THIERRY AUBIN

Un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire sur la sphère

Astérisque, tome 80 (1980), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__57_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 57-62

UN THÉORÈME DE FREDHOLM NON LINÉAIRE POUR LA TRANSFORMATION CONFORME DE LA COURBURE SCALAIRE SUR LA SPHÈRE,

Thierry AUBIN

Nous allons résoudre un problème posé par Nirenberg, il y a une dizaine d'années. Soit S_2 la sphère de rayon $1/\alpha$, sa courbure scalaire $R = n(n-1)\alpha^2$. Etant donnée une fonction F, vérifiant $|F| < \varepsilon$, $\varepsilon > o$ un réel donné, existe-t-il une métrique conforme g', pour laquelle la courbure scalaire R' est R' + F ?

Posons $g' = e^{\varphi} g$, le problème revient à résoudre l'équation :

$$(1) \qquad \Delta\varphi + R = R' \, e^{\varphi}$$

Considérons plus généralement l'équation :

$$(2) \qquad \Delta\varphi + \tilde{R} = f \, e^{\varphi}$$

avec $\tilde{R}$ un réel positif et $f \in C^{\infty}$ une fonction positive en un point. Il est nécessaire que f ait cette propriété pour que l'équation (2) ait une solution, puisque $\tilde{R} \int dv = \int f \, e^{\varphi} dv$

Nous allons utiliser la méthode variationnelle pour résoudre l'équation (2).

Posons $I(\varphi) = \frac{1}{2}\int \nabla^{\nu}\varphi \nabla_{\nu}\varphi \, dv + \tilde{R} \int \varphi dv$

et $\mu = \inf I(\varphi)$ pour tout φ H_1 vérifiant $\int f \, e^{\varphi} \, dv = \tilde{R} \int dv$.

H_1 étant le premier espace de Sobolev. Nous sommes amenés à étudier cet espace qui correspond au cas d'exception du théorème d'inclusion de Sobolev. On montre que, lorsque $\varphi \in H_1$, $e^{\varphi} \in L_1$ et que l'opérateur de H_1 dans L_1 : $\varphi \to e^{\varphi}$ est un opérateur compact. De plus il existe des constantes C et R telles que

$$(3) \quad \int e^{\varphi} \, dv \leq C \, e^{k\|\nabla\varphi\|_2^2 + \int \varphi dv / \int dv}$$

Ces résultats se trouvent dans Trüdinger (6) et Aubin (1).

Sans nuire à la généralité, nous supposerons dans la suite, que $\int dv = 1$.

Théorème 1. L'équation (2) a une solution si $2\,k\,\tilde{R} < 1$.

a) μ est fini si $2\,k\,\tilde{R} \leq 1$.

$\mu < \infty$ car il existe des fonctions $\varphi \in H_1$ vérifiant $\int f\, e^{\varphi} dv = \tilde{R}$.

D'autre part :

$$\tilde{R} = \int f\, e^{\varphi}\, dv \leq \sup f \int e^{\varphi}\, dv \leq C \sup f \quad \exp\left[\, R\|\nabla\varphi\|_2^2 + \int \varphi\, dv\right]$$

$$(4) \quad I(\varphi) \geq (\tfrac{1}{2} - k\,\tilde{R})\,\|\nabla\varphi\|_2^2 + \tilde{R}\,\mathrm{Log}(\tilde{R}/C \sup f)$$

D'où $\mu > -\infty$

b) est atteint par une fonction $\varphi_o \in H_1$ si $2\,k\,\tilde{R} < 1$.

Soit φ_i une suite minimisante : $I(\varphi_i) \to \mu$, $\int f\, e^{\varphi_i}\, dv = \tilde{R}$.

D'après (4), si $2\,k\,\tilde{R} < 1$, $\|\nabla\varphi_i\|_2 < C_o$ une constante, puisque la suite $I(\varphi_i)$ est bornée ($I(\varphi_i) \leq A$ une constante).

D'où $\mu/\tilde{R} - C_o^2/2 \leq \varphi_i\, dv \leq A/\tilde{R}$

La suite $\{\varphi_i\}$ est donc bornée dans H_1, il existe une sous-suite $\{\varphi_j\}$ et $\varphi_o \in H_1$ tels que $\varphi_j \to \varphi_o$ faiblement dans H_1, fortement dans L_2 (théorème de Koudrakov) et tels que $e^{\varphi_j} \to e^{\varphi_o}$ fortement dans L_1.

Comme $\|\lim \text{faible}\| \leq \underline{\lim}\,\|$, $I(\varphi_o) \leq \mu$. Mais comme $\int f\, e^{\varphi_o}\, dv = \tilde{R}$, d'après la définition de μ, $I(\varphi_o) = \mu$.

c) $\varphi_o \in C^{\infty}$ et vérifie (2).

φ_o vérifie faiblement dans H_1, l'équation d'Euler du problème :

$$\Delta\varphi_o + \tilde{R} = \nu\, f\, e^{\varphi_o}$$

ν le multiplicateur de Lagrange est égal à 1 puisque $\int f\, e^{\varphi_o}\, dv = \tilde{R}$.

Comme $\varphi_o \in H_1$, pour tout $p \in N$, $p\varphi_o \in H_1$ et $e^{p\varphi_o}$ est intégrable. D'où

$\Delta\varphi_o \in L_p$ pour tout p. Ainsi $\varphi_o \in C^1$ et le théorème de régularité entraîne que $\varphi_o \in C^\infty$.

Il convient pour résoudre le problème de Nirenberg de connaître la meilleure constante R possible. Celle-ci est égale à $k_o = 1/16\pi$, Aubin (1) voir aussi Moser (5). Comme le volume de S_2 est supposé égal à 1 : $4\pi\,\alpha^{-2} = 1$, d'où $R = 2\,\alpha^2 = 8\pi$ et $2\,k_o\,R = 1$.

μ est fini, mais on ne peut pas faire converger une sous-suite de la suite minimisante. La méthode ne permet pas de résoudre le problème. Voilà où nous en étions en 1970. Cette conclusion était heureuse, car en 1974, Kazdon et Warner ont montré que le problème n'avait pas de solution, si F est une fonction propre relative à la première valeur propre $\lambda_1 > 0$. Si on appelle Λ l'espace de ces fonctions propres, ils ont montré que R' et φ une solution de (1) devaient vérifier pour tout $\xi \in \Lambda$:

$$\int \nabla^\nu \xi\, \nabla_\nu R'\, e^\varphi dv = 0$$

Donc si $R' = R + F$ avec $F \in \Lambda$, $F \not\equiv 0$, on a une contradiction en prenant $\xi = F$. L'opérateur $\varphi \rightarrow e^- (\Delta\varphi + R)$ n'est pas localement inversible en $\varphi = 0$.

Si donc on veut résoudre le problème de Nirenberg, il convient d'abaisser la constante k_o et c'est l'objet du

<u>Théorème 2</u>. Aubin [2] et [4]. Les fonctions $\varphi \in H_1$ vérifiant $\int \xi\, e^\varphi dv = 0$ pour tout $\xi \in \Lambda$, et $\int \varphi\, dv = 0$ satisfont à :

(5) (5) $$\int e^\varphi dv \leq C(k)\, e^{k\,\|\nabla\varphi\|_2^2}$$

où l'on peut prendre $k = k_o/2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > o$ aussi petit qu'on veut, C(k) étant une constante qui dépend de k, ($k_o = 1/16\pi$).

Soient ξ_i, i = 1,2,3 une base de Λ, par suite $\sum_{i=1}^{3} |\xi_i|$ est partout non nul : $\sum_{i=1}^{3} |\xi_i| \geqslant \beta > 0$.

Appelons $\xi_i^+ = \sup(\xi_i, 0)$ et $\xi_i^- = \sup(-\xi_i, 0)$, K_i^+(resp. K_i^-) le support de

ξ_i^+ (resp. ξ_i^-). Soient $\Omega_i^+ = \{x \in S_2/\xi_i(x) \geq \beta/3\}$, $\Omega_i^- = \{x \in S_2/\xi_i(x) < -\beta/3\}$,

h_i^+ (resp. h_i^-) des fonctions C^2 égales à 1 sur Ω_i^+ (resp. Ω_i^-) et g_i^+ (resp. g_i^-) des fonctions C^2 égales à 1 sur K_i^+ (resp. K_i^-), vérifiant

$0 \leq h_i^+ \leq 1$, $0 \leq h_i^- \leq 1$, $0 \leq g_i^+ \leq 1$, $0 \leq g_i^- \leq 1$,

supp $h_i^+ \cap$ supp $g_i^- = \emptyset$ et supp $h_i^- \cap$ supp $g_i^+ = \emptyset$.

Vues les hypothèses, en tout point $x \in S_2$, au moins une des fonctions ξ_i^+ ou ξ_i^- est supérieure à $\beta/3$. D'où $\bigcup_{i=1}^{3} (\Omega_i^+ \cup \Omega_i^-) = S_2$ et

$$\int e^{\varphi}\, dv \leq \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{\Omega_i^+} e^{\varphi}\, dv + \int_{\Omega_i^-} e^{\varphi}\, dv \right)$$

Supposons que pour tout i :

$$\int_{\Omega_{i_o}^-} e^{\varphi}\, dv \geq \int_{\Omega_i^-} e^{\varphi}\, dv \qquad \text{et} \int_{\Omega_{i_o}^-} e^{\varphi}\, dv \geq \int_{\Omega_i^+} e^{\varphi}\, dv$$

Si $\| \nabla (\varphi h_{i_o}^-) \|_2 \leq \| \nabla (\varphi g_{i_o}^+) \|_2$ nous écrivons en utilisant (3)

$$\int e^{\varphi}\, dv \leq 6 \int_{\Omega_{i_o}^-} e^{\varphi}\, dv \leq 6 \int_{S_2} e^{\varphi h_{i_o}^-}\, dv$$

$$\leq 6\, C \exp \left[k_o \| \nabla (\varphi h_{i_o}^-) \|_2^2 + \int \varphi h_{i_o}^-\, dv \right]$$

Et comme $2 \| \nabla (\varphi h_{i_o}^-) \|_2^2 \leq \| \nabla (\varphi h_{i_o}^-) \|_2^2 + \| \nabla (\varphi g_{i_o}^+) \|_2^2$

il existe une constante γ telle que

$$2 \| \nabla (\varphi h_{i_o}^-) \|_2^2 \leq \| \nabla \varphi \|_2^2 + 2 \gamma \| \varphi \|_2^2$$

(6) devient :

$$\int e^{\varphi}\, dv \leq 6\, C \exp\left[\frac{k_o}{2} \|\nabla\varphi\|_2^2 + \gamma \|\varphi\|_2^2 + \int |\varphi|\, dv\right]$$

Une telle expression se met sous la forme (5) si $\int \varphi\, dv = 0$ voir Aubin [4]

Dans le cas où $\|\nabla(\varphi h^-_{i_o})\|_2 > \|\nabla(\varphi g^+_{i_o})\|_2$ nous écrirons

$$\int_{\Omega^-_{i_o}} e^{\varphi}\, dv \leq \frac{3}{\beta} \int_{S_2} \xi^-_{i_o}\, e^{\varphi}\, dv = \frac{3}{\beta} \int_{S_2} \xi^+_{i_o}\, e^{\varphi}\, dv \leq \frac{3}{\beta} \sup_{1\leq i\leq 3} |\xi_i| \int_{K^+_i} e^{\varphi}\, dv$$

et en utilisant (3) :

$$\int_{K^+_{i_o}} e^{\varphi}\, dv \leq \int_{S_2} e^{\varphi g^+_{i_o}}\, dv \leq C \exp\left[k_o \|\nabla(\varphi g^+_{i_o})\|_2^2 + \int \varphi g^+_{i_o}\, dv\right]$$

où $\quad 2\,\|\nabla(\varphi g^+_{i_o})\|_2^2 \leq \|\nabla(\varphi g^+_{i_o})\|_2^2 + \|\nabla(\varphi h^-_{i_o})\|_2^2$

et nous obtenons le même résultat que précédemment.

Revenons au problème de Nirenberg :

<u>Théorème 3</u>. Aubin 3 et 4 . Etant donnée, sur la sphère S_2, une fonction $f \in C^\infty$, d'intégrale positive, il existe une fonction $h(f) \in \Lambda$ telle que l'équation (1) avec $R' = f - h(f)$ ait une solution $\varphi_o \in C^\infty$, e^{φ_o} étant orthogonal à Λ (au sens de L_2).

Nous reprenons la méthode variationnelle. Posons $I(\varphi) = \|\nabla\varphi\|_2^2/2 + R\int \varphi dv$, mais maintenant $\lambda = \inf I(\varphi)$ pour tout $\varphi \in H_1$, vérifiant $\int f\, e^{\varphi} dv = R$ avec e^{φ} orthogonal à .

Comme précédemment λ est fini, en particulier $\lambda \leq R \operatorname{Log}(R/\int f\, dv)$ mais maintenant λ est atteint par une fonction $\varphi_o \in H_1$, car on peut prendre $k = k_o/2 + \varepsilon$, de manière que $2k\, R < 1$.

φ_o vérifie l'équation d'Euler, il existe $h(f) \in \Lambda$ tel que

$$\Delta\varphi_o + R = [\nu f - h(f)]\, e^{\varphi_o}$$

De plus $\int f\, e^{\varphi_o} dv = R$, d'où $\nu = 1$, et $\int \xi\, e^{\varphi_o} dv = 0$ pour tout $\xi \in \Lambda$. Enfin $\varphi_o \in C^\infty$ d'après le théorème de régularité.

Nous avons pu écrire l'équation d'Euler sous la forme (7), car $f \notin \Lambda$; étant donné que $\int f\, dv > 0$. Mais une hypothèse plus faible peut être prise : il suffit qu'il existe une fonction strictement positive e^φ qui soit orthogonale à Λ et telle que $\int f\, e^\varphi\, dv = R$; il n'est pas nécessaire que cette fonction soit constante.

Les résultats de cet article peuvent être généralisés à la sphère S_n $n > 2$, et aux variétés riemanniennes compactes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AUBIN. Sur la fonction exponentielle. Comptes-Rendus Acad.Sc. Paris. Série A 270 (1970) p. 1514.

[2] T. AUBIN. Sur les meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev. Comptes-Rendus Acad.Sc. Paris. Série A 287 (1978) p. 795.

[3] T. AUBIN. Résolution d'une équation différentielle non linéaire, non inversible localement. Comptes-Rendus Acad.Sc. Paris. Série A 287 (1978) p. 1039.

[4] T. AUBIN. Journal of Functional Analysis 32. (1979).

[5] J. MC 'ER. A sharp form of an inequality by Trüdinger. Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) p. 1077-1092.

[6] N. TRÜDINGER. On imbeddings in to Orlitz Spaces. J. Math. Mech. 17 (1967). p. 473-483.

Thierry AUBIN,
Université de PARIS VI