MARCEL BERGER

Rapport sur les variétés d'Einstein

Astérisque, tome 80 (1980), p. 5-19

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__5_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 5-19

RAPPORT SUR LES VARIÉTÉS D'EINSTEIN

Marcel BERGER

Ce texte est certes fait dans l'esprit d'un rapport, mais il n'a pas du tout la prétention d'être un rapport complet. Nous n'avons choisi, en particulier dans le § 6 consacré aux résultats connus, que les plus marquants de ceux-ci. En outre une partie importante, celle des déformations des métriques d'Einstein, est entièrement traitée dans le texte de J.P. Bourguignon qui suit celui-là. Je remercie J.P. Bourguignon pour les améliorations qu'il a apportées au présent texte.

1. MOTIVATION

Par <u>variété</u> nous entendrons toujours une variété M, de classe C^∞, sans bord et connexe, de dimension finie <u>notée</u> n. Donnons-nous une variété M; sur M on peut mettre beaucoup de métriques riemanniennes. Une question fondamentale se pose alors : existe-t-il une notion de métrique riemannienne préférentielle sur M ? ou encore : existe-t-il sur M des métriques riemanniennes plus belles que les autres ?

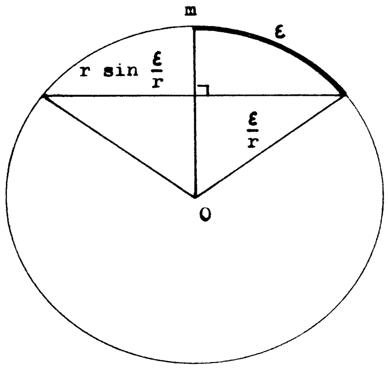
Dans le cas où M est un espace homogène d'un groupe de Lie G, il est certain qu'une métrique riemannienne invariante par G est une belle métrique riemannienne. Mais ne retenir que de telles métriques restreindrait par trop la classe des variétés qui admettent de "belles" métriques riemanniennes; déjà les surfaces de genre plus grand que 1 ne sont pas des espaces homogènes. Plus généralement, très, très peu de variétés de dimension donnée sont des espaces homogènes.

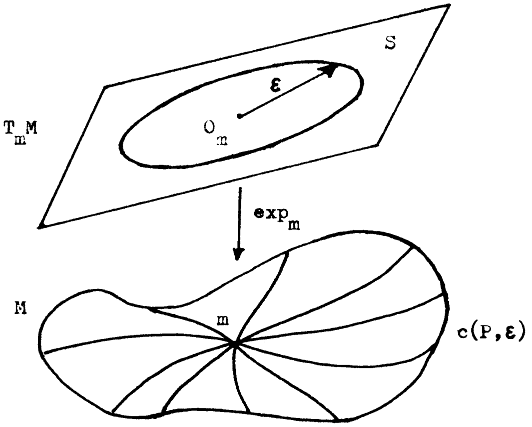
Nous nous proposons de montrer dans le § 3 que la notion de métrique d'Einstein qui y est définie, répond assez bien à notre question. Auparavant, nous rappelons brièvement au § 2 les notions de courbure que l'on peut définir pour une métrique riemannienne, notions dont nous aurons besoin dans la suite.

2. COURBURES

Pour les notions premières de ce §, on pourra consulter par exemple [1], ch. II.D.

2.1. Courbure sectionnelle. Soit (M,g) une variété riemannienne et soit $P \subset T_m M$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace tangent à M au point m. Soit $c(P,\varepsilon)$ la courbe obtenue en portant, à partir de m, la longueur ε sur toutes les géodésiques issues de m et de vecteur vitesse appartenant à P (si l'on préfère, $c(P,\varepsilon)$ est l'image par l'application exponentielle $\exp_m$ du cercle de rayon ε centré en l'origine de l'espace euclidien $P \subset T_m M$).





Dans un espace euclidien, la longueur $\ell(P,\varepsilon)$ de $c(P,\varepsilon)$ vaut toujours $2\pi\varepsilon$; dans une sphère de rayon r, elle vaut toujours

$$\ell(P,\varepsilon) = 2\pi r \sin\frac{\varepsilon}{r} = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3r^2}\cdot \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3),$$ et dans l'espace hyperbolique de courbure $-k$ $(k > 0)$ elle vaut $\ell(P,\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + \frac{\pi k}{3}\cdot \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$. Pour une variété

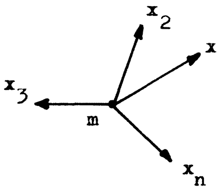
riemannienne quelconque la limite

$$\sigma\ (P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi\varepsilon - \ell\ (P,\varepsilon)}{\varepsilon^3}$$

existe toujours (formule de Puiseux-Bertrand) et est appelée la <u>courbure section-nelle de</u> (M,g) <u>pour</u> P. Si P est engendré par les deux vecteurs tangents x et y, on écrira $\sigma(P) = \sigma(x,y)$. La quantité σ est une fonction numérique définie sur la grassmannienne G_2M des plans tangents à M.

2.2. <u>Courbure de Ricci</u>. Soit x un vecteur tangent à M en m et supposé de norme 1; si on complète x en une base orthonormée $\{x, x_2, \ldots, x_n\}$ de T_mM, la quantité

$$\rho(x) = \sum_{i=2}^{n} \sigma(x, x_i)$$



ne dépend que de x et est appelée la <u>courbure de Ricci</u> de (M,g) <u>pour</u> x. En fait ρ provient d'une forme différentielle bilinéaire symétrique, Ric, appelée encore <u>la courbure de Ricci</u>, en sorte que $\rho(x) = \mathrm{Ric}(x,x)$.

2.3. <u>Courbure scalaire</u>. La <u>courbure scalaire</u> τ de (M,g) est la trace de Ric par rapport à g :

$$\tau = \mathrm{trace}_g \mathrm{Ric}.$$

Ainsi, en un moint m, pour toute base orthonormée $\{x_i\}$ de T_mM, on aura

$\tau = 2 \sum_{i\ j} (x_i, x_j)$. La fonction τ est une fonction numérique sur M.

En fait les trois fonctions σ, ρ, τ proviennent algébriquement d'un objet unique, mais compliqué, le tenseur de courbure R de (M,g), considéré comme une 2-forme différentielle bilinéaire à valeurs dans les endomorphismes de l'espace tangent, de telle sorte que $E(x,y) \in \mathrm{End}(T_mM)$. Alors la courbure sectionnelle est donnée par la formule

$$\sigma\ (x,y) = \frac{g(R(x,y)x,y)}{\|x \wedge y\|^2}.$$

Ensuite Ric s'obtient en faisant la trace de R par rapport à g aux deux places marquées ci-dessous par les points :

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{trace}_g(g(R(x,\bullet)x,\bullet).$$

Et enfin $\tau = \mathrm{trace}_g\ \mathrm{Ric}$. Lorsque ce sera nécessaire, nous utiliserons les écritures plus précises évidentes : R_g, Ric_g, σ_g, τ_g.

3. LES MÉTRIQUES D'EINSTEIN

Il est naturel de penser que les plus belles métriques riemanniennes sont celles à courbure constante. Mais pour laquelle de ces trois fonctions ? Il est classique (voir par exemple [2], VI.7 en particulier le théorème 7.10 page 265) qu'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante (i.e. la fonction ne prend qu'une valeur sur G_2M) est localement isométrique à l'une des trois variétés standards suivantes : l'espace euclidien, la sphère (de rayon quelconque) et l'espace hyperbolique (de courbure quelconque négative). Exiger donc la constance de la courbure sectionnelle est une condition beaucoup trop forte.

En revanche exiger que la courbure scalaire $\tau : M \to \mathbb{R}$ soit constante est une condition beaucoup trop faible; on sait en effet (cf. [3] et remarquer que l'ensemble des classes de métriques conformes entre elles est de dimension infinie) que toute variété compacte de dimension plus grande que 2 admet un ensemble de dimension infinie de métriques riemanniennes à courbure scalaire constante. Ces dernières sont donc sans grande signification (ou de beauté bien pâle). Seule la question du signe de τ restait intéressante; mais elle vient d'être complètement résolue dans les travaux à paraître de M. Gromov et B. Lawson, le premier résultat dans ce domaine ayant été celui [4] de A. Lichnerowicz (voir aussi 5.2.)

Située entre la courbure sectionnelle (qui en dit trop sur une métrique riemannienne) et la courbure scalaire (qui n'en dit pas assez) la courbure de Ricci semble donc une bonne candidate.

3.1. <u>Définition</u>. <u>Une métrique riemannienne</u> g <u>est dite</u> d'Einstein <u>si sa courbure de Ricci est constante (i.e. il existe un réel k, appelé</u> constante d'Einstein, <u>tel que $\mathrm{Ric} = k.g$)</u>. <u>On parlera aussi de</u> la variété d'Einstein (M,g).

3.2. <u>Notes</u>. Nous nous intéressons le plus souvent au cas compact (cf. 3.4), mais la notion est aussi intéressante dans le cas complet non compact, voir des exemples instructifs en [5] et [6], p. 276 (voir le début du § 4).

Notons d'abord que, si n vaut 2 ou 3, être d'Einstein équivaut à être à courbure sectionnelle constante (c'est une propriété algébrique élémentaire de la courbure, cf. [7], p. 41. On s'attend donc à ce que la première dimension à considérer, $n=4$, joue un rôle particulier et soit plus riche.

Le nom d'Einstein est justifié ainsi : dans le cas où g n'est plus une métrique riemannienne mais une métrique lorentzienne, c'est à dire une forme différentielle bilinéaire symétrique de signature maintenant (- - - +) en dimension 4, la condition analogue $Ric_g = k.g$ s'interprète en théorie de la Relativité. Par exemple le cas k=0 correspond à une variété sans matière.

Par changement homothétique de g en $\lambda.g$, pour un réel λ convenable, on peut toujours supposer que Ric = k.g avec k = +1,0,-1. On appellera ce nombre k de l'ensemble {+1,0,-1} le <u>signe</u> de la métrique d'Einstein considérée.

On pourrait aussi vouloir étudier les métriques riemanniennes qui vérifient la condition apparemment plus faible suivante : il existe une fonction numérique k sur M telle que Ric(m) = k(m).g(m) pour tout m de M; mais cette notion n'existe pas vraiment car un résultat classique (cf. [2], p. 292) affirme qu'alors, si n est plus grande que 2, la fonction k est nécessairement constante sur M.

Il est temps maintenant de montrer que, pour des raisons diverses, la notion de métrique d'Einstein est effectivement raisonnable et prometteuse.

3.3. Remarquons d'abord que, algébriquement, Ric a autant de paramètres (à savoir (1/2)n(n+1)) que la métrique g elle-même. En outre, en prenant des coordonnées, on constate que, en prenant pour inconnue la 2-forme différentielle bilinéaire symétrique g, l'équation $Ric_g = k.g$ est un système différentiel quasi-linéaire du second ordre et elliptique (cf.
Cette ellipticité fait bien augurer de l'avenir; voir aussi le § 2 de l'exposé suivant.

3.4. Pour une variété compacte donnée M, les métriques d'Einstein sont exactement les solutions du problème variationnel suivant. Considérons sur l'espace de toutes les métriques riemanniennes de M, la fonctionnelle

$$\mathcal{C} : g \rightarrow \frac{\left(\int_M \tau_g \, v_g\right)^n}{\left(\int_M v_g\right)^{n-2}}$$

où v_g désigne la mesure canonique de la métrique riemannienne g (cf. [1], p.13). Alors, si $n \geq 3$, la métrique riemannienne g est d'Einstein si et seulement si elle est un point critique de $\mathcal{T}$ (cf. [8]). Si n=2, la fonctionnelle est constante d'après la formule de Gauss-Bonnet (cf. [9], p. 358).

3.5. Pour toute métrique riemannienne, le tenseur de courbure R admet une décomposition $R = R_I + R_{II} + R_{III}$ en composantes irréductibles sous l'action du groupe orthogonal (cf. [10], p. 404 et [11], p. 91). Dire que la métrique riemannienne est d'Einstein correspond alors exactement à la condition $R_{II} = 0$.

3.6. Si g est une métrique d'Einstein, alors son tenseur de courbure est <u>harmonique</u> dans le sens suivant :
considérons R comme une 2-forme différentielle extérieure à valeurs dans le fibré des endomorphismes de l'espace tangent. Pour une telle forme on possède une notion de différentielle extérieure d (déduite de la connexion de Levi-Civita de (M,g)) et d'une notion de codifférentielle δ (son adjoint formel). Pour toute métrique riemannienne on a $dR = 0$ d'après la deuxième identité de Bianchi (cf. [2], p. 121); si g est de plus d'Einstein alors on a aussi $\delta R = 0$ (et on peut ainsi dire, par analogie avec le laplacien ordinaire, que R est harmonique). On pourra rapprocher cette harmonicité de l'ellipticité de 3.3. Quant au rapport complet entre l'harmonicité de R et le fait d'être Einstein, il n'est pas élucidé actuellement (voir seulement [12] et [13], p. 167) pour le cas Kählérien dans lequel il y a effectivement équivalence entre être d'Einstein et être à courbure harmonique.

Dans la formulation "harmonique" précédente, il apparaît une analogie entre les métriques d'Einstein et les champs de Yang-Mills self-duaux, mais elle semble assez délicate à pousser plus avant (voir 5.3.).

3.7. Si (M,g) et (N,h) sont deux variétés d'Einstein, leur <u>produit</u> $(M\times N, g\times h)$ ne sera d'Einstein que si les deux ont la même constante d'Einstein k. Sinon l'ajustement par homothéties sera possible si et seulement si (M,g) et (N,h) ont le même signe. Il y a là apparemment une limitation à l'intérêt de la notion de variété d'Einstein. Mais ceci est mineur car on peut y remédier en introduisant la notion de métrique riemannienne à courbure de Ricci parallèle (i.e. D(Ric) = 0 pour la dérivée covariante D). D'après le théorème de G. de Rham (cf. [2], p. 192) une telle métrique riemannienne sera localement isométrique à un produit de variétés d'Einstein; tandis en sens inverse que le produit $(M\times N, g\times h)$ est lui à Ricci parallèle si (M,g) et (N,h) le sont, à fortiori si elles sont d'Einstein. Bien sûr, Ricci parallèle implique harmonique.

3.8. Notre dernière justification est l'existence d'un bon nombre de variétés compactes qui admettent des métriques d'Einstein, ainsi que nous le développons dans le paragraphe suivant.

4. EXEMPLES

A notre connaissance les exemples donnés ci-dessous sont les seuls exemples connus de variétés compactes admettant au moins une métrique d'Einstein. Pour des exemples complets, non compacts, dont certains sont liés à la notion de groupe d'holonomie, deux références sont [5] et [6], p. 293, compte tenu de [14], p. 1318.

4.1. Soit $M = G/H$ un espace homogène de groupes de Lie à groupe d'isotropie H compact et irréductible, i.e. tel que la représentation adjointe Ad H de H dans $T_{p(e)}M$ (où $p(e)$ désigne le point base de $M=G/H$) soit irréductible en tant que représentation linéaire. Alors, puisque H est compact, il existe sur M une métrique rielannienne g invariante par G. Une telle métrique riemannienne est nécessairement d'Einstein; en effet, sur $T_{p(e)}M$ seront invariantes par Ad H à la fois g et Ric_g. Comme Ad H est irréductible et g définie positive, la diagonalisation de Ric_g par rapport à g montre que Ric_g est collinéaire à g.

On obtient ainsi une classe assez large de variétés admettant au moins une métrique d'Einstein, classe qui comprend en particulier tous les espaces riemanniens symétriques irréductibles. Mais il y en a d'autres; ces G/H à groupe d'isotropie compact et irréductible ont été classés complètement dans [15].

4.2. En 1973 G. Jensen découvrait sur chaque sphère S^{4p+3} $(P > 0)$ une métrique d'Einstein différente de la métrique canonique (qui est d'Einstein). Cette métrique était homogène, mais bien sûr pas du type 4.1. On en trouvera une construction très simple dans [16] p. 87. Dans [17] on trouvera un grand nombre d'espaces homogènes qui admettent des métriques d'Einstein, mais la classification des métriques d'Einstein homogènes semble actuellement difficile.

Remarquons que, à relire le paragraphe 1, nous n'avons pas lieu d'être satisfaits jusqu'à présent.

4.3. Mais tout récemment D. Page dans [18] a construit une métrique d'Einstein sur la somme connexe de deux plans projectifs complexes. Cette construction est généralisée dans [19] à toute une classe de variétés compactes ou non.

4.4. On verra en 6.4. qu'il existe une métrique d'Einstein sur toute une classe de variétés kählériennes compactes et non homogènes.

5. LES PROBLÈMES NATURELS

5.1. Il y a deux questions principales qui contiennent toutes les autres :

Q.1 Quelles sont les variétés compactes qui admettent au moins une métrique d'Einstein ?

Q.2 Sur une telle variété, décrire l'ensemble des métriques d'Einstein.

D'après 3.2., lorsque n vaut 2 ou 3, il s'agit de classer les métriques riemanniennes à courbure sectionnelle constante, donc les quotients compacts des trois variétés types du début du § 3. En dimension 2 la question est complètement résolue : toute variété compacte de dimension 2 admet des métriques riemanniennes à courbure constante et leur ensemble, quotienté par le groupe des difféomorphismes pour obtenir l'espace des structures riemanniennes proprement dites, forme l'espace des modules. Pour la sphère et le projectif réel, cet espace de modules est réduit à un point. Pour le tore il est de dimension 3 (cf. [1], p. 148-149), pour la bouteille de Klein, de dimension 2 (cf. [1], p. 151 ou [2], p. 223. Pour une surface orientable de genre γ, de dimension $6\gamma-6$ (cf. [36], p. 25 ou 20), et pour une non orientable de genre γ de dimension $3\gamma-3$ (cf. [36], p. 25).

En dimension 3, la question est en pleine étude et les travaux de W. Thurston laissent prévoir un dénouement assez proche.

Pour les géomètres riemanniens, le problème commence donc en dimension plus grande que 3. Même en dimension 4, on est loin d'une réponse à Q.1; on possède seûlement les résultats exposés en 6.3. et, en dimension plus grande que 4, aucune condition nécessaire sur M n'est connue.

Pour Q.2, on ne connaît aucun résultat sans hypothèse auxiliaire, à la seule exception du tore T^4 pour lequel les métriques riemanniennes d'Einstein sont plates d'après 6.5. Pour attaquer Q.2, le plus naturel est d'étudier les déformations des métriques d'Einstein, elles sont traitées dans l'exposé suivant.

5.2. Passons à des questions auxiliaires. La première est celle du signe. Sur une variété M admettant au moins une métrique d'Einstein, le signe de cette dernière est-il ou non imposé ? Ce signe a-t-il un lien avec la topologie de M ? Deux résultats seulement sont connus à ce sujet dans le cas compact. Le premier résulte directement du théorème de S. Bochner (cf. [21]) : le signe ne peut être +1 que si le premier nombre de Betti de M est nul. Le second résulte du théorème de A. Lichnerowicz sur les spineurs harmoniques (cf. [4]) : le signe ne peut être +1 que si le A-genre de M est nul. Bien entendu, on ne connaît aucune variété complète portant deux métriques d'Einstein de signes différents. Ceci montre combien la théorie est peu avancée. Dans le cas complet le signe +1 a des conséquences sur la structure du groupe fondamental de M d'après [22].

5.3. Il semble que l'état peu avancé de la théorie soit dû, entre autres, à l'absence d'interprétation géométrique utilisable de la condition d'Einstein. Il est facile de voir, si n=4, qu'être d'Einstein équivaut à $\sigma(P) = \sigma(P^{\perp})$ pour tout plan P de G_2M et son orthogonal $P^{\perp}$. Mais cette condition n'a guère porté de fruits.

Une deuxième interprétation, probablement plus utilisable, toujours en dimension 4 et si M est orientée, est la suivante. Le fibré $\Lambda^2 T^*M$ des 2-formes différentielles extérieures sur M est muni de l'opérateur de Hodge $* : \Lambda^2 T^*M \longrightarrow \Lambda^2 T^*M$ parce que la dimension est quatre, que l'on a une orientation et que la variété est riemannienne. Comme $* \circ * = \mathrm{Id}$, on peut considérer le sous-fibré $\Lambda^2_+ T^*M$ formé des vecteurs propres de $\Lambda^2 T^*M$ pour la valeur propre +1 de $*$. La connexion de Levi-Civita D de (M,g) s'étend en une connexion $\tilde{D}$ sur $\Lambda^2_+ T^*M$, de courbure $\tilde{R}$. L'opérateur de Hodge s'étend aussi à $\tilde{R}$. Alors (cf. [23], p. 432) on a : (M,g) est d'Einstein si et seulement si $* \circ \tilde{R} = \pm \tilde{R}$. Ceci implique (cf. [23], p. 432) que la condition d'être d'Einstein est équivalente, pour g, a être un minimum absolu pour une certaine fonctionnelle (apparemment plus compliquée que celle $\mathcal{C}$ de 3.4.).

5.4. L'interprétation de la condition d'Einstein comme point critique de la fonctionnelle $\mathcal{C}$ de 3.4. encourage à utiliser la théorie de Morse. Cependant, elle est certainement inutilisable telle quelle. En effet, d'après [24] et [25] il est très probable que, pour toute métrique d'Einstein, il existe à la fois un sous-espace de dimension infinie sur lequel la restriction du Hession de $\mathcal{C}$ est définie négative et un autre, toujours de dimension infinie, sur lequel elle est définie positive.

5.5. Le cas kählérien. Une référence systématique pour la présente section est [26]. On travaille ici avec une variété complexe M, de structure complexe J, et l'on ne considère sur M que des métriques kählériennes par rapport à J. On peut alors interpréter très plaisamment Ric et la condition d'Einstein. Rappelons qu'à g on associe sa forme de Kähler ω définie par $\omega(x,y) = g(Jx,y)$ pour tous x,y. De même à Ric on associe par $\gamma(x,y) = \mathrm{Ric}(Jx,y)$. Il se trouve que les deux formes 2-formes extérieures ω et γ sont fermées : $d\omega = d\gamma = 0$, donc définissent (via de Rham) des classes de cohomologie $[\omega]$, $[\gamma]$ de M. On démontre que $\frac{1}{2\pi}[\gamma]$ n'est autre que la première classe de Chern c_1 de (M,J). Si donc g est une métrique d'Einstein, une condition nécessaire est que c_1 soit collinéaire à $[\omega]$; et en outre on a une interprétation du signe. Nous allons voir en 6.4. que cette condition nécessaire est suffisante dans deux cas sur trois.

6. RÉSULTATS

6.1. Isolation de la métrique canonique de la sphère. Dans l'esprit de Q.2. en 5.1. (et comparer avec 4.2.) on démontre ceci (cf. [27] et [28]) : si (M,g) est une métrique d'Einstein compacte, simplement connexe dont la courbure sectionnelle varie entre 1 et $\frac{3n}{7n-4}$, alors (M,g) est isométrique à la sphère canonique (S^n,can). Si n=4, on a le même résultat mais en exigeant seulement une courbure comprise, strictement ici, entre 1 et 1/4. Lorsque n=4, la valeur 1/4 est la meilleure possible comme le montre l'exemple du plan projrvtif complexe CP^2 muni de sa métrique riemannienne canonique. Pour $n > 4$, la valeur $\frac{3n}{7n-3}$ n'est pas la meilleure possible.

La démonstration utilise la formule de A. Lichnerowicz (cf. [29], p. 10) donnant le laplacien de la norme $|R|^2$ du tenseur de courbure :

$-\frac{1}{2}\Delta(|R|^2) = |DR|^2 + F(R)$ pour une métrique d'Einstein; le terme F(R) est cubique en R et, sous les inégalités assumées pour la courbure sectionnelle, on montre que F(R) est positive ou nulle. Comme l'intégrale d'un laplacien est nulle, on a DR=0 ce qui permet de conclure.

6.2. Existence et unicité dans le cas homogène kählérien. Soit M une variété complexe compacte simplement connexe. Supposons que M soit homogène et admettre une métrique kählérienne d'Einstein et une seule (cf. [13]). Cette classe de variétés M comprend, en particulier, tous les espaces riemanniens symétriques kählériens compacts.

Pour démontrer l'existence, on introduit le groupe G_C de toutes les transformations holomorphes de M et un sous-groupe compact maximal G_0 de G_C. On montre d'abord que G_0 est semi-simple et transitif sur M, et que son complexifié est G_C luimême. Puisque M admet une métrique kählérienne, M en admet maintenant une invariante de plus par G_0; soit ν la forme volume d'une telle métrique kählérienne. Comme ν est G_0-invariante, il en est de même de $\gamma_0 = 2d'd''\log \nu$. On montre ensuite que γ_0 est définie négative et donc on peut prendre enfin $\omega_0 = -\gamma_0$ comme métrique kählérienne sur M. Mais d'après le 5.5., la courbure de Ricci de ω_0 coïncide avec $-\gamma_0$, ainsi ω_0 est bien d'Einstein.

Pour l'unicité, on montre d'abord que l'algèbre de Lie de G_0 s'identifie avec l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de Killing de ω_0. D'autre part, pour toute métrique kählérienne d'Einstein g sur M l'algèbre de Lie de G_C n'est autre que la complexifiée de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de Killing de g. On conclut donc en appliquant le théorème de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe de Lie.

6.3. Le résultat de J. Thorpe. C'est le seul résultat connu reliant, en toute généralité, la condition d'Einstein et la topologie algébrique. La variété M doit être compacte, orientable et de dimension 4; on note $\chi(M)$ sa caractéristique d'Euler et $\sigma(M)$ sa signature; alors, si M admet une métrique d'Einstein, on a nécessairement l'inégalité $|\sigma(M)| \leq (2/3)\,\chi(M)$ (cf. [30], p. 785). Par exemple la somme connexe $\#^k CP^2$ de k plans projectifs complexes ne pourra porter une métrique d'Einstein que si $k \leq 4$; en effet on a $\chi(\#^k CP^2) = k+2$ et $\sigma(\#^k CP^2) = k$.

La démonstration utilise les deux formules donnant (M) et $\sigma(M)$ comme des intégrales de formes quadratiques en le tenseur de courbure R; la condition d'Einstein entraîne l'inégalité $|\bullet| \leq (2/3)(\bullet)$ entre ces formes quadratiques, d'où l'inégalité cherchée par intégration.

6.4. Les théorèmes de T. Aubin et S.T. Yau (voir [26] pour l'ensemble). Dans cette section M désigne une variété complexe compacte fixée.

Le cas du signe −1. D'après 5.5. si l'on veut que M admette une métrique kählérienne d'Einstein de signe −1 il est nécessaire que la première classe de Chern c_1 de M contienne (au sens de de Rham) une 2-forme différentielle extérieure α de type (1,1) qui soit définie positive (c'est à dire telle que $\alpha(Jx,x) > 0$ pour tout vecteur tangent x non nul). Dans [31] T. Aubin a démontré que cette condition nécessaire est aussi suffisante; en outre, comme l'avait déjà vu E. Calabi dans [33]; cette métrique kählérienne d'Einstein est alors unique (dans la classe complexe considérée pour M).

Le cas du signe 0. Si l'on veut maintenant que M admette une métrique kählérienne d'Einstein de signe 0, c'est à dire à courbure de Ricci nulle, il est nécessaire que $c_1=0$. Dans [32] S.T. Yau a démontré (ce qui est un cas particulier d'une conjecture plus générale de E. Calabi dans [33]) que si M admet une métrique kählérienne ω_0 et si $c_1=0$, alors il existe sur M une et une seule métrique kählérienne d'Einstein de la forme $\omega = \omega_0 + id'd''\varphi$ (où φ est une fonction numérique sur M) qui est à courbure de Ricci nulle.

Pour le cas du signe +1, voir [26], p. 146.

Un corollaire simple des deux résultats précédents est le suivant : soit M une hypersurface algébrique sans singularité de l'espace projectif complexe CP^{n+1} ; pour la structure kählérienne induite par celle canonique de CP^{n+1} on a $c_1 = (n+2-d)\, e$, où e désigne la classe de de Rham de la métrique kählérienne considérée et d le degré de M. Si donc M est de degré supérieur ou égal à n+2, elle admettra toujours une métrique kählérienne d'Einstein, de signe 0 si $d = n+2$ et de signe -1 si $d > n+2$.

Les démonstrations de ces deux résultats sont fort difficiles. Donnons une idée de la façon dont on procède pour le signe 0 (le cas du signe -1 est en grande partie semblable). La formule (cf. [26], p. 84) donnant la courbure de Ricci d'une variété kählérienne comme dérivée seconde de l'élément de volume montre que la fonction φ inconnue doit vérifier l'équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{m}{\Lambda}(\omega + id'd''\varphi) = e^{f}\, \overset{m}{\Lambda}\omega$$

où $m = n/2$, où f est une fonction numérique donnée sur M telle que

$\int_M e^f \overset{m}{\Lambda}\omega = \int_M \overset{m}{\Lambda}\omega$, et où φ doit en outre être telle que $\omega + id'd''\varphi$ soit définie positive. L'équation (E) est une équation du type de Monge-Ampère complexe. On la résoud en la considérant comme la valeur pour t=1 de la famille d'équations

$$(E_t) \qquad \overset{m}{\Lambda}(\omega + id'd''\varphi) = e^{tf}\left(\frac{\int_M \overset{m}{\Lambda}\omega}{\int_M e^{tf}\,\overset{m}{\Lambda}\omega}\right)\overset{m}{\Lambda}\omega$$

On montre que l'ensemble des t de [0,1] pour lesquels (E_t) a une solution est ouvert et fermé. L'ouverture se démontre par des théorèmes généraux d'analyse que l'on peut appliquer essentiellement parce que la dérivée en t de (E_t) fait apparaître un laplacien ("la dérivée d'un déterminant est une trace"). La fermeture nécessite la démonstration de "bornes a priori", très délicates et que l'on obtient par un mélange de géométrie et d'analyse. Le caractère kählérien de la variété est absolument essentiel.

6.5. Le cas du tore T^4. Si la variété est le tore à quatre dimensions T^4, alors toute métrique d'Einstein sur T^4 est plate. Il suffit pour le voir d'utiliser la formule de Gauss-Bonnet en dimension 4, sous la forme découverte par A. Avez (cf.

[34] ou 1 , p. 82) :

$$\int_{T^4} |R|^2 v_g = \int_{T^4} |\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{I}}{4} \cdot g|^2 v_g + 32\pi^2 \chi(T^4),$$

et remarquer que $\chi(T^4)=0$, joint au fait que g est d'Einstein si et seulement si $\mathrm{Ric} = \frac{\pi}{4}.g$.

En fait il suffit de demander que la courbure soit harmonique pour obtenir la platitude sur T^4, comme l'a démontré A. Avez dans [35]. L'existence de coordonnées globales sur T^4 permet en effet de construire un tenseur H d'ordre 3 qui vérifie la formule

$$\int_{T^4} |R_{III}|^2 v_g = \int_{T^4} (\delta R,H) v_g,$$

où R_{III} est le tenseur de courbure conforme de H. Weyl qui figure en 3.5. Si donc $\delta R = 0$, alors $R_{III}=0$, et g est conformément plate; un calcul permet de terminer.

7. PERSPECTIVES

En dimension 4, les théories de R. Penrose semblent peut être pouvoir fournir un jour une approche systématique des métriques d'Einstein.

Il serait intéressant de décider si la condition d'Einstein est plus forte en dimension 4 qu'en dimensions supérieures.

Enfin, il y a quelque espoir d'obtenir en dimension 8 (et peut être 4k) des conditions nécessaires de nature topologique analogue à celle de 6.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.BERGER, P.GAUDUCHON, E.MAZET. Le spectre d'une variété riemannienne. Lectures Notes in Math. 194, Springer 1971.

[2] S.KOBAYASHI, K.NOMIZU. Foundations of Differentiel Geometry. Volume 1, Interscience, 1963.

[3] J.KAZDAN, F.WARNER. Existence and conformal deformations of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures. Annals of Math. 101 (1975), 317-331.

[4] A.LICHNEROWICZ. Spineurs harmoniques. C.R. Acad.Sciences Paris, 257 (1963) 7-9.

[5] D.ALEKSEEVSKII. Classification of quaternionic spaces with a transitive solvable group of motions. Math.USSR Izvestija, 9 (1975), 297-339.

[6] E.CALABI. Métriques kählériennes et fibrés holomorphes. Annales Scient.Ecole Norm.Sup. 12 (1979), 269-293.

[7] M.BERGER. Sur les variétés d'Einstein compactes. C.R. III^e Réunion Math. Expression latine, Namur (1965), 35-55.

[8] D.HILBERT. Die Grundlagen der Physik, Göttingen Nachr. Math.Phys.Klasse, 395 (1915); 53 (1917).

[9] S.KOBAYASHI, K.NOMIZU. Foundations of Differentiel Geometry. Volume II, Interscience, 1969.

[10] H.WEYL. Reine Infinitesimalgeometrie. Math.Zeitschrift, 2 (1918), 384-411.

[11] L.EISENHART. Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1949.

[12] A.DERDZINSKI. Classification of certain compact Riemannien manifolds with harmonic curvature and non-parallel Ricci tensor. A paraître.

[13] Y.MATSUSHIMA. Remarks on Kähler-Einstein manifolds. Nagoya Math.J. 46 (1972) 161-173.

[14] M.BERGER. Remarques sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. C.R. Acad.Sciences Paris, 262 (1966), 1316-1318.

[15] J.WOLF. The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces. Acta Math., 120 (1968), 59-148.

[16] J.P.BOURGUIGNON, H.KARCHER. Curvature operators : Pinching estimates and geometric examples. Annales Scient.Ecole Norm.Sup. 11 (1978), 71-92.

[17] J.E.D'ATRI, W.ZILLER. Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups. Memoirs of the Amer.Math.Soc. Vol.18, 1979.

[18] D.PAGE. A compact rotating gravitational instanton. Prépublication.

[19] L.BERARD BERGERY, à paraître.

[20] Travaux de Thurston sur les difféomorphismes de surfaces. Séminaire d'Orsay 76-77. Astérisque, 1979.

[21] S.BOCHNER. Vector fields and Ricci curvature. Bull.Amer.Math.Soc., 52 (1946) 776-797.

[22] J.CHEEGER, D.GROMOLL. The splitting theorem for manifolds of nonnegative curvature. J.Diff.Geomatry, 6 (1971), 119-128.

[23] M.ATIYAH, N.HITCHIN, I.SINGER. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc.R.Soc.London, 362 (1978), 426-461.

[24] Y.MUTO. On Einstein metrics. J.Diff.Geometry, 9 (1974), 521-530.

[25] N.KOISO. On the second derivative of the total scalar curvature. Osaka Math.J. 16 (1979), 413-421.

[26] Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi. Séminaire Palaiseau 1978. Astérisque 1978.

[27] M.BERGER. Sur quelques variétés d'Einstein compactes. Annali di Math.Pura e Appl., 53 (1961), 89-96.

[28] T.FUJITANI. Compact suitably pinched Einstein manifolds. Prépublication.

[29] A.LICHNEROWICZ. Géométrie des groupes de transformations. Dunod, 1958.

[30] J.THORPE. Some remarks on the Gauss-Bonnet integral. J.of Math.Mechanics, 18 (1969), 779-786.

[31] T.AUBIN. Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. C.R. Acad.Sciences Paris, 283 (1976), 119-121.

[32] S.T.YAU. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation I. Comm. Pure and Appl.Math., 31 (1978), 339-411.

[33] E.CALABI. On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of Lefschetz, Princeton Univ. Press. 1955, 78-99.

[34] A.AVEZ. Applications de la formule de Gauss-Bonnet-Chern aux variétés à quatre dimensions. C.R. Acad.Sciences Paris, 256 (1963), 5488-5490.

[35] A.AVEZ. Remarques sur les variétés de dimension 4. C.R. Acad.Sciences Paris 264 (1967), 738-740.

[36] L.BÉRARD BERGERY, J.P.BOURGUIGNON, J.LAFONTAINE. Déformations localement triviales des variétés riemanniennes, in Differential Geometry. Proc.Symposia Pure Math. Vol.27, part I, American Math.Soc., 1975, p. 3-32.

Marcel BERGER
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212
U.E.R. de Mathématiques
Université PARIS VII