E. COMBET

Exposé sur les singularités des distributions de Fourier à symboles homogènes

Astérisque, tome 80 (1980), p. 63-76

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__63_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 63-76

EXPOSÉ SUR LES SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS DE FOURIER A SYMBOLES HOMOGÈNES

E. COMBET

Cet exposé porte sur certains aspects "géométriques" de la théorie des singularités des distributions de FOURIER $A = \int e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)d\theta$ à phase φ normale et à symbole a "homogène pour θ grand" ; ceci concerne les relations entre le type et le degré des singularités de A et la géométrie du support singulier de A. Les points abordés dans ce texte ont fait l'objet d'articles de L. GÅRDING, M.V. FEDORYUK, A. HIRSCHOWITZ et A. PIRIOU, mais on considèrera systématiquement ici l'aspect "intégrale oscillante avec paramètres" des formules.

I DISTRIBUTIONS DE FOURIER

J'expose d'abord quelques points classiques de la théorie des distributions de FOURIER, d'après L. HÖRMANDER [1], en rappelant l'essentiel des démonstrations adaptées aux cas particuliers considérés ici.

(1.1) SYMBOLE. - On note $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ l'espace des symboles (ou amplitudes) d'ordre m ($m \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$; ses éléments sont les fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ telles que pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ et tout couple α,β de multi-indices on ait :

$$(1) \qquad |D^\beta_x D^\alpha_\theta \, a(x,\theta)| \leqslant C_{K,\alpha,\beta} \, (1+|\theta|)^{m-|\alpha|}$$

pour $x \in K$ et $\theta \in \mathbb{R}^N$.

On pose $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$.

On suppose connu le "calcul asymptotique" ou, comme on dit parfois, la propriété de MITTAG-LEFFLER" des symboles : étant donnés $a_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $m_j \downarrow -\infty$, il existe un symbole $a \in S^{m_0}$, unique modulo $S^{-\infty}$ tel que $a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m_k}$ pour chaque k, ce que l'on écrit $a \sim \sum a_j$.

(1.2) PHASE. - On considère une phase φ positivement homogène de degré 1 et sans point critique sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$.

On a donc : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N \setminus 0) ; \mathbb{R})$; $D_{x,\theta}\varphi \neq 0$ sur $\mathbb{R}^n_x \times (\mathbb{R}^N_\theta \setminus 0)$

et $\varphi(x,t,\theta) = t\,\varphi(x,\theta)$ pour $t > 0$ et $(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$.

(1.3) DISTRIBUTION DE FOURRIER. - Soit $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$, φ une phase. Pour $N + m + k < 0$, la fonction :

$$(2) \qquad A_x = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)d\theta$$

est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$. En particulier A est de classe C^∞ si $a \in S^{-\infty}$.

Ceci découle de la mjoration (1) de a (en prenant $\alpha = \beta = 0$) et en passant aux coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^N$.

En tenant compte des hypothèses faites sur φ on peut généraliser l'intégrale (2) de façon a obtenir une distribution sur $\mathbb{R}^n$ (L. HÖRMANDER |1|, Ch. I). Pour cela un point important est la construction d'un opérateur différentiel :

$$L = \Sigma\, a_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \Sigma\, b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c$$

avec $a_j \in S^\circ$, b_j, $c \in S^{-1}$; a_j et b_j sont nuls au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$ et on a l'égalité ${}^tL\, e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ c'est-à-dire :

$$\iint e^{i\varphi(x,\theta)} u(x)a(x,\theta)dxd\theta = \iint e^{i\varphi(x,\theta)} L(u(x)a(x,\theta))dxd\theta$$

pour $\in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$.

PROPOSITION I. - Soit φ une phase fixée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$. Notons $|\theta|$ la norme euclidienne de θ dans $\mathbb{R}^N$.

L'expression : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint e^{i(\varphi(x,\theta)+i\varepsilon|\theta|)} u(x)a(x,\theta)dxd\theta$

existe pour $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$.

Cette limite définit une distribution $A \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et dépend continûment du symbole dans l'espace $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie d'espace vectoriel de FRECHET définie par les semi-normes déduites de (1).

Preuve. - Soit $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, valant 1 sur un voisinage de 0. On peut écrire

$$\iint e^{i(\varphi(x,\theta)+i\varepsilon|\theta|)} u(x)a(x,\theta)dxd\theta =$$
$$= \iint e^{i(\varphi(x,\theta)+i\varepsilon|\theta|)} \alpha(\theta)u(x)a(x,\theta)dxd\theta$$
$$+ \iint e^{i\varphi(x,\theta)} (1-\alpha(\theta))e^{-\varepsilon|\theta|} u(x)a(x,\theta)dx\, d\theta.$$

Dans cette expression, la première intégrale tend vers $\iint e^{i\varphi(x,\theta)} u(x)a(x,\theta)dxd\theta$; la seconde intégrale du second membre s'écrit :

$$(3) \quad \iint e^{i\varphi(x,\theta)} L^k((1-\alpha(\theta))e^{-\varepsilon|\theta|} u(x)a(x,\theta))dxd\theta$$

où L est l'opérateur différentiel : $S^j \to S^{j-1}$ considéré plus haut, k un entier > 0 arbitraire.

Quand $\varepsilon \to 0^+$, $(1-\alpha)e^{-\varepsilon|\theta|}ua \to (1-\alpha)ua$ dans $S^{m'}$ pour tout $m' > m$, donc $L^k((1-\alpha)e^{-\varepsilon|\theta|}ua) \to L^k((1-\alpha)ua)$ dans $S^{m'-k}$ car L est continue : $S^j \to S^{j-1}$. Alors si : $m-k+N < 0$, il suffit de prendre $m' > m$ assez proche de m pour avoir encore $m'-k+N < 0$ et l'intégrale (3) converge vers :

$$\iint e^{i\varphi(x,\theta)} L^k((1-\alpha(\theta))u(x)a(x,\theta))dx\, d\theta$$

Finalement on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint e^{i(\varphi(x,\theta)+i\varepsilon|\theta|)} u(x)a(x,\theta)dxd\theta = \iint e^{i\varphi(x,\theta)} L^k(u(x)a(x,\theta))dxd\theta$$

pour tout k vérifiant : $m-k+N < 0$ et on voit bien sous cette forme que cette limite dépend continûment de u et de a séparément.

La distribution ainsi définie est notée $\displaystyle A_x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int e^{i(\varphi(x,\theta)+i\varepsilon|\theta|)} a(x,\theta)d\theta$

$$= \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)d\theta.$$

Les propriétés de régularité de A sont précisées en localisant le support singulier de A et en introduisant les espaces de SOBOLEV $H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
Rappelons qu'une phase φ est dite non-dégénrée si en chaque point (x,θ) où $\varphi'_\theta(x,\theta) = 0$, la différentielle $D_{(x,\theta)}\varphi'_\theta$ est de rang maximum N. On sait dans ces conditions que l'image de la sous-variété $\{(x,\theta) \mid \varphi'_\theta(x,\theta) = 0\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ par l'application $(x,\theta) \to (x,\varphi'_x(x,\theta))$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe une "analyse lagrangienne" des changements de coordonnées, de phases et d'amplitudes dans les distributions correspondantes.

PROPOSITION 2.

a) Le support singulier de la distribution de FOURIER $A_x = \int e^{i\,(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta$ est contenu dans l'ensemble : $K_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \theta \neq 0 : \varphi'_\theta(x,\theta) = 0\}$

b) Supposons que la phase φ soit non-dégénérée alors pour

$$a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N) \textit{ on a : } A \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^n) \textit{ si : } m+s+\frac{N}{2} < 0.$$

Preuve.

a) (L. HÖRMANDER |1| prop. 1.2.3).

b) C'est une conséquence immédiate d'un énoncé plus précis de DUISTERMAAT-HÖRMANDER ([1], § 5.4) ; on peut en donner une preuve directe en remarquant qu'il existe localement un système de coordonnées (y) dans $\mathbb{R}^n$, une phase $\psi(\xi) = \langle y,\xi\rangle - H(\xi)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0$, une amplitude $b \in S^{m+\frac{N}{2}-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que sur l'ouvert U de ce système de coordonnées (y) on ait :

$$A = \int e^{i\psi(y,\xi)}\, b(y,\xi)\, d\xi.$$

Posons $c(y,\xi) = \chi(y) b(y,\xi) e^{-iH(\xi)}$ où $\chi \in \mathcal{D}(U)$, χ valant 1 sur un ouvert $V \subset U$.
Alors pour $f \in \mathcal{D}(V)$ on obtient :

$$\langle A,f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint e^{i(\langle y,\xi\rangle + i\varepsilon|\xi|)} c(y,\xi) f(y)\, dy\, d\xi$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint e^{-\varepsilon|\xi|}\, \hat{f}(-\eta)\hat{c}(\eta-\xi,\xi)\, d\xi\, d\eta$$

où $\hat{f}$ et $\hat{c}$ sont les transformées de FOURIER de f et $y \to c(y,\xi)$. Par hypothèse on a l'inégalité :

$$|\hat{c}(\eta-\xi,\xi)| \leqslant k_1 (1+|\eta-\xi|)^{-(m+\frac{N}{2}-\frac{n}{2})} (1+|\xi|)^{m+\frac{N}{2}-\frac{n}{2}} \quad ;$$

rappelons l'inégalité de PEETRE :

$$(1+|\xi|)^t (1+|\eta|)^{-t} (1+|\xi-\eta|)^{-|t|} \leqslant k_2 \quad ;$$

on obtient :

$$|\hat{c}(\eta-\xi,\ \xi)| \leqslant k_3 (1+|\eta|)^{m+\frac{N}{2}-\frac{n}{2}}.$$

On déduit de ceci :

$$\iint |\hat{f}(-\eta)\hat{c}(\eta-\xi,\xi)|\, d\xi\, d\eta \leqslant k_4 \left\{\int |\hat{f}(-\eta)|^2 (1+|\eta|)^{-2s} d\eta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

car l'inégalité $m+s+\frac{N}{2} < 0$ entraîne la convergence de l'intégrale $\int (1+|\eta|)^{2m+N-n+2s} d\eta$. Finalement :

$$|< A,f >| = \|\iint \hat{f}(-\eta)\hat{c}(\eta-\xi,\xi)d\xi\, d\eta\| \leq k_3 \|f\|_{H^{-s}} .$$

Le choix d'une phase φ fait correspondre à l'espace des symboles $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ une classe de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Pour $m = -\infty$, ces distributions sont des fonctions C^∞. Au calcul asymptotique (modulo $S^{-\infty}$) des symboles correspond un calcul asymptotique (modulo C^∞) de ces distributions qui sont d'autant plus régulières que m est plus petit dans $\mathbb{R}$ (plus proche de $-\infty$). Ceci est prouvé par la propositions 2.
Il est donc naturel d'étudier le problème du développement asymptotique des distributions de FOURIER rencontrées dans les exemples concrets. Mais voici maintenant quelques-uns de ces exemples.

(1.4) <u>OPÉRATEURS ELLIPTIQUES</u>. - A chaque symbole $a \in S^m(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\theta)$ on peut associer un noyau $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$:

$$P_{x,y} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i<x-y,\theta>} a(x,\theta)d\theta \quad ;$$

à ce noyau P correspond l'opérateur pseudo-différentiel $a(x,D)$ sur $\mathbb{R}^n$:

$$a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i<x-y,\theta>} u(y)a(x,\theta)d\theta\, dy$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i<x,\theta>} \hat{u}(\theta)a(x,\theta)d\theta$$

où $\hat{u}$ est la transformée de FOURIER de $u \in (\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{u}(\theta) = \int e^{-i<x,\theta>} u(x)dx.$$

D'après la proposition 2 (a), les singularités de P sont contenues dans la diagonale $x = y$ de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$.
Du calcul asymptotique des symboles rappelé au § 1.1 correspond un calcul des opérateurs pseudo-différentiels défini modulo les opérateurs régularisants, c'est à dire modulo les opérateurs correspondant aux symboles de l'espace $S^{-\infty}$ (auquel cas $P \in C^\infty$).
Dans ce calcul on a l'égalité $c(x,D) = a(x,D) \circ b(x,D)$ si et seulement si

$$(4) \qquad c(x,\theta) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (iD_\theta)^\alpha a(x,\theta)\, D^\alpha_x\, b(x,\theta).$$

Ce calcul s'applique simplement pour la détermination d'une paramétrix bilatère E d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique : l'équation correspondante se résout en utilisant (4).

(1.5) <u>OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES A COEFFICIENTS CONSTANTS</u>.- On considère un polynôme $a(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\, \xi^\alpha$ homogène de degré $m > 0$, hyperbolique strict par rapport au vecteur $(1,0,\ldots,0)$ de $\mathbb{R}^n$. En supposant que la valeur de a sur ce vecteur est égale à 1, on obtient une décomposition :

$$a(\xi) = (\xi_1-\lambda_1(\theta)) \;\ldots\; (\xi_1-\lambda_m(\theta))$$

où les fonctions λ_k sont C^∞, différentes entre elles, 1-homogènes par rapport à $\theta = (\xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$; de plus il existe une involution $k \to k'$ de l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$ telle que $\lambda_k(-\xi) = \lambda_{k'}(\xi)$.
A ce polynôme $a(\xi)$ est associé l'opérateur hyperbolique $a(D)$ où on pose

$$D = (-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

A chaque suite $\nu = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$ on associe la distribution :

$$E_\nu(a,x) = (2\pi)^{-n} \lim_{t \to 0^+} \int (\xi_1 + i\varepsilon_1 t - \lambda_1)^{-1} \ldots (\xi_1 + i\varepsilon_m t - \lambda_m)^{-1} e^{i<x,\xi>} d\xi$$

qui est une solution élémentaire de $a(D)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Cette distribution E se décompose en une somme de distributions :

$$A_{j,x} = \lim_{t \to 0}{}_{\varepsilon_j} \int H_j(t,\theta) e^{i\varphi_j(x,\theta)} \frac{e^{ix_1 y_1}}{y_1 + it} dy_1 \, d\theta \quad ;$$

dans cette expression on a :

$$\lim_{t \to 0}{}_{\varepsilon_j} \int \frac{e^{ix_1 y_1}}{y_1 + it} dy_1 = - \varepsilon_j 2i\pi \, Y(-\varepsilon_j x_1)$$

où Y est la fonction de HEAVISIDE ; d'autre part $H_j(t,\theta)$ tend vers un élément $h_j(\theta)$ de l'espace S^{-m+1} et la phase φ_j égale :

$$\varphi_j(x,\theta) = x_1 \lambda_j(\theta) + x_2\theta_1 + \ldots + x_n \theta_{n-1} \quad ;$$

Finalement, E_ν est somme de distributions de la forme :

$$Y(-\varepsilon_j x_1) \int h_j(\theta) \, e^{i(x_1\lambda_j(\theta) + x_2 \theta_1 + \ldots + x_n \theta_{n-1})} d\theta$$

où le produit a un sens car les fronts d'onde sont bien disposés (on peut appliquer le th. 2.5.10 de L. HÖRMANDER [1]).
On obtient ainsi 2^m solutions élémentaires "distinguées" de $a(D)$ dans R^n dont les supports singuliers se calculent aisément par la proposition 2(a). On donne parfois le nom de propagateurs à ces solutions élémentaires et à certains noyaux qui s'en déduisent par différence.
Dans le cas d'un opérateur hyperbolique $a(x,D)$ à coefficients C^∞, ces propagateurs se construisent en résolvant d'abord le problème de GAUCHY (L. HÖRMANDER, [2] , § 9) puis en calculant les paramètrix suivant le principe de DUHAMEL (voir exemple J. CHAZARAIN [1], § 3.1). Les propagateurs interviennent en théorie quantique des champs et en relativité générale. Ils ont été construits par A. LICHNEROWICZ [1] dans un contexte géométrique général (tensoriel ou spinoriel) ; leurs propriétés globales se trouvent dans l'article [1] de J.J. DUISTERMAAT - L. HÖRMANDER (§ 6.5-6.6).

SINGULARITÉS DES DISTRIBUTIONS DE FOURIER

(2.1) SYMBOLES HOMOGÈNES POUR " θ GRAND". - Dans la suite nous aurons à considérer des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ qui sont λ-homogènes pour θ grand, en ce sens qu' il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pout tout compact K de $\mathbb{R}^n$ on ait :

$$a(x,t\theta) = t^{\lambda}\ a(x,\theta)$$

pour $t > C_K$ et $|\theta| = 1$. Ceci implique : $a \in S^{\mathrm{Re}\,\lambda}\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$. Dans la pratique on a généralement $2\lambda \in Z$ mais il est parfois intéressant de plonger ces distributions dans une famille holomorphe suivant une technique introduite par M. RIESZ dans l'étude des opérateurs hyperboliques.

Pour un symbole supposé λ-homogène pour θ grand, l'écriture des distributions de FOURIER associées se simplifie en passant aux coordonnées sphériques $\rho = |\theta|$, ω dans $\mathbb{R}^N$. On note S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

<u>PROPOSITION 3. - Soit</u> $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ <u>et</u> $b \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times S^{N-1})$ <u>telle que</u> :

$$a(x,t\sigma) = t^{\lambda} b(x,\sigma)$$

<u>pour</u> $\sigma \in S^{N-1}$, $t \geq c$.

<u>On définit sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>la distribution</u> :

$$I(b\ ;\ \lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{S^{N-1}} \int_0 e^{i\rho(\varphi(x,\sigma)+i\varepsilon)} \rho^{\lambda+N-1} b(x,\sigma)\,d\rho\ \omega_{S^{N-1}}$$

<u>otenue en régularisant l'intégrale</u> $\int_0^1 e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} \rho^{\lambda+N-1} d\rho$ <u>de façon</u> C^{∞} <u>par rapport aux paramètres</u> x,σ.

<u>Alors les distributions</u> $I(b\ ;\lambda)$ <u>et</u> $\int e^{i\,\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\,d\theta$ <u>diffèrent d'une fontction</u> C^{∞}.

Preuve. - Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, valant 1 sur un voisinage de 0 ; les fonctions a et $(1-\alpha(\theta))|\theta|^{\lambda}\ b(x,\frac{\theta}{|\theta|})$ appartiennet à $S^{\mathrm{Re}\,\lambda}\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ et coïncident pour $|\theta|$ assez grand ; donc elles définissent des distributions qui diffèrent d'une fonction C^{∞}.

Il suffit de régulariser l'intégrale

$\int_{S^{N-1}} \int_0^1 e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)}\ \rho^{\lambda+N-1} b(x,\sigma)\,d\rho\ \omega_{S^{N-1}}$ de façon C^{∞} par rapport à x ; donc il suffit de régulariser l'intégrale : $I_1(\lambda) = \int_0^1 e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)}\ \rho^{\lambda+N-1} d\rho$

de façon C^{∞} par rapport à x de σ. Ceci est possible car I_1 est une application de $\mathbb{C}$ dans $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times S^{N-1})$, holomorphe pour $\mathrm{Re}(\lambda+N-1) > -1$; en intégrant par parties on étend I_1 en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec des pôles aux points $\lambda+N-1 = -1; -2, \ldots$; ensuite on définit $I_1(\lambda)$ en ces points $\lambda+N-1 = -1, -2, \ldots$ en prenant une partie finie d'intégrale, c'est-à-dire en prenant en ces points le terme constant du développement de LAURENT DE I_1.

Remarque. - Le procédé de régularisation de I au point ρ : 0 n'importe pas, pourvu qu'il soit de classe C^{∞} par rapport à x. Nous avons indiqué dans la preuve ci-dessus le procédé le plus couramment utilisé. On notera que l'holomorphie de $I_1(\lambda)$ n'entraîne pas celle de $I(b\ ;\ \lambda)$; cette dernière dépend de φ et plus précisément du comportement aysmptotique de l'intégrale oscillante $\int_{S^{N-1}} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} a(\sigma)\,d\sigma$, quand $\rho \to +\infty$; l'étude de ce comportement est précisément le problème central de cette partie.

Dans la suite, les calculs sont locaux et menés modulo les fonctions C^{∞}; les parties principales des singularités peuvent être obtenues en remplaçant dans l'intégrale I, l'intégrale sur S^{N-1} par une intégrale sur $\mathbb{R}^{N-1}$; on peut aussi supposer que b ne dépend pas de x et appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}_{\sigma})$. Finalement on considère dans cette seconde partie les distributions de la forme :

(1) $$J(\mu\ ;\ a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{\infty} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)}\, e^{-\varepsilon\rho}\, \rho^{\mu}\, a(\sigma)\, d\rho\, d\sigma$$

$$a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}),\quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R})$$ avec la condition :

(2) $$\varphi(x,\sigma) = 0 \implies D_{(x,\sigma)}\, \varphi(x,\sigma) \neq 0\ ;$$

en fin il découle de la proposition 2 (a) du § 1.3 que le support singulier de $J(\mu\ ;\ a)$ est contenu dans l'ensemble

(3) $$K_{\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^{n} \mid \exists\sigma\ ;\ \varphi(x,\sigma) = 0 \text{ et } D_{\sigma}\varphi(x,\sigma) = 0\}$$

car φ provient d'une phase 1-homogène en θ sur $\mathbb{R}^{n}_{x} \times (\mathbb{R}^{N}_{\theta}\setminus 0)$.

(2.2) CALCUL POUR N = 1.

PROPOSITION 4. - Pour $N = 1$, l'hypersurface $\varphi(x) = 0$ a tous ses points réguliers et on a :

(4) $$J(\mu) = \begin{cases} e^{i(\mu+1)\frac{\pi}{2}}\, \Gamma(\mu+1)(\varphi(x)+io)^{-\mu-1} & \textit{pour } \mu \neq -1, -2, \ldots \\ a_0^{(m)}\, \varphi(x)^{m-1} - a_{-1}^{(m)}\, \varphi(x)^{m-1}\, \mathrm{Log}(\varphi(x)+io) & \textit{pour } \mu = -m = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

où les coefficients $a_i^{(m)}$ s'obtiennent par calcul des développements de LAURENT :

$$a_{-1}^{(m)} = \frac{i^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$a_0^{(1)} = \Gamma'(1) + i\,\frac{\pi}{2} \qquad (\Gamma'(1) = -\gamma \quad (\gamma = \textit{la constante d'EULER}))$$

$$a_0^{(m)} = \frac{i^{m-1}}{(m-1)!}\left(\Gamma'(1) + i\,\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) \qquad (m > 1).$$

Preuve. - Avec la convention hatituelle de régularisation, l'intégrale $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\infty} e^{i\rho\theta}\, e^{-\varepsilon\rho}\, \rho^{\mu}\, d\rho$ est la transformée de FOURIER de la distribution ρ_+^{μ} ; elle est calculée dans le livre de GUELFAND et CHILOV (|1|, ch.2, § 2.3, formule (2) et § 2.4, formule (14)). Le fait que l'hypersurface $\varphi(x) = 0$ ait tous ses points réguliers provient de la conditon (2) du § 2.1.

Remarques.

(a) Le cas N = 2 conduit aussi à des formules intéressantes que l'on trouvera dans les articles cités de L. GÅRDING.

(b) Pour N > 1, la proposition 4 permet de mettre $J(\mu\,;\,a)$ sous forme symbolique :

(5) $$J(\mu\,;\,a) = e^{i(\mu+1)\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\mu+1)\int_{\mathbb{R}^{N-1}}(\varphi(x,\sigma)+io)^{-\mu-1}a(\sigma)d\sigma,$$

pour $\mu \neq -1, -2, \ldots$. Pour les valeurs $\mu = -1, -2, \ldots$ on applique le seconde formule (4) (M.V FEDORYUK [1], th. 1.1).

Dans son article [1], L. GÅRDING ocnsidère des distributions légèrement différentes

$$L(\mu\,;\,a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_0^\infty e^{i\rho(\varphi(x,\sigma)+i\varepsilon)}\,e^{-i(\mu+1)\frac{\pi}{2}}\rho^\mu\, a(\sigma)d\rho\, d\sigma.$$

Ces distributions s'expriment à l'aide de valeurs au bord de la fonction analytique définie pour $-\pi < \arg z < \pi$ par l'égalité :

$$\chi_s(z) = z^s\,\Gamma(-s) \qquad \text{pour } s \neq 0,1,2,\ldots$$

$$\chi_p(z) = z^p(-\mathrm{Log}\, z + c_p)/p\,! \qquad \text{pour } p = 0,1,2,\ldots$$

où $c_\circ = 0$ et $c_p = \frac{1}{p} + c_{p-1}$.

On obtient dans ce cas :

(6) $$L(\mu\,;\,a) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\chi_{-\mu-1}(\varphi(x,\sigma)+io)\,a(\sigma)d\sigma.$$

(2.3) CALCUL AUX "POINTS DE MORSE". - Il est possible de calculer le développement au voisinage d'un "point de Morse" du support K_φ :

PROPOSITION 5. - On considère la distribution de FOURIER :

$$J(\mu\,;\,a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_0^\infty e^{i\rho\varphi(x,\sigma)}e^{-\rho\varepsilon}\rho^\mu\, a(\sigma)\,d\rho\,d\sigma$$

dont le support singulier est contenu dans l'ensemble

$$K_\varphi = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\sigma\ :\ \varphi(x,\sigma) = 0,\ \ D_\sigma\varphi(x,\sigma) = 0\}.$$

On suppose que $0 \in K_\varphi$ et que $D_\sigma\varphi(0,0) = 0$, dét $D^2_{\sigma\sigma}\varphi(0,0) \neq 0$. On note $x \to \sigma(x)$ la fonction C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, solution unique de l'équation $D_\sigma\varphi(x,.) = 0$ avec $\sigma(0) = 0$ et dét $D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,.) \neq 0$. Alors au voisinage de l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$ on a le développement asymptotique :

(7) $$J(\mu\,;\,a) = (2\pi)^{\frac{N-1}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))}\,\left|\text{dét } D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$.\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(R_x^k a)(o)}{k!}\,e^{i(\mu-\frac{N+1}{2}-k)\frac{\pi}{2}}\,\Gamma\!\left(\mu-\frac{N+1}{2}-k\right)(\varphi(x,\sigma(x))+io)^{-(\mu-\frac{N+1}{2}-k)}$$

pour $\mu - \frac{N+1}{2} - k \notin -\mathbb{N}^*$ (sinon il faut introduire des termes en Log $(\varphi(x,\sigma(x))+io)$ comme dans la formule (4) du §. 2.2).

Dans cette expression, sgn $D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))$ est la signature de la différentielle seconde de la fonction $\sigma \to \varphi(x,\sigma)$ (c'est la différence entre la nombre de signes + et le nombre de signes - de la forme diagonale) ; R_x est l'opérateur différentiel du second ordre :

$$R_x = \frac{i}{2} < (D^2_{\sigma\sigma} \varphi(x,\sigma(x)))^{-1} \frac{\partial}{\partial\sigma}, \frac{\partial}{\partial\sigma} >.$$

Preuve. - Par application du théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage X de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage A de 0 dans $\mathbb{R}^{N-1}$, une fonction $x \in X \to \sigma(x) \in A$, de classe C^∞, vérifiant : $\sigma(0) = 0$ et telle que la point $\sigma(x)$ soit l'unique solution de l'équation $D_\sigma\varphi(x,.) = 0$ avec dét $D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,.) \neq 0$. Ensuite on applique le "lemme de MORSE avec paramètres" :

$$\varphi(x,\sigma) = \varphi(x,\sigma(x)) + \frac{1}{2} D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))(h_x(\sigma), h_x(\sigma))$$

où h_x est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{N-1}$ vérifiant $h_o = \mathrm{Id}$. En appliquant le "principe de la phase stationnaire" on a le développement aysmptotique :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} a(\sigma)d\sigma \underset{\rho\to+\infty}{\sim} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma(x))} (2\pi)^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\, D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))} .$$

$$. |\text{dét } D^2_{\sigma\sigma}\varphi(x,\sigma(x))|^{-\frac{1}{2}} . \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(R_x^k a)(o)}{k!} \rho^{-k-\frac{N-1}{2}} ,$$

ce développement étant uniforme par rapport à x (J.J. DUISTERMAAT ; [1], § 1.2). On intègre terme à terme pour avoir J : ceci donne l'expression indiquée, compte tenu de la prop. 4, du § 2.2

Remarques.
(a) Si l'on revient aux données de la partie I, un calcul global nécessite l'expression de la "condition de MORSE" sur la sphère S^{N-1} ; ceci est fait dans l'article de M.V. FEDORYUK ([1], § 1.2 et 1.3).
(b) Dans leurs articles, M.V. FEDORYUK [1] et L. GÅRDING [1], [2], utilisent ensuite les expressions (5) et (6) de J données au § 2.2.

Dans cet exposé j'essaierai plutôt d'utiliser les propriétés connues de l'intégrale oscillante "avec paramètres" :

$$(8) \qquad \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} a(\sigma)d\sigma$$

dans l'étude de la distribution :

$$J(\mu ; a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_o^\infty e^{-\rho\varepsilon}\rho^\mu d\rho \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} a(\sigma)d\sigma ;$$

mais la difficulté est de connaitre le comportement de (8) par rapport à ρ de façon uniforme par rapport à x.

(2.4) PASSAGE AUX PHASES NORMALES. - On condidère toujours une "phase réduite"

$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-1})$ telle que $D_{x,\sigma}\varphi \neq 0$ lorsque $\varphi(x,\sigma) = 0$.
On suppose que $\varphi(0,0) = 0, D_\sigma\varphi(0,0) = 0$ mais que 0 est un point critique algébriquement isolé de la fonction $\sigma \to \varphi(0,\sigma)$. On applique à cette situation la théorie de THOM-MATHER-ARNOLD du déploiement universel de la singularité $(\varphi(o,\sigma),0)$ (voir exemple J.J. DUISTERMAAT |2|). On pose $\psi(\sigma) = \varphi(0,\sigma)$, on note N-1-k le corang de ψ en 0 et $\nu+1$ la codimension (le nomble de MILNOR) de ψ en 0.
A un difféomorphisme local près : $(\mathbb{R}^{N-1},0) \to (\mathbb{R}^{N-1},0)$ on peut écrire le déploiement universel de ψ :

$$\Psi(u,\sigma) = q(\sigma') + p(\sigma'') + u_1 b_1(\sigma'') + \dots + u_\nu b_\nu(\sigma''),$$

où $\sigma = (\sigma',\sigma'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-1-k}$, q étant la forme quadratique non dégénérée, induite par $D^2\psi(0)$ dans $\mathbb{R}^k$, p un polynôme de degré $\leq \nu+2$, de codimension $\nu+1$, appartenant au cube de l'idéal $(\mathcal{M}_o(\mathbb{R}^m))$ des germes en 0 des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{N-1-k}$ qui s'annulent en 0 ; les polynômes $1,b_1,\dots,b_\nu$ donnent une $\mathbb{R}$-base de l'espace quotient de $\mathcal{M}_o(\mathbb{R}^{N-1-k})$ par l'idéal jacobien de ψ.
Alors on peut écrire :

$$\varphi(x,\sigma) = q(\sigma') + p(h_x(\sigma'')) + \sum_{j=1}^{\nu} u_j(x) b_j(h_x(\sigma'')) + u_{\nu+1}(x)$$

où h_x est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{N-1-k}$. Ce difféomorphisme ne change pas les parties singulières des distributions considérées ; on est ramené à des phases de la forme :

$$\varphi(x,\sigma) = q(\sigma') + p(\sigma'') + \sum_{j=1}^{\nu} u_j(x) b_j(\sigma'') + u_{\nu+1}(x).$$

Dans le calcul de l'intégrale oscillante : $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{i\rho\,\varphi(x,\sigma)} a(\sigma)d\sigma$,
figure la partie quadratique : $\int_{\mathbb{R}^k} e^{i\rho q(\sigma')} a_1(\sigma')d\sigma'$, $\quad a_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$
qui se ramène au cas non dégénéré de la proposition 4 du § 2.2. On peut donc supposer que $\varphi(x,\sigma) = p(\sigma) + u_1(x)b_1(\sigma) + \dots + u_\nu(x)b_\nu(\sigma) + u_{\nu+1}(x)$

et la distribution J_x se déduit de la distribution J_u associée à la phase :

$$p(\sigma) + u_1 b_1(\sigma) + \dots + u_\nu b_\nu(\sigma) + u_{\nu+1}$$

par image réciproque suivant l'application $x \in \mathbb{R}^n \to u(x) \in \mathbb{R}^\mu$. Finalement on se ramène aux calculs avec des phases "normales" :

$$J(\mu\ ;\ a)_{x,y} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\rho} \rho^\mu \, d\rho \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\rho\,\varphi(x,y\ ;\ \sigma)} a(\sigma)d\sigma ,$$

avec les hypothèses suivantes :

$$\varphi(x,y\ ;\ \sigma) = \psi(\sigma) + x_1 b_1(\sigma) + \dots + x_\nu(\sigma) - y$$

$\psi \in (\mathcal{M}_o(\mathbb{R}^m))^3$, ψ est un polynôme de degré $\leq \nu+2$, de codimension $\nu+1$; $b_1,\dots,b_\nu$ sont des polynômes dont les classes forment une base du quotient de $\mathcal{M}_o(\mathbb{R}^m)$ par l'idéal jacobien de ψ.
Considérons d'abord le cas le plus simple (celui) du cusp) :

Proposition 6. - Considérons la phase $(m=1, \nu=1)$: $\varphi\,(x,y\;;\;\sigma) = -\frac{\sigma^3}{3} + x\sigma - y$;

alors le premier terme du développement asymptotique de J s'écrit :

$$J^1(\mu\;;\;a)_{x,y} = a_o(x)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_o^\infty e^{-i\rho(y+i\varepsilon)}\,\rho^{\mu-\frac{1}{3}}\,A(x\,\rho^{\frac{2}{3}})\,d\rho$$

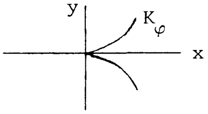
$$+\; a_1(x)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_o^\infty e^{-i\rho(y+i\varepsilon)}\,\rho^{\mu-\frac{2}{3}}\,A'(x\,\rho^{\frac{2}{3}})\,d\rho$$

où A est la fonction d'AIRY et A' sa fonction dérivée :

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-\frac{\sigma^3}{3}+t\sigma)}\,d\sigma\;, \qquad t\in\mathbb{R}\;;$$

les fonctions a_o et a_1 s'obtiennent en décomposant a suivant le théorème de préparation de MALGRANGE : $a(\sigma) = a_o(x) + a_1(x) \;+ h(x,\sigma)(x-\sigma^2)$.

Preuve . - C'est une conséquence des formes des intégrales oscillantes exposées dans le livre |1| de V. GUILLEMIN et S. STERNBERG.



Remarques.

(a) Il ne semble pas possible d'expliciter davantage au voisinage de 0 les intégrales qui figurent au second membre de J^1 ; cependant on peut dire que J est de singularité maximum $\mu - \frac{1}{3}$ au voisinage du point 0 et $\mu - (\frac{1}{3}+\frac{1}{6}) = \mu - \frac{1}{2}$ sur les branches de points de MORSE de la courbe K_φ : $9y^2 - 4x^3 = 0$ qui porte les singularités de J (mais ce dernier point se déduit aussi de la proposition 5).

(b) L' ensemble K_φ a été étudié par les géomètres algébristes (sous le nom de "discriminant d'une déformation" : voir B. TEISSIER [1]) et les topologues (sous le nom de diagramme de bifurcation" : voir V.I. ARNOLD [1] pour une revue de la question).

Cet ensemble K_φ est une hypersurface algébrique dont les nappes régulières sont constituées de points de MORSE (où l'on applique la proposition 5) et dont le lieu singulier $S(K_\varphi)$ est de codimension 1 dans K_φ et est génériquement des points "cusps" (où on applique la prop. 6) ou des croisements normaux (ou l'on ajoute la contribution des deux nappes régulières) ; cette structure de $S(K_\varphi)$ tient au fait qu'avec une phase normale, K_φ est l'enveloppe d'une famille d'hyperplans de $\mathbb{R}^{\nu+1}$; elle est étudiée en détail par B. TEISSIER ([1], ch. III, prop. 5.1). On peut donc dire que "génériquement" les singularités de J sont données par les propositions 5 et 6 ci-dessus.

(c) Il est encore possible, au moins dans le cas des singularités simples

(A_k, D_k, E_6, E_7, E_8) ou des phases quasi-homogènes d'exprimer J^1 en utilisant les "fonctions d'AIRY généralisées" de FEDORYUK-GUILLEMIN-SCHAEFFER et de dresser un tableau des singularités maximum de J le long de K_φ. Ceci se déduit du tableau des exposants critiques (ou indice singularité) de ces phases particulières (V.I. ARNOLD [2], J.J. DUISTERMAAT [2]) et du fait que dans ce cas, le développement asymptotique en ρ des intégrales oscillantes est uniforme par rapport aux paramètres x,y (J.J. DUISTERMAAT [2], prop. 4.2.1).

(2.5) NOTE SUR LE CAS GÉNÉRAL.

Pour la distribution :

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0 e^{-\varepsilon\rho} \rho^\mu \, d\rho \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\rho\,\varphi(x,y\,;\,\sigma)} a(\sigma)d\sigma,$$

la difficulté est de connaître le comportement asymptotique de l'intégrale oscillange $\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\rho\,\varphi(x,y\,;\,\sigma)} a(\sigma)d\sigma$ quand ρ tend vers $+\infty$

Pour (x_o,y_o) fixé sur K , ce comportement a été lié par A.N. VARCHENKO [1] au polyèdre de NEWTON de la singularité $(\sigma \to \varphi(x_o,y_o\,;\sigma),\ (x_o,y_o))$ et par B. MALGRANGE à la monodromie "classique" de cette singularité. Le fait de savoir ce qui se passe quand (x,y) varie au voisinage de (x_o,y_o) reste un problème difficile, lié au problème de la variation des exposants critiques d'une équation de FUCHS (avec paramètres) déduite de la connexion de GAUSS-MANIN du déploiement considéré (cette connexion a été étudiée par K. SAITO [1], [2] et F. PHAM [2]). Pour la distribution :

$$J = e^{i(\mu+1)\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\mu+1) \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi\,(x,y\,;\sigma)+io)^{-\mu-1} a(\sigma)d\sigma,$$

(où $\mu \neq -1,-2,\ldots$ sinon il faut introduire dans cette expression les termes logarithmiques convenables) on peut supposer que les sonnées sont analytiques et déformer le domaine d'intégration de J en passant de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{C}^m$, suivant la méthode des "cycles de PETROWSKY" d'usage courant en théorie des opérateurs hyperboliques (HERGLOTZ - PETROWSKY - LERAY - ATIYAH - BOTT - GÅRDING [1]). Cette méthode permet à L. GÅRDING ([1], [2]), d'anoncer une conjecteure de type "condition locale de PETROXSKY" concernant l'existence de lacunes faibles pour J, c'est-à-dire la possibilité de prolonger J de façon C^∞ jusque sur son support singulier. Il semble que si l'on prend ces "cycles de PETROWSKI" dans les "fibres de MILNOR" du déploiement considéré, on puissen reprendre cette conjecture en disant que l'invariance de ces cycles par la monodromie entraîne la possibilité de ce prolongement : ceci en effet est vérifié aux points de MORSE suivant le proxédé usuel de PICARD-LEFSCHETZ (voir par exemple J. LERAY [1], § 65, lemme 65) et ce fait suffit si l'on admet que les singularités de J sont de codimension complexe 1 dans $\mathbb{C}^m$.

REFERENCES

V.I. ARNOLD [1], Critical points of Smooth Functions, Proceedings of Int. Congrès of Math. Vancouver 1974.

[2] Intégrals of rapidly oscillating fuctions and singularities of Lagrangian manifolds, Funct. Analysis and Applic. 6 (1973) 222-224.

M.F. ATIYAH, R. BOTT, L. GÅRDING [1], Lacuns for hyperbolic differential opérators with constant coefficients,
I. Acta Math. 124 (1970), 109 - 189.
II. Acta Math. 131 (1973), 145 - 206.

J. CHAZARAIN [1], Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 24, 1 (1974), 173 - 202.

J.J. DUISTERMAAT [1], Fourier Integral Operators, Courant Institue, New-York U.1973.

[2], Oscillatory Integrals, Lagrange immersions and unfolding of Singularities, Communic. on Pure and Appl. Math. XXVII (1974), 207 - 281.

J.J. DUISTERMAAT and L. HÖRMANDER [1], Fourier Integral Operators and the asymptotic behavior of the solution of the mixed problem, Russian Math. Surveys 32 : 6 (1977), 67 - 120.

L. GÅRDING [1], Sharp fronts of paired oscillatory integrals, Publ. RIMS, Kyoto U., 12 suppl. (1977), 53 - 68.

[2], Sharp fronts and Lacunas. Some Problems and results, Prepint. University of Lund 1978.

I.M. GUELFAND , G.E. CHILOV [1], Les Distributions (tome 1), Dunod Paris 1962.

V. GUILLEMIN, S. STERNBERG [1], Geometric asymptotics, Math. Surveys 14, AMS 1977.

A. HIRSCHOWITZ, A. PIRIOU [1], Propriétés de transmission pour les distributions intégrales de Fourier. Comm. in Partial Differential Equations, 4(2), 1979, 113 - 217.

L. HÖRMANDER [1], Fourier Intégral operators I, Acta Math. 127 (1971), 79 - 183.

[2], The calculus of Fourier Integral Operators, Prospects in Math. Princeton U. 1971.

[3], Pseudo-differentiel Operators and Hypoelliptic Equations, Procedings of Symp. in pure Math. Vol. X, AMS 1967.

J. LERAY [1], Le Calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. Math. de France, 87 (1959), 81 - 180.

A. LICHNEROWICZ [1], Propagateurs et commutateurs en Relativité générale, Publ. Math. I.H.E.S. 10 (1961).

B. MALGRANGE [1], Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (4), 7 (1974), 405 - 430.

F. PHAM [1], Caustiques, phase stationnaire et microfonctions, Acta Scientiarum Vietnamicarum.

[2], Caustics and Microfunctions, R.C.P. 25-Strasbourg 1976, Proc. of 1976 Oji Seminar on Algebraic Analysis (Kyoto).

K. SAITO [1], Calcul algébrique de la monodromie, Singularités à Cargèse, Astérisques 7 et 8, S.M.F. (1973).

[2], Regularity of Gauss-Manin connection of flat family of isolated singularities, Quelques journées singulières (janvier 1973), Ecole Plytechnique (Paris, janvier 1974).

B. TEISSIER [1], Cycles évanescents, sections planes et conditions de Witney, Singularités à Cargèse, Astérisques 7 et 8, S.M.F. (1973).

A.N. VARCHENKO [1], Newton polyedra and estimation of oscillating integrals, Funkst. Anal. Prilozen &o5) (1976), 13 - 38.

E. COMBET

Université de LYON I
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE