est peu (ou pas) restrictive, mais n'avons pas de référence (voir cependant [6] Théorème 1 et [7]).

Condition : Il existe une triangulation simpliciale (K) de M , compatible avec la stratification de M et une triangulation cellulaire (\hat{K}) de \hat{M} , compatible avec les strates $v^{-1}(V_i)$, telles que :

- (i) la triangulation (K) (resp. (\hat{K})) fait de M (resp. \hat{M}) une variété combinatoire.
- (ii) les triangulations (simplexes et cellules ouverts) sont différentiables de classe C^1 .
- (iii) pour toute cellule \hat{K}_β , il existe un simplexe K_α tel que $\mu(\hat{K}_\beta) = K_\alpha$.
- (iv) la restriction de μ à chaque cellule ouverte \hat{K}_β est de rang constant.

a) Définitions dans M .

Si un point a de M est un sommet de (K) , nous dirons que son (K) -indice est 0. Si a est situé à l'intérieur d'un (K) -simplexe de dimension k , nous dirons que son (K) -indice est k .

On désigne par (Δ) une subdivision barycentrique de (K) et par (D) la triangulation cellulaire duale de (K) construite à l'aide de (Δ) . La trace sur W d'une cellule D_α^Q est un (Δ) -complexe de dimension $q = Q - 2(N-n)$; on le note $D_\alpha^q = D_\alpha^Q \cap W$. Ainsi D_α^q (avec q minuscule) ne désignera pas une cellule mais la trace sur W de la cellule D_α^Q .

b) Définitions dans \hat{M} .

Si un point \hat{a} de \hat{M} est un sommet de (\hat{K}) , nous dirons que son (\hat{K}) -indice est 0. Si \hat{a} est situé à l'intérieur d'une cellule de dimension k de (\hat{K}) , nous dirons que son (\hat{K}) -indice est k .

Nous dirons qu'une cellule \hat{K}_β de (\hat{K}) est horizontale si on a $\dim \mu(\hat{K}_\beta) = \dim \hat{K}_\beta$. La restriction de μ à \hat{K}_β est alors un difféomorphisme de \hat{K}_β sur $\mu(\hat{K}_\beta)$.

Lemme 5.2.- Soit \hat{K}_β une cellule d'image K_α , si K_β n'est pas horizontale, elle contient dans son bord au moins une cellule horizontale se projetant sur K_α .

Démonstration : Soit $q' = \dim \hat{K}_\beta$ et $q = \dim K_\alpha$. Si $q' = q$, \hat{K}_β est horizontale. Sinon, si $q = 0$, tout sommet de \hat{K}_β répond à la question et, si $q > 1$, on vérifie par l'absurde que l'une au moins des faces \hat{K}_{β_i} de \hat{K}_β se projette sur K_α . Comme $\dim \hat{K}_{\beta_i} = q'' < q'$, on a le résultat en un nombre fini d'opérations.

c) Sous-triangulation simpliciale $(\hat{\Delta})$ de (\hat{K}) .

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de construire une certaine subdivision simpliciale $(\hat{\Delta})$ de (\hat{K}) . Un $(\hat{\Delta})$ -simplexe n'aura pas pour image un (Δ) -simplexe mais on aura une propriété énoncée dans la proposition 5.4 ci-dessous. Auparavant, on montre :

Lemme 5.3. - Soient \hat{K}_β une (\hat{K}) -cellule d'image K_α , K_{α_0} un (K) -simplexe situé dans \bar{K}_α et D_{α_0} la (D) -cellule duale de K_{α_0} , alors $\hat{K}_\beta \cap \mu^{-1}(D_{\alpha_0})$ est une boule de dimension :

$$\dim D_{\alpha_0} + \dim \hat{K}_\beta - \dim M = \dim(K_\alpha \cap D_{\alpha_0}) + \dim \hat{K}_\beta - \dim K_\alpha.$$

Démonstration : Puisque μ est de rang constant (localement et globalement) sur \hat{K}_β , $\hat{K}_\beta \cap \mu^{-1}(D_{\alpha_0}) = \hat{K}_\beta \cap \mu^{-1}(K_\alpha \cap D_{\alpha_0})$ est une boule de dimension : $\dim(K_\alpha \cap D_{\alpha_0}) + (\dim \hat{K}_\beta - \dim K_\alpha)$.

D'autre part, on a : $2N = \dim M = \dim K_\alpha + \dim D_{\alpha_0} - \dim(K_\alpha \cap D_{\alpha_0})$, d'où le résultat.

Proposition 5.4. - On peut construire une subdivision simpliciale $(\hat{\Delta})$ de (\hat{K}) de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

(i) Toute cellule \hat{K}_β contient un sommet et un seul de $(\hat{\Delta})$. On le note \hat{c}_β . Si c_α désigne le barycentre de $K_\alpha = \mu(\hat{K}_\beta)$, \hat{c}_β est situé dans $\mu^{-1}(c_\alpha)$.

(ii) Soient \hat{K}_β une cellule d'image K_α , et K_{α_i} un simplexe de \bar{K}_α . Notons D_{α_i} la cellule duale de K_{α_i} , alors $\hat{K}_\beta \cap \mu^{-1}(D_{\alpha_i})$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe.

Démonstration : Nous faisons la construction par dimension croissante r des simplexes de (\hat{K}) :

Les sommets de (\hat{K}) seront des sommets de $(\hat{\Delta})$, d'où (i) et (ii) pour $r = 0$.

Supposons que l'on ait construit $(\hat{\Delta})$ dans toute cellule de (\hat{K}) de dimension $\leq r-1$, ($r \geq 1$), de manière à satisfaire aux conditions précédentes, et considérons une cellule \hat{K}_β^r de dimension r . Il s'agit de trianguler l'intérieur de \hat{K}_β^r par des $(\hat{\Delta})$ -simplexes de manière à vérifier (i) et (ii).

Soit c_α le barycentre de $K_\alpha = \mu(\hat{K}_\beta^r)$. Dans \hat{K}_β^r , on choisit un point de $\mu^{-1}(c_\alpha)$, noté \hat{c}_β . Si \hat{K}_β^r est horizontale, ce point est déterminé de façon unique.

Nous allons construire les simplexes de $(\hat{\Delta})$, situés dans \hat{K}_β^r et admettant \hat{c}_β pour sommet, par récurrence décroissante sur les (K) -indices des images, par μ , de leurs sommets. Ceci, en remarquant que les sommets de $(\hat{\Delta})$, situés dans le bord $\partial\hat{K}_\beta^r$ de \hat{K}_β^r , ont pour images des points dont le (K) -indice est inférieur ou égal à celui de $c_\alpha = \mu(\hat{c}_\beta)$, noté k .

Sommets de (K) -indice k : D'après le lemme 5.3 (avec $K_{\alpha_0} = K_\alpha$), $\mu^{-1}(c_\alpha) \cap \hat{K}_\beta^r = \mu^{-1}(D_\alpha) \cap \hat{K}_\beta^r$ est une boule de dimension $\dim \hat{K}_\beta^r - \dim K_\alpha$ et son bord $\mu^{-1}(c_\alpha) \cap \partial\hat{K}_\beta^r$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe (condition (ii) avec $K_{\alpha_i} = K_\alpha$).

Le point \hat{c}_β est situé à l'intérieur de cette boule. Il est donc possible de la trianguler de manière à ce que tout nouveau simplexe admette \hat{c}_β pour sommet et, pour faces opposées à \hat{c}_β , des simplexes du bord de la boule.

Supposons la construction déjà effectuée pour les sommets de (K)-indices $k, k-1, \dots, k-l+1$ et considérons les :

Sommets de (K)-indice $k-l$: Soit c_α , un sommet de ∂K_α de (K)-indice $k-l$. On note K_α , le (K)-simplexe de barycentre c_α , et D_α , la cellule duale de K_α . D'après le lemme 5.3, $\hat{K}_\beta^r \cap \mu^{-1}(D_\alpha) = \hat{K}_\beta^r \cap \mu^{-1}(D_\alpha \cap K_\alpha)$ est une boule de dimension $l + \dim \hat{K}_\beta^r - \dim K_\alpha$ et son bord, constitué de :

$$(\partial \hat{K}_\beta^r \cap \mu^{-1}(\bar{D}_\alpha)) \cup (\overline{\hat{K}_\beta^r} \cap \mu^{-1}(\partial D_\alpha))$$

est un $(\hat{\Delta})$ -complexe ((ii) pour $r' < r$ et hypothèse de récurrence). Le point \hat{c}_β est situé sur le bord de cette boule. Il est possible de la trianguler de manière à ce que tout simplexe admette \hat{c}_β pour sommet et, pour faces opposées à \hat{c}_β , des simplexes du bord de la boule.

De la construction même de $(\hat{\Delta})$, il résulte que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. De plus, on a les résultats suivants :

Corollaire 5.5. - Pour toute cellule D_α de (D), $\mu^{-1}(\bar{D}_\alpha)$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe.

Corollaire 5.6. - Notons $\hat{c}_{\beta_0}, \dots, \hat{c}_{\beta_q}$ les sommets d'un simplexe $\hat{\Delta}^q$, rangés par (\hat{K}) -indices croissants. Soient \hat{K}_{β_q} la (\hat{K}) -cellule contenant \hat{c}_{β_q} , K_{α_0} le (K)-simplexe de barycentre $c_{\alpha_0} = \mu(\hat{c}_{\beta_0})$ et D_{α_0} la cellule duale de K_{α_0} , alors $\hat{\Delta}^q \subset \hat{K}_{\beta_q} \cap \mu^{-1}(D_{\alpha_0})$.

d) Triangulation cellulaire (\hat{D}) de \hat{M} .

A toute cellule \hat{K}_β , on associe la cellule \hat{D}_β , réunion de tous

les $(\hat{\Delta})$ -simplexes dont l'adhérence ne contient, en commun avec \hat{K}_β , que le point \hat{c}_β . On a donc :

$$\{\hat{c}_\beta\} = \hat{K}_\beta \cap \hat{D}_\beta.$$

De plus, \hat{K}_β et \hat{D}_β sont de dimensions complémentaires dans \hat{M} .

Proposition 5.7. - Soit K_α^m , un (K) -simplexe de dimension m , D_α^Q la cellule duale de K_α^m , et D_α^q sa trace sur W . On note \hat{K}_β^m les (\hat{K}) -cellules horizontales se projetant sur K_α^m et \hat{D}_β^R leurs cellules duales. Alors on a :

$$\text{Adhérence de } v^{-1}(D_\alpha^q) = \text{Adhérence de } \bigcup_\beta \hat{D}_\beta^R \cap \hat{W}.$$

Démonstration : Les dimensions des cellules et simplexes sont telles que :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} M &= 2N = Q + m, & \dim_{\mathbb{R}} W &= 2n = q + m, \\ \dim_{\mathbb{R}} \hat{M} &= 2N' = 2N + 2n(N-n) = R + m. \end{aligned}$$

Nous faisons la démonstration par double inclusion

1) Soit \hat{D}_β^R la cellule duale d'une (\hat{K}) -cellule horizontale \hat{K}_β se projetant sur K_α^m . Montrons que tout simplexe $\hat{\Delta}^t$ contenu dans $\overline{\hat{D}_\beta^R \cap \hat{W}}$ est contenu dans $\overline{v^{-1}(D_\alpha^q)}$. Par définition de \hat{D}_β^R , tous les sommets de $\hat{\Delta}^t$ ont un (\hat{K}) -indice supérieur ou égal à celui de $\hat{c}_\beta = \hat{D}_\beta^R \cap \hat{K}_\beta$. Si $\hat{\Delta}^t$ contient \hat{c}_β dans son bord, on a, par le corollaire 5.6, $\hat{\Delta}^t \subset \mu^{-1}(D_\alpha^q)$ et, puisque $\hat{\Delta}^t \subset \hat{W}$, $\hat{\Delta}^t \subset v^{-1}(D_\alpha^q)$, d'où le résultat.

Si $\hat{\Delta}^t$ ne contient pas \hat{c}_β dans son bord, $\hat{\Delta}^t$ est dans le bord d'un $(t+1)$ -simplexe $\hat{\Delta}^{t+1}$ pour lequel ceci est vrai et donc, tel que $\hat{\Delta}^{t+1} \subset v^{-1}(D_\alpha^q)$. Il vient alors : $\hat{\Delta}^t \subset \overline{\hat{\Delta}^{t+1}} \subset \overline{v^{-1}(D_\alpha^q)}$.

2) Montrons que tout simplexe $\hat{\Delta}^t$ contenu dans $\overline{\nu^{-1}(D_\alpha^q)}$ est contenu dans $\overline{\bigcup_\beta \hat{D}_\beta^R \cap \hat{W}}$. Pour cela, notons les sommets de $\hat{\Delta}^t$, rangés par (\hat{K}) -indices croissants : $\hat{c}_{\beta_0}, \dots, \hat{c}_{\beta_t}$. On a $\{\hat{c}_{\beta_0}\} = \hat{K}_{\beta_0} \cap \hat{D}_{\beta_0}$ et, par définition de (\hat{D}) , $\hat{\Delta}^t \subset \hat{D}_{\beta_0}$.

D'après le lemme 5.2, il existe dans l'adhérence de \hat{K}_{β_0} au moins une cellule horizontale \hat{K}_{α_0} telle que $\mu(\hat{K}_{\beta_0}) = \mu(\hat{K}_{\alpha_0}) = K_{\alpha_0}$. On a $\hat{K}_{\alpha_0} \subset \overline{\hat{K}_{\beta_0}}$ et donc $\hat{D}_{\beta_0} \subset \overline{\hat{D}_{\alpha_0}}$.

Soit D_{α_0} la cellule duale de K_{α_0} ; par le corollaire 5.6, on a $\hat{\Delta}^t \subset \mu^{-1}(D_{\alpha_0})$. D'autre part, les sommets de $\hat{\Delta}^t$ se projettent sur des sommets c_{α_i} de (K) -indices supérieurs ou égaux à celui de $c_{\alpha_0} = \mu(\hat{c}_{\alpha_0})$, noté k_0 . Le (K) -indice k_0 est atteint par c_{α_0} ; comme on a :

$\hat{\Delta}^t \subset \overline{\nu^{-1}(D_\alpha^q)} \subset \overline{\mu^{-1}(D_\alpha^0)}$, cela implique que le centre de D_α^0 est de (K) -indice inférieur ou égal à k_0 , autrement dit $D_{\alpha_0} \subset \overline{D_\alpha^0}$. On a donc $K_\alpha \subset \overline{K_{\alpha_0}}$.

Mais, puisque la cellule \hat{K}_{α_0} est horizontale, il y a dans le bord de \hat{K}_{α_0} une cellule \hat{K}_β horizontale et se projetant sur K_α . Il vient $\hat{K}_\beta \subset \overline{\hat{K}_{\alpha_0}}$, ce qui implique $\hat{D}_{\alpha_0} \subset \overline{\hat{D}_\beta}$.

En composant ces résultats, on obtient :

$\hat{\Delta}^t \subset \hat{D}_{\beta_0} \subset \overline{\hat{D}_{\alpha_0}} \subset \overline{\hat{D}_\beta}$ et, puisque $\hat{\Delta}^t \subset \hat{W}$, la proposition est démontrée.

Corollaire 5.8. - $\overline{\nu^{-1}(D_\alpha^q)}$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe de dimension q .

Démonstration : Toute cellule \hat{D}_β^R est transversale aux (\hat{K}) -cellules contenues dans \hat{W} et $\hat{D}_\beta^R \cap \hat{W}$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe de dimension :

$$\dim \hat{D}_\beta^R + \dim \hat{W} - \dim \hat{M} = R + 2n - 2N' = q$$

6) Le théorème 6.1.

Soient K_α^{2r-2} un (K) -simplexe de W de dimension $2r-2$, D_α^{2p} la cellule duale de K_α^{2r-2} et $D_\alpha^{2p} = D_\alpha^{2p} \cap W$ sa trace sur W . On a : $P = N - r + 1 = (N-n)+p$. Il résulte du corollaire 5.8 que $\overline{v^{-1}(D_\alpha^{2p})}$ est un $(\hat{\Delta})$ -complexe de dimension $2p$. Nous sommes en mesure de prouver le théorème suivant :

Théorème 6.1. - Soit \hat{c} un $(\bar{\Delta})$ -cocycle représentant la classe de Chern de degré $2p$, $c^p(\hat{E})$, du fibré \hat{E} . Posons $k_\alpha = \langle \hat{c}, v^{-1}(D_\alpha^{2p}) \rangle$, alors le cycle $\sum_{K_\alpha^{2r-2} \subset W} k_\alpha K_\alpha^{2r-2}$ est un cycle de la classe de Mather $c_{M, r-1}(W)$.

Démonstration : Tout simplexe $\hat{\Delta}^{2n}$ de dimension $2n$, situé dans \hat{W} et orienté comme \hat{W} définit une $(\hat{\Delta})$ -chaîne simpliciale orientée. Par sommation, nous obtenons un cycle \hat{w}_{2n} dont la classe dans $H_{2n}(\hat{W})$ est la classe d'orientation de \hat{W} , indépendante des triangulations construites. Si \hat{c} est un cocycle représentant la classe $c^p(\hat{E})$, un cycle de la classe de Mather $c_{M, r-1}(W)$, définie en (1), est donné par :

$$(5) \quad v_* (\hat{c} \cap \hat{w}_{2n}).$$

Rappelons le résultat de [3] :

L'homomorphisme de Poincaré : $C_{(\hat{\Delta})}^{2p}(\hat{W}) \rightarrow C_{2r-2, (\hat{K})}(\hat{W})$, cap-produit par \hat{w}_{2n} , est composé de l'isomorphisme d'Alexander ([3], § 5) et de l'homomorphisme de Thom (dual de l'intersection par \hat{W}). Autrement dit, si \hat{D}_β^{2s} désigne la cellule duale, dans \hat{M} , d'une $(2r-2)$ -cellule \hat{K}_β^{2r-2} , on a :

$$\hat{c} \cap \hat{w}_{2n} = \sum_{\hat{K}_\beta^{2r-2} \subset \hat{W}} \mu_\beta \hat{K}_\beta^{2r-2} \quad \text{où} \quad \mu_\beta = \langle \hat{c}, \hat{D}_\beta^{2s} \cap \hat{W} \rangle.$$

(voir [3] ; formules (7), (8) et diagramme (16)).

En prenant l'image, par v_* , de ce cycle, seules interviennent les cellules \hat{K}_β^{2r-2} horizontales, les autres ayant une image de dimension inférieure à $2r-2$. Le cycle (5) est donc homologue au cycle :

$$v_* \left(\sum_{\beta} \mu_{\beta} \hat{K}_{\beta}^{2r-2} \right) = \sum_{\substack{K_{\alpha}^{2r-2} \\ \subset W}} k_{\alpha} K_{\alpha}^{2r-2}$$

où $k_{\alpha} = \sum \mu_{\beta} = \sum \langle \hat{c} \cdot \hat{D}_{\beta}^{2S} \cap \hat{W} \rangle$, la sommation étant étendue sur les indices β tels que \hat{K}_{β}^{2r-2} soit horizontale et d'image K_{α}^{2r-2} . On conclut par la proposition 5.7.

III - Classes de M.H. Schwartz.

L'ingrédient essentiel pour la construction du champ radial est la notion de prolongement radial local. La démonstration du théorème de proportionnalité utilise essentiellement certains éléments intervenant dans sa construction, c'est pourquoi nous les rappelons ci-dessous. Nous expliciterons alors la construction du champ radial. Nous renvoyons à [5] pour les détails de démonstration .

7) Construction du prolongement radial local.

Dans tout ce qui suit, nous fixerons une méthode de prolongement d'une section X de E , définie au-dessus d'une partie A d'une strate V_1^{2s} . Ce prolongement appelé prolongement radial local, sera construit comme la somme :

- d'un prolongement "par parallélisme" de X dans un tube $T_\varepsilon(A)$ (défini grâce à la condition (a) de Whitney).
- et d'un champ transversal défini dans un tube $\textcircled{H}_\mu(A)$ (défini grâce à la condition (b) de Whitney).

Nous aurons donc à définir et à donner les propriétés des éléments suivants :

- a) les tubes $T_\varepsilon(A)$,
- b) le prolongement "par parallélisme" de X dans un tube $T_\varepsilon(A)$,
- c) les tubes $\textcircled{H}_\mu(A)$,
- d) le champ transversal défini dans un tube $\textcircled{H}_\mu(A)$,
- e) le prolongement radial local.

Seules les parties (a), (c) et (e) sont nécessaires à la compréhension de la suite de la démonstration.

a) Les tubes $T_\varepsilon(A)$.

Définition des tubes $T_\varepsilon(A)$.

Soit K^q un simplexe (ouvert) de (K) et $y \in K^q$. On note $T_\varepsilon(y)$ l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques, par rapport aux sommets de K^q sont proportionnelles à celles de y et de rapport $\geq 1 - \varepsilon$. $T_\varepsilon(y)$ est de dimension $2N-q$ et admet une partition naturelle en rayons.

Si A est une partie de W , on note $T_\varepsilon(A) = \bigcup_{y \in A} T_\varepsilon(y)$. Ceci n'est, en général, pas un voisinage de A dans M (voir ci-dessous).

Avantages des tubes $T_\varepsilon(A)$.

1°) Si A est un (Δ) -complexe, $T_\varepsilon(A) - A$ admet une partition en rayons :

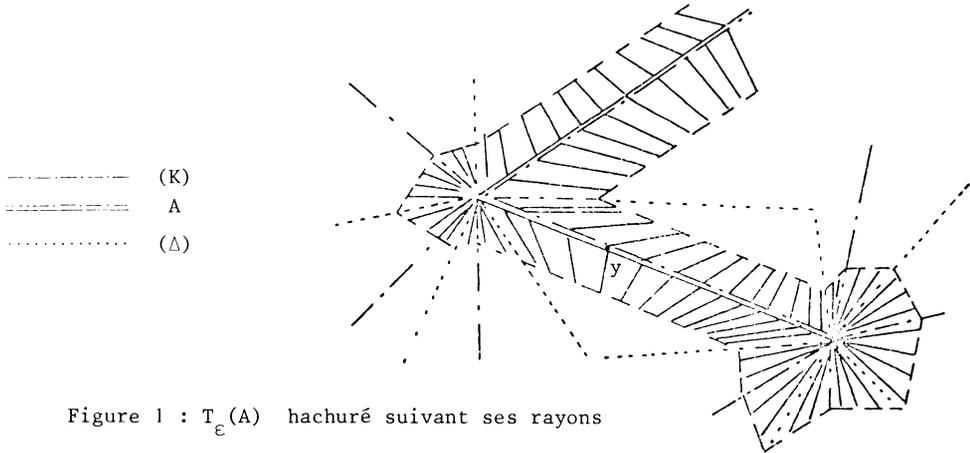


Figure 1 : $T_\varepsilon(A)$ hachuré suivant ses rayons

En effet, si x est un point de $T_\varepsilon(y)$, pour un seul $y \in A$, alors le rayon $]y, x]$ passant par x est bien défini. Si x est dans plusieurs $T_\varepsilon(Y)$, par exemple si $x \in T_\varepsilon(y') \cap T_\varepsilon(y'')$, avec $y' \in K^p$ et $y'' \in K^q$, alors nécessairement l'un des simplexes est dans l'adhérence de l'autre. Fixons $K^p \subset \bar{K}^q$. Le rayon passant par x sera celui qui correspond au simplexe de dimension la plus grande : ici $]y'', x]$.

2°) Si A est un (K) -complexe, $T_\varepsilon(A)$ est un voisinage de A dans M (cas de la figure 1).

3°) Si y est un point d'une cellule D_α de (U) , alors, par construction même, il vient $T_\varepsilon(y) \subset D_\alpha$.

Inconvénients des tubes $T_\varepsilon(A)$.

Si $A \subset V_i^{2s}$, un rayon de A peut très bien, a priori, être tangent en y à V_i^{2s} .

b) le prolongement "par parallélisme" dans $T_\varepsilon(A)$.

Lemme 7.1. - Soit X une section de E au-dessus de A (partie fermée de V_i^{2s}), alors :

i) il existe un prolongement de X en une section X' de E au-dessus de $T_\varepsilon(A)$. Si X est une section de E_1 , il en est de même de X' .

ii) si deux sections sont homotopes dans E (ou dans E_1), il en est de même de leurs prolongements.

iii) si X est de classe C^2 , il en est de même de son prolongement.

Construction du prolongement "par parallélisme".

Considérons les sommets de (K) situés dans V_i^{2s} . On note $\{U_k\}$ leurs étoiles ouvertes et $\{\alpha_k\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de V_i^{2s} par les $U_k \cap V_i^{2s}$.

Soit $y \in V_i^{2s}$, la condition (a) de Whitney permet de montrer que tout vecteur de $E(y)$, (donc aussi tout r -repère de $E_r(y)$) est prolongeable dans un voisinage de y . ([5], Appendice 1). Plus précisément, pour tout k , il existe une application continue $\psi_k : U_k \times \mathbb{C}^S \rightarrow E(U_k)$ qui, restreinte à $y \in U_k \cap V_i^{2s}$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire dans $E(y)$.

Si x est un point de $T_\varepsilon(A)$, x est sur un rayon unique $]y, x[$ avec $y \in U_k \cap A$. On pose

(*) L'appendice 1 devient inutile en utilisant la notion d'0-C-fibré (M.H. Schwartz "Sections holomorphes...", Lille 1977).

$$X'(x) = \sum_k \alpha_k(y) X^{(k)}(x)$$

où $X^{(k)}(x)$ est le vecteur de $E(x)$ tel que $\psi_k^{-1}(X(y))$ et $\psi_k^{-1}(X^{(k)}(x))$ aient même projection sur \mathbb{C}^S .

c) Définition des tubes $\textcircled{H}_\mu(A)$.

Soit A une partie fermée de V_i^{2s} ; on choisit sur M , au voisinage de A , une métrique riemannienne et, sur W , une fonction μ de classe C^2 .

Pour tout $y \in A$, $\textcircled{H}_\mu(y)$ sera le $(2N-2s)$ -disque engendré par les arcs géodésiques orthogonaux en y à V_i et de longueur commune $\mu(y)$. On note

$\textcircled{H}_\mu(A) = \bigcup_{y \in A} \textcircled{H}_\mu(y)$, avec μ assez petite pour que tous les disques

$\textcircled{H}_\mu(y)$ soient disjoints deux à deux.

Avantage des tubes $\textcircled{H}_\mu(A)$.

Les rayons de $\textcircled{H}_\mu(A)$ sont orthogonaux à V_i^{2s} .

Inconvénient des tubes $\textcircled{H}_\mu(A)$.

Si $y \in A \cap D_\alpha$, nous ne savons rien de $\textcircled{H}_\mu(y)$ par rapport à D_α .

D'autre part, les tangentes aux géodésiques ne sont pas, a priori, tangentes aux strates.

d) Le champ transversal, défini dans $\textcircled{H}_\mu(A)$.

Lemme 7.2.- Soit A une partie fermée de V_i^{2s} , il existe un champ transversal, prolongement de la section nulle sur A en une section de E au dessus d'un voisinage de A , sans zéro dans le complémentaire de V_i^{2s} et sortant des tubes $\textcircled{H}_\mu(A)$ le long de $\partial \textcircled{H}_\mu(A) - \textcircled{H}_\mu(\partial A)$, pour μ suffisamment petit.

Principe de la construction du champ transversal Y .

Le champ transversal est défini à partir du champ canonique, tangent aux rayons de $\mathbb{H}_\mu(A)$ et noté $G(x) = \overrightarrow{\text{grad}} x$. Ce champ ne définit pas une section de E , d'autre part sa projection G' sur E ne définit pas un champ continu.

La figure 2 donne un exemple où, avec $V_i^{2s} \subset \bar{V}_j \subset \bar{V}_k$, $G'(x)$, pour $x \in V_j$, n'est pas limite de $G'(y)$ pour $y \in V_k$.

Pour construire un champ continu, on procède par dimension croissante des strates V_j telles que $V_i \subset \bar{V}_j$. Supposons $Y = Y^{(j)}$ déjà construit sur V_j et soit V_k une strate telle que $V_i \subset \bar{V}_j \subset \bar{V}_k$. On construit, dans $\mathbb{H}_\mu(A)$, un voisinage P de V_j dans \bar{V}_k (dit "voisinage prismatique") dont les rayons sont des rayons de $T_\varepsilon(V_j)$, au voisinage de V_i . (voir figure 3 et [5], paragraphe 4).

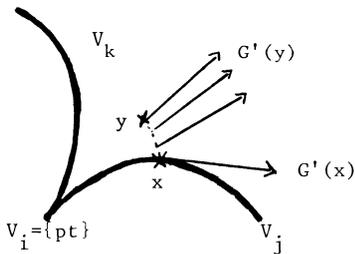


Figure 2

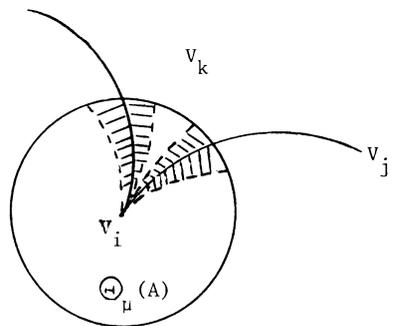


Figure 3 : Le voisinage P est hachuré selon ses rayons. La longueur de ces derniers tend vers 0 au voisinage de V_i .

Si x est sur le rayon $]y, z]$ de P , avec $y \in V_j$ et $z \in V_k$,
 et si $\lambda(x) = \frac{\overline{yx}}{yz}$, on posera :

$$Y(x) = (1 - \lambda(x)) Y^{(j)}(x) + \lambda(x) Y^{(k)}(x)$$

où $Y^{(j)}$ est le champ Y déjà construit sur V_j et où $Y^{(k)} = G'$. On a
 bien $Y(x) = Y^{(j)}(x)$ sur V_j et, dans $V_k - P$, $Y(x) = G'(x)$.

La condition (b) de Whitney permet de montrer :

Lemme 7.3.- ([5], paragraphe 4) Si A est compact, pour tout ε
 donné, on peut trouver une métrique riemannienne et donc, un tube $\textcircled{+}_\mu(A)$ et
 un champ transversal Y tels que, dans $\textcircled{+}_\mu(A)$, l'angle de $Y(x)$ et de
 $G(x)$ soit inférieur à ε .

e) Définition et propriétés du prolongement radial local.

Dans ce paragraphe, nous nous fixons une méthode bien déterminée
 de prolongement radial local, pour les champs de vecteurs X , puis pour les
 champs de r -repères $Z_r = (Z_{r-1}, X_r)$.

Prolongement radial local d'un champ de vecteurs.

Soit A une partie fermée de V_i^{2s} et A' un voisinage fermé
 de A dans V_i^{2s} , tel que $T_\varepsilon(A) \subset \textcircled{+}_\mu(A')$.

On note X un champ de vecteurs, section de E au dessus de A ,
 de longueur inférieure à 1 pour la métrique riemannienne considérée. On peut
 définir dans $T_\varepsilon(A)$:

- i) un prolongement "par parallélisme" X' de X
- ii) un champ transversal Y .

Proposition 7.4. - Si μ et ε sont suffisamment petits, on peut
 se fixer un champ transversal Y dans $T_\varepsilon(A)$ de manière à ce que, pour
 tout champ X , de longueur inférieure à 1, le prolongement radial $X = X' + Y$

satisfasse aux conditions suivantes :

i) soit $A'' \subset A$, pour tout tube $\bigoplus_{\mu} \mu(A'') \subset T_{\varepsilon}(A)$, le champ de vecteurs $X' + Y$ est sortant de $\bigoplus_{\mu} \mu(A'')$ le long de $\partial \bigoplus_{\mu} \mu(A'') - \bigoplus_{\mu} \mu(\partial A'')$.

ii) Si X admet en $a \in A$ une singularité isolée, il en est de même de son prolongement et l'indice en a du prolongement de X est égal à l'indice en a de X , considéré comme champ de vecteurs tangent à V_i^{2s} .

iii) Si deux sections de E , X_0 et X_1 sont homotopes au-dessus de A , leurs prolongements radiaux $X'_0 + Y$ et $X'_1 + Y$ sont homotopes dans E^* , au-dessus de $T_{\varepsilon}(A)$.

Prolongement radial local d'un champ de r -repères.

On note $Z_r = (Z_{r-1}, X_r)$ un champ de r -repères, section de E_r au dessus de $\Delta^{2q} \subset V_i^{2s}$ (avec $q = s - r + 1$), admettant pour singularités isolées des zéros du dernier vecteur X_r . On suppose que X_r est de longueur inférieure à 1. On peut définir dans $T_{\varepsilon}(\Delta^{2q})$ le prolongement "par parallélisme" $Z'_r = (Z'_{r-1}, X'_r)$ de Z_r , et il vient :

Proposition 7.5. - Si μ et ε sont suffisamment petits, le prolongement radial local de Z_r , défini par $Z'_r = (Z'_{r-1}, X'_r + Y)$ satisfait aux conditions suivantes :

- i) Le prolongement radial de X_r satisfait à la proposition 7.4.
- ii) Si le champ Z_{r-1} est sans singularité sur Δ^{2q} , et si Z_r admet en $a \in \Delta^{2q} \cap (K) \subset V_i^{2s}$ un point singulier isolé où X_r s'annule, alors il en est de même du prolongement de Z_r , défini sur $T_{\varepsilon}(\Delta^{2q})$.

Si, de plus le $(r-1)$ -plan complexe engendré par $Z_{r-1}(a)$ est linéairement indépendant de $T(\Delta^{2q}, a)$ dans $T(V_i^{2s}, a)$, alors les indices en a de Z_r (considéré comme champ tangent à V_i^{2s}) et de son prolongement

(considéré comme champ tangent à M), sont égaux.

iii) Dans les hypothèses du (ii), si $q = 0$ (donc $s = r - 1$), et si $a = \Delta^0 \subset V_i^{2r-2}$ est un zéro de X_r , alors l'indice en a du prolongement de Z_r est égal à $+1$.

Dans la suite, nous noterons $I(Z_r, a)$ l'indice en a du champ de r -repères Z_r .

8) Définition des classes.

a) Définition globale du champ radial.

La dimension d'obstruction à la construction d'une section de E_r , au dessus de M , est égale à $2P = 2(N - r + 1)$. Cela signifie que l'on peut construire une telle section, sans singularité au dessus de $(D)^{2P-1}$, et avec des singularités isolées au dessus de $(D)^{2P}$.

Comme la dimension d'obstruction à la construction d'une section de E_r , au dessus d'une strate V_i^{2s} , est égale à $2q = 2(s - r + 1)$, ($s \geq r - 1$), et que $(D)^{2P} \cap V_i^{2s}$ est un (Δ) -complexe de dimension $2q$, nous construirons Z_r au dessus des $A_i^{2q} = (D)^{2P} \cap V_i^{2s}$, par dimension croissante de V_i . On (*) le construira, à chaque étape, au dessus de \bar{A}_i et d'un tube $T_\varepsilon(\bar{A}_i)$, voisinage de \bar{A}_i dans $(D)^{2P}$. Aux étapes suivantes, le champ pourra être modifié, mais en dehors d'un tube $T_\varepsilon(\bar{A}_i) \subset T_\varepsilon(\bar{A}_i)$.

i) Si V_i^{2r-2} est une strate de dimension réelle $2r-2 = 2(n-p) = 2(N-P)$, la dimension d'obstruction à la construction d'une section de $E_r(V_i)$ est nulle. On se donne Z_{r-1} tangent à V_i^{2r-2} aux sommets $a_j = \Delta_j^0$ de (Δ) situés dans $(D)^{2P} \cap V_i^{2r-2}$ et X_r nul en ce point.

 (*) Nous avons noté ici A ce qui est noté B dans [5].

On prolonge radialement ce champ de r -repères dans les $T_\varepsilon(\Delta_j^0)$ en un champ encore noté Z_r . Il vient (Proposition 7.5. (iii)) : $I(Z_r, a_j) = +1$.

ii) Supposons $s > r - 1$ et la construction déjà faite sur toutes les strates V_k de dimension inférieure à $2s$ (donc sur les \bar{A}_k et les $T_{\varepsilon_k}(\bar{A}_k)$), et considérons V_i de dimension $2s$.

Notons $\dot{A}_i = A_i \cap (\bar{V}_i - V_i)$; le champ Z_r est déjà construit dans $A_i \cap T_\varepsilon(\dot{A}_i)$. On peut le prolonger, dans le reste de A_i , avec des points singuliers isolés a_k situés dans les $2q$ -cellules ouvertes Δ_k^{2q} extérieures à $T_1(\dot{A}_i)$ ([5] ; Appendice VI), et de sorte que, au dessus d'une boule b_k voisine de a_k dans Δ_k^{2q} , on ait :

α) $Z_{r-1}(x)$ engendre un $(r-1)$ -plan complexe $P^{2r-2}(x)$ supplémentaire de $T(\Delta_k^{2q}, x)$ dans $T(V_i^{2s}, x)$.

β) $X_r(x)$ est tangent à Δ_k^{2q} (pour $x \in b_k - \{a_k\}$), et de longueur inférieure à 1.

Z_r est ainsi déterminé sur $A_i \cup T_\varepsilon(\dot{A}_i)$. On peut le prolonger dans un tube $T_{\varepsilon'}(\bar{A}_i)$ ($\varepsilon' < \varepsilon_1 < \varepsilon$) de manière à ce que :

- le champ Z_r ne change pas à l'intérieur d'un tube $T_{\varepsilon_1}(\dot{A}_i) \subset T_\varepsilon(\dot{A}_i)$,
- dans $T_{\varepsilon'}(\bar{A}_i) - T_{\varepsilon_1}(\dot{A}_i)$, le prolongement est le prolongement radial de Z_r ,
- dans $T_\varepsilon(\dot{A}_i) - T_{\varepsilon_1}(\dot{A}_i)$, le champ obtenu est combinaison linéaire du champ $Z_r|_{T_{\varepsilon'}(\bar{A}_i)}$ précédemment construit et du prolongement radial de $Z_r|_{A_i}$.

Le champ radial Z_r ainsi construit satisfait bien aux propriétés énoncées dans la proposition 3.2. Pour (i) et (ii), cela résulte de la construction et de la proposition 7.5., pour (iii), de [5], appendice VI.

b) Définition des classes (détermination des cocycles \tilde{c}_i du § 3 (d)).

Pour chaque strate V_i^{2s} , nous avons défini un tube $T_1(\dot{V}_i)$, ($\epsilon = 1$), voisinage du bord $\dot{V}_i = \bar{V}_i - V_i$ de V_i dans M . $T_1(\dot{V}_i)$ est un (Δ) -complexe, il en est de même de $\dot{W}_i = \{x \in V_i : x \notin T_1(\dot{V}_i)\}$. Posons $q = s - r + 1$; la restriction de Z_r à $W_i \cap (D)^{2p-1}$ définit un relèvement, dans $E_r(V_i)$, du $(2q-1)$ -squelette (pour (Δ)) de $W_i \cap (D)^{2p}$, et de $\dot{W}_i \cap (D)^{2p}$. On en déduit classiquement un $2q$ -cocycle obstruteur $c_i \in C_{(\Delta)}^{2q}(W_i \cap (D)^{2p}, \dot{W}_i \cap (D)^{2p})$. ([4], théorème 32.4).

Notons, comme précédemment, $T_i = T_1(V_i^{2s})$ la réunion des cellules fermées de (D) qui rencontrent la variété V_i , on définit un isomorphisme :

$$\mu : C_{(\Delta)}^{2q}(W_i \cap (D)^{2p}, \dot{W}_i \cap (D)^{2p}) \longrightarrow C_{(D)}^{2p}(M, M - T_i)$$

par :

$$\langle \mu(c) \cdot D_\alpha^{2p} \rangle = \langle c \cdot D_\alpha^{2p} \cap V_i^{2s} \rangle .$$

Le cocycle $\mu(c_i)$ est le cocycle \tilde{c}_i défini au (d) du paragraphe 3.

On a bien :

$$\langle \tilde{c}_i \cdot D_\alpha^{2p} \rangle = \sum_{a_k \in V_i \cap D_\alpha^{2p}} I(Z_r, a_k)$$

De même qu'au paragraphe 3, on définit le cocycle $\tilde{c} = \sum \tilde{c}_i$ de $C_{(D)}^{2p}(M, M - T)$. Sa classe dans $H_W^{2p}(M)$ est la classe de M.H. Schwartz de degré $2p$. Ainsi que nous l'avons vu, il est inutile, ici, de démontrer qu'elle est indépendante des constructions effectuées.

IV - Le théorème de proportionnalité.

9) Relèvement des sections de E.

Soit $\hat{\Lambda}$ le produit fibré de $\pi : T(M) \rightarrow M$ et de $\mu : \hat{M} \rightarrow M$.

\hat{E} est un sous-espace de $\hat{\Lambda}$; on note $\nu_* : \hat{E} \rightarrow T(M) \Big|_W$ la restriction à \hat{E} de la projection canonique $\hat{\Lambda} \rightarrow T(M)$.

Proposition 9.1.-

a) Soit $x \in W$ et $X(x) \in E(x)$; pour tout \hat{x} de $\nu^{-1}(x)$, il existe un vecteur unique $\hat{X}(\hat{x})$ de $\hat{E}(\hat{x})$ tel que $\nu_*(\hat{X}(\hat{x})) = X(x)$.

b) Si A est une partie de W et, si X est une section de E au-dessus de A , \hat{X} définit une section de $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow \hat{W}$ au-dessus de $\hat{A} = \nu^{-1}(A)$.

Démonstration :

a) Si x est un point régulier de W , \hat{x} est unique et $\hat{X}(\hat{x})$ est bien défini par $X(x)$. Soit donc $x \in V_1$ et $X(x)$ dans $T(V_1, x)$. Pour tout point \hat{x} de $\nu^{-1}(x)$, il existe une suite de points \hat{x}_q de \hat{W} tendant vers \hat{x} et tels que $\nu(\hat{x}_q) = x_q$ soit un point régulier de W . Lorsque x_q tend vers x , la limite T de $T(W, x_q)$ existe (et s'identifie à \hat{x}). D'après la condition (a) de Whitney, on a $T(V_1, x) \subset T$ et donc, $X(x)$ définit un élément bien déterminé $\hat{X}(\hat{x})$ de $\hat{E}(\hat{x})$. Dans \hat{E} , considéré comme sous-espace de $\hat{\Lambda}$, on a $\hat{X}(\hat{x}) = (X(x), \hat{x})$, avec $x = \nu(\hat{x})$.

b) Si, quand x décrit A , $X(x)$ définit une section (continue) de E , \hat{X} définit une section (continue) de $\hat{E}(\hat{A})$, puisque $X(x)$ et $\nu(x)$ sont des fonctions continues de x .

On remarquera que la réciproque de la proposition 9.1. est fautive : ν_* définit une application de $\hat{E}(\hat{x})$ dans $T(M, \nu(\hat{x}))$ et non pas dans $E(\nu(\hat{x}))$. (Prendre comme exemple la cissoïde).

Définition de \hat{E}_r ($1 \leq r \leq n$).

On désigne par \hat{E}_r le fibré associé à \hat{E} et de fibre, l'espace des r -repères de \mathbb{C}^n .

Corollaire 9.2.- Le champ radial Z_r , défini au paragraphe 8, admet un relèvement $\hat{Z}_r = (\hat{Z}_{r-1}, \hat{X}_r)$ au-dessus de $v^{-1}(W \cap (D)^{2p})$. \hat{Z}_r est une section de \hat{E}_r admettant pour singularités les ensembles $v^{-1}(a_k)$, images réciproques des singularités a_k de Z_r .

10) Une définition équivalente de l'obstruction d'Euler locale.

Nous supposons que M , restreint à un voisinage d'un point a' d'une strate V_i^{2s} est un ouvert de \mathbb{C}^N contenant l'origine a' . Nous pouvons supposer que V_i^{2s} est un ouvert du sous-espace \mathbb{C}^s engendré par les premiers vecteurs de \mathbb{C}^N . Notons b^{2s} une boule (euclidienne) de centre a' et $\textcircled{\ominus} = \textcircled{\ominus}_\mu(b^{2s})$ le tube géodésique (pour la métrique euclidienne) défini au (c) du paragraphe 7.

Proposition 10.1.- Soit X' un champ de vecteurs tangent à V_i^{2s} , sortant de b^{2s} le long de son bord et non nul dans $b^{2s} - \{a'\}$. On note X la restriction à $\partial \textcircled{\ominus}$ du prolongement radial de X' et \hat{X} le relèvement de X dans \hat{E} . L'obstruction à étendre \hat{X} en une section non nulle de \hat{E} au-dessus de $v^{-1}(\textcircled{\ominus})$ est égale à :

$$(6) \quad \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^* v^{-1}(\textcircled{\ominus})) = \text{Eu}_a(W)$$

Démonstration : Le champ X' est sortant de b^{2s} le long de son bord. En choisissant μ assez petit, le prolongement radial de X' , noté X , sera sortant de $\textcircled{\ominus} = \textcircled{\ominus}_\mu(b^{2s})$, et de tout tube $\textcircled{\ominus}_\mu(b^{2s}) \subset \textcircled{\ominus}$, le long de son bord (Proposition 7.4., (i)).

Nous démontrons la proposition en deux temps :

a) Soit a un point quelconque de b^{2s} , nous noterons G le champ défini sur tout \ominus par $G(x) = -k \overrightarrow{xa}$ (k tel que la longueur de $G(x)$ soit $< \frac{1}{2}$).

Considérons provisoirement $\{a\}$ comme une strate supplémentaire de W ; nous pouvons procéder, comme au lemme 7.2., à la construction du champ transversal (ou radial, ce qui revient au même ici) Y dans une boule euclidienne b^{2N} centrée en a (ici, tube géodésique) et telle que $b^{2N} \cap V_i^{2s} \subset b^{2s}$.

D'après le lemme 7.3., ϵ étant donné, pour b^{2N} assez petit, l'angle de $Y(x)$ et de $G(x)$ est inférieur à ϵ . Comme pour tout point x de $b^{2N} - \{a\}$, $Y(x)$ est tangent à la strate du point x , on peut choisir ϵ suffisamment petit pour que les champs $Y_t = (1-t)G + tY$ réalisent une homotopie entre G et Y , par des vecteurs $Y_t(x)$ non nuls et non orthogonaux à la strate V_j du point x .

Notons ω_t la forme duale de Y_t (champ de covecteurs tangents à M). De ce qui précède, on déduit que ω_t ne s'annule pas sur $T(V_j, x)$; il en est de même de la section $\hat{\omega}_t$ de \hat{E}^\vee définie, sur $v^{-1}(b^{2N} - \{a\})$, par $\langle \hat{\omega}_t(\hat{x}), \hat{X}(\hat{x}) \rangle = \langle \omega_t(v(\hat{x})), v_* \hat{X}(\hat{x}) \rangle$ (voir proposition 9.1.). Les sections $\hat{\omega}_0$ (égale à un facteur près à la section r du § 2) et $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_Y$ sont donc homotopes, au-dessus de $v^{-1}(b^{2N})$, dans une homotopie réalisée par des sections non nulles de \hat{E}^\vee . D'où, d'après la formule (2) :

$$Eu_a(W) = \text{Obs}(r, \hat{E}^\vee, v^{-1}(b^{2N})) = \text{Obs}(\hat{\omega}_Y, \hat{E}^\vee, v^{-1}(b^{2N})).$$

Dans l'isomorphisme entre \hat{E} et son dual \hat{E}^\vee , défini par la métrique euclidienne de M , $\hat{\omega}_Y$ correspond à la section \hat{Y} , d'où :

$$Eu_a(W) = \text{Obs}(\hat{Y}, \hat{E}^*, v^{-1}(b^{2N})).$$

b) Considérons le champ G' , prolongement radial, à partir de la strate V_i^{2s} , du champ G restreint à b^{2s} et, notons b'^{2s} la boule centrée en a , homothétique de $b^{2N} \cap V_i^{2s}$ dans le rapport $\frac{1}{2}$. G est sortant des boules b^{2s} et b'^{2s} , donc, on peut prendre μ_0 assez petit pour que :

G' soit sortant du tube $\Theta_0 = \Theta_{\mu_0}(b^{2s})$ le long de son bord.

G' et Y soient sortants du tube géodésique

$\Theta' = \Theta_{\mu_0}(b'^{2s}) \subset b^{2N} \cap \Theta_0$ (construit à partir de la strate V_i^{2s}) le long de son bord (Proposition 7.4.).

On en déduit que :

- Au-dessus de $b^{2N} - \Theta'$, le champ Y n'a pas de zéro ;
- Au dessus de $\partial\Theta'$, les champs $Y'_t = (1-t)G' + tY$ sont sortants de Θ' et réalisent, dans E^* , une homotopie entre Y et G' ;
- Au-dessus de $\Theta_0 - \Theta'$, le champ G' n'a pas de zéro ;
- Au dessus de $\partial\Theta_0$, les champs $X_t = (1-t)G' + tX$ sont sortants de Θ_0 et réalisent, dans E^* , une homotopie entre G' et X .

D'où successivement :

$$\begin{aligned} \text{Eu}_a(W) &= \text{Obs}(\hat{Y}, \hat{E}^*, \nu^{-1}(\Theta')) = \text{Obs}(\hat{G}', \hat{E}^*, \nu^{-1}(\Theta')) \\ &= \text{Obs}(\hat{G}', \hat{E}^*, \nu^{-1}(\Theta_0)) = \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \nu^{-1}(\Theta_0)). \end{aligned}$$

On en conclut en remarquant que X n'a pas de zéro dans $\Theta - \Theta_0$.

Corollaire 10.2. - L'obstruction d'Euler locale est constante sur chaque strate d'une stratification de Whitney.

En effet, le premier membre de (6) est indépendant du point a de b^{2s} .

Corollaire 10.3. - Considérons, dans la strate V_1^{2s} , un point a et un voisinage de a , produit de deux boules euclidiennes centrées en a , donc de la forme : $d^{2s} = b^{2q} \times b^{2s-2q}$. On note X' un champ sortant de d^{2s} , admettant a pour singularité isolée, X son prolongement radial dans $T_\varepsilon(d^{2s})$ et \hat{X} le relèvement, dans \hat{E} , de sa restriction à $\partial T_\varepsilon(d^{2s})$. Si d^{2s} et ε sont suffisamment petits, on a :

$$\text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \nu^{-1}(T_\varepsilon(d^{2s}))) = \text{Eu}_a(W).$$

Démonstration : On suppose d^{2s} contenu dans une boule euclidienne b^{2s} centrée en a et $T_\varepsilon(d^{2s})$ contenu dans un tube $\bigoplus_\mu(b^{2s})$ assez petit pour que la proposition 6 soit valable. On peut prolonger le champ X' en un champ X' sortant de b^{2s} et sans singularité dans $b^{2s} - \{a\}$. Le relèvement de son prolongement radial dans $\bigoplus_\mu(b^{2s})$ est noté \hat{X} . Comme X' n'a pas de singularité dans $b^{2s} - d^{2s}$ et que son prolongement radial n'en a pas dans $\bigoplus_\mu(b^{2s}) - T_\varepsilon(d^{2s})$, on a :

$$\text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \nu^{-1}(T_\varepsilon(d^{2s}))) = \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \nu^{-1}(\bigoplus_\mu(b^{2s}))) = \text{Eu}_a(W)$$

d'où le résultat.

11) Enoncé du théorème de proportionnalité.

Soit Z_r un champ radial défini sur $(D)^{2p} \cap W$ admettant en $a \in \Delta^{2q} \subset D_\alpha^{2p} \cap V_i^{2s}$ une singularité isolée d'indice $I(Z_r, a)$. On note b^{2p} une boule, voisinage de a dans D^{2p} , rétractible en a , ne contenant pas d'autre point singulier et $\partial\beta^{2p} = \partial b^{2p} \cap W$. Le champ \hat{Z}_r est bien défini sur $\partial\hat{\beta}^{2p} = \nu^{-1}(\partial\beta^{2p})$ comme section de \hat{E}_r .

Théorème 11.1. - L'obstruction au prolongement de \hat{Z}_r en une section de \hat{E}_r au-dessus de $\hat{\beta}^{2p} = \nu^{-1}(b^{2p} \cap W)$ est égale à :

$$\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Eu}_a(W) \times I(Z_r, a).$$

Les paragraphes 12, 13 et 14 donnent une démonstration de ce théorème. (cas où $s > r-1$). Le cas où $s = r-1$ (et donc $I(Z_r, a) = +1$) résultera du seul paragraphe 14.

Nous donnons ci-dessous un résumé de cette démonstration et une liste des notations utilisées :

a) Nous définissons un sous-fibré \hat{F}^* de \hat{E}^* . Au champ \hat{Z}_r , nous associons une section \hat{X}' de \hat{F}^* au dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ et nous montrons que l'obstruction au prolongement de \hat{Z}_r , comme section de \hat{E}_r , au dessus de $\hat{\beta}^{2p}$, est égale à l'obstruction au prolongement de \hat{X}' comme section de \hat{F}^* , au dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ (Proposition 12.1.).

Notons $b^{2q} = b^{2p} \cap V_i^{2s}$. Le dernier vecteur X_r de Z_r définit une section de $T(b^{2q})$ admettant une singularité isolée en a . Nous montrons que $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p})$ ne dépend que de l'indice $I(\gamma)$ de X_r en a , comme section de $T(b^{2q})$, et non pas du champ X_r lui-même. De plus, si cet indice est nul, l'obstruction $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p})$ est nulle (Proposition 12.2.)

b) Nous montrons la proportionnalité proprement dite, c'est-à-dire : il existe C tel que : $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = C \times I(\gamma)$ (Proposition 13.1.).

c) Nous déterminons C , en prenant pour X_r un champ d'indice $+1$ et en montrant que, dans ce cas, $C = \text{Eu}_a(W)$. (Paragraphe 14).

Notations :

On peut supposer, puisque le problème est local, que M , restreint à un voisinage de a est un ouvert de \mathbb{C}^N contenant l'origine a . Si e_1, \dots, e_N désigne une base de \mathbb{C}^N , nous pouvons supposer que :

(i) V_i^{2s} est un ouvert du sous-espace \mathbb{C}^s engendré par e_1, \dots, e_s .

(ii) l'espace $P^{2r-2}(a)$ engendré par $Z_{r-1}(a)$ est le sous-espace \mathbb{C}^{r-1} des vecteurs de base e_1, \dots, e_{r-1} .

(iii) pour $a \in \Delta^{2q} \subset D_\alpha^{2p} \cap V_i^{2s}$ (avec $q = s-r+1$), Δ^{2q} est un ouvert de \mathbb{C}^q , engendré par e_r, \dots, e_s .

Nous noterons, dans toute la suite, b^{2q} une boule (euclidienne) de centre a située dans Δ^{2q} (on a $q = s - r + 1 > 0$). Le tube $b^{2p} = T_\varepsilon(b^{2q})$ est une $2p$ -boule voisinage de a dans D_α^{2p} . Soit d^{2s} le produit de b^{2q} par une boule euclidienne de \mathbb{C}^{r-1} , on note $b^{2N} = T_\varepsilon(d^{2s})$.

Les intersections :

$$\beta^{2n} = b^{2N} \cap W \quad \text{et} \quad \beta^{2p} = b^{2p} \cap W$$

ne sont pas toujours des boules, mais sont contractibles en a . On définit :

$$\partial\beta^{2n} = \partial b^{2N} \cap W \quad \text{et} \quad \partial\beta^{2p} = \partial b^{2p} \cap W.$$

Leurs relèvements, dans \hat{W} , sont respectivement notés :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{2n} &= v^{-1}(\beta^{2n}) & \hat{\beta}^{2p} &= v^{-1}(\beta^{2p}) \\ \partial\hat{\beta}^{2n} &= v^{-1}(\partial\beta^{2n}) & \partial\hat{\beta}^{2p} &= v^{-1}(\partial\beta^{2p}). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1., on a : $\dim v^{-1}(x) \leq 2n-2s-2$,

pour tout x de b^{2q} , d'où $\dim v^{-1}(b^{2q}) \leq 2(n-s-1) + 2q = 2(p-1)$.

D'autre part, le corollaire 5.8 montre que $\dim \hat{\beta}^{2p} \leq 2p$.

Comme $\beta^{2p} \cap \overset{\circ}{W}$ n'est pas vide, il vient $\dim \hat{\beta}^{2p} = 2p$.

12) L'obstruction $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p})$ ne dépend que de $l(\gamma)$.

La stratification $\{V_i\}$ de W satisfait à la condition (a) de Whitney. Les vecteurs de base e_1, \dots, e_s de \mathbb{C}^N sont donc, pour b^{2N} suffisamment petit, prolongeables en des sections linéairement indépendantes $e_1(x), \dots, e_s(x)$ de E , au dessus de b^{2N} ([5], Appendice 1).

On note $P(x)$ le sous-espace vectoriel de $E(x)$ de dimension (réelle) $2r-2$, engendré par $e_1(x), \dots, e_{r-1}(x)$.

Pour $\hat{x} \in v^{-1}(x)$, avec $x \in b^{2n}$, on note $\hat{P}(\hat{x})$ le sous-espace vectoriel de $\hat{E}(\hat{x})$ engendré par les relèvements des $e_i(x)$, $i = 1, \dots, r-1$. On définit ainsi un sous-espace fibré \hat{P} de \hat{E} , de rang $2r-2$, de base $\hat{\beta}^{2n}$ et trivial.

Soit $\hat{F}(\hat{x})$ le sous-espace vectoriel orthogonal de $\hat{P}(\hat{x})$ dans $\hat{E}(\hat{x})$, muni de la structure euclidienne induite de celle de \mathbb{C}^N . \hat{F} est un sous-espace fibré de \hat{E} , de rang $2p$, de base $\hat{\beta}^{2n}$, a priori non trivial (sinon localement). \hat{F}^* désigne le fibré associé à \hat{F} , en $2p$ -plans troués à l'origine.

Proposition 12.1. - Soit $\hat{X}'(\hat{x})$ la projection sur $\hat{F}(\hat{x})$, parallèlement à $\hat{P}(\hat{x})$, du dernier vecteur $\hat{X}_r(\hat{x})$ de $\hat{Z}_r(\hat{x})$, on a :

$$\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}', \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}).$$

Démonstration :

Par construction, $Z_{r-1}(a)$ est transversal à Δ^{2q} . On peut donc supposer que, pour $x \in \beta^{2p}$, $Z_{r-1}(x)$ est dans $P(x)$, tout en restant linéairement indépendant de $X_r(x)$.

Soit $\hat{x} \in \partial\hat{\beta}^{2p}$ et $x = \nu(\hat{x})$. Le relèvement de $X_r(x)$ en \hat{x} , noté $\hat{X}_r(\hat{x})$ est linéairement indépendant de $\hat{P}(\hat{x})$. Sa projection, $\hat{X}'(\hat{x})$, sur $\hat{F}(\hat{x})$ définit une section continue de \hat{F}^* au dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$. Au dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$, \hat{X}' est homotope à \hat{X}_r , dans une homotopie de vecteurs situés dans $\hat{E} - \hat{P}$.

Soit $\hat{Z}_{r-1}(\hat{x})$ le relèvement de $Z_{r-1}(x)$ en \hat{x} . Au dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$, les r -repères $\hat{Z}_r(\hat{x}) = (\hat{Z}_{r-1}(\hat{x}), \hat{X}_r(\hat{x}))$ et $\hat{Z}'_r(\hat{x}) = (\hat{Z}_{r-1}(\hat{x}), \hat{X}'(\hat{x}))$ sont homotopes, dans \hat{E}_r . Les obstructions à leurs prolongements au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ sont donc égales.

C'est aussi l'obstruction au prolongement de \hat{X}' , en tant que section de \hat{F}^* , au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$. En effet, celle-ci se calcule ainsi : on prolonge la restriction de \hat{X}' à $\partial\hat{\beta}^{2p}$ au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ sauf en des points singuliers α_j où son indice est $I(\alpha_j)$. Mais, l'indice en α_j du champ de r -repères \hat{Z}'_r est aussi $I(\alpha_j)$. On en déduit :

$$\text{Obs}(\hat{Z}'_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \sum_j I(\alpha_j) = \text{Obs}(\hat{X}', \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$$

d'où la proposition.

Dans ce qui suit, nous montrons que $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}', \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$ ne dépend que de l'indice de X_r en a , comme section de $T(b^{2q})$, et non pas du champ X_r lui-même. (On rappelle que cet indice est égal à $I(Z_r, a)$).

Soit X une section de $T^*(b^{2q})$ définie au-dessus de ∂b^{2q} . X détermine un cycle γ de $T^*(b^{2q})$ dont l'indice $I(\gamma)$ est, par définition, la classe de γ dans $H_{2q-1}(T^*(b^{2q})) \simeq \mathbb{Z}$.

On prolonge X comme section de $T(b^{2q})$ au dessus de b^{2q} , avec pour seul zéro le point a (en procédant par homothétie de centre a , le long de chaque rayon de b^{2q}). On prolonge ensuite cette section au-dessus de $b^{2p} = T_\varepsilon(b^{2q})$, par prolongement radial local, en une section de E .

Cette section, encore notée X , est sans zéro sur $\beta^{2p} - \{a\}$, et en particulier sur $\partial\beta^{2p}$.

On note \hat{X} la section de \hat{E}^* , au-dessus de $\partial\beta^{2p}$, définie par le relèvement de X . Pour $x \in \partial\beta^{2p}$, $X(x)$ n'est pas dans $P(x)$; donc, pour $\hat{x} \in \partial\hat{\beta}^{2p}$, $\hat{X}(\hat{x})$ n'est pas dans $\hat{P}(\hat{x})$ et sa projection $\hat{X}'(\hat{x})$ sur $\hat{F}(\hat{x})$, parallèlement à $\hat{P}(\hat{x})$ est non nulle. L'obstruction au prolongement de \hat{X}' en une section de \hat{F}^* au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ est notée : $\text{Obs}(\hat{X}', \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$.

Proposition 12.2. - Soient deux sections X_0 et X_1 de $T^*(b^{2q})$ au-dessus de ∂b^{2q} ; il leur correspond, par la méthode ci-dessus, deux cycles γ_0 et γ_1 de $T^*(b^{2q})$ et deux sections \hat{X}'_0 et \hat{X}'_1 de \hat{F}^* au-dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$.

- a) Si $I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$, alors $\text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}'_1, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$
 b) Si $I(\gamma_0) = 0$, alors $\text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}) = 0$.

Démonstration :

a) Si $I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$, X_0 et X_1 sont homotopes, par une homotopie réalisée en dehors de P . Il en est de même de leurs prolongements au dessus de b^{2q} , puis, au dessus de β^{2p} . Les relèvements \hat{X}_0 et \hat{X}_1 au-dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$ sont homotopes dans $\hat{E} - \hat{P}$ et leurs projections sur \hat{F} , \hat{X}'_0 et \hat{X}'_1 sont homotopes dans \hat{F}^* . On en déduit que les obstructions à leurs prolongements au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$ sont égales.

b) Si $I(\gamma_0) = 0$, on peut, d'après le (a), prendre pour X_0 sur ∂b^{2q} la restriction d'un champ X_1 de direction fixe dans \mathbb{C}^q et défini sur b^{2q} . On prolonge X_0 dans b^{2q} , par homothétie de centre a (voir ci-dessus). Dans b^{2q} , ce prolongement, encore noté X_0 , et X_1 sont homotopes par :

$$X_t(x) = (1-t)X_1(x) + tX_0(x).$$

On en déduit, de même qu'en (a), que l'obstruction $\text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$

est égale à l'obstruction au prolongement de \hat{X}'_1 dans \hat{F}^* au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$.
 Or, il existe un tel prolongement défini par le prolongement radial du champ X_1 au-dessus de β^{2p} , relevé en \hat{X}'_1 et projeté sur \hat{F} . On en déduit (b).

13) L'obstruction est proportionnelle à $I(\gamma)$.

Proposition 13.1. - Soit Z_r le champ radial précédemment défini, γ le cycle de $T^*(b^{2q})$ déterminé par la restriction de X_r à ∂b^{2q} et \hat{Z}_r le relèvement de Z_r au-dessus de $\partial\hat{\beta}^{2p}$; alors il existe C tel que :

$$\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = C \times I(\gamma).$$

Démonstration :

D'après la proposition 12.1, on a :

$$\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}', \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}).$$

La proposition 12.2 montre que cette quantité ne dépend pas du cycle γ , défini par une section de $T^*(b^{2q})$ au-dessus de ∂b^{2q} , et dont l'indice est $I(\gamma)$. Nous pouvons donc choisir $\gamma = \gamma_1$ défini par un champ de vecteurs X satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) X est un champ de vecteurs unitaires tangent à b^{2q} le long de ∂b^{2q} .

(ii) X définit une section de classe C^2 de $E(\partial b^{2q})$.

(iii) Soit S^{2q-1} la sphère unité orientée de \mathbb{C}^q , centrée en 0, et

$$(7) \quad \gamma_0 : \partial b^{2q} \rightarrow S^{2q-1}$$

l'application définie par $\gamma_0(\xi) =$ vecteur équipollent à $X(\xi)$ et d'origine 0 ; alors γ_0 est une application presque partout de rang $2q-1$ et conserve les orientations.

Le schéma de démonstration de la proposition est alors le suivant :

- a) Nous construisons une homotopie γ_ρ reliant γ_0 à γ_1 , dans $T(\Delta^{2q})$.
- b) Nous prolongeons cette homotopie en Γ_ρ au-dessus de $\partial\beta^{2p}$ (dans E).
- c) Nous la relevons en $\hat{\Gamma}_\rho$ dans $\hat{E} - \hat{P}$.
- d) Nous concluons, grâce au lemme de transgression.

a) Construction de la famille γ_ρ .

Le champ X , défini ci-dessus sur ∂b^{2q} , est prolongé par homothétie de centre a , au-dessus de b^{2q} . On note X_1 ce prolongement, nul en a .

On définit alors une application :

$$J :]0, 1] \times b^{2q} \longrightarrow T(\Delta^{2q})$$

par $J(\rho, \xi) = X_\rho(\rho\xi)$, vecteur d'origine $\rho\xi$ équipollent à $X_1(\xi)$.

Restreinte à ∂b^{2q} , l'application $J(\rho, \cdot) = \gamma_\rho$ est un difféomorphisme sur son image. Si ρ tend vers 0, la limite de γ_ρ coïncide avec le cycle γ_0 défini en (7) lorsqu'on identifie S^{2q-1} à la sphère unité σ de $T(\Delta^{2q}, a)$.

γ_0 est donc une application de classe C^2 , $\gamma_0 : \partial b^{2q} \rightarrow \sigma$, de degré topologique $I(\gamma)$, puisque homotope à $\gamma = \gamma_1$.

b) Construction de la famille Γ_ρ .

Notons $\beta^{2n-2s} = \beta^{2p-2q} = T_E(a) \cap W$ et ψ l'homéomorphisme différentiable par morceaux

$$\psi : b^{2q} \times \beta^{2p-2q} \longrightarrow \beta^{2p}$$

défini par $\Psi(\xi, \zeta) =$ point de β^{2p} dont les coordonnées barycentriques relatives aux sommets de $(\Delta) \cap (\partial D^{2p} - V_i^{2s})$ sont égales à celles de ζ et, les autres, correspondant aux sommets situés dans $\partial \beta^{2q}$, sont proportionnelles à celles de ξ . Pour ξ fixé, $\Psi(\xi, \zeta)$ est sur un rayon de $T_\zeta(\xi)$; d'autre part, ζ et $\Psi(\xi, \zeta)$ sont dans une même strate.

Ceci dit, on définit une application

$$K :]0, 1] \times \beta^{2p} \longrightarrow E^*$$

où $K(\rho, y) = K(\rho, \Psi(\xi, \zeta))$ est le vecteur d'origine $y_\rho = \Psi(\rho\xi, \zeta)$ obtenu par prolongement radial, en ce point, de $X_\rho(\rho\xi)$. On le note $X'_\rho(y_\rho)$.

Soit Γ la restriction de K à $]0, 1] \times \partial\beta^{2p}$ et, pour tout ρ , $\Gamma_\rho = \Gamma(\rho, \cdot)$. Γ_0 sera la limite, pour ρ tendant vers 0, de Γ_ρ .

On peut décrire l'image $U = U^{2p-1}$ de Γ_0 de la manière suivante :

Soit B^{2q} la boule unité de $T(\Delta^{2q}, a) \simeq \mathbb{C}^q$, centrée en a et orientée comme \mathbb{C}^q . La réunion de tous les prolongements radiaux, le long de β^{2p-2q} , des vecteurs de B^{2q} constitue une chaîne de $E(\beta^{2p-2q})$, canoniquement orientée par B^{2q} et β^{2p-2q} , et dont le bord orienté est U . On remarque que : $U \cap E^*(a) = \sigma = \partial B^{2q}$. D'autre part, U s'écrit $U_1 \cup U_2$, où :

U_1 est la réunion des prolongements radiaux, le long de β^{2p-2q} , des vecteurs de σ .

U_2 est la réunion des prolongements radiaux, en $\partial\beta^{2p-2q}$, des vecteurs de B^{2q} .

Lemme 13.2. -

(i) Pour $\rho > 0$, Γ_ρ est un homéomorphisme différentiable par morceaux de $\partial\beta^{2p}$ sur son image.

(ii) Γ_0 est une application différentiable par morceaux de $\partial\beta^{2p}$ sur U , de degré topologique $k = I(\gamma)$.

(iii) $\partial\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ et $\partial\text{Im } \Gamma = \text{Im } \Gamma_1 - k.U$.

Démonstration : Le seul point du lemme à démontrer est le (ii).

Pour cela, on va montrer que les degrés topologiques de Γ_0 et de γ_0 sont les mêmes. Soit $Y \in U \cap E^*(a)$, tel que $\gamma_0^{-1}(Y)$ se compose de k points $\xi_j \in \partial b^{2q}$, en chacun desquels γ_0 est différentiable, de rang $2q-1$. De la définition du prolongement radial local (proposition 7.4), il résulte que Γ_0 est encore un homéomorphisme au voisinage de chacun des points ξ_j considérés comme dans $\partial\beta^{2p}$, et que Γ_0 conserve les orientations de $\partial\beta^{2p}$ et de U . On a donc $\Gamma_0^{-1}(Y) = \gamma_0^{-1}(Y)$, d'où le lemme.

c) Définition de $\hat{\Gamma}_\rho$.

Pour tout $\rho \in [0,1]$ notons $\hat{\beta}_\rho^{2p}$ l'ensemble des points \hat{y} de $\hat{\beta}^{2p}$ tels que $\nu(\hat{y})$ s'écrive sous la forme $\Psi(\rho\xi, \zeta)$, avec $\Psi(\xi, \zeta) \in \beta^{2p}$. On définit alors :

$$\hat{\Gamma}_\rho : \hat{\beta}_\rho^{2p} \longrightarrow \hat{E} - \hat{P} \Big|_{\hat{\beta}^{2p}}$$

par $\hat{\Gamma}_\rho(\hat{y}) = \text{relèvement en } \hat{y} \text{ du vecteur } X'_\rho(y_\rho) \text{ (avec } \nu(\hat{y}) = y_\rho = \Psi(\rho\xi, \zeta)\text{)}$.

Pour $\rho = 1$, $\hat{\Gamma}_1$ est le relèvement du prolongement radial de X , le long de $\partial\beta^{2p}$.

Pour $\rho = 0$, l'image de $\hat{\Gamma}_0$ est le relèvement $\hat{U} = \hat{U}^{2p-1}$ de U . On le munit de l'orientation induite par celle de $U|_W$. C'est un cycle de dimension $2p-1$, à un complexe près de dimension $\leq 2p-3$. En effet, $\hat{U}|_{v^{-1}(W)}$ est, comme $U|_W$, de dimension $2p-1$. Si V_j^{2k} est une strate de W de dimension $2k \geq 2s$, on a $\hat{U}|_{v^{-1}(V_j)} = v^{-1}(U|_{V_j})$. Or $U|_{V_j} = \Gamma_0(\partial\beta^{2p} \cap V_j)$ et, par raison de transversalité, sa dimension est $2(p+k-n)-1$. D'après le lemme 5.1., on a, pour $x \in V_j^{2k}$, $\dim v^{-1}(x) \leq 2(n-k-1)$; il vient $\dim \hat{U}|_{v^{-1}(V_j)} \leq 2p-3$, d'où le résultat.

Posons $\hat{\Gamma} = \text{adhérence dans } v_*^{-1}(\text{Im } \Gamma) \text{ de } v_*^{-1}(\text{Im } \Gamma|_W)$. C'est une chaîne singulière de dimension $2p$, orientée par sa restriction sur $v^{-1}(W)$ et différentiable par morceaux. On a :

$$\partial\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_0$$

et
$$\partial \text{Im } \hat{\Gamma} = \text{Im } \hat{\Gamma}_1 - k \cdot \hat{U}$$

d) Démonstration de la proposition.

Nous utiliserons, pour conclure, le lemme de transgression, classique, que nous rappelons ci-dessous :

Soit \hat{H} le fibré canonique de base \hat{M} et \hat{H}_r le fibré des r -repères (ordonnés) associé à \hat{H} . On note $\hat{\pi} : \hat{H}_r \rightarrow \hat{M}$ la projection canonique. Pour $\hat{x} \in \hat{M}$, $\hat{H}_r(\hat{x})$ est une variété de Stiefel complexe dont le premier groupe d'homotopie non nul est celui de dimension $2p-1 = 2(n-r+1) - 1$.

Lemme 13.3. - Il existe une forme différentielle $\hat{\Omega}_r^{2p}$ sur \hat{M} et une forme différentielle $\hat{\Pi}_r^{2p-1}$ sur \hat{H}_r telles que :

(i) $\hat{\Pi}_r^{2p-1}$ induit sur chaque fibre $\hat{H}_r(\hat{x})$ la classe fondamentale de $H^{2p-1}(\hat{H}_r(\hat{x}))$.

- (ii) $\hat{\pi}^*(\hat{\Omega}_r^{2p}) = -d \hat{\Pi}_r^{2p-1}$
- (iii) $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \int_{\hat{Z}_r(\partial\hat{\beta}^{2p})} \hat{\Pi}_r^{2p-1} + \int_{\hat{\beta}^{2p}} \hat{\Omega}_r^{2p}$.

Démonstration : Soit G la grassmannienne des n -plans complexes de \mathbb{C}^N et θ_r le fibré des r -repères associé au fibré universel θ , de base G . Le problème étant local, on peut supposer que M est réduit à un ouvert de trivialisatation de \hat{M} . On a alors un diagramme commutatif (avec $\hat{\beta} = \hat{\beta}^{2p}$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{E}_r|_{\hat{\beta}} & \longrightarrow & \hat{E}_r & \longrightarrow & \hat{H}_r = M \times \theta_r & \xrightarrow{\omega} & \theta_r \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{\beta} & \longrightarrow & \hat{W} & \longrightarrow & \hat{M} = M \times G & \xrightarrow{\omega} & G
 \end{array}$$

Les formes $\hat{\Omega}_r^{2p}$ et $\hat{\Pi}_r^{2p-1}$ sont images réciproques, par ω , des formes classiques définies sur le fibré $\theta_r \rightarrow G$. Elles vérifient (i) et (ii). On obtient (iii) en appliquant la formule de Stokes, dans \hat{H}_r aux formes différentielles $-\hat{\Pi}_r^{2p-1}$ et $\hat{\Omega}_r^{2p}$ et à la variété définie par $\hat{Z}_r(\hat{\beta}^{2p})$.

Démonstration de la proposition 13.1. -

On note $i = \hat{E} - \hat{P}|_{\hat{\beta}^{2p}} \longrightarrow \hat{E}_r|_{\hat{\beta}^{2p}}$ l'application définie comme suit :

On se fixe un champ de $(r-1)$ -repères Z_{r-1} dans le fibré trivial $P^{2r-2}|_{\hat{\beta}^{2p}}$. On le relève en un champ de $(r-1)$ -repères \hat{Z}_{r-1} , avec $\hat{Z}_{r-1}(\hat{x}) \in \hat{P}^{2r-2}(\hat{x})$, pour $\hat{x} \in \hat{\beta}^{2p}$. A tout vecteur $\hat{X}(\hat{x}) \in (\hat{E}-\hat{P})(\hat{x})$, on associe $i(\hat{X}(\hat{x})) = \hat{Z}_r(\hat{x}) = (\hat{Z}_{r-1}(\hat{x}), \hat{X}(\hat{x}))$.

En utilisant le lemme 13.3. ci-dessus, nous pouvons intégrer $\hat{\Pi}_r^{2p-1}$ sur $\partial\hat{\Gamma}$. Il vient, d'après Stokes :

$$\int_{i(\hat{\Gamma}_1)} \hat{\Pi}_r^{2p-1} - k \int_{i(\hat{U})} \hat{\Pi}_r^{2p-1} = \int_{i(\partial \hat{\Gamma})} \hat{\Pi}_r^{2p-1} = \int_{i\hat{\Gamma}} d \hat{\Pi}_r^{2p-1} = - \int_{\hat{u}i(\hat{\Gamma})} \hat{\Omega}_r^{2p} = - \int_{\hat{\beta}} \hat{\Omega}_r^{2p}$$

D'où :

$$(8) \quad \text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \int_{i(\hat{\Gamma}_1)} \hat{\Pi}_r^{2p-1} + \int_{\hat{\beta}} \hat{\Omega}_r^{2p} = k \int_{i(\hat{U})} \hat{\Pi}_r^{2p-1} .$$

Enfin, si $k = I(\gamma) = 0$, le résultat est évident.

14) Le coefficient de proportionnalité est $\text{Eu}_a(W)$.

Dans les hypothèses de la proposition 13.1., nous avons montré que

$$\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = C \times I(\gamma).$$

a) Nous considérons une boule b^{2N} centrée en a ,

et un champ X particulier, section de $E \Big|_b^{2N}$, nul seulement en a , tel que l'indice en a de sa restriction à b^{2q} soit $I(\gamma) = +1$.

b) Nous montrerons que, si \hat{X} désigne le relèvement de X dans \hat{E} , et si \hat{X}'_o désigne la projection de $\hat{X} \Big|_{\hat{\beta}^{2p}}$ dans \hat{F} , on a :

$$(9) \quad \text{Eu}_a(W) = \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n})$$

$$(10) \quad C = \text{Obs}(\hat{X}'_o, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$$

c) Nous concluerons en montrant l'égalité des seconds membres de (9) et (10).

a) Définitions de b^{2N} et de X .

Définition de b^{2N} : Rappelons que, le problème étant local, nous avons supposé que M est un ouvert de \mathbb{C}^N , V_i^{2s} étant un ouvert de l'espace \mathbb{C}^s des premières coordonnées de \mathbb{C}^N et le point a étant situé à l'origine de \mathbb{C}^N .

Pour $s > r-1$, ($q \geq 1$), on a noté $d^{2s} = b^{2q} \times b^{2s-2q}$ le produit de deux boules euclidiennes centrées en a , avec $b^{2q} \subset \Delta^{2q}$.

Pour $s = r-1$, ($q = 0$), on note $d^{2s} = b^{2s}$.

Dans tous les cas, on pose $b^{2N} = T_\varepsilon(d^{2s})$.

Définition de X' : Pour $q \geq 1$, nous partons d'un champ unitaire X' sortant de b^{2q} le long de son bord, prolongé par homothétie de centre a dans b^{2q} . On le prolonge en tout point x de $d^{2s} = b^{2q} \times b^{2s-2q}$, comme suit :

En $x = (x_1, x_2) \in d^{2s} \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{s-q}$, $X'(x)$ sera équipollent, dans \mathbb{C}^s , à $X'(x_1, 0)$.

Le champ X' s'annule sur la boule $\{a\} \times b^{2s-2q}$ de V_i^{2s} , il est tangent à $b^{2q} \times \partial b^{2s-2q}$ et sortant de d^{2s} le long de $\partial b^{2q} \times b^{2s-2q}$.

Enfin, on prolonge X' dans b^{2N} par le prolongement radial local.

Pour $q = 0$, X' est le champ nul sur b^{2s} , prolongé radialement dans b^{2N} .

Définitions de Y et de X : Par une déformation locale de Z_{r-1} (ne changeant pas l'obstruction), on peut supposer que Z_{r-1} a une direction fixe dans V_i^{2s} . Pour tout point x de b^{2N} , $p^{2r-2}(x)$ et $\beta^{2p} = T_\varepsilon(b^{2q})$ se coupent, dans \mathbb{C}^N , en un point unique x' (confondu avec x si et seulement si $x \in \beta^{2p}$). On définit une section Y de p^{2r-2} dans b^{2N} en posant $Y(x) = -\vec{xx}'$.

Le champ Y est sortant de d^{2s} le long de $b^{2q} \times \partial b^{2s-2q}$ et tangent à $\partial b^{2q} \times b^{2s-2q}$. Il est nul sur β^{2p} . On pose, dans b^{2N} :

$$X = X' + Y .$$

b) Démonstration des égalités (9) et (10).

Par construction de X' et de Y , si b^{2s-2q} est de rayon ρ assez petit (pour tout $\rho \leq \rho_0$), X est sortant de d^{2s} le long de son bord. D'autre part, si ϵ est suffisamment petit, X définit une section de E au-dessus de $b^{2N} = T_\epsilon(d^{2s})$ admettant le point a pour seul zéro.

Démonstration de $Eu_a(W) = \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n})$.

Posons $\beta^{2n} = T_\epsilon(d^{2s}) \cap W$. Nous allons montrer que le prolongement radial de la restriction de X à d^{2s} est homotope, sur $T_\epsilon(d^{2s})$, au champ X . Leurs relèvements dans \hat{E} seront homotopes, d'où le résultat par le corollaire 10.3.

Le prolongement radial de la restriction de X à d^{2s} est somme du prolongement radial de X' (restreint à d^{2s}) et du prolongement par parallélisme \hat{Y} de Y (restreint à d^{2s}). Par raison de continuité, pour tout angle α donné, on peut trouver un voisinage de d^{2s} dans M tel que l'angle de \hat{Y} et de P^{2r-2} soit inférieur à α . D'autre part, pour ϵ suffisamment petit, le prolongement radial du champ X' (restreint à d^{2s}) dans $T_\epsilon(d^{2s})$ fait avec P^{2r-2} un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$ (par propriété du prolongement radial et parce que, sur d^{2s} , cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}$). On en déduit l'homotopie cherchée.

Démonstration de $c = \text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$.

Soit Z_r le champ défini sur β^{2p} par $Z_r(x) = (Z_{r-1}(x), X'(x))$. On note \hat{X}' le relèvement de X' dans \hat{E} et \hat{X}'_0 la projection de \hat{X}' dans \hat{F} . On a, par la proposition 12.1., $\text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$. Comme l'indice de X' , restreint à b^{2q} , en son point singulier a est égal à $I(\gamma) = +1$, on en déduit le résultat.

Notons, dans $\hat{\beta}^{2n}$, \hat{X}'_0 la projection de \hat{X}' dans \hat{F} , \hat{Y} le relèvement de Y et :

$$\hat{X}_0 = \hat{X}'_0 + \hat{Y} .$$

Les champs $\hat{X} = \hat{X}' + \hat{Y}$ et \hat{X}_0 sont homotopes dans $\hat{E}(\hat{\beta}^{2n})$. D'autre part, sur $\hat{\beta}^{2p}$, on a $\hat{X}_0 = \hat{X}'_0$. On en déduit :

$$Eu_a(W) = \text{Obs}(\hat{X}, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n}) = \text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n})$$

et
$$C = \text{Obs}(\hat{X}'_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}) = \text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}).$$

c) Démonstration de $\text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n}) = \text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p})$

Nous avons réduit le problème à la démonstration de :

$$\text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n}) = \text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}).$$

Pour cela, on se fixe \hat{X}_0 sur $\partial\hat{\beta}^{2n}$ et on le prolonge à l'intérieur de $\hat{\beta}^{2n}$ de manière à définir :

(i) sur $\hat{\beta}^{2p}$ une section \hat{X}_1 de \hat{F} avec des singularités isolées en nombre fini \hat{a}_1 .

(ii) sur $\hat{\beta}^{2n}$ une section \hat{X}_2 de \hat{E} sans autres zéros que les points \hat{a}_1 .

(iii) On montre alors que : $I(\hat{X}_1, \hat{a}_1) = I(\hat{X}_2, \hat{a}_1)$.

Par sommation sur i , nous obtiendrons l'égalité cherchée.

(i) Définition de \hat{X}_1 : Sur $\partial\hat{\beta}^{2p}$, le champ \hat{X}_0 est le champ \hat{X}'_0 . On le prolonge en une section \hat{X}_1 de \hat{F} , au-dessus de $\hat{\beta}^{2p}$, différentiable par morceaux, et dont les seuls zéros sont des points \hat{a}_1 , en nombre fini, situés dans $v^{-1}(D^{2p} \cap W)$. On a :

$$\text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{F}^*, \hat{\beta}^{2p}) = \sum_i I(\hat{X}_1, \hat{a}_1)$$

(ii) Définition de \hat{X}_2 : On prolonge d'abord \hat{X}_1 , défini sur $\hat{\beta}^{2p}$, en une section \hat{X}'_2 de \hat{F} au-dessus de $\hat{\beta}^{2n}$, et telle que, sur $\partial\hat{\beta}^{2n}$, $\hat{X}'_2 = \hat{X}'_0$.

Pour cela, on définit \hat{X}'_1 comme étant \hat{X}_1 sur $\hat{\beta}^{2p}$ et \hat{X}'_0 sur $v^{-1}(T_{\varepsilon}(\partial b^{2q} \times b^{2s-2q}))$. Comme sur l'intersection de ces ensembles, égale à $\partial\hat{\beta}^{2p}$, on a $\hat{X}_1 = \hat{X}'_0$, la définition est légitime. Le champ \hat{X}'_1 admet dans \hat{F} un prolongement différentiable par morceaux, (et de classe C^1 au voisinage de tout point $\hat{\alpha}_i$), au-dessus d'un voisinage de $\hat{\beta}^{2p} \cup v^{-1}(T_{\varepsilon}(b^{2q} \times b^{2s-2q}))$. En remplaçant, au besoin, b^{2s-2q} par une boule homothétique de rayon plus petit, $\hat{\beta}^{2n} = v^{-1}(T_{\varepsilon}(b^{2q} \times b^{2s-2q}))$ sera contenu dans ce voisinage.

Soit λ une fonction continue sur β^{2n} , égale à 0 sur β^{2p} et à 1 sur $T_{\varepsilon}(b^{2q} \times \partial b^{2s-2q})$, de classe C^1 au voisinage des points $v(\hat{\alpha}_i)$; on pose, pour tout \hat{x} de $\hat{\beta}^{2n}$:

$$\hat{X}'_2(\hat{x}) = (1 - \lambda(v(\hat{x}))) \hat{X}'_1(\hat{x}) + \lambda(v(\hat{x})) \hat{X}'_0(\hat{x}).$$

On définit alors \hat{X}_2 , sur $\hat{\beta}^{2n}$, par :

$$\hat{X}_2 = \hat{X}'_2 + \hat{Y}.$$

On a bien, sur $\hat{\beta}^{2p}$, $\hat{X}_2 = \hat{X}_1$ et, sur $\partial\hat{\beta}^{2n}$, $\hat{X}_2 = \hat{X}_0$. En dehors de $\hat{\beta}^{2p}$, où \hat{Y} s'annule, \hat{X}_2 n'a pas de zéro, puisque $\hat{Y}(\hat{x})$ est transversal à $\hat{F}(\hat{x})$. Il vient :

$$\text{Obs}(\hat{X}_0, \hat{E}^*, \hat{\beta}^{2n}) = \sum_i I(\hat{X}_2, \hat{\alpha}_i)$$

$$(iii) I(\hat{X}_1, \hat{\alpha}_i) = I(\hat{X}_2, \hat{\alpha}_i).$$

Les fibrés \hat{E}^* et \hat{F}^* sont triviaux dans un voisinage Ξ_i^{2n} de $\hat{\alpha}_i$ dans \hat{W} . Nous le prendrons suffisamment petit pour que Ξ_i^{2n} et $\Xi_i^{2p} = \Xi_i^{2n} \cap \hat{\beta}^{2p}$ soient des boules de classe C^1 dans $v^{-1}(W)$. On a :

$$\widehat{E} \Big|_{\Xi_i^{2n}} \cong \Xi_i^{2n} \times \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \widehat{F} \Big|_{\Xi_i^{2p}} \cong \Xi_i^{2p} \times \mathbb{C}^p .$$

On note $\sigma^{2n-1} = \partial \Xi_i^{2n}$ et $\sigma^{2p-1} = \partial \Xi_i^{2p}$. Ce sont des sphères ; le champ \widehat{X}_1 définit une application $\mu_1 : \sigma^{2p-1} \rightarrow S^{2p-1}$ de degré topologique $I(\widehat{X}_1, \widehat{\alpha}_1)$, de même \widehat{X}_2 définit une application $\mu_2 : \sigma^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ de degré topologique $I(\widehat{X}_2, \widehat{\alpha}_1)$.

Soit \widehat{y} un point de S^{2p-1} tel que $\mu_1^{-1}(\widehat{y})$ se compose de points \widehat{x}_j en nombre $I(\widehat{X}_1, \widehat{\alpha}_1)$ au voisinage desquels μ_1 est de rang $2p-1$ et conserve l'orientation. Lorsque \widehat{x} décrit une $(2n-2p)$ -boule de σ^{2n-1} transversale à σ^{2p-1} en \widehat{x}_j , la définition de \widehat{Y} implique que $\widehat{Y}(\widehat{x})$, projeté sur \mathbb{C}^n , décrit une $(2n-2p)$ -boule contenant l'origine et transversale à \mathbb{C}^p . Comme $\widehat{X}_2 = \widehat{X}_1 + \widehat{Y}$ et que, sur $\widehat{\beta}^{2p}$, $\widehat{X}_2 = \widehat{X}_1$, μ_2 est de rang $2n-1$ au voisinage de chaque point \widehat{x}_j et conserve l'orientation. D'autre part, on a $\mu_2^{-1}(S^{2p-1}) = \sigma^{2p-1}$, d'où $\mu_1^{-1}(\widehat{y}) = \mu_2^{-1}(\widehat{y})$, ce qui termine la démonstration.

Expression de l'obstruction d'Euler locale, sous forme intégrale.

a) Cas général $1 \leq r \leq n$.

La chaîne U^{2p-1} de $E(\beta^{2p-2q})$ définie au paragraphe 13(b) (pour $s > r-1$), se réduit, pour $s = r-1$, au prolongement radial du vecteur nul en $\partial \beta^{2p}$. Dans tous les cas, on note $\widehat{U} = \widehat{U}^{2p-1}$ le relèvement de U^{2p-1} dans \widehat{E} , et ε le rayon de $b^{2p} = T_\varepsilon(b^{2q})$ (on rappelle que $\beta^{2p} = b^{2p} \cap W$).

Corollaire 14.1. - L'obstruction d'Euler locale $Eu_a(W)$ s'écrit :

$$Eu_a(W) = \int_{i(\widehat{U})} \widehat{\Pi}_r^{2p-1} \quad \text{pour } s > r-1$$

et

$$Eu_a(W) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{i(\widehat{U})} \widehat{\Pi}_r^{2p-1} \quad \text{pour } s = r-1$$

Démonstration : Dans le cas où $s > r-1$, la formule résulte de la proposition 13.1 et de la formule (8). Dans le cas où $s = r-1$, on a :

$$Eu_a(W) = \text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) = \int_{i(\hat{X}_r | \partial \hat{\beta}^{2p})} \hat{\Pi}_r^{2p-1} + \int_{\hat{\beta}^{2p}} \hat{\Omega}_r^{2p}$$

d'où le résultat, en remarquant que la limite, pour ε tendant vers 0, de la seconde intégrale est nulle.

b) Cas où $r=1$.

Soit $a \in V_i^{2s}$. On note, pour $s > 0$, A^{2n} la réunion des prolongements radiaux, le long de $\beta^{2(n-s)} = T_\varepsilon(a) \cap W$ des vecteurs de la boule unité de $T(V_i^{2s}, a)$ et, pour $s = 0$, A^{2n} = prolongement radial le long de β^{2n} du vecteur nul en a . Soit \hat{U}^{2n-1} le relèvement dans $\hat{E}^* = \hat{E}_1$ du bord de A^{2n} .

Il vient :

Corollaire 14.2. - L'obstruction d'Euler locale en a s'écrit :

$$Eu_a(W) = \int_{\hat{U}^{2n-1}} \hat{\Pi}_1^{2n-1} \quad \text{pour } s > 0$$

et

$$Eu_a(W) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{U}^{2n-1}} \hat{\Pi}_1^{2n-1} \quad \text{pour } s = 0$$

15) Le théorème 15.1. -

Théorème 15.1. - Soit Z_r un champ radial défini comme au paragraphe 8, au-dessus de $(D)^{2p}$. Le champ Z_r détermine un cocycle $\tilde{c} = \sum_{D_\alpha^{2p} \cap W \neq \emptyset} \mu_\alpha \delta(D_\alpha^{2p})$

de la classe de M-H. Schwartz et un cocycle \hat{c} de la classe de Chern $c^p(\hat{E})$.

On a : $\langle \hat{c} \cdot \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W) \rangle = Eu_{a_\alpha}(W) \mu_\alpha$, où a_α est un point quelconque de K_α^{2r-2} .

Démonstration :

D'après la définition donnée au paragraphe 3, le champ Z_r détermine un cocycle obstruteur \tilde{c} de la manière suivante : Soient a_k les singularités de Z_r situées dans $D_\alpha^{2p} \cap W$ et $I(Z_r, a_k)$ les indices correspondants ; on a :

$$\langle \tilde{c}, D_\alpha^{2p} \rangle = \mu_\alpha = \sum_{a_k \in D_\alpha^{2p} \cap W} I(Z_r, a_k)$$

et tous les a_k sont situés sur les strates V_i^{2s} de dimension minimum qui rencontre D_α^{2p} (donc aussi \bar{D}_α^{2p}) (Proposition 3.2.).

Nous allons montrer que le champ Z_r détermine aussi un $(\hat{\Delta})$ -cocycle obstruteur \hat{c} de la classe de Chern $c^p(\hat{E})$, ceci par l'intermédiaire d'une section \hat{Z}'_r de \hat{E}_r au-dessus du $(2p-1)$ -squelette de $\hat{\Delta}$ (avec $n-p = N-P$). La construction de \hat{Z}'_r ne sera pas canonique, mais le résultat sera indépendant des choix effectués :

(i) au-dessus de $v^{-1}((D)^{2p-1} \cap W)$, \hat{Z}'_r sera le relèvement, \hat{Z}'_r , bien défini de Z_r (voir § 9).

(ii) au-dessus de $v^{-1}((D)^{2p} \cap W) \cap (\hat{\Delta})^{2p-1}$, nous distinguerons deux cas, suivant la dimension minimum $2s$ des strates qui rencontrent la cellule D_α^{2p} :

a) 1er cas $2s = 2(r-1)$, autrement dit $D_\alpha^{2p} \cap V_i^{2(r-1)} = \{a_\alpha\}$ (sommet de la triangulation (Δ)). On prolongera \hat{Z}'_r à l'intérieur de $v^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W) \cap (\hat{\Delta})^{2p-1}$, de façon quelconque, ce qui est possible puisque la dimension d'obstruction à un tel prolongement est $2p$.

b) 2ème cas $2s \geq 2r$. Alors, par construction, il y a au plus une singularité a_k dans chaque $\Delta_k \subset D_\alpha^{2p} \cap W$ et il n'y en a pas sur $(\Delta)^{2p-1} \cap \bar{D}_\alpha^{2p} \cap W$. Nous prendrons pour \hat{Z}'_r le relèvement \hat{Z}'_r de Z_r , au-dessus de $v^{-1}((\Delta)^{2p-1} \cap \bar{D}_\alpha^{2p} \cap W)$, et, dans le reste de $v^{-1}((D)^{2p} \cap W) \cap (\hat{\Delta})^{2p-1}$, un prolongement arbitraire de \hat{Z}'_r (corollaire 5.8.).

(iii) au-dessus du reste de $(\hat{\Delta})^{2p-1} \cap \hat{W}$, nous prolongeons \hat{Z}'_r de manière quelconque.

Ceci étant, nous allons montrer que le cocycle obstruteur \hat{c} , déterminé par \hat{Z}'_r , vérifie la formule du théorème 15.1. Pour cela, nous allons évaluer $\langle \hat{c} \cdot \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W) \rangle$ dans chacun des deux cas précédents :

1er cas : Par construction, a_α est la seule singularité de Z_r dans $D_\alpha^{2p} \cap W$. Il est situé dans une boule fermée $b^{2p} \subset D_\alpha^{2p}$ et telle que $\hat{\beta}^{2p} = \nu^{-1}(b^{2p} \cap W)$ vérifie la relation du théorème 11.1. (pour le relèvement \hat{Z}'_r de Z_r). On a successivement :

$$\begin{aligned} \langle \hat{c} \cdot \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W) \rangle &= \text{Obs}(\hat{Z}'_r, \hat{E}_r, \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W)) \\ &= \text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W)) \quad (\text{puisque } \hat{Z}'_r = \hat{Z}_r \text{ sur } \nu^{-1}(\partial D_\alpha^{2p} \cap W)) \\ &= \text{Obs}(\hat{Z}_r, \hat{E}_r, \hat{\beta}^{2p}) \quad (\hat{Z}_r \text{ n'a pas de zéro dans } \nu^{-1}(D_\alpha^{2p} \cap W) - \hat{\beta}^{2p}) \\ &= \text{Eu}_{a_\alpha}(W) \times I(Z_r, a_\alpha) \quad (\text{Théorème 11.1.}). \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a, ici, $\mu_\alpha = I(Z_r, a_\alpha) = + 1$.

2ème cas : D'après la construction de \hat{Z}'_r , nous pouvons reprendre le raisonnement ci-dessus pour chaque singularité $a_k \in \Delta_k \subset D_\alpha^{2p}$. En effet, Δ_k contient au plus un point singulier de Z_r (à savoir a_k) et, sur $\nu^{-1}(\partial \Delta_k)$, \hat{Z}'_r coïncide avec \hat{Z}_r . En choisissant $b^{2p} \cap W \subset \Delta_k$ et en remplaçant $\bar{D}_\alpha^{2p} \cap W$ par $\bar{\Delta}_k$, les égalités ci-dessus donnent :

$$\langle \hat{c} \cdot \nu^{-1}(\Delta_k) \rangle = \text{Eu}_{a_k}(W) \times I(Z_r, a_k)$$

mais, tous les points singuliers a_k de $D_\alpha^{2p} \cap W$ étant dans la strate V_i^{2s} , les obstructions d'Euler locales en ces points sont les mêmes (corollaire 10.2.) et notées $\text{Eu}_{a_\alpha}(W)$, avec $a_\alpha \in K_\alpha^{2r-2} \subset V_i^{2s}$. On obtient, par sommation :

$$\langle \hat{c} \cdot \nu^{-1} (D_\alpha^{2p} \cap W) \rangle = \text{Eu}_{a_\alpha} (W) \sum_{a_k \in D_\alpha^{2p} \cap W} I(Z_r, a_k) = \text{Eu}_{a_\alpha} (W) \times \mu_\alpha$$

d'où le théorème.

Conclusion :

Le théorème 15.1. étant ainsi démontré, nous pouvons, dans le théorème 6.1., remplacer k_α par $\text{Eu}_{a_\alpha} (W) \cdot \mu_\alpha$, d'où le théorème 4.1. Nous avons montré la constance de l'obstruction d'Euler locale sur chaque strate (corollaire 10.2.), d'où le théorème principal comme au paragraphe 4, moyennant les seules conditions de triangulation du paragraphe 5.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] M.H. SCHWARTZ - Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R.A.S., (1965), t. 260, 3262-3264 et 3535-3537.
- [2] R. MAC PHERSON - Chern classes for singular algebraic varieties, Annals of Math, (1974), 100, 423-432.
- [3] J.P. BRASSELET - Définition combinatoire des homomorphismes d'Alexander, Poincaré et Thom, pour une pseudo-variété, voir l'exposé n° 5.
- [4] N. STEENROD - The topology of fibre bundles, Princeton University Press (1951).
- [5] M.H. SCHWARTZ - Classes obstructrices d'un sous-ensemble analytique complexe d'une variété analytique complexe, Multigraphié, Lille 1964-65.
- [6] H. HIRONAKA - Stratification and flatness, Nordic Summer School - Symposium in Mathematics Oslo, August 1976.
- [7] H. HIRONAKA - Triangulations of algebraic sets, Proceedings of symposia in Pure Mathematics, 29 (1975).
- [8] S. ŁOJASIEWICZ - Triangulations of semi-analytic sets, Ann. Scual. Norm. Sup. di Pisa Série III, vol 17, Fasc. 4, 1964.