NICHOLAS M. KATZ
GÉRARD LAUMON (réd.)

Sommes exponentielles

Astérisque, tome 79 (1980)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__79__1_0>

AVANT-PROPOS

Je voudrais remercier le département de mathématiques de l'Université de Paris-Sud (Orsay), en particulier L. Illusie et M. Raynaud, de m'avoir invité et de m'avoir donné l'occasion de faire un cours sur les sommes exponentielles, à l'automne 1979.

Mon intérêt dans les questions traitées ici a été beaucoup stimulé par des conversations et des échanges de lettres avec C. Hooley. Je lui en suis très reconnaissant. Ce que je dois à P. Deligne est plus long à détailler ; à part ses résultats fondamentaux sur lesquels tout ce travail est bâti, c'est lui qui m'a appris l'astuce technique mais essentielle de voir un faisceau comme extension de son quotient "non-ponctuel" par son sous-faisceau "ponctuel" (cf. chapitre 4).

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans la rédaction qu'en a faite G. Laumon. Je l'en remercie avec grand plaisir. Je remercie également Madame Bonnardel qui a réalisé la frappe du manuscrit. Ces remerciements seraient incomplets si je n'exprimais ici ma reconnaissance à l'I.H.E.S. pour son hospitalité et son soutien pendant l'élaboration de ce travail.

Nicholas M. Katz

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

par Luc Illusie

Il s'agit d'un cours consacré aux sommes exponentielles provenant des variétés sur les corps finis. On sait que la formule des traces en cohomologie ℓ-adique et les résultats fondamentaux de Deligne sur les conjectures de Weil fournissent un outil puissant pour l'étude de ces sommes. Dans (SGA 4 ½), Deligne a exposé le principe de la méthode et donné plusieurs applications (sommes de Gauss et de Jacobi, sommes de Kloosterman généralisées). L'objet de ce cours est double : d'une part, introduire à ces techniques le lecteur néophyte, d'autre part, en donner de nouvelles applications.

Celles-ci sont de deux types, assez différents. Un premier ensemble de résultats concerne des sommes exponentielles très générales, dans la situation suivante. On considère un schéma V de type fini sur $\mathbb{Z}$ et un morphisme f de V dans la droite affine $\underline{\underline{A}}^1_{\mathbb{Z}}$. Pour chaque nombre premier p, on peut former la somme exponentielle

$$S_n(p) = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{p^n})} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p} f(x)\right) .$$

D'après Deligne, le nombre réel

$$w(p) = \limsup_{n \to \infty} |S_n(p)|^{1/n}$$

est un entier naturel. Katz donne, en termes de f, des bornes explicites pour $w(p)$: il montre notamment que, si la fibre générique de f est de dimension $< N$ ou géométriquement irréductible de dimension N, alors on a $w(p) \leqslant 2N$ pour tout nombre premier p assez grand. Sous ces hypothèses, c'est d'ailleurs la meilleure majoration possible, comme on le voit aisément. Katz établit en fait un résultat plus précis (cf. 2.3.1), à savoir qu'il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de f, telle que, pour tout n et tout nombre premier p assez grand, on ait

$$|S_n(p)| \leqslant Ap^{Nn} .$$

Il s'agit là d'une percée intéressante dans des questions que Deligne n'avait pas abordées dans (SGA 4½). Le second ensemble de résultats est constitué par des majorations de sommes exponentielles associées à certaines situations géométriques de caractéristique p fixée vérifiant d'assez fortes conditions de régularité. On considère par exemple, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, une variété projective lisse X, géométriquement connexe, de dimension m, plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}^N/\mathbb{F}_q$, et la variété affine V, complément dans X d'une section lisse L par un hyperplan d'équation $s=0$; on considère sur V la fonction f définie par h/s^d, où h est un polynôme homogène de degré d premier à p tel que l'hypersurface d'équation $h=0$ soit transverse à L ; Katz montre qu'alors les sommes exponentielles

$$S_n = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^n})} \exp(\frac{2\pi i}{p} \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_p} f(x))$$

admettent la majoration

$$|S_n| \leqslant A(\sqrt{q})^{nm} ,$$

où A est un entier calculable explicitement à l'aide des classes de Chern de X et de la classe de L (cf. 5.1.1). Ce résultat contient comme cas particulier la majoration établie par Deligne à la fin de son article "La conjecture de Weil I" (Pub. Math. IHES n° 48), et d'autres obtenues antérieurement par Katz et exposées par Laumon dans le Séminaire Douady-Verdier 1978-79 (à paraître). Dans la situation envisagée, la majoration des S_n indiquée ci-dessus est la meilleure possible. Certaines variantes et généralisations sont traitées à la fin du cours.

Ces deux types de théorèmes sont démontrés par voie cohomologique, suivant la méthode exposée par Deligne dans (SGA 4½). Dans l'application de cette méthode, Katz exploite une idée géométrique très simple, mais fort utile, qui consiste à analyser les groupes de cohomologie de V que l'on doit étudier à l'aide de la suite spectrale de Leray du morphisme de V dans la droite affine défini par la fonction f sur V considérée. Il est probable que cette idée est appelée à servir dans d'autres situations.

Quelques mots maintenant sur l'organisation du cours. Les résultats que je viens de résumer brièvement occupent les deux derniers chapitres. Les trois premiers constituent une introduction au formalisme cohomologique qui est au coeur du sujet. Le chapitre 1, consacré essentiellement à l'étude de quelques exemples classiques (sommes de Gauss, sommes de Kloosterman simples ou multiples, sommes de résidus quadratiques), dégage à ce propos les problèmes fondamentaux de la théorie. Au chapitre 2, on définit les fonctions L associées aux sommes exponentielles et l'on résume leurs principales propriétés. Le chapitre 3 contient une introduction à la théorie du groupe fondamental sur les variétés algébriques et au formalisme de la cohomologie ℓ-adique, et développe l'interprétation cohomologique des fonctions L définies au chapitre 2.

La rédaction de Laumon suit de près les exposés oraux de Katz et en rend assez bien, je pense, le caractère vivant et spontané. De nombreux exemples, exercices (en général résolus), et problèmes ouverts enrichissent ce texte, qui devrait intéresser un large public d'arithméticiens et géomètres algébristes de divers niveaux et horizons.

1 - INTRODUCTION

1.0. Une motivation générale.

Etant donné un polynôme $f(X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$, un problème fondamental de la théorie des nombres est de "décrire" l'ensemble

$$\{\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$$

des solutions entières de l'équation $f = 0$. D'abord, on se demande si cet ensemble est fini ou infini. S'il est infini, on peut essayer de décrire des "générateurs" dans un sens convenable (e.g. dans le style de Mordell-Weil pour les courbes elliptiques, ou de Manin pour les surfaces cubiques), on peut essayer de comprendre combien de solutions il y a dont la "grandeur" est $\leqslant h$, en fonction de h , etc. S'il n'y a qu'un nombre fini de solutions, on peut se demander combien, et comment borner leurs grandeurs.

Avec ce même f , on peut, pour chaque entier N , poser les mêmes questions pour l'équation

$$f(X_1,\ldots,X_n) = N .$$

Si le nombre de solutions est fini pour tout N , on peut demander une formule, soit exacte, soit asymptotique, pour le nombre de solutions en fonction de N . Par exemple, si n est <u>pair</u>, $n = 2k$, ces questions pour

$$f(\underline{X}) = X_1^2 + \ldots + X_{2k}^2$$

nous amènent, avec Jacobi, Glaisher, H.J.S. Smith, Ramanujan et Siegel, à la théorie des fonctions thèta et des formes modulaires.

De même, si nous considérons

$$f(\underline{X}) = X_1^k + \ldots + X_n^k$$

nous retrouvons le problème de Waring, résolu par Hilbert : Hilbert a montré que, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un entier $G = G(k)$ tel que l'équation

$$X_1^k + \ldots + X_G^k = N$$

ait une solution en entiers non-négatifs pour tout entier N suffisamment grand. L'étude de $G(k)$ a conduit Hardy et Littlewood à développer leur célèbre "méthode du cercle".

De façon un peu plus générale, considérons l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{k_i} = N$$

où les exposants k_i sont des entiers $\geqslant 1$, pas forcément égaux. Soit P une progression arithmétique. D'après une conjecture "standard" mais pour le moment inaccessible, l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{k_i} = N$$

doit avoir une solution en entiers non-négatifs pour tout entier N suffisamment grand dans P si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) on a $\sum_{i=1}^{n} 1/k_i > 1$

2) il n'y a pas d'obstruction de type congruence, dans le sens que, pour tout entier $N \in P$ et pour tout entier $M \geqslant 2$, la congruence

$$\Sigma\, X_i^{k_i} \equiv N \quad \text{modulo } M$$

admet une solution entière.

(Cette conjecture est compatible, par exemple, avec ce qu'on sait sur les sommes de carrés ; on sait en effet que tout entier qui n'est pas de la forme $4^a.(8b+7)$ s'écrit comme somme de trois carrés, et que tout entier s'écrit comme somme de quatre carrés).

Pour se "préparer" pour ces questions difficiles, on commencera par examiner des questions plus faciles.

1.1. Equations dans les corps finis et sommes trigonométriques.

Soit f un polynôme à n variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$. Pour tout nombre premier p et tout entier $d \geqslant 1$, on notera $N(p^d,f)$ le nombre de solutions $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{F}_{p^d})^n$ de l'équation

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0 ;$$

plus généralement, pour tout $t \in \mathbb{F}_{p^d}$, on notera $N(p^d,f;t)$ le nombre de solutions $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{F}_{p^d})^n$ de l'équation

$$f(x_1,\ldots,x_n) = t .$$

Le premier renseignement que l'on a sur les nombres $N(p^d,f)$ et $N(p^d,f;t)$ est l'estimation triviale

$$N(p^d,f) \leqslant p^{dn}$$

$$N(p^d,f;t) \leqslant p^{dn}$$

valable pour tous p, d et t. Dans ce cours on va chercher à améliorer très nettement cette estimation. Plus précisément, on va chercher à répondre aux questions suivantes.

1.1.1. Comment varie $N(p;f)$ en fonction de p ? A-t-on une estimation non triviale (i.e. avec $C' < n$) du type

$$N(p,f) \leqslant C.p^{C'}$$

valable pour tout nombre premier p ou pour presque tout nombre premier p (C et C' ne dépendant que de f) ? Ce problème est lié à l'étude des fonctions zêta de Hasse-Weil.

1.1.2. Si l'on fixe le nombre premier p , comment varie $N(p^d,f)$ en fonction de d ? Ce problème est lié à l'étude des fonctions zêta des variétés sur les corps finis.

1.1.3. On fixe toujours p et on considère la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto S(p,f;a) \end{aligned}$$

de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto N(p,f;t) \ . \end{aligned}$$

On a

$$S(p,f;a) = \sum_{t\in\mathbb{F}_p} N(p,f;t)e^{\frac{2\pi iat}{p}} = \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_p} e^{\frac{2\pi iaf(x_1,\ldots,x_n)}{p}}$$

donc les $S(p,f;a)$ sont des sommes exponentielles. On cherche alors d'une part des majorations de ces sommes exponentielles quand p est fixé d'autre part on cherche à connaître la distribution de ces sommes quand p varie ($a\in\mathbb{Z}$ étant fixé ou non). Pour p fixé, l'étude des sommes exponentielles

$$S(p^d,f;a) = \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_{p^d}} e^{\frac{2\pi ia}{p}\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^d}/\mathbb{F}_p}(f(x_1,\ldots,x_n))}$$

quand d varie est relié à l'étude des fonctions L des variétés sur les corps finis. D'après Hasse, Weil et Deligne, on a beaucoup de renseignements sur ces fonctions L .

Ces questions s'étendent naturellement à la situation suivante : soit V un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ une fonction sur V . Pour tout nombre premier p , tout entier $d \geqslant 1$ et tout $t\in\mathbb{F}_{p^d}$, on pose

$$N(p^d,f;t) = \#\{x \in V(\mathbb{F}_{p^d}) \mid f(x)=t\}$$

et pour tout $a \in \mathbb{F}_p$ on considère les sommes trigonométriques

$$S(p^d,f;a) = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{p^d})} e^{\frac{2\pi i a}{p}\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^d}/\mathbb{F}_p}(f(x))}$$

(pour tout $d \geqslant 1$).

1.2. Exemple : sommes de Kloosterman à une variable.

DÉFINITION 1.2.1. Pour tout nombre premier p et tout $a \in \mathbb{Z}$, premier à p, on pose

$$\mathrm{Kloos}(p;a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} e^{\frac{2\pi i}{p}(x+\frac{a}{x})} .$$

Une telle somme est dite de Kloosterman.

REMARQUE 1.2.2 (i) $\mathrm{Kloos}(p;a)$ est réelle (changer x en $-x$),
(ii) $|\mathrm{Kloos}(p;a)| \leqslant p-1$ (majoration triviale)
(iii) $\mathrm{Kloos}(p;a) \neq 0$ (si $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$, $\mathrm{Kloos}(p;a)$ est un entier du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et si $\mathfrak{P}$ est l'unique idéal premier de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ qui divise (p), on a $\mathrm{Kloos}(p;a) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{\mathfrak{P}}$).

THÉORÈME 1.2.3. Pour tout a, $a \not\equiv 0 \pmod p$, il existe un entier algébrique $\alpha_a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathrm{Kloos}(p;a) = \alpha_a + \bar{\alpha}_a$$

et que

$$|\alpha_a| = \sqrt{p}$$

pour toute $|\ |$ archimédienne. On a donc la majoration

$$|\mathrm{Kloos}(p;a)| \leqslant 2\sqrt{p} .$$

On avait d'abord obtenu des majorations en $p^{3/4}$, $p^{2/3}$, ..., puis, en 1934, Hasse a montré l'équivalence de ce théorème et de l'hypothèse de Riemann pour la courbe d'équation

$$T^h - T = x + \frac{a}{x}$$

sur $\mathbb{F}_p$. Enfin, Weil a démontré l'hypothèse de Riemann pour les courbes.

Ce théorème nous conduit à la question suivante : puisque

$$-1 \leqslant \frac{\mathrm{Kloos}(p;a)}{2\sqrt{p}} \leqslant 1$$

il existe un angle unique $\theta_{p,a} \in [0,\pi]$ tel que

$$\frac{\mathrm{Kloos}(p;a)}{2\sqrt{p}} = \cos(\theta_{p,a})$$

(alors $\alpha_a = \sqrt{p}.e^{\pm i\theta_{p,a}}$) ; comment varient les angles $\theta_{p,a}$ avec p ? Cette question est trop difficile, cependant on peut se demander comment les $\theta_{p,a}$ sont distribués dans $[0,\pi]$.

RAPPELS 1.2.4. Si X est un espace compact et si μ est une mesure positive sur X , de masse totale 1 , une suite (x_n) de points de X est dite équidistribuée pour μ si, pour toute $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ (fonction continue sur X à valeurs complexes), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right) = \int_X f.d\mu \tag{1.2.4.1}$$

REMARQUES 1.2.4.2 (i) il suffit de vérifier (1.2.4.1) pour une partie dense de $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme ;

(ii) pour une suite (x_n) donnée, si μ existe, μ est unique ;

(iii) d'après Polya-Szegö et Serre, la suite (x_n) , où $x_n \equiv \mathrm{Log}\, n$ (mod 1), n'est équidistribuée pour aucune mesure dans $[0,1]$.

CONJECTURE 1.2.5. <u>Pour tout</u> $a \in \mathbb{Z}$, <u>la suite</u> $(\theta_{p,a})_{p\in P_a}$, <u>où</u> P_a <u>est l'ensemble des nombres premiers qui ne divisent pas</u> a , <u>est équidistribuée dans</u> $[0,\pi]$ <u>pour la mesure de Sato-Tate</u>, $\mu = \frac{2}{\pi}\sin^2\theta.d\theta$.

COMMENTAIRES. Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}([0,\pi];\mathbb{C})$, il suffit de vérifier (1.2.4.1) pour $f(\theta) = \cos^n\theta$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi_a(N)} \sum_{\substack{p\in P_a \\ p\leqslant N}} \left(\frac{\mathrm{Kloos}(p;a)}{2\sqrt{p}}\right)^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n\theta.\sin^2\theta.d\theta$$

où $\pi_a(N) = \#\{p \in P_a \mid p \leqslant N\}$. Mais même des conséquences faibles de cette assertion sont loin d'être démontrées.

Par exemple, comme $\sin^2\theta$ est symétrique par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$, la conjecture a pour conséquence que, asymptotiquement, il y a autant de $p \in P_a$ tels que $\mathrm{Kloos}(p;a) > 0$ que de $p \in P_a$ tels que $\mathrm{Kloos}(p;a) < 0$ (on rappelle que $\mathrm{Kloos}(p;a) \in \mathbb{R}-\{0\}$).

QUESTION (1.2.5.1) $\{p \in P_a \mid \mathrm{Kloos}(p;a) > 0\}$ a-t-il une densité ? Si oui, cette densité est-elle ½ ?

QUESTION (1.2.5.2) On peut se demander s'il existe une mesure sur $[0,\pi]$ pour laquelle la suite $(\theta_{p,a})_{p\in P_a}$ est équidistribuée.

QUESTION (1.2.5.3) Si on est très optimiste, on peut considérer le produit eulérien

$$\prod_{p\in P_a} \frac{1}{1-\mathrm{Kloos}(p;a)p^{-s}+p^{1-2s}} = \prod_{p\in P_a} \frac{1}{(1-\alpha_{p,a}p^{-s})(1-\bar{\alpha}_{p,a}p^{-s})} .$$

On sait qu'il converge dans un demi-plan. On voudrait que ce produit eulérien soit la transformée de Mellin d'une forme modulaire "non-holomorphe" de poids 2 sur $SL_2(\mathbb{Z})$ ou peut-être sur un sous-groupe de congruence de niveau une puissance de 2 .

Si l'on savait comment aborder cette question, on pourrait avoir des renseignements sur le produit eulérien

$$\prod_{p\in P_a} \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i a}{p}}.p^{-s}}$$

sur lequel on ne sait pas grand-chose.

Comment peut-on espérer aborder ces questions ?

1.3. Sommes de Kloosterman multiples et équidistribution des sommes de Gauss.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $a \in \mathbb{F}_p^*$ on définit

$$\mathrm{Kloos}_n(p;a) = \sum_{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = a} e^{\frac{2\pi i}{p}(x_1+\ldots+x_n)}$$

et on appelle ces sommes trigonométriques, les sommes de Kloosterman multiples. Deligne a démontré (SGA 4½) (cf. aussi 2.4.4) :

THÉORÈME 1.3.1. Les sommes de Kloosterman multiples admettent la majoration

$$|\mathrm{Kloos}_n(p;a)| \leqslant n.p^{\frac{n-1}{2}}$$

pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $a \in \mathbb{F}_p^*$.

Comme on l'a déjà vu, le cas $n = 2$ avait déjà été prouvé par Hasse et Weil.

1.3.2. Rappels sur les sommes de Gauss et de Jacobi.

Soit $\chi : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère multiplicatif prolongé à $\mathbb{F}_p$ par $\chi(0) = 0$. Pour tout caractère additif $\Psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^*$, on définit la somme de Gauss

$$g(\Psi,\chi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Psi(x)\chi(x) . \tag{1.3.2.1}$$

Alors la transformée de Fourier

$$\hat{\chi} : \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_p,\mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}^*$$

de χ coïncide avec la fonction

$$\Psi \mapsto g(\Psi,\chi)$$

i.e.

$$\hat{\chi}(\Psi) = g(\Psi,\chi)$$

pour tout caractère additif Ψ, donc par inversion de Fourier, on a

(1.3.2.2) $$\chi = \frac{1}{p} \sum_{\Psi} g(\bar{\Psi},\chi).\Psi .$$

Maintenant si $\chi_1,\chi_2 : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{C}^*$ sont deux caractères multiplicatifs, on définit la somme de Jacobi

(1.3.2.3) $$J(\chi_1,\chi_2) = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \chi_1(x)\chi_2(1-x) .$$

LEMME 1.3.2.4. <u>Si</u> $\chi_1\chi_2$ <u>n'est pas trivial alors</u>

$$\chi_1 * \chi_2 = J(\chi_1,\chi_2)\chi_1\chi_2$$

(<u>où</u> $\chi_1 * \chi_2$ <u>est le produit de convolution défini par</u>

$$\chi_1 * \chi_2(x) = \sum_{u\in\mathbb{F}_p} \chi_1(u)\chi_2(x-u)) .$$

COROLLAIRE 1.3.2.5. <u>Si</u> $\chi_1\chi_2$ <u>n'est pas trivial alors pour tout caractère additif</u> Ψ

$$g(\Psi,\chi_1).g(\Psi,\chi_2) = J(\chi_1,\chi_2).g(\Psi,\chi_1\chi_2) .$$

Cela résulte simplement du fait que

$$\widehat{\chi_1 * \chi_2} = \hat{\chi}_1.\hat{\chi}_2 .$$

LEMME 1.3.2.6. <u>Si</u> Ψ <u>est un caractère additif non trivial et si</u> χ <u>est un caractère multiplicatif non trivial</u>, <u>alors</u>

$$|g(\Psi,\chi)| = \sqrt{p} .$$

En effet

$$g(\Psi,\chi).\overline{g(\Psi,\chi)} = \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} \Psi(x-y)\chi(x/y)$$

donc, si on pose $u = x/y$, on a

$$|g(\Psi,\chi)|^2 = \sum_{u\in\mathbb{F}_p^*} \chi(u) \sum_{y\in\mathbb{F}_p^*} \Psi(y(u-1))$$

or

$$\sum_{y\in\mathbb{F}_p^*} \Psi(y(u-1)) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \neq 1 \\ p-1 & \text{si } u = 1 \end{cases}$$

donc

$$|g(\Psi,\chi)|^2 = p - \sum_{u\in\mathbb{F}_p^*} \chi(u) = p \ .$$

1.3.3. Equidistribution des sommes de Gauss.

Pour tout nombre premier p, fixons un caractère additif non trivial Ψ_p et considérons

$$\left\{\frac{g(\Psi_p,\chi)}{\sqrt{p}} \mid \chi \text{ caractère multiplicatif non trivial}\right\} .$$

Pour chaque $p \in P$, on dispose ainsi de $p-2$ points sur le cercle unité, i.e. $p-2$ angles.

THÉORÈME 1.3.3.1. *Quand p tend vers l'infini, ces $p-2$ angles deviennent équidistribués sur le cercle unité pour la mesure de Haar. Plus précisément, pour toute fonction continue $f : S^1 \to \mathbb{C}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = \lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in P}} \frac{1}{p-2} \sum_{\chi\neq 1} f\left(\frac{g(\Psi_p,\chi)}{\sqrt{p}}\right)$$

où la somme est étendue aux caractères multiplicatifs non triviaux de $\mathbb{F}_p^*$.

PREUVE. Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité

(1.3.3.2) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}.d\theta = \lim_{\substack{p\to+\infty\\ p\in P}} \frac{1}{p-2} \sum_{\chi\neq 1} \left(\frac{g(\Psi_p,\chi)}{\sqrt{p}}\right)^n$$

puisque les polynômes en z sont denses dans $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{C})$.

Pour $n=0$, (1.3.3.2) est triviale.

Pour $n \geqslant 1$, on doit vérifier que

$$\frac{1}{(p-2)p^{n/2}}\left[\sum_{\chi\neq 1} (g(\Psi,\chi))^n\right] \to 0$$

quand $p \to \infty$. Or on a le lemme suivant

LEMME 1.3.3.3. *Pour tout $p \in P$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\sum_{\chi\neq 1} (g(\Psi_p,\chi))^n = (-1)^{n+1} + (p-1)K\ell_n(p)$$

<u>où on a posé</u>

$$Kl_n(p) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{F}_p \\ x_1\cdot\ldots\cdot x_n = 1}} \Psi_p(x_1+\ldots+x_n) .$$

En effet, on a

$$(g(\Psi_p,\chi))^n = \sum_{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{F}_p^*} \Psi(x_1+\ldots+x_n).\chi(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)$$

or

$$\sum_{\chi} \chi(x_1\cdot\ldots\cdot x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1\cdot\ldots\cdot x_n \neq 1 \\ p-1 & \text{si } x_1\cdot\ldots\cdot x_n = 1 \end{cases}$$

donc, comme

$$\sum_{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{F}_p^*} \Psi_p(x_1+\ldots+x_n) = \Big(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} \Psi(x)\Big)^n = (-1)^n$$

on a gagné.

Maintenant, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|Kl_n(p)| \leqslant n.p^{\frac{n-1}{2}}$$

(cf. 1.3.1), donc

$$\frac{1}{(p-2)p^{n/2}} \Big(\sum_{\chi\neq 1} (g(\Psi_p,\chi))^n\Big) = \frac{(-1)^{n+1} + (p-1)Kl(p)}{(p-2)p^{n/2}}$$

tend bien vers 0 quand p tend vers l'infini. Pour $n \leqslant -1$, on a pour tout χ non trivial

$$g(\Psi_p,\chi).g(\bar{\Psi}_p,\bar{\chi}) = |g(\Psi_p,\chi)|^2 = p$$

donc

$$\Big(\frac{g(\Psi_p,\chi)}{\sqrt{p}}\Big)^n = \Big(\frac{g(\bar{\Psi}_p,\bar{\chi})}{\sqrt{p}}\Big)^{-n}$$

et on est ramené ainsi au cas $n \geqslant 1$.

1.4. <u>Application de l'hypothèse de Riemann pour les courbes à un problème de distribution de résidus quadratiques</u>.

1.4.1. Soit f un polynôme à une variable, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Pour tout nombre premier p, $p \neq 2$, on s'intéresse à la somme trigonométrique

$$S(p,f) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

où $(\frac{x}{p})$ est le caractère de Legendre, i.e. l'unique caractère multiplicatif non trivial de degré 2 de $\mathbb{F}_p^*$.

THÉORÈME 1.4.1.1. <u>Supposons</u> $f \in \mathbb{Z}[X]$ <u>unitaire</u>, <u>sans facteur multiple dans</u> $\mathbb{C}[X]$ <u>et</u> $p \in P$, $p \neq 2$, <u>tel que la réduction modulo</u> p <u>de</u> f <u>soit sans facteur multiple dans</u> $\bar{\mathbb{F}}_p[X]$, <u>alors</u>

$$|S(p,f)| \leqslant (\deg(f)-1)\sqrt{p}\ .$$

PREUVE. On a

$$S(p,f) = -p + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(1 + \left(\frac{f(x)}{p}\right)\right)$$

et, pour tout $x \in \mathbb{F}_p$,

$$1 + \left(\frac{f(x)}{p}\right) = \#\{y \in \mathbb{F}_p \mid y^2 = f(x)\}$$

donc, si U est la courbe affine, définie sur $\mathbb{F}_p$, d'équation

$$y^2 = f(x)$$

on a

$$S(p,f) = \# U(\mathbb{F}_p) - p\ .$$

Par hypothèse U est géométriquement irréductible et non singulière ; soit C le modèle non singulier de U, c'est une courbe projective, non singulière et connexe, définie sur $\mathbb{F}_p$ et U est un ouvert dense de C.

Le morphisme

$$\begin{aligned} U &\to \mathbb{A}^1 \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned}$$

fait de U un revêtement de $\mathbb{A}^1$ de degré 2 , ramifié en d points (les racines de f). Ce morphisme se prolonge en un morphisme

$$C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$$

qui fait de C un revêtement de $\mathbb{P}^1$ de degré 2 , ramifié en d ou d+1 points suivant que π est non ramifié ou ramifié au-dessus du point à l'infini de $\mathbb{A}^1$. Comme $p \neq 2$, la ramification de ce revêtement est modérée et la formule d'Hurwitz donne le genre g de C :

$$2g-2 = 2.(-2) + \sum_{x \in \mathbb{P}^1} (e_x - 1)$$

avec $e_x = 2$ ou 1 suivant que x est ramifié ou non dans C . Par suite

$$2g = d - 2 + e_\infty - 1 \ ;$$

en particulier d et $e_\infty - 1$ sont de même parité, donc

$$e_\infty = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où

$$\# \overset{-1}{\pi} (\infty) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 2 & \text{si } d \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$2g = \begin{cases} d-2 & \text{si } d \text{ est pair} \\ d-1 & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Maintenant, l'hypothèse de Riemann pour les courbes donne la majoration suivante

$$|\# C(\mathbb{F}_p) - (p+1)| \leqslant 2g\sqrt{p} \ .$$

Or

$$\# C(\mathbb{F}_p) - \# U(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 2 & \text{si } d \text{ pair} \\ 1 & \text{si } d \text{ impair} \end{cases}$$

par suite

$$|\# \, U(\mathbb{F}_p)-p| \leqslant \begin{cases} (d-2)\sqrt{p}+1 & \text{si } d \text{ pair} \\ (d-1)\sqrt{p} & \text{si } d \text{ impair} \end{cases}$$

d'où la conclusion.

REMARQUE. S'il y a des facteurs multiples dans f , on obtient en fait une majoration encore meilleure, mais on ne se servira pas de ce résultat.

1.4.2. Distribution des résidus quadratiques (d'après Davenport (1931) et Hopf). Fixons un entier $r \geqslant 2$, pour un nombre premier $p \gg r$, on cherche dans la suite

$$(1,2,\dots,p-1)$$

des sous-suites

$$(a+1,a+2,\dots,a+r)$$

(où $0 \leqslant a \leqslant p-r-1$) de r entiers consécutifs qui soient tous des résidus quadratiques modulo p . Existe-t-il de telles suites ?

Plus généralement, soit

$$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in (\{\pm 1\})^r$$

existe-t-il des suites

$$(a+1,\dots,a+r)$$

(où $0 \leqslant a \leqslant p-r-1$) telles que

$$\left(\frac{a+i}{p}\right) = \varepsilon_i \qquad (i=1,\dots,r) \; .$$

On va poser ce problème en terme d'équidistribution des suites $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ pour lesquelles il existe $a \in \{0,1,\dots,p-r-1\}$ tel que

$$\left(\frac{a+i}{p}\right) = \varepsilon_i \qquad (\forall i=1,\dots,r)$$

dans l'espace $X = \{\pm 1\}^r$ de toutes les suites $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$. Pour cela considérons la mesure de Haar μ sur X , de sorte que

$$\mu(1 \text{ point}) = \frac{1}{2^r} .$$

Pour chaque nombre premier $p \gg r$, on a $p-r$ sous-suites de la suite

$$(1,2,\dots,p-1)$$

formées de r entiers consécutifs :

$$(1,2,\dots,r)$$
$$(2,3,\dots,r+1)$$
$$\dots\dots$$
$$(p-r,p-r+1,\dots,p-1)$$

et si on applique $(\frac{\cdot}{p})$ à chacune de ces sous-suites on obtient $p-r$ points de X distincts ou non.

QUESTION. Pour $p \to +\infty$, est-ce que les $p-r$ points ainsi puisés dans X deviennent équidistribués pour la mesure de Haar sur X ?

Si on note $N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r))$ le nombre des sous-suites $(a+1,\dots,a+r)$ où $0 \leqslant a \leqslant p-r$ qui s'envoient sur $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in X$, on veut donc que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in P}} \frac{N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)}{p-r} = \frac{1}{2^r}$$

pour tout $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in X$ fixé. Le résultat précis, dû à Davenport et Weil, est le suivant :

THÉORÈME 1.4.2.1. <u>Soit</u> $r \geqslant 2$ <u>un entier fixé</u>, <u>soit</u> $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in X$ <u>fixé</u>, <u>alors pour tout</u> $p \in P$, $p > r$, <u>on a</u>

$$|N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)) - \frac{p}{2^r}| \leqslant \frac{r-1}{2} + (1-\frac{1}{2^r})(r-1)\sqrt{p} .$$

PREUVE. On a

$$1 + \varepsilon_i(\frac{a+i}{p}) = \begin{cases} 2 & \text{si } (\frac{a+i}{p}) = \varepsilon_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)) = \frac{1}{2^r}\sum_{a=0}^{p-r-1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)\right)$$

donc

$$N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)) = \frac{1}{2^r}\sum_{a=0}^{p-1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2^r}\sum_{a=p-r}^{p-1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)\right).$$

On a, pour le second terme, l'estimation suivante

$$\frac{1}{2^r}\sum_{a=p-r}^{p-1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^r}\sum_{a=p-r}^{p-1} 2^{r-1} = \frac{r}{2}$$

car, pour $p-r \leqslant a \leqslant p-1$, un des facteurs

$$1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)$$

vaut 1 (celui pour lequel $a+i = p$) et les autres sont majorés par 2.

Quant au premier terme, il peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2^r}\sum_{a\in\mathbf{F}_p}\left[1+\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,r\}\\ S\neq\emptyset}}\left(\prod_{s\in S}\varepsilon_s\right)\cdot\left(\frac{\prod_{s\in S}(a+s)}{p}\right)\right].$$

Pour tout $S\subset\{1,\dots,r\}$, $S\neq\emptyset$, soit

$$f_S(X) = \prod_{s\in S}(X+s)\in\mathbb{Z}[X]$$

alors on peut appliquer 1.4.1.1 à f_S, de sorte que

$$\left|\sum_{a\in\mathbf{F}_p}\left(\frac{\prod_{s\in S}(a+s)}{p}\right)\right| \leqslant (\#\,S-1)\sqrt{p}$$

donc on a, pour le premier terme, l'estimation suivante :

$$\left|\frac{1}{2^r}\sum_{a=1}^{p-1}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i\left(\frac{a+i}{p}\right)\right)-\frac{p}{2^r}\right| \leqslant \frac{1}{2^r}\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,r\}\\ S\neq\emptyset}}(\#\,S-1)\sqrt{p}$$

or

$$\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,r\}\\ S\neq\emptyset}}(\#\,S-1) \leqslant \sum_{k=1}^{r}(r-1)C_r^k = (r-1)(2^r-1)$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 1.4.2.2. <u>Quand</u> $p \to +\infty$,

$$\frac{N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r))}{p-r} = \frac{p}{p-r}\,\frac{1}{2^r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$

<u>et</u>

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in P}} \frac{N(p;(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r))}{p-r} = \frac{1}{2^r}$$

<u>pour tout</u> $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in X$.

REMARQUE. C'est l'idée des "moments" de Davenport, oubliée après Weil, puis reprise par Deligne.

1.5. <u>Bonnes estimations des sommes exponentielles</u>.

1.5.1. La définition générale des sommes trigonométriques qui englobe tous les exemples déjà traités est la suivante : soit V un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit G un groupe algébrique commutatif sur $\mathbb{Z}$ (dans la pratique $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m, \dots$) et soit

$$f : V \to G$$

un $\mathbb{Z}$-morphisme. Pour tout nombre premier p , f induit une application

$$f : V(\mathbb{F}_p) \to G(\mathbb{F}_p)$$

et, plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$, une application

$$f : V(\mathbb{F}_{p^n}) \to G(\mathbb{F}_{p^n}) \ .$$

Pour tout $u \in G(\mathbb{F}_{p^n})$, on note

$$N(p^n, f; u) = \# \{x \in V(\mathbb{F}_{p^n}) \mid f(x) = u\} \ .$$

Alors la transformée de Fourier de la fonction

$$G(\mathbb{F}_{p^n}) \to \mathbb{C}$$
$$u \mapsto N(p^n, f; u)$$

est la fonction

$$\begin{aligned} \widehat{G(\mathbb{F}_{p^n})} &\to \mathbb{C} \\ \rho &\mapsto S(p^n,f;\rho) \end{aligned}$$

où

$$S(p^n,f;\rho) = \sum_{u\in G(\mathbb{F}_{p^n})} \rho(u).N(p^n,f;u) = \sum_{x\in V(\mathbb{F}_{p^n})} \rho(f(x)) .$$

EXEMPLES (i) Si $G = \mathbb{G}_a$, si Ψ est un caractère additif de $\mathbb{F}_p$ et si

$$\rho = \Psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}$$

on retrouve les sommes trigonométriques de 1.1.3.

(ii) Si $G = \mathbb{G}_m$, si ρ est le caractère de Legendre de $\mathbb{F}_p$ $(p \neq 2)$, alors

$$S(p,f;\rho) = \sum_{x\in V(\mathbb{F}_p)} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

et dans le cas $V = \mathbb{A}^1$, on retrouve les sommes trigonométriques envisagées en 1.4 (en fait, pour V , il faudrait prendre l'ouvert de $\mathbb{A}^1$ où $f \neq 0$, mais cela importe peu car on prolonge les caractères multiplicatifs par 0 à $\mathbb{F}_p$ tout entier).

(iii) Si $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$, si $\rho = \Psi \times \chi$ où Ψ est un caractère additif et χ un caractère multiplicatif de $\mathbb{F}_p$ et si $f \times g : V \to \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ est un morphisme, alors

$$S(p,f\times g;\Psi\times\chi) = \sum_{x\in V(\mathbb{F}_p)} \Psi(f(x))\chi(g(x)) .$$

En particulier, si $V = \mathbb{G}_m$, $f : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{G}_a$ est l'inclusion et $g : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est l'identité

$$S(p,f\times g;\Psi\times\chi) = g(\Psi,\chi)$$

(somme de Gauss).

1.5.2. Dans le cadre de l'exemple (iii) ci-dessus, on va préciser ce que l'on entend par "bonnes estimations" des sommes trigonométriques.

Soit V un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit

$$f \times g : V \to \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$$

un morphisme. Pour tout nombre premier p , pour toute puissance q de p et pour tout caractère $\Psi \times \chi$ de $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^*$, on a

$$S(q, f \times g; \Psi \times \chi) = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x))\chi(g(x))$$

et, plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S(q^n, f \times g; \Psi \times \chi) = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(x))).\chi(N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(g(x))) .$$

Donnons-nous maintenant un entier N et pour tout nombre premier p , p ne divisant pas N , on se fixe une puissance q de p telle que

$$q \equiv 1 \pmod N$$

et un caractère multiplicatif χ_q de $\mathbb{F}_q^*$ d'ordre exactement N . De plus donnons-nous, pour chaque p ne divisant pas N , un caractère additif Ψ_q de $\mathbb{F}_q$. On suppose que, soit les Ψ_q sont tous non triviaux, soit les Ψ_q sont tous triviaux. Les "bonnes estimations" que l'on voudrait sont alors :

(1.5.2.1) Pour tout nombre premier p ne divisant pas N , on voudrait l'existence de constantes $A(q) \geqslant 0$ et $w(q) \geqslant 0$ telles que

(i) $$|S(q^n, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)| \leqslant A(q)(\sqrt{q})^{nw(q)}$$

pour tout $n \geqslant 1$, avec, dans le cas où les Ψ_q sont tous non triviaux, l'indépendance de ces constantes avec le choix du caractère additif Ψ_q non trivial

(ii) $$\limsup_{n \to +\infty} |S(q^n, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)|^{1/n} = (\sqrt{q})^{w(q)}$$

(iii) $$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S(q^n, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)|}{(\sqrt{q})^{nw(q)}} = A(q)$$

(cette dernière exigence est en général trop forte).

(1.5.2.2) On voudrait de plus que $w(q)$ ne dépende pas de p, pour presque tout p, et que $A(q)$ puisse être choisi indépendant de p, de sorte que l'on aurait une estimation du type

$$|S(q^n, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)| \leqslant A(\sqrt{q})^{nw}$$

pour presque tout p.

(1.5.2.3) On voudrait alors connaître

$$\limsup_{p \to +\infty} \frac{|S(q, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)|}{(\sqrt{q})^w} .$$

(1.5.2.4) Plus précisément, on voudrait savoir comment sont distribués les "angles"

$$\frac{S(q, f \times g\ ; \Psi_q \times \chi_q)}{(\sqrt{q})^w} .$$

REMARQUES (i) Dans le cas particulier des sommes de Gauss, on sait répondre aux questions (1.5.2.1), (1.5.2.2) et (1.5.2.3). De plus (1.5.2.4) vient d'être résolu par Patterson dans le cadre des sommes cubiques, mais on ne sait pas plus, 110 ans après la conjecture de Kummer !

(ii) On peut regarder aussi une situation définie sur un sous-anneau R de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Z}$, et regarder les points fermés de $\mathrm{Spec}(R)$; on peut alors poser les mêmes questions.

1.5.3. <u>Qu'est-ce que l'on sait</u> ? Nous oublierons (1.5.2.3) et (1.5.2.4) pour lesquels on ne sait rien sauf dans les cas évidents (même pour les sommes de Kloosterman on ne connait pas la réponse).

Pour (1.5.2.1), quand p est fixé, il résulte de la rationalité des fonctions L (Grothendieck, Dwork) qu'il existe des constantes $w(q)$ et $A(q)$ qui font marcher l'estimation

$$|S(q^n, f \times g; \Psi_q \times \chi_q)| \leqslant A(q)(\sqrt{q})^{nw(q)} .$$

De plus, les conjectures de Weil (prouvées par Deligne) nous permettent d'affirmer que le meilleur $w(q)$ possible est un entier.

Pour (1.5.2.2), Bombieri a montré que l'on peut choisir $A(q)$ indépendant de p, mais on ne sait rien sur $w(q)$.

Nous reviendrons plus loin sur ces questions (cf. 2.3).

2 - FONCTIONS L ASSOCIÉES AUX SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES ET CONJECTURES DE WEIL

On définit ici les fonctions L attachées aux sommes trigonométriques et l'on dégage les propriétés de ces fonctions qui découlent, comme on verra plus loin (3.5.4), des théorèmes fondamentaux de Dwork-Grothendieck et de Deligne (cf. 2.1.4, 2.2.3).

On énonce en 2.3 l'un des résultats principaux du cours concernant les questions d'indépendance en p de w(p), et l'on explique en 2.4 comment obtenir pour les sommes de Kloosterman multiples l'estimation 1.3.1.

2.1. Fonctions L : définition et rationalité.

Fixons, pour tout ce numéro et les deux suivants, un nombre premier p, un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, ainsi qu'une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on notera $\mathbb{F}_{q^n}$ l'unique corps fini à q^n éléments contenu dans $\bar{\mathbb{F}}_q$.

Soit V un schéma de fype fini sur $\mathbb{F}_q$, soit

$$f : V \to \mathbb{G}_a$$

un $\mathbb{F}_q$-morphisme et soit Ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$. On associe à cette situation la suite de sommes trigonométriques

$$n \mapsto S_n = S_n(V,f,\Psi)$$

où

$$S_n(V,f,\Psi) = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(x)))$$

et la série formelle

$$L(T) = L(V,f,\Psi;T) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n} T^n\Big) . \tag{2.1.0}$$

Soit $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta^p = 1$, le corps cyclotomique où Ψ prend ses valeurs, alors $L(T)$ est naturellement une série formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta)$.

RAPPELS 2.1.1. Pour toute $\mathbb{F}_q$-algèbre R, on note

$$V(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(R),V)$$

l'ensemble des points de V à valeurs dans R.

On a, en particulier,

$$V(\bar{\mathbb{F}}_q) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} V(\mathbb{F}_{q^n})$$

et $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ opère naturellement sur $V(\bar{\mathbf{F}}_q)$ (si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ et $x \in V(\bar{\mathbf{F}}_q)$, $\sigma.x$ est le morphisme composé

$$\mathrm{Spec}(\bar{\mathbf{F}}_q) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Spec}(\bar{\mathbf{F}}_q) \xrightarrow{x} V) .$$

LEMME. <u>Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble</u> $|V|$ <u>des points fermés de</u> V <u>et l'ensemble des orbites pour l'action de</u> $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ <u>sur</u> $V(\bar{\mathbf{F}}_q)$.

PREUVE. Disons simplement comment on peut attacher à $x \in |V|$ une orbite dans $V(\bar{\mathbf{F}}_q)$. Si $x \in |V|$, le corps résiduel $k(x)$ de x est un corps fini contenant $\mathbf{F}_q$, de degré, noté $\deg(x)$, sur $\mathbf{F}_q$. Ce corps fini admet alors $\deg(x)$ plongement dans $\bar{\mathbf{F}}_q$, tous ces plongements étant conjugués sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$; donc à $x \in |V|$, on associe l'orbite à $\deg(x)$ éléments

$$\{\mathrm{Spec}(\bar{\mathbf{F}}_q) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Spec}(k(x)) \to V \mid \iota \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_q}(k(x),\bar{\mathbf{F}}_q)\}$$

(où $\mathrm{Spec}(k(x)) \to V$ est la flèche canonique).

D'autre part, il est clair que $V(\mathbf{F}_{q^n})$ est stable par $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ et que $V(\mathbf{F}_{q^n})$ est réunion des orbites de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ sur $V(\bar{\mathbf{F}}_q)$ dont le nombre d'éléments divise n , c'est-à-dire des orbites correspondants aux points fermés de V dont le degré divise n . En particulier

$$\# V(\mathbf{F}_{q^n}) = \sum_{\substack{x \in |V| \\ \deg(x) | n}} \deg(x) .$$

PROPOSITION 2.1.2. <u>La série formelle</u> $L(T)$ <u>admet le développement en produit infini</u>

$$L(T) = \prod_{x \in |V|} (1-T^{\deg(x)}.\Psi(\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_q}(f(x))))^{-1}$$

<u>et par suite</u>, $L(T) \in 1+T.\mathbf{Z}[\zeta][[T]]$.

PREUVE. Notons provisoirement $L_1(T)$ ce produit infini, il est clair que $L_1(T) \in 1+T.\mathbb{Z}[\zeta][[T]]$ et il s'agit de montrer que $L(T) = L_1(T)$. Partons de l'identité formelle

$$\frac{1}{1-a.T^d} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a^m \frac{T^{md}}{m}\right) ;$$

elle permet de mettre $L_1(T)$ sous la forme

$$L_1(T) = \exp\left(\sum_{x\in|V|} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi(\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_q}(f(x)))^m \frac{T^{m\deg(x)}}{m}\right)$$

et, si on fait le changement de variable $n = m\deg(x)$, on obtient

$$L_1(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} S'_n \frac{T^n}{n}\right)$$

où, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S'_n = \sum_{\substack{x\in|V| \\ \deg(x)|n}} \deg(x).\Psi\left(\frac{n}{\deg(x)}.\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_q}(f(x))\right) .$$

Or, pour tout $x\in|V|$ tel que $\deg(x)|n$ et pour tout plongement $\iota : k(x) \hookrightarrow \bar{\mathbf{F}}_q$, on a, en notant x_ι l'élément de $V(\mathbf{F}_{q^n})$ correspondant,

$$\frac{n}{\deg(x)}.\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbf{F}_q}(f(x)) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q}(f(x_\iota))$$

par suite

$$S'_n = S_n \qquad (\forall n \in \mathbf{N}^*)$$

d'où la proposition.

REMARQUE 2.1.3. Si f est l'application constante de valeur 0 ou si Ψ est le caractère trivial,

$$L(T) = Z(V;T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \# V(\mathbf{F}_{q^n}).\frac{T^n}{n}\right) = \prod_{x\in|V|} (1-T^{\deg(x)})^{-1} .$$

THÉORÈME 2.1.4 (Dwork, Grothendieck). <u>La série formelle</u> $L(T)$ <u>est le développement de Taylor en</u> $T=0$ <u>d'une fraction rationnelle</u>. <u>Il existe deux ensembles disjoints d'entiers algébriques</u> $\{\alpha_i\}$ <u>et</u> $\{\beta_j\}$, <u>les</u> α_i <u>et les</u> β_j <u>étant tous non nuls</u>, <u>tels que</u>

$$L(V,f,\Psi;T) = \frac{\prod_i (1-\alpha_i T)}{\prod_j (1-\beta_j T)} .$$

REMARQUES 2.1.5 (i) Si l'on considère Ψ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors les α_i et les β_j sont dans $\mathbb{C}$ et, pour tout automorphisme σ de $\mathbb{C}$, on peut former

$$L(V,f,\Psi^{\sigma};T) = \frac{\prod_i (1-\sigma(\alpha_i)T)}{\prod_j (1-\sigma(\beta_j)T)} .$$

(ii) Si l'on voit Ψ à valeurs dans les entiers $\mathcal{O}$ de $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ $(\zeta^p = 1)$, on a

$$L(V,f,\Psi;T) = \frac{P(T)}{Q(T)}$$

avec

$$P(T),Q(T) \in 1+T\mathcal{O}[T]$$

et

$$(P(T),Q(T)) = 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{Q}_p(\zeta)[T] .$$

COROLLAIRE 2.1.5. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = S_n(V,f,\Psi) = \sum_j (\beta_j)^n - \sum_i (\alpha_i)^n .$$

Pour prouver ce corollaire, il suffit d'appliquer l'opérateur $T \frac{d \operatorname{Log}}{dT}$ aux deux membres de l'égalité

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{T^n}{n}\right) = \frac{\prod_i (1-\alpha_i T)}{\prod_j (1-\beta_j T)} .$$

2.2. Estimation des valeurs absolues des S_n et conjectures de Weil.

Fixons une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ de telle sorte que Ψ soit à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On prendra les α_i , β_j dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Si ι est un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, on notera encore $|\ |$ l'application composée de ι et du module ordinaire sur $\mathbb{C}$. Pour chaque plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, on dispose donc d'une valeur absolue $|\ |$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$

prolongeant la valeur absolue ordinaire de $\mathbb{Q}$.

Fixons un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et posons

$$w = \log_{\sqrt{q}}(\max_{i,j}(|\alpha_i|,|\beta_j|))$$

alors

LEMME 2.2.1. <u>Avec les notations de</u> 2.1, <u>on a</u>

(i) $$|s_n| \leqslant (\#\{\alpha_i\} + \#\{\beta_j\})(\sqrt{q})^{nw} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

(ii) $$\limsup_{n\to+\infty} |s_n|^{1/n} = (\sqrt{q})^w .$$

PREUVE. La partie (i) résulte aussitôt de 2.1.5. La partie (ii) résulte du lemme sur $\mathbb{C}$ suivant (que l'on dégage pour référence ultérieure) :

LEMME 2.2.1.1. <u>Soit</u> I <u>un ensemble fini d'indices et soient</u> $(a_i)_{i\in I}$ <u>et</u> $(b_i)_{i\in I}$ <u>deux familles de nombres complexes indexées par</u> I . <u>On suppose les</u> a_i <u>non nuls et les</u> b_i <u>deux à deux distincts</u>. <u>Si l'on pose</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{i\in I} a_i . b_i^n$$

<u>alors</u>

$$\limsup_{n\to+\infty} |s_n|^{1/n} = \max_{i\in I} (|b_i|) .$$

PREUVE. Considérons la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $f(z)$, définie par

$$f(z) = \sum_{i\in I} \frac{a_i}{1-b_i z} .$$

Elle est holomorphe dans le disque ouvert centré en 0 et de rayon

$$\rho = \min_{\substack{i\in I\\ b_i\neq 0}} (1/|b_i|) = 1/\max_{i\in I} (|b_i|)$$

et admet effectivement un pôle sur la frontière de ce disque, donc le rayon de convergence de son développement en série entière à l'origine est exactement ρ . Or ce développement s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |S_n|^{1/n} = 1/\rho$$

d'où le lemme.

REMARQUES 2.2.2 (i) A priori, w dépend fortement du choix du plongement $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

(ii) Pour tout $w \in \mathbb{R}$, un $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ tel que

$$\log_{\sqrt{q}}(|\alpha|) = w$$

relativement à un plongement $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, sera dit de ι-<u>poids</u> w .
Si, pour tout $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, α est de ι-poids w , α sera dit <u>pur de poids</u> w .

Soit

$$B = \#\{i|\alpha_i \text{ de } \iota\text{-poids } w\} + \#\{j|\beta_j \text{ de } \iota\text{-poids } w\}$$

alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{(\sqrt{q})^{nw}} \leqslant B$$

et on a même égalité s'il n'y a pas de α_i de ι-poids w ou s'il n'y a pas de. β_j de ι-poids w . Cela résulte, en effet du lemme suivant :

LEMME 2.2.2.1. <u>Si</u> $(z_i)_{i\in I}$ <u>est une famille finie de nombres complexes tels que</u> $|z_i| \leqslant 1$ <u>et si on pose</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{i\in I} z_i^n$$

<u>alors</u>

$$\limsup_{n\to+\infty} |S_n| = \#\{i \in I| |z_i| = 1\} .$$

PREUVE. Si $I' = \{i \in I| |z_i| = 1\}$, on a clairement

$$\limsup_{n\to+\infty} |S_n| = \limsup_{n\to+\infty} |S'_n|$$

où on a posé, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S'_n = \sum_{i \in I'} z_i^n$$

par suite on peut supposer que $|z_i| = 1$, pour tout $i \in I$. Alors, si $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}^I$ est défini par $n \mapsto (z_i^n)_{i \in I}$, f est un homomorphisme de groupes, donc $f(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}^I$. Si $f(\mathbb{Z})$ est discret, alors $f(\mathbb{Z})$ est fini et il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = \underline{\underline{1}}$, d'où la conclusion dans ce cas. Si $f(\mathbb{Z})$ n'est pas discret, $\underline{\underline{1}}$ est adhérent à la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc $\sum_{i \in I} z_i^n$ est aussi proche que l'on veut de $\mathrm{card}(I)$ et le lemme est démontré.

REMARQUE 2.2.2 (iii) On a aussi le résultat de minoration suivant

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n|}{(\sqrt{q})^{nw}} \geqslant \sqrt{B}$$

où B désigne toujours le nombre des α_i et des β_j de ℓ-poids w . Ce résultat résulte du lemme ci-dessous.

LEMME 2.2.2.2. <u>Si</u> $(z_i)_{i \in I}$ <u>est une famille de nombres complexes de modules</u> 1 , <u>deux à deux distincts</u>, <u>et si</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>est une famille de nombres complexes arbitraires ayant même ensemble d'indices que la première</u>, <u>alors</u>

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \sum_{i \in I} a_i z_i^n \right| \geqslant \sqrt{\sum_{i \in I} |a_i|^2} .$$

PREUVE. En élevant l'inégalité à démontrer au carré, on est ramené à prouver que

$$\limsup_{n \to \infty} \Big(\sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} a_i \bar{a}_j (z_i . \bar{z}_j)^n \Big) \geqslant 0 .$$

Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$A_n = \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} a_i \bar{a}_j (z_i . z_j^n) < -\varepsilon < 0$$

pour tout $n > N$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} A_n \right| > p\varepsilon .$$

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+1} z^n \right| = \left| \frac{z^N(1-z^p)}{1-z} \right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

donc

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} A_n \right| \leqslant \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} \frac{2\ |a_i \bar{a}_j|}{|1-z_i \bar{z}_j|}$$

d'où une contradiction pour p assez grand.

REMARQUE 2.2.2 (iv) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|S_n| = (\sqrt{q})^{nw}$$

alors on a

$$\# \{\alpha_i\} + \# \{\beta_j\} = 1$$

donc, soit $S_n = \beta^n$ où $\beta \in \bar{\mathbb{Q}}$ est de ι-poids w, soit $S_n = -\alpha^n$ où $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ est de ι-poids w (cf. Katz, Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules, and Jacobi Sums, Lemma 1.2, pour une démonstration).

Si l'on applique à $L(T)$ le résultat fondamental de Deligne (Weil II) (cf. 3.5.4) on obtient le théorème :

THÉORÈME 2.2.3. _Pour tout_ i (_resp._ _tout_ j)

(a) $q^{\dim V}/\alpha_i$ (_resp._ $q^{\dim V}/\beta_j$) _est, comme_ α_i (_resp._ β_j), _un entier algébrique_ ;

(b) _il existe un entier_ w_i (_resp._ w_j) _compris entre_ 0 _et_ $2 \dim V$ _tel que_ α_i (_resp._ β_j) _soit pur de poids_ w_i (_resp._ w_j) (2.2 (ii)).

En particulier,

$$w = \log_{\sqrt{q}}(\max_{i,j} (|\alpha_i|, |\beta_j|)$$

_où_ $|\ |$ _est la valeur absolue sur_ $\bar{\mathbb{Q}}$ _induite par un plongement_ $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, _ne dépend pas du choix du plongement_ ι ; _de plus_, w _est un entier compris entre_ 0 _et_ $2 \dim V$.

ATTENTION. Pour (V,f) fixé, mais Ψ caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$ variable, w dépend à priori de Ψ. Cependant, si $q=p$, tous les caractères additifs non triviaux de $\mathbb{F}_p$ se déduisent d'un caractère additif non trivial fixé de la façon suivante : si Ψ est un caractère non trivial fixé de $\mathbb{F}_p$, tous les autres sont de la forme $\Psi(ax)$ où $a \in \mathbb{F}_p^*$. Or $\Psi(ax) = \Psi^{\sigma}(x)$ pour un $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, donc, vu que les w_i, w_j sont indépendants du plongement $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ choisi, ils sont aussi indépendants du choix du caractère Ψ non trivial. Par contre, si $q \neq p$, il n'y a pas de raison de cette nature pour que les w_i, w_j soient encore indépendants du choix du caractère non trivial Ψ.

REMARQUE 2.2.4 (i) La majoration triviale

$$|S_n| \leqslant \# V(\mathbb{F}_{q^n})$$

combinée avec la majoration

$$\# V(\mathbb{F}_{q^n}) = O(q^{n \dim V})$$

montre que

$$w \leqslant 2 \dim V .$$

(ii) De la partie (a) du théorème 2.2.3, on déduit que pour un plongement fixé $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$, on a pour tout i (resp. tout j)

$$\mathrm{ord}_p(\alpha_i) \leqslant \dim V \quad (\text{resp. } \mathrm{ord}_p(\beta_j) \leqslant \dim V).$$

(ord_p est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{ord}_p(q) = 1$).
Si l'on combine ce résultat de Deligne et la méthode p-adique de Dwork qui fournit, pour toute constante positive N, une majoration du nombre

$$\# \{\alpha_i \,|\, \mathrm{ord}_p(\alpha_i) \leqslant N\} + \# \{\beta_j \,|\, \mathrm{ord}_p(\beta_j) \leqslant N\} ,$$

on obtient une borne explicite pour le nombre

$$\# \{\alpha_i\} + \# \{\beta_j\} .$$

Plus précisément, Bombieri démontre, dans un article aux Inventiones math. (1978), le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2.5. Etant donné $V/\mathbb{F}_q$ et $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, il existe une borne explicite pour $\#\{\alpha_i\} + \#\{\beta_j\}$ en termes du nombre et du degré des équations et des polynômes qui servent à définir V et f. Cette borne est valable pour tout caractère Ψ de $\mathbb{F}_q$ non trivial et ne fait pas intervenir q dans son expression.

2.3. Retour aux sommes trigonométriques : dépendance de $w(p)$ en p.

Reprenons la situation générale : soit $V/\mathbb{Z}$ un schéma de type fini et soit $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ un morphisme. Pour tout nombre premier p, définissons un nombre réel $w(p)$ par la formule

$$\sqrt{p}^{\,w(p)} = \limsup_{n\to+\infty} |S_n|^{1/n}$$

où

$$S_n = S_n(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p, f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}, \Psi)$$

Ψ étant un caractère additif non trivial quelconque de $\mathbb{F}_p$. D'après 2.2.3 (Deligne), $w(p)$ est un entier et l'on a

$$|S_1| = \Bigl|\sum_{x\in V(\mathbb{F}_p)} \Psi(f(x))\Bigr| \leqslant (\#\{\alpha_i\} + \#\{\beta_j\})(\sqrt{p})^{w(p)} ;$$

de plus, d'après 2.2.5 (Bombieri), on a

$$\#\{\alpha_i\} + \#\{\beta_j\} \leqslant A ,$$

où A est une constante indépendante de Ψ et de p.

Il reste cependant à étudier la dépendance de $w(p)$ en fonction de p. On aimerait que $w(p)$ soit indépendant de p, pour p assez grand, mais cela suppose que l'on fasse des hypothèses très fortes sur la "géométrie" du morphisme $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, hypothèses que l'on ne cerne pas bien pour l'instant.

Cependant, on sait donner des bornes explicites pour $w(p)$, indépendantes de p. Ainsi, nous établirons en 4.3.2 le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3.1. Soient V un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ un morphisme, soit $f^{an}_{\mathbb{C}} : V(\mathbb{C})^{an} \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})^{an} = \mathbb{C}$ l'application analytique qui s'en déduit. Posons

$$N = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} [\dim(V(\mathbb{C}) \cap f^{-1}(\lambda))^{an}] .$$

Soit $V_{\bar{\eta}}$ la fibre de f en un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$. Supposons que $\dim(V_{\bar{\eta}}) < N$ ou que $V_{\bar{\eta}}$ est irréductible et de dimension N. Alors, il existe une constante A telle que, pour tout nombre premier p assez grand, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$, on ait

$$\left| \sum_{x \in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x)) \right| \leqslant A.q^N = A.(\sqrt{q})^{2N} .$$

En particulier, $w(p) \leqslant 2N$ pour tout nombre premier p assez grand, pour tout Ψ non trivial.

COROLLAIRE 2.3.2. V, f, N vérifiant les hypothèses du théorème, il existe une constante A' telle que, pour tout nombre premier p et tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_p$, on ait

$$\left| \sum_{x \in V(\mathbb{F}_p)} \Psi(f(x)) \right| \leqslant A'.p^N = A'.(\sqrt{p})^{2N} .$$

REMARQUE. On peut voir $V_{\bar{\eta}}$ de façon algébrique : si $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ et si $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(T)$, $V_{\bar{\eta}} = V \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}(T)})$, ou de façon analytique : si $\lambda \in \mathbb{C}$ est un nombre transcendant $(\lambda = e, \pi, \ldots)$, $V_{\bar{\eta}} = (f^{an}_{\mathbb{C}})^{-1}(\lambda)$.

QUELQUES EXEMPLES 2.3.3 (i) Si $V = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X])$, alors f n'est autre qu'un polynôme, $f \in \mathbb{Z}[X]$, et $V_{\bar{\eta}}$ est irréductible si et seulement si f est de degré 1. Comme

$$\sum_{x\in\mathbf{F}_p} \Psi(x) = 0$$

pour tout caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_p$, on n'obtient rien de très intéressant.

(ii) Si $V = \mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X,\frac{1}{X}])$, alors f n'est autre qu'un polynôme, $f \in \mathbf{Z}[X,\frac{1}{X}]$ et $V_{\bar{\eta}}$ est irréductible si et seulement si $f(X) = \frac{a}{X}+b$ ou $f(X) = aX+b$ (pour $a,b \in \mathbf{Z}$). Comme

$$\sum_{x\in\mathbf{F}_p^*} \Psi(x) = -1$$

pour tout caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_p$, le théorème ne fournit pas de résultat intéressant.

(iii) Si $V = \mathbf{A}^2_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X,Y])$, alors f n'est autre qu'un polynôme, $f \in \mathbf{Z}[X,Y]$.

Si $f(X,Y)$ est indépendant de Y , alors $V_{\bar{\eta}}$ n'est pas irréductible (sauf dans le cas $\deg_X(f) = 1$ qui n'est pas très intéressant comme on l'a déjà vu) et on a, pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbf{F}_p$,

$$\sum_{x,y\in\mathbf{F}_p} \Psi(f(x,y)) = p.\sum_{x\in\mathbf{F}_p} \Psi(f(x,0)) .$$

Or

$$\sum_{x\in\mathbf{F}_p} \Psi(f(x,0)) = O(p^{1/2})$$

(conjecture de Weil pour les courbes), donc

$$\sum_{x,y\in\mathbf{F}_p} \Psi(f(x,y)) = O(p^{3/2})$$

ce qui montre la nécessité de l'hypothèse d'irréductibilité de la fibre $V_{\bar{\eta}}$ si l'on veut avoir une majoration en $O(p)$.

Par contre, si $f(X,Y)$ dépend de X et Y et si $V_{\bar{\eta}}$ est irréductible, i.e. si $f(X,Y)-T$ est irréductible dans $\overline{\mathbf{Q}(T)}[X,Y]$, le théorème donne la majoration

$$\Big|\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q}\Psi(f(x,y))\Big| \leqslant A.q$$

pour tout nombre premier assez grand, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$.

REMARQUES 2.3.4 (a) Partons d'une situation $(V,f)/\mathbb{Z}$ "très jolie", f lisse, V de dimension $N+1$.

On peut remplacer V par $V-f^{-1}(0)$ et f par sa restriction à $V-f^{-1}(0)$, la situation restera quand même "très jolie". Or, ce changement modifie la somme trigonométrique

$$\sum_{x\in V(\mathbb{F}_p)}\Psi(f(x)) = \sum_{u\in\mathbb{F}_p}(\# f^{-1}(u)(\mathbb{F}_p)).\Psi(u)$$

de $\# f^{-1}(0)(\mathbb{F}_p) = O(p^N)$.

On peut aussi remplacer V par l'éclaté de V en un point x_o de $f^{-1}(0)$; cela revient à rajouter un $\mathbb{P}^N$ à V , donc à modifier la somme trigonométrique en $O(p^N)$.

Cela montre que, sous les hypothèses du théorème, $w(p) \leqslant 2N$ est la "meilleure majoration possible".

(b) Sous les hypothèses du théorème, la méthode de Lang-Weil donne, pour tout $u\in\mathbb{F}_q$, l'estimation

$$\# f^{-1}(u)(\mathbb{F}_q) = q^N + O(q^{N-(1/2)})$$

de sorte que

$$\sum_{x\in V(\mathbb{F}_q)}\Psi(f(x)) = \sum_{u\in\mathbb{F}_q}(\# f^{-1}(u)(\mathbb{F}_q)).\Psi(u)$$

admet une estimation en

$$q.O(q^{N-(1/2)}) = O(q^{N+(1/2)})$$

(puisque

$$q^N\sum_{u\in\mathbb{F}_q}\Psi(u) = 0) .$$

(c) D'après Deligne, on sait que $w(p)$ est un entier ; d'après Lang-Weil, on a

$$w(p) \leqslant 2N+1 .$$

Par suite (cf. J.-P. Serre, Majorations de sommes exponentielles, Journées arithmétiques de Caen 1976, Astérisque 41-42 (1977), 111-126), si l'on sait prouver "élémentairement", pour toute puissance q de p une majoration

$$\left|\sum_{x\in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x))\right| = O(q^{N+\varepsilon})$$

avec $\varepsilon < 1/2$, alors, c'est que l'on a déjà en fait la majoration

$$\left|\sum_{x\in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x))\right| = O(q^{N})$$

i.e. $w(p) \leqslant 2N$. Par exemple, Carlitz (Pacific Journal 1965) a montré, pour toute puissance q de p, que

$$|\mathrm{Kloos}_3(p;a)| = O(p^{3/2}) \quad \text{puis} \quad O(p^{6/5})$$

donc nécessairement

$$|\mathrm{Kloos}_3(p;a)| = O(p)$$

(ce qui est bien entendu conforme au résultat général de Deligne

$$|\mathrm{Kloos}_n(p;a)| \leqslant n.p^{\frac{n-1}{2}}) .$$

(d) Pour V de dimension $N+1$, $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ à fibres de dimension N, le résultat "idéal" de majoration serait

$$\sum_{x\in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x)) = O(q^{\frac{N+1}{2}})$$

i.e. $w(p) \leqslant N+1$, mais on ne sait pas dire quelles hypothèses (les plus générales possibles) feraient marcher une telle estimation. On va en voir quelques exemples mais l'énoncé général est encore à trouver....

2.4. Retour aux sommes de Kloosterman multiples.

On va voir, sur l'exemple des sommes de Kloosterman multiples, comment une estimation élémentaire, plus des renseignements précis (Sperber en p-adique, Deligne en ℓ-adique) sur la fonction L, plus le fait que les α_i, β_j sont de poids entiers (théorème de Deligne), permet d'obtenir la bonne majoration d'une somme trigonométrique.

2.4.1. Estimation élémentaire.

Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini et soit Ψ un caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_q$. Pour tout caractère multiplicatif χ de $\mathbf{F}_q^*$, $\chi \in \hat{\mathbf{F}}_q^*$, on dispose d'une somme de Gauss

$$g(\Psi,\chi) = \sum_{x\in\mathbf{F}_q^*} \Psi(x)\ \chi(x)$$

et on a

$$|g(\Psi,\chi)| = \sqrt{q} \quad \text{si } \chi \text{ est non trivial}$$

et $$g(\Psi,1) = -1 \ .$$

Pour tout entier $n\in\mathbf{N}^*$ fixé, on rappelle la définition des sommes de Kloosterman multiples d'ordre n : pour tout $a\in\mathbf{F}_q^*$

$$\mathrm{Kloos}_n(q;a) = \sum_{\substack{x_1\cdot\ldots\cdot x_n=a \\ x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{F}_q}} \Psi(x_1+\ldots+x_n) \ .$$

Le lien entre les sommes de Gauss et les sommes de Kloosterman multiples est le suivant

LEMME 2.4.1.1. Soit $n\in\mathbf{N}^*$ fixé. Les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q^* &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto \mathrm{Kloos}_n(q;a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_q^* &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto (g(\Psi,\chi))^n \end{aligned}$$

sont les transformées de Fourier l'une de l'autre. Plus précisément,

<u>pour tout</u> $a \in \mathbb{F}_q^*$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Kloos}_n(q;a) = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*} \bar{\chi}(a)(g(\Psi,\chi))^n$$

<u>et</u>, <u>pour tout</u> $\chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*$, <u>on a</u>

$$(g(\Psi,\chi))^n = \sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} \chi(a).\mathrm{Kloos}_n(q;a) .$$

PREUVE. La démonstration a déjà pratiquement été donnée en 1.3.3.3, on la reprend cependant ici. Par inversion de Fourier, il suffit de montrer la première formule : on a

$$(g(\Psi,\chi))^n = \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_q^*} \Psi(x_1+\ldots+x_n)\chi(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)$$

donc

$$\sum_{\chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*} \bar{\chi}(a)(g(\Psi,\chi))^n = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_q^* \\ \chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*}} \Psi(x_1+\ldots+x_n).\chi\left(\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{a}\right)$$

or

$$\sum_{\chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*} \chi\left(\frac{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1\cdot\ldots\cdot x_n \neq a \\ q-1 & \text{si } x_1\cdot\ldots\cdot x_n = a \end{cases}$$

d'où la conclusion.

COROLLAIRE 2.4.1.2 (Carlitz). <u>Pour tout</u> $n \in \mathbb{N}^*$, <u>on a l'égalité</u>

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} |\mathrm{Kloos}_n(q;a)|^2 = q^n - (q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)$$

<u>et</u>, <u>à fortiori</u>, <u>pour tout</u> $a \in \mathbb{F}_q^*$, <u>la majoration</u>

$$|\mathrm{Kloos}_n(q;a)| < q^{n/2} .$$

PREUVE. La formule de Plancherel s'écrit ici

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} |\mathrm{Kloos}_n(q;a)|^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{F}}_q^*} |g(\Psi,\chi)|^{2n}$$

d'où

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q^*} |\mathrm{Kloos}_n(q;a)|^2 = \frac{1}{q-1}(1+(q-2)q^n)$$

d'où le corollaire.

2.4.2. Renseignements sur la fonction L .

Soit $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{F}_{q^r}$ le sous-corps à q^r éléments de $\bar{\mathbb{F}}_q$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{F}_q^*$, soit

$$\mathrm{Kloos}_n(q^r;a) = \sum_{\substack{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = a \\ x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_{q^r}}} \Psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}(x_1+\ldots+x_n) \ .$$

On introduit, pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$, la fonction L

$$L_a(T) = \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{T^r}{r} \mathrm{Kloos}_n(q^r;a)\Big) \ .$$

A priori $L_a(T) \in 1 + T.\mathbb{Z}[\zeta_p][[T]]$, cependant on a le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 2.4.2.1 (Sperber par voie p-adique, Deligne par voie ℓ-adique). Pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$, la série formelle

$$L_a(T)^{(-1)^n} \in 1 + T.\mathbb{Z}[\zeta_p][[T]]$$

est en fait un polynôme de degré n , qui s'écrit

$$L_a(T)^{(-1)^n} = \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_{a,i}T)$$

dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ contenant ζ_p , (et on a $\prod_{i=1}^{n} \alpha_{a,i} = q^{\frac{(n-1)n}{2}}$).

2.4.3. D'après Deligne, il existe, pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$, des entiers $w_{a,1},\ldots w_{a,n} \geqslant 0$ tels que, pour tout plongement complexe $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, on ait

$$|\alpha_{a,i}| = (\sqrt{q})^{w_{a,i}} \qquad (i = 1,\ldots,n) \ .$$

2.4.4. La bonne estimation

THÉORÈME 2.4.4.1. Pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$|\alpha_{a,i}| \leqslant q^{\frac{n-1}{2}}$$

(on a même égalité si l'on tient compte de la relation $\prod_{i=1}^{n} \alpha_{a,i} = q^{\frac{(n-1)n}{2}}$)

et donc

$$|\mathrm{Kloos}_n(q;a)| \leqslant n.q^{(n-1)/2} .$$

PREUVE. La seconde partie du théorème résulte aussitôt de la première partie puisque (cf. 2.4.2.1)

$$\mathrm{Kloos}_n(q;a) = (-1)^n . \sum_{i=1}^{n} \alpha_{a,i} .$$

Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{Kloos}_n(q^r;a) = (-1)^n . \sum_{i=1}^{n} \alpha_{a,i}^r$$

et on sait que (cf. 2.4.1.1)

$$|\mathrm{Kloos}_n(q^r;a)| < (q^r)^{n/2}$$

donc

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{a,i}^r \right| < (q^{n/2})^r .$$

Comme

$$|\alpha_{a,i}| = q^{w_{a,i}/2}$$

avec $w_{a,i} \in \mathbb{N}$ (cf. 2.4.3), on aura gagné si l'on montre que

$$|\alpha_{a,i}| < q^{n/2} .$$

Par suite le théorème résulte du lemme :

LEMME 2.4.4.2. Etant donnés une partie finie $\{\alpha_i | i \in I\}$ de $\mathbb{C}^*$ et un nombre réel $R > 0$, si l'on a, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$|\sum_{i\in I} \alpha_i^r| < R^r$$

<u>alors</u> $|\alpha_i| < R$, <u>pour tout</u> $i \in I$.

PREUVE. On sait déjà (2.2.1.1) que

$$\limsup_{r\to+\infty} |\sum_{i\in I} \alpha_i^r|^{1/r} = \max_{i\in I}(|\alpha_i|)$$

par suite, vu l'hypothèse, on a $|\alpha_i| \leqslant R$ $(\forall i \in I)$. Il nous reste à démontrer que $\{i \in I \,|\, |\alpha_i| = R\}$ est vide. Or (2.2.2.1)

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{|\sum_{i\in I} \alpha_i^r|}{R^r} = \#\{i \in I \,|\, |\alpha_i| = R\}$$

par suite, vu l'hypothèse, $\{i \in I \,|\, |\alpha_i| = R\}$ est soit vide soit réduit à un seul élément. Dans ce dernier cas, raisonnons par l'absurde : on peut numéroter les $(\alpha_i)_{i\in I}$ de telle sorte que $|\alpha_1| = R$ et $|\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n| < R$. Pour tout $r \geqslant 1$, l'hypothèse se réécrit

$$|\alpha_1^r + \ldots + \alpha_n^r| < |\alpha_1^r|$$

soit encore

$$\left|1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^r + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^r\right| < 1 .$$

En particulier, on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Re}\left(\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^r + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^r\right) < 0 .$$

On aura gagné si l'on montre que, pour toute famille finie $(\gamma_k)_{k\in K}$ de nombres complexes tels que $0 < |\gamma_k| < 1$ $(\forall k \in K)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathrm{Re}(\sum_{k\in K} \gamma_k^r) \geqslant 0 .$$

Or il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|(\gamma_k/|\gamma_k|)^r - 1| < 1/2 \qquad (\forall k \in K)$$

par suite, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left|\sum_{k\in K}\gamma_k^r-\sum_{k\in K}|\gamma_k|^r\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k\in K}|\gamma_k|^r .$$

Comme $\sum_{k\in K}|\gamma_k|^r>0$, on a nécessairement

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in K}\gamma_k^r\right)>0$$

d'où la contradiction cherchée.

3 - INTERPRÉTATION COHOMOLOGIQUE DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

3.1. Enoncé d'un théorème d'uniformité en p.

Reprenons notre situation générale : V est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ est un morphisme (une "fonction" sur V). Pour tout nombre premier p, fixons une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_p$ du corps fini $\mathbb{F}_p$ et notons, pour toute puissance q de p, $\mathbb{F}_q$ le sous-corps fini à q éléments de $\bar{\mathbb{F}}_p$.

Alors, pour tout nombre premier p, pour toute puissance q de p, pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à la somme trigonométrique

$$S_n = S_n(V \otimes \mathbb{F}_q, f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}, \Psi)$$

définie par

$$S_n = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(x))) .$$

Si Ψ est à valeurs dans $\mathbb{Q}(\zeta)^*$ où ζ est une racine p-ième de l'unité, on a

$$S_n \in \mathbb{Q}(\zeta)$$

et, même,

$$S_n \in \mathbb{Z}[\zeta] .$$

La donnée des S_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est équivalente à la donnée de la série formelle

$$L(T) = L(V \otimes \mathbb{F}_q, f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_q}, \Psi; T)$$

définie par

$$L(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n . \frac{T^n}{n}\right) .$$

On a, à priori,

$$L(T) \in \mathbb{Q}(\zeta)[[T]]$$

et, même,

$$L(T) \in 1 + T.\mathbb{Z}[\zeta][[T]] \ ,$$

mais le théorème de rationalité de Dwork et Grothendieck montre que $L(T)$ est le développement en série entière à l'origine d'une fraction rationnelle.

Choisissons une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Q}(\zeta)$, on va démontrer un théorème "d'uniformité en p" pour la distribution des poids avant simplification des fonctions L ci-dessus. Plus précisément, on démontrera (4.3.2) le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. <u>Il existe une famille d'entiers positifs, presque tous nuls</u> $(h^i_w)_{i,w\in\mathbb{N}}$, <u>telle que, pour tout nombre premier</u> p <u>assez grand, pour toute puissance</u> q <u>de</u> p <u>et pour tout caractère additif non trivial</u> Ψ <u>de</u> $\mathbb{F}_q$, <u>la série formelle</u> $L(T)$ <u>soit le développement en série entière à l'origine d'une fraction rationnelle qui s'écrit</u>

$$\prod_{i,w\in\mathbb{N}} P_{i,w}(T)^{(-1)^{i+1}}$$

<u>où, pour tout couple</u> (i,w), $P_{i,w}(T)$ <u>est un polynôme de degré</u> h^i_w , <u>à coefficients dans</u> $\bar{\mathbb{Q}}$, <u>de terme constant</u> 1, <u>se factorisant comme suit</u> :

$$P_{i,w}(T) = \prod_{j=1}^{h^i_w} (1-\alpha_{i,w,j}T)$$

<u>où chaque</u> $\alpha_{i,w,j} \in \bar{\mathbb{Q}}$ <u>est pur de poids</u> w .

COROLLAIRE 3.1.2. <u>Pour tout</u> p <u>assez grand, pour toute puissance</u> q <u>de</u> p <u>et pour tout caractère additif non trivial</u> Ψ <u>de</u> $\mathbb{F}_q$:

(i) <u>le nombre total des zéros et des pôles réciproques (comptés avec leur multiplicité) de la fraction rationnelle</u> $L(T)$ <u>est majoré par</u>

$$\sum_{i,w} h_w^i \ ;$$

(ii) le nombre total des zéros et des pôles réciproques de poids w est majoré par

$$\sum_i h_w^i \ ;$$

(iii) on a :

$$\# \{\text{zéros réciproques de poids } w\} - \# \{\text{pôles réciproques de poids } w\} = \sum_i (-1)^i h_w^i \ .$$

On prouvera l'existence des h_w^i par voie cohomologique : un nombre premier ℓ étant fixé, alors, pour tout nombre premier p assez grand, $p \neq \ell$, pour toute puissance q de p et pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$, h_w^i sera la dimension de la "partie de poids w" dans le $H^i_{\ell\text{-adique}}$, $H^*_{\ell\text{-adique}}$ étant la cohomologie ℓ-adique qui contrôle la situation. L'objet de ce numéro est de "rappeler" ce qu'est la cohomologie ℓ-adique et de "rappeler" la façon dont elle "contrôle" la situation.

3.2. Cohomologie ℓ-adique, fonctions zêta et conjectures de Weil.

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini, soit $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{F}_{q^n}$ le sous-corps fini de $\bar{\mathbb{F}}_q$ à q^n éléments.

Si $X/\mathbb{F}_q$ est une variété projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension d, la fonction zêta de $X/\mathbb{F}_q$ est la série formelle

$$Z(X;T) = \exp\Big(\sum_{n \geqslant 1} (\# X(\mathbb{F}_{q^n})) . \frac{T^n}{n}\Big) \ . \tag{3.2.1}$$

Comme

$$\# X(\mathbb{F}_{q^n}) = \sum_{\substack{x \in |X| \\ \deg(x) \mid n}} \deg(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction zêta admet un développement en produit infini

$$Z(X;T) = \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1-T^{\deg(x)}}$$

donc

$$Z(X;T) \in 1 + T.\mathbb{Z}[[T]] \ .$$

Weil avait conjecturé et Deligne a démontré (Weil I) que la série $Z(X;T)$ est le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle qui s'écrit de manière unique, sous la forme :

$$\prod_{i=0}^{2d} P_i(T)^{(-1)^{i+1}} = \frac{P_1(T)\ldots\ldots\ldots P_{2d-1}(T)}{P_o(T)\ldots\ldots\ldots\ldots P_{2d}(T)}$$

où, pour chaque $i \in \{0,1,2,\ldots,2d\}$,

$$P_i(T) \in 1 + T.\mathbb{Z}[T]$$

et, sur une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, $P_i(T)$ se factorise en

$$P_i(T) = \prod_{j=0}^{B_i} (1-\alpha_{ij}T)$$

avec des α_{ij} dont tous les conjugués complexes sont de module

$$(\sqrt{q})^i$$

i.e. des α_{ij} purs de poids i .

Les polynômes $P_i(T)$ sont caractérisés, en terme de la série $Z(X,T)$, par ces conditions. En dépit de cela, leur définition est de nature cohomologique. Pour tout nombre premier ℓ , Grothendieck (SGA 4, SGA 5) a défini des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie

$$H^i(X\otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) \qquad (\forall i \in \mathbb{N})$$

nuls pour $i > 2d$, sur lesquels

$$F_X = \text{"Frobenius de } X/\mathbb{F}_q\text{"}$$

agit comme automorphisme. Posons

$$P_{i,\ell}(T) = \det(1-TF_X, H^i(X\otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) \ .$$

Pour tout nombre premier $\ell \neq p$, les $P_i(T)$ vus comme polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ ne sont autres que les $P_{i,\ell}(T)$. Plus précisément, pour tout nombre premier $\ell \neq p$, on a dans $\mathbb{Q}_\ell[T]$ les égalités

$$P_i(T) = P_{i,\ell}(T) \qquad (i = 0,1,2,\ldots,2d)$$

ce qui signifie que

(i) $Z(X;T)$ vu comme élément de $\mathbb{Q}_\ell[[T]]$ est le développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle

$$\prod_{i=0}^{2d} P_{i,\ell}(T)^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{Q}_\ell(T)$$

(c'est le théorème de rationalité de Grothendieck)

(ii) les valeurs propres de F_X agissant sur $H^i(X \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$, prises dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ sont en fait dans la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, ce sont même des entiers algébriques (dans la clôture de $\mathbb{Z}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$) et pour tout plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, chacune de ces valeurs propres α est de module

$$|\alpha| = (\sqrt{q})^i$$

(c'est le théorème de Deligne, Weil I).

Si on conjugue (i) et (ii) au fait que $Z(X;T)$ est une série entière à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de terme constant 1 , indépendante de ℓ , on obtient que les $P_{i,\ell}$ sont en fait dans $\mathbb{Z}[T] \subset \mathbb{Q}_\ell[T]$ et sont indépendants de $\ell \neq p$. A fortiori, les "nombres de Betti",

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) = \deg(P_{i,\ell}(T)) = B_i$$

sont indépendants de $\ell \neq p$.

Malgré ce résultat profond, notre compréhension de la cohomologie ℓ-adique est encore insuffisante, comme le montre le problème ouvert suivant :

PROBLÈME (3.2.2). Si $X/\mathbb{F}_q$ et $Y/\mathbb{F}_q$ sont deux variétés projectives lisses, géométriquement connexes et si $f : X \to Y$ est un morphisme défini sur $\mathbb{F}_q$, pour tout $\ell \neq p$, on dispose par fonctorialité de morphismes

$$f^{*i} : H^i(Y\otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(X\otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$$

qui commutent à l'action de Frobenius, donc

$$\mathrm{Ker}^i(f,\mathbb{Q}_\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Coker}^i(f,\mathbb{Q}_\ell)$$

(noyau et conoyau de f^{*i}) sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur lesquels F_X agit.

1) On ne sait pas prouver que les dimensions de ces $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels sont indépendantes de $\ell \neq p$ (sauf si f se relève en caractéristique nulle).

2) On ne sait pas prouver que les polynômes

$$\det(1-TF_X, \mathrm{Ker}^i(f,\mathbb{Q}_\ell))$$
$$\det(1-TF_X, \mathrm{Coker}^i(f,\mathbb{Q}_\ell))$$

sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, indépendants de $\ell \neq p$ (même si f se relève en caractéristique nulle).

Bien sûr, (2) implique (1) en prenant les degrés.

Plus généralement, si $X/\mathbb{F}_q$ n'est plus projective, on dispose encore d'une fonction zêta

$$(3.2.3) \qquad Z(X;T) = \exp\Big(\sum_{n\geqslant 1} (\# X(\mathbb{F}_{q^n}))\frac{T^n}{n}\Big) = \prod_{x\in|X|} \frac{1}{1-T^{\deg(x)}}$$

qui est encore le développement de Taylor d'une fraction rationnelle en T, mais on ne connait pas d'écriture canonique de cette fraction rationnelle comme dans le cas projectif et lisse.

Pour tout nombre premier ℓ, Grothendieck a défini (SGA 4, SGA 5) les espaces de cohomologie ℓ-adique à supports propres ; ce sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie

$$H^i_c(X\otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) \qquad (\forall i \in \mathbb{N})$$

nuls pour $i > 2d$, sur lesquels F_X agit.

Il a montré que, pour tout $\ell \neq p$, la série $Z(X;T)$, vue comme élément de $\mathbb{Q}_\ell[[T]]$, est le développement de Taylor, en $T=0$, de la fraction rationnelle

$$\prod_{i=0}^{2d} P_{i,\ell}(T)^{(-1)^{i+1}}$$

où

$$P_{i,\ell}(T) = \det(1-TF_X, H_c^i(X\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell)) .$$

Deligne a prouvé (Weil II) que, si on factorise les $P_{i,\ell}(T)$ sur une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$,

$$P_{i,\ell}(T) = \prod_j (1-\alpha_{i,j,\ell}T)$$

alors les $\alpha_{i,j,\ell}$ sont en fait des entiers algébriques et il existe des entiers $w_{i,j,\ell}$ tels que

$$0 \leqslant w_{i,j,\ell} \leqslant i$$

et que tous les conjugués dans $\mathbb{C}$ de $\alpha_{i,j,\ell}$ soient de valeur absolue $(\sqrt{q})^{w_{i,j,\ell}}$.

Mais on ne sait pas si les $P_{i,\ell}(T)$ sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et s'ils sont indépendants de $\ell \neq p$ (on ne sait pas caractériser, en termes de la fonction zêta, les $P_{i,\ell}(T)$, comme on sait le faire dans le cas projectif et lisse).

LIEN AVEC LE PROBLÈME 3.2.2. Si $X/\mathbb{F}_q$ et $Y/\mathbb{F}_q$ sont deux variétés projectives, lisses, géométriquement connexes, si $f : X \to Y$ est une immersion fermée et si $U = Y-X$, pour tout $\ell \neq p$, on a la suite exacte longue

$$\begin{aligned} &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \to H_c^{i-1}(U\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\longrightarrow H^{i-1}(Y\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f^{*i-1}} H^{i-1}(X\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \to H_c^i(U\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \\ &\longrightarrow H^i(Y\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f^{*i}} H^i(X\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \to \cdots\cdots \end{aligned}$$

d'où des suites exactes courtes

$$0 \to \mathrm{Coker}^{i-1}(f,\mathbb{Q}_\ell) \to H_c^i(U\otimes\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Ker}^i(f,\mathbb{Q}_\ell) \to 0$$

donc, avec des notations évidentes,

$$P^U_{i,\ell}(T) = P^{\mathrm{Ker}}_{i,\ell}(T).P^{\mathrm{Coker}}_{i-1,\ell}(T) .$$

Or $P^{\mathrm{Ker}}_i(T)$ est de poids i et $P^{\mathrm{Coker}}_{i-1,\ell}(T)$ est de poids $i-1$, donc les deux énoncés suivants sont équivalents

(1) Pour tout i, $P^U_{i,\ell}(T)\in\mathbb{Z}[T]$ et est indépendant de $\ell\neq p$.

(2) Pour tout i, $P^{\mathrm{Ker}}_{i,\ell}(T)$ et $P^{\mathrm{Coker}}_{i,\ell}(T)\in\mathbb{Z}[T]$ et sont indépendants de $\ell\neq p$.

On ne sait pas démontrer ces énoncés.

3.3. Fonctions L et revêtements étales.

Soit $X/\mathbb{Z}$ un schéma de type fini, soit G un groupe fini opérant sur X sans points fixes et tel que $Y = X/G$ soit défini (en gros, X est un G-torseur sur Y).

On notera $G^\natural$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. A tout point fermé $y\in|Y|$ on associe deux classes de conjugaison φ_y et $F_y\in G^\natural$ appelées respectivement Frobenius arithmétique et Frobenius géométrique, et liées par la relation $F_y=\varphi_y^{-1}$. Pour cela, choisissons une clôture algébrique $\bar{k}$ du corps résiduel k de y ; si X_y est la fibre du morphisme canonique

$$X \to Y = X/G$$

en y, $X_y(\bar{k})$ est muni d'une action de G et c'est en fait un G-torseur. D'autre part $X_y(\bar{k})$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Comme k est un corps fini, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est topologiquement engendré par l'automorphisme de Frobenius de $\bar{k}$

$$\lambda \mapsto \lambda^{Ny}$$

où $Ny = \mathrm{card}(k)$, on note Frob_k l'action de cet automorphisme sur $X_y(\bar{k})$. Si on choisit, maintenant, un point $x \in X_y(\bar{k})$, il existe un unique $g \in G$ tel que

$$\mathrm{Frob}_k(x) = g.x$$

et φ_y est la classe de conjugaison de g , F_y celle de g^{-1} par définition (ces classes ne dépendent pas des choix faits : ni de celui de $\bar{k}$, ni de celui du point x ; par exemple, si $x' = hx$, pour $h \in G$, on a

$$\mathrm{Frob}_k(x') = \mathrm{Frob}_k(hx) = h\ \mathrm{Frob}_k(x) = h.g.x = hgh^{-1}x').$$

Supposons maintenant que l'on ait une représentation

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_E(M)$$

où M est un E-espace vectoriel de dimension finie, E étant un corps de nombre, on peut définir une série de Dirichlet formelle à coefficients dans E associée à la situation

$$L(\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{smallmatrix}) G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_E(M); s) = \prod_{y \in |Y|} \frac{1}{\det(1-(Ny)^{-s}\rho(F_y))}$$

$(\det(1-\lambda\rho(hgh^{-1})) = \det(1-\lambda\rho(g))$ pour tous $g, h \in G$, donc l'expression

$$\det(1-\lambda\rho(g^{\natural}))$$

où $g^{\natural}$ est une classe de conjugaison à un sens). Cette série de Dirichlet formelle est la fonction L de la situation au sens de Grothendieck. La fonction L d'Artin est définie par

$$L^{\mathrm{Art}}(\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{smallmatrix}) G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_E(M); s) = \prod_{y \in |Y|} \frac{1}{\det(1-(Ny)^{-s}\rho(\varphi_y))}$$

et le lien entre les deux est

$$L^{\mathrm{Art}}(\rho) = L^{\mathrm{Groth.}}(\check{\rho})$$

où

$$\check{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_E(M)$$

est la représentation contragrédiente de ρ $(\check{\rho}(g) = {}^t\rho(g^{-1}))$.

Si $\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{smallmatrix})G$ est donné sur $\mathbb{F}_q$, on remplace la variable s par $T = q^{-s}$ et on pose

$$L\left(\begin{smallmatrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{smallmatrix}\right)G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_E(M);T) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{\det(1-T^{\deg(y)}\rho(F_y))} .$$

3.3.1. EXERCICES. Dans les quatre exercices ci-dessous, on est sur le corps de base $\mathbb{F}_q$, on a donc une situation

$$\begin{array}{l} X \\ \downarrow)G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_E(M) \\ Y \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \end{array}$$

on a choisi une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ et on note F_X et F_Y l'action du Frobenius

$$\lambda \mapsto \lambda^q$$

de $\mathrm{gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ sur $X(\bar{\mathbb{F}}_q)$ et $Y(\bar{\mathbb{F}}_q)$ respectivement. On notera $L(T)$ la fonction L de Grothendieck de la situation.

3.3.1.1. <u>On a, dans</u> $E[[T]]$, <u>l'identité "en haut"</u>

$$L(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n}.S_n\right)$$

<u>où, pour tout entier</u> $n \geqslant 1$, <u>on a posé</u>

$$S_n = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(\rho(g)).|X(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X^n\circ g}| .$$

3.3.1.2. <u>Si</u> g <u>est un automorphisme de</u> $X/\mathbb{F}_q$ <u>d'ordre</u> N , <u>il existe un</u> $\mathbb{F}_q$<u>-schéma</u> X' <u>de type fini et un isomorphisme</u>

$$f : X'\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N} \xrightarrow{\sim} X\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N}$$

<u>tel que le carré</u>

$$\begin{tikzcd}
X'\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{X'}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}"'] & X\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N} \arrow[d, "(F_X\circ g)\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}"] \\
X'\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N} \arrow[r, "f"] & X\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^N}
\end{tikzcd}$$

<u>commute</u>.

3.3.1.2'. <u>Pour tout nombre premier</u> $\ell \neq p$, <u>on a une formule des traces pour l'endomorphisme</u> $F_X\circ g$

$$|X(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X\circ g}| = \sum_i (-1)^i \ \mathrm{Tr}(F_X\circ g, H_c^i(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) \ .$$

<u>Plus généralement, cette formule vaut aussi pour les endomorphismes</u> $F_X^n\circ g$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

3.3.1.3. <u>Pour toute place finie</u> λ <u>de</u> E <u>au-dessus d'un nombre premier</u> $\ell \neq p$, <u>la série</u> $L(T)$ <u>est le développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle, à coefficients dans le complété</u> E_λ ,

$$\prod_i \det(1-(F_X\otimes \mathrm{id})T, (H_c^i(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)\otimes(M\otimes_E E_\lambda))^G)^{(-1)^{i+1}} \ .$$

3.3.1.4. <u>Dans le cas particulier d'un revêtement d'Artin-Schreier</u>

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \arrow[dl, "pr_1"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

X <u>défini par une équation d'Artin-Schreier</u>

$$t^{q_o} - t = f(y)$$

(<u>où</u> $\mathbb{F}_{q_o}\subset\mathbb{F}_q$, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[t])$ <u>et</u> $f: Y\to\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$) , <u>si on prend</u>

$$E = M = \mathbb{Q}(\zeta_p) \ ,$$

<u>où</u> ζ_p <u>est une racine primitive</u> p-ième <u>de l'unité, et si</u>

$$\rho = \Psi_o : G = \mathbb{F}_{q_o} \to \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$$

est un caractère non trivial, alors

(a) $\mathbb{F}_{q_o}$ agissant sur X par $(\lambda,(t,y)) \mapsto (t+\lambda,y)$, on a, pour tout $y \in |Y|$ de corps résiduel k,

$$F_y = -\varphi_y = -\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_{q_o}}(f(y)) ;$$

(b) on a

$$L(T) = L(Y,f,\bar{\Psi}_o \circ \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_{q_o}};T) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{1-T^{\deg(y)}\bar{\Psi}_o(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_{q_o}}(f(y)))}$$

et, pour toute place λ de E, au-dessus de $\ell \neq p$, on a

$$L(T) = \prod_i \det(1-(F_X\otimes \mathrm{id})T,(H^i_c(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathbb{Q}_\ell)\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}E_\lambda)^{\Psi_o})^{(-1)^{i+1}} .$$

3.3.2. Solutions des exercices.

3.3.2.1. Partons de l'identité formelle

$$T\frac{d}{dT}\mathrm{Log}(\det(1-fT)^{-1}) = \sum_{m\geq 1} T^m.\mathrm{Tr}(f^m)$$

pour tout $f \in \mathrm{End}_E(M)$. Si on applique l'opérateur $T\frac{d}{dT}\mathrm{Log}$ à $L(T)$, on obtient alors

$$T\frac{d}{dT}\mathrm{Log}\, L(T) = \sum_{y\in|Y|} \deg(y).\sum_{m\geq 1} T^{m.\deg(y)}\, \mathrm{Tr}(\rho(F_y^m))$$

d'où

$$T\frac{d}{dT}\mathrm{Log}\, L(T) = \sum_{n=1}^{\infty} T^n \sum_{\substack{y\in|Y| \\ \deg(y)|n}} \deg(y).\mathrm{Tr}(\rho(F_y^{n/\deg(y)})) .$$

Il suffit donc de montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation

$$S_n = \sum_{\substack{y\in|Y| \\ \deg(y)|n}} \deg(y).\mathrm{Tr}(\rho(F_y^{n/\deg(y)})) .$$

Fixons un élément g de G et un entier $n \geq 1$. Pour un $y \in |Y|$ tel que $\deg(y)|n$, dire que

$$F_y^{n/\deg(y)} = g^{\natural}$$

c'est dire qu'il existe $x \in X_y(\bar{k})$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique du corps résiduel k de y, tel que

$$\mathrm{Frob}_k^{n/\deg(y)}(x) = g^{-1}(x)$$

ou encore, tel que,

$$\mathrm{Frob}_k^{n/\deg(y)} \circ g(x) = x\ .$$

Maintenant, si $\sigma : \bar{k} \to \bar{\mathbb{F}}_q$ est un $\mathbb{F}_q$-isomorphisme, on a

$$\sigma \circ g = g \circ \sigma \qquad \text{sur} \quad X_y(\bar{k})$$

et

$$\sigma \circ \mathrm{Frob}_k \circ \sigma^{-1} = F_X^{\deg(X)} \qquad \text{sur} \quad X_y(\bar{\mathbb{F}}_q)$$

(X_y est un k-schéma, donc à fortiori un $\mathbb{F}_q$-schéma ; $X_y(\bar{\mathbb{F}}_q) \subset X(\bar{\mathbb{F}}_q)$), donc dire que

$$F_Y^{n/\deg(y)} = g^{\natural}$$

équivaut encore à dire qu'il existe $x' \in X_y(\bar{\mathbb{F}}_q)$ $(x' = \sigma(x))$ tel que

$$F_X^n \circ g(x') = x'$$

donc à dire que

$$X_y(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X^n \circ g} \neq \emptyset\ .$$

Notons que cette dernière condition implique automatiquement que y est fixe par F_Y^n, donc que $\deg(y) | n$. Par suite les deux ensembles

$$\{y \in |Y| \ \big| \ \deg(y) | n,\ F_Y^{n/\deg(y)} = g^{\natural}\}$$

et

$$\{y \in |Y| \ \big| \ X_y(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X^n \circ g} \neq \emptyset\}$$

coïncident.

Chaque $y \in |Y|$ définit une orbite sous $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ dans $Y(\bar{\mathbb{F}}_q)$ et cette orbite à $\deg(y)$ éléments. La réunion de ces orbites pour y parcourant l'ensemble ci-dessus n'est autre que l'image par l'application naturelle

$$X(\bar{\mathbb{F}}_q) \to Y(\bar{\mathbb{F}}_q)$$

de $X(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X^n \circ g}$.

Comme $X(\bar{\mathbb{F}}_q)$ est un G-torseur sur $Y(\bar{\mathbb{F}}_q)$, le nombre d'éléments de cette image est

$$\frac{1}{|G|}\ |X(\bar{\mathbb{F}}_q)^{F_X^n \circ g}|$$

d'où la conclusion.

3.3.2.2. Commençons par rappeler le résultat de descente du corps de base suivant (Serre, Groupes algébriques et corps de classes, ch. VI, n° 2) : soit V un $\mathbb{F}_{q^N}$-schéma, soit F_V le Frobenius de V (F_V est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent au schéma V et l'élévation à la puissance q^N-ième sur le faisceau structural $\mathcal{O}_V$) et soit

$$F : V \to V$$

un $\mathbb{F}_{q^N}$-morphisme tel que

$$F^N = F_V \ ,$$

alors "descendre de corps de base de $\mathbb{F}_{q^N}$ à $\mathbb{F}_q$" c'est trouver un $\mathbb{F}_q$-schéma W et un $\mathbb{F}_{q^N}$-isomorphisme

$$f : W \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \xrightarrow{\sim} V$$

tel que le carré

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_W \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}"'] & V \arrow[d, "F"] \\
W \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \arrow[r, "f"] & V
\end{tikzcd}$$

commute (F_W est l'élévation à la puissance q-ième sur $\mathcal{O}_W$).

Soit V^q le schéma ayant même espace topologique sous-jacent que V , mais ayant pour faisceau structural le faisceau $\mathcal{O}_V^q$. Soit $\theta_V : V \to V^q$ le morphisme qui est l'identité sur les espaces topologiques sous-jacents et l'inclusion $\mathcal{O}_V^q \hookrightarrow \mathcal{O}_V$ pour les faisceaux structuraux.

Nous allons utiliser le résultat suivant : pour que la descente du corps de base de $\mathbb{F}_{q^N}$ à $\mathbb{F}_q$ soit possible, il faut et il suffit que F soit de la forme

$$F = \varphi \circ \theta_V$$

où $\varphi : V^q \to V$ est un isomorphisme.

Il nous suffit de vérifier que pour

$$V = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N}$$

le morphisme $F = (F_X \circ g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}$ est tel que

$$F^N = F_V$$

et peut s'écrire

$$F = \varphi \circ \theta_V$$

où $\varphi : V^q \to V$ est un isomorphisme.

Pour la première relation, comme g est défini sur $\mathbb{F}_q$, on a

$$F_X \circ g = g \circ F_X$$

donc

$$(F_X \circ g)^N = F_X^N \circ g^N = F_X^N$$

puisque g est d'ordre N . Mais

$$F_X^N \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}} = F_V$$

d'où la première relation.

Pour la seconde, on remarque que

$$F_X = \varphi_X \circ \theta_X$$

où

$$\varphi_X : X^q \to X$$

est l'identité sur les espaces topologiques sous-jacents et

$\mathcal{O}_X \xrightarrow{a \mapsto a^q} \mathcal{O}_X^q$ sur les faisceaux structuraux. Donc

$$F_X \circ g = g \circ F_X = g \circ \varphi_X \circ \theta_X$$

et

$$(F_X \circ g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}} = [(g \circ \varphi_X) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}] \circ [\theta_X \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}]$$

or, on a un isomorphisme

$$(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N})^q \xrightarrow{\sim} X^q \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N}$$

et un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & (X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N})^q \arrow[d, "\wr"] \\ X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \arrow[ur, "\theta_V"] \arrow[r, "\theta_X \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}"'] & X^q \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \end{tikzcd}$$

d'où la décomposition

$$F = \varphi \circ \theta_V$$

φ étant le morphisme composé

$$(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N})^q \xrightarrow{\sim} X^q \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} \xrightarrow{(g \circ \varphi_X) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{q^N}}} X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^N} .$$

La descente du corps de base est donc possible.

3.3.2.2'. Compte-tenu de 3.3.1.2, la formule 3.3.1.2' découle de la formule des traces de Lefschetz pour l'endomorphisme de Frobenius (SGA 5 III B, SGA 4½ [Rapport], voir aussi 3.5.1).

3.3.2.3. Si on combine 3.3.1.1 et 3.3.1.2', on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation

$$S_n = \sum_i (-1)^i \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}((F_X^n \circ g) \otimes \rho(g), H_c^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} (M \otimes_E E_\lambda)) .$$

Or

$$(F_X^n \circ g) \otimes \rho(g) = (F_X^n \otimes \mathrm{id}_{M \otimes_E E_\lambda}) \circ (g \otimes \rho(g))$$

et, comme l'action de G sur X est définie sur $\mathbb{F}_q$, l'endomorphisme $F_X^n \otimes \mathrm{id}$ commute à l'action de G et induit un endomorphisme sur l'espace des invariants sous G . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F_X^n \otimes \mathrm{id}, (H_c^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} (M \otimes_E E_\lambda))^G)$$

et la conclusion s'en déduit par la méthode habituelle.

3.3.2.4. Si $x = (t,y) \in X_y(\bar{k})$ où $\bar{k}$ est une clôture algébrique du corps résiduel k de y , on a

$$\mathrm{Frob}_k(x) = (t^{q^{\deg(y)}}, y)$$

et

$$t^{q^{\deg(y)}} - t = (t^{q_o} - t)^{q^{\deg(y)}/q_o} + \ldots + (t^{q_o} - t)^{q_o} + (t^{q_o} - t)$$
$$= \operatorname{Tr}_{k/\mathbb{F}_{q_o}}(t^{q_o} - t) = \operatorname{Tr}_{k/\mathbb{F}_{q_o}}(f(y))$$

d'où

$$F_y = -\varphi_y = -\operatorname{Tr}_{k/\mathbb{F}_{q_o}}(f(y)) .$$

On a prouvé (a) ; (b) résulte de (a) et des exercices précédents.

3.4. Fonctions L et faisceaux ℓ-adiques.

3.4.1. Rappel sur le π_1 .

Soit Y un schéma localement noethérien, normal et connexe, pour tout revêtement fini étale galoisien de groupe G de Y , on sait associer à chaque $y \in |Y|$ des Frobenius arithmétique et géométrique, φ_y et $F_y \in G^{\natural}$. Mais pourquoi se restreindre à un seul revêtement fini, étale, galoisien de Y ?

Si l'on considère "tous" les revêtements finis étales galoisiens X/Y , leurs groupes G forment un "système projectif" et il est naturel de considérer le groupe profini

$$\pi_1(Y) = \varprojlim_{X/Y} G .$$

Plus précisément, si K est le corps des fractions de Y , i.e. si K est le corps résiduel du point générique η de Y , si $\bar{K}$ est une clôture algébrique fixée de K , définissant un point géométrique $\bar{\eta}$ de Y localisé en η , on définit $\pi_1(Y,\bar{\eta})$ comme quotient de

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) = \varprojlim_{L} \mathrm{Gal}(L/K)$$

où L parcourt les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$; $\pi_1(Y,\bar{\eta})$ est le quotient correspondant aux L , $K \subset L \subset \bar{K}$, $[L:K] < +\infty$, tels que le normalisé de Y dans L soit fini étale sur Y .

Plus généralement, pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y , on peut définir un groupe profini $\pi_1(Y,\bar{y})$. Pour $\bar{y}$ variable, les $\pi_1(Y,\bar{y})$ sont isomorphes entre eux, mais par des isomorphismes qui ne sont canoniques qu'à automorphismes intérieurs près.

<u>Fonctorialité</u>. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ et pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , on dispose d'un homomorphisme de groupe

$$f_* : \pi_1(X,\bar{x}) \to \pi_1(Y,f(\bar{x})) .$$

EXEMPLE (i) Si k est un corps et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k définissant un point géométrique $\bar{s}$ de $S = \mathrm{Spec}(k)$, on a

$$\pi_1(S,\bar{s}) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) .$$

En particulier, si $k = \mathbb{F}_q$, $\pi_1(S,s)$ contient deux Frobenius : le Frobenius arithmétique φ , tel que $\varphi(\lambda) = \lambda^q$, pour tout $\lambda \in \bar{\mathbb{F}}_q$, et le Frobenius géométrique $F = \varphi^{-1}$.

(ii) Si Y est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y localisé en un point fermé y de Y , par fonctorialité on a un homomorphisme

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \pi_1(y,\bar{y}) \to \pi_1(Y,\bar{y})$$

(où $\mathbb{F}_q$ est le corps résiduel de y , $\bar{\mathbb{F}}_q$ la clôture de $\mathbb{F}_q$ dans $\bar{y}$) et on peut considérer les images de

$$F,\varphi \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \pi_1(y,\bar{y})$$

par cet homomorphisme ; on note F_y et φ_y respectivement les classes de conjugaison de ces images, F_y et φ_y sont donc des éléments de $\pi_1(Y,\bar{y})^\natural$.

Pour $\bar{y}$ variable, les $\pi_1(Y,\bar{y})^\natural$ sont tous canoniquement isomorphes, donc, si ξ est un point géométrique quelconque de Y et si y est un point fermé de Y , on a dans $\pi_1(Y,\xi)^\natural$ deux classes de conjugaison F_y et φ_y canoniquement attachées à y . De plus, on a le résultat de densité suivant (Serre, Abelian ℓ-Adic Representations and Elliptic Curves, Benjamin 1968).

THÉORÈME DE DENSITÉ DE ČEBOTAREV. *Les* F_y (*resp.* φ_y), *pour* y *parcourant* $|Y|$, *sont "denses" dans* $\pi_1(Y,\xi)^\natural$. *Plus précisément, pour tout revêtement connexe, fini, étale, galoisien de groupe* G , *de* Y , *les classes de conjugaison* $F_y \in G^\natural$ ($y \in |Y|$) *remplissent tout* $G^\natural$.

3.4.2. *Définition des* E_λ*-faisceaux*.

Soit ℓ un nombre premier et soit E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique générique de Y .

DÉFINITION. *Un* E_λ*-faisceau lisse sur* Y *est "par définition" une représentation continue*

$$\rho : \pi_1(Y,\bar{\eta}) \to \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M)$$

où M *est un* E_λ*-espace vectoriel de dimension finie* ; M *est appelé la fibre du* E_λ*-faisceau* $\mathfrak{F}$ *au point géométrique* $\bar{\eta}$ *et est noté* $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}$.

Si Y est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau lisse sur Y , on définit

$$L(Y,\mathfrak{F};s) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{\det(1-(Ny)^{-s}\rho(F_y))} \tag{3.4.2.1}$$

et si Y est, en fait, un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on considère plutôt

$$L(Y,\mathfrak{F};T) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{\det(1-T^{\deg(y)}\rho(F_y))} . \tag{3.4.2.2}$$

(pour $\mathfrak{F} = E_\lambda$, on retrouve $Z(Y;T)$ (3.2.3)).

E_λ-faisceaux constructibles. Sur un schéma Y noethérien, la notion de E_λ-faisceau constructible généralise la notion de E_λ-faisceau lisse définie ci-dessus. On a les propriétés suivantes :

(i) pour un morphisme $f : X \to Y$ de schémas noethériens et pour un E_λ-faisceau constructible $\mathfrak{F}$ sur Y, on sait construire un E_λ-faisceau $f^*\mathfrak{F}$ constructible sur X de telle sorte que, si $\mathfrak{F}$ est lisse, i.e. correspond à une représentation ρ de $\pi_1(Y)$, alors $f^*\mathfrak{F}$ est aussi lisse et correspond à la représentation $\rho \circ f_*$ de $\pi_1(X)$.

(ii) pour un E_λ-faisceau constructible $\mathfrak{F}$ sur Y, il existe une partition finie $Y = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, où les Z_α sont des sous-schémas constructibles de Y, tels que $(i_\alpha)^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{|Z_\alpha}$ soit lisse sur Z_α ($i_\alpha : Z_\alpha \hookrightarrow Y$ est l'inclusion), pour tout α.

Bien sûr, la donnée de $\mathfrak{F}$ signifie qu'il y a certains liens entre les diverses représentations associées aux E_λ-faisceaux lisses $\mathfrak{F}_{|Z_\alpha}$, mais on n'en parlera pas pour le moment.

(iii) si $\bar{y}$ un point géométrique de Y localisé en un point y de Y, si $i_y : y \hookrightarrow Y$ est l'inclusion et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur Y, alors $i_y^*(\mathfrak{F})$ est un E_λ-faisceau constructible, donc lisse, sur y et correspond donc à une représentation continue de $\pi_1(y,\bar{y})$ dans un E_λ-espace vectoriel de dimension finie noté $\mathfrak{F}_{\bar{y}}$ et appelé la fibre au point géométrique $\bar{y}$.

Si Y est de nouveau un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y localisé en un point fermé y de Y, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ ($\bar{y}$ correspondant à une clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$) et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur Y, alors le Frobénius géométrique $F_y \in \pi_1(y,\bar{y}) = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ agit sur la fibre $\mathfrak{F}_{\bar{y}}$ et on peut donc considérer la fonction L

$$L(Y,\mathfrak{F};s) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{\det(1-(Ny)^{-s}F_y,\mathfrak{F}_{\bar{y}})} . \tag{3.4.2.3}$$

De même, si Y est en fait un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on définit plutôt

(3.4.2.4) $$L(Y,\mathcal{F};T) = \prod_{y\in|Y|} \frac{1}{\det(1-T^{\deg(y)}F_y,\mathcal{F}_{\bar{y}})} .$$

3.4.2.5. <u>Formule</u> (exercice). Si Y est de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et si $\mathcal{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur Y, on a

$$L(Y,\mathcal{F};T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n} S_n(Y,\mathcal{F})\right)$$

où

$$S_n(Y,\mathcal{F}) = \sum_{d|n} d \cdot \sum_{\substack{y\in|Y| \\ \deg(y)=d}} \mathrm{Tr}(F_y^{n/d},\mathcal{F}_{\bar{y}})$$

de sorte que

$$S_1(Y,\mathcal{F}) = \sum_{y\in Y(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(F_y,\mathcal{F}_{\bar{y}})$$

et

$$S_n(Y,\mathcal{F}) = S_1(Y\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^n},\mathcal{F}|Y\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^n}) .$$

<u>Lien avec la situation d'un revêtement étale fini</u>. Si Y est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$, si X/Y est un revêtement fini étale galoisien de groupe G et si $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M)$ est une représentation de G dans un E_λ-espace vectoriel de dimension finie M, on peut associer à cette situation un E_λ-faisceau lisse $\mathcal{F}$ sur Y : $\mathcal{F}$ provient du G-torseur X/Y par extension du groupe structural par

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M) ,$$

($\mathcal{F}$ "est" $X\times^G M \to Y$ comme "espace étalé" sur Y). On a alors

$$L\left(\begin{matrix}X\\ \downarrow\\ Y\end{matrix}\right)G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M);s) = L(Y,\mathcal{F};s) .$$

EXERCICE. Si Y est en fait un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, on a, pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$H^i_c(Y\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}) \simeq H^i_c(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,M\otimes\mathbb{Q}_\ell)^G .$$

3.5. Fonctions L et cohomologie des E_λ-faisceaux.

3.5.1. Formule des traces et rationalité des fonctions L .

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, soit ℓ un nombre premier et soit $\mathfrak{F}$ un E_λ-faisceau constructible sur X , on dispose de E_λ-espaces vectoriels de dimension finie

$$H^i_c(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

nuls pour $i > 2d$ où $d = \dim_{\mathbb{F}_q}(X)$, sur lesquels $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ agit.

La formule des traces de Grothendieck (SGA 5 III B, SGA 4½ [Rapport]) dit que, si $\ell \neq p = \mathrm{car}(\mathbb{F}_q)$, on a

$$S_1(X,\mathfrak{F}) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} \sum_{x \in X(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(F_x, \mathfrak{F}_{\bar{x}}) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F, H^i_c(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}))$$

et, plus généralement, que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a (avec les notations de 3.4.2.1)

$$S_n(X,\mathfrak{F}) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F_n, H^i_c(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F})) .$$

On en déduit (exercice) que $L(X,\mathfrak{F};T)$ (3.4.2.4) est le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle à coefficients dans E_λ ,

$$L(X,\mathfrak{F};T) = \prod_i \det(1-TF, H^i_c(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}))^{(-1)^{i+1}} .$$

3.5.2. Cohomologie à supports propres.

Il est commode d'interpréter

$$(H^i_c(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}) + \text{l'action de } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q))$$

comme un E_λ-faisceau constructible sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$.

De façon générale, si

$$f \Big\downarrow \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$

est un morphisme séparé, de type fini, entre schémas noethériens et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur X , "on" peut définir des E_λ-faisceaux constructibles sur Y , notés

$$R^i f_! \mathcal{F} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

nuls pour $i > 2d$ où $d = \max\limits_{y}(\dim f^{-1}(y))$ de telle sorte que :

(0) $R^i f_! \mathcal{F} = R^i f_* \mathcal{F}$ $(\forall i)$, si f est propre ;

(1) la formation de $R^i f_! \mathcal{F}$ commute à tout changement de base $Y' \xrightarrow{g} Y$ où Y' est encore un schéma noethérien : si on fixe les notations par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

pour tout i, la flèche de changement de base

$$g^* R^i f_! \mathcal{F} \to R^i f'_! g'^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme ;

(2) si $g : Y \to Z$ est un morphisme où Z est noethérien, on a une suite spectrale de Leray

$$E_2^{ij} = R^i g_! R^j f_! \mathcal{F} \Longrightarrow R^{i+j}(g \circ f)_! \mathcal{F} \ ;$$

(3) si $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est un ouvert complémentaire d'un fermé $D \overset{i}{\hookrightarrow} X$, on a une suite exacte longue d'excision : si on fixe les notations à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{F} \arrow[d, dash] & & \\ \mathcal{F}_{|U} \arrow[r, dash] & U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f_U"'] & X \arrow[d, "f"] & D \arrow[l, hook'] \arrow[r, dash] \arrow[dl, "f_D"] & \mathcal{F}_{|D} \\ & & Y & & \end{tikzcd}$$

cette suite exacte s'écrit

$$\begin{aligned} --- \to R^i f_{U!}(\mathcal{F}_{|U}) \to R^i f_! \mathcal{F} \to R^i f_{D!}(\mathcal{F}_{|D}) \\ \to R^{i+1} f_{U!}(\mathcal{F}_U) \to --- \ ; \end{aligned}$$

(4) si

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$$

est une suite exacte de E_λ-faisceaux constructibles sur X, on a une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} --- \to R^i f_! \mathfrak{F} \to R^i f_! \mathfrak{G} \to R^i f_! \mathfrak{H} \\ \to R^{i+1} f_! \mathfrak{F} \to --- . \end{aligned}$$

Maintenant, si Y est un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et si y est un point fermé de Y de corps résiduel $\mathbf{F}_q$, alors

$$R^i f_! \mathfrak{F}|_y$$

n'est autre que le E_λ-faisceau lisse défini par

$$(H^i_c(X_y \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, \mathfrak{F}) + \text{l'action de } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)) .$$

<u>Résultats ou remarques complémentaires ou exercices</u> :

(i) si l'on a une situation :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{F} & = E_\lambda\text{-faisceau constructible} \\ | & \\ X & \\ f\downarrow & \\ Y & \\ g\downarrow & \\ Z & \text{schéma de type fini sur } \mathbb{Z}[1/\ell] \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} L(X,\mathfrak{F};s) &= \prod_i L(Y,R^i f_! \mathfrak{F};s)^{(-1)^i} \\ &= \prod_{i,j} L(Z,R^j g_! R^i f_! \mathfrak{F};s)^{(-1)^{i+j}} \\ &= \prod_n L(Z,R^n (g\circ f)!\mathfrak{F};s)^{(-1)^n} ; \end{aligned}$$

(ii) si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur U, alors

$$R^o j_! \mathfrak{F} = j_! \mathfrak{F} = \text{"faisceau } \mathfrak{F} \text{ sur } U \text{ prolongé par } 0\text{"}$$

et

$$R^i j_! \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{pour } i > 0 \ ;$$

(iii) si $i : Z \hookrightarrow X$ est une immersion fermée et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur Z, alors

$$R^0 i_! \mathfrak{F} = i_* \mathfrak{F} = \text{"faisceau } \mathfrak{F} \text{ sur } Z \text{ prolongé par } 0\text{"}$$

et

$$R^i i_! \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{pour } i > 0 \ ;$$

(iv) si on a une situation :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où j est une immersion ouverte et où $\bar{f}$ est un morphisme propre et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur X, alors

$$R^i f_! \mathfrak{F} = R^i \bar{f}_* (j_! \mathfrak{F}) \qquad (\forall i) \ ;$$

(v) si on a une situation :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j"] & X \arrow[d, "f"] & D = X-U \arrow[l, hook', "i"'] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où j est une immersion ouverte et si $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur X, alors

a) on a une suite exacte courte de E_λ-faisceaux

$$0 \to j_! j^* \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \to i_* i^* \mathfrak{F} \to 0$$

b) la suite exacte longue associée à cette suite exacte courte n'est rien d'autre que la suite exacte d'excision ;

(vi) si $\mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G}$ est un homomorphisme de E_λ-faisceaux constructibles sur un schéma X noethérien et irréductible, si $\bar{\eta}$ est un point générique géométrique de X et si

$$\alpha_{\bar{\eta}} : \mathcal{F}_{\bar{\eta}} \to \mathcal{G}_{\bar{\eta}}$$

est un isomorphisme, alors, il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que

$$\alpha|_U : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$$

soit déjà un isomorphisme ;

(vii) supposons que sur X noethérien, on ait une suite d'homomorphismes de E_λ-faisceaux constructibles

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

alors cette suite est exacte si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X la suite

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} \xrightarrow{\alpha_{\bar{x}}} \mathcal{G}_{\bar{x}} \xrightarrow{\beta_{\bar{x}}} \mathcal{H}_{\bar{x}}$$

est exacte.

3.5.3. <u>Résumé du théorème fondamental de Deligne</u> (Weil II).

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau constructible sur X.

DÉFINITION. *Le E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ est dit "entier" si, pour tout point fermé x de X, les valeurs propres de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ($\bar{x}$ est un point géométrique arbitraire localisé en x) sont des entiers algébriques.*

REMARQUE. Dire que les valeurs propres d'un endomorphisme d'un E_λ-espace vectoriel sont des nombres algébriques (resp. des entiers algébriques) a la signification suivante : on fixe une clôture algébrique $\bar{E}_\lambda$ de E_λ, de sorte que l'on peut prendre toutes les valeurs propres dans $\bar{E}_\lambda$, mais on dit en plus que ces valeurs propres sont dans la clôture intégrale de $\mathbb{Q}$ (resp. de $\mathbb{Z}$) dans $\bar{E}_\lambda$.

EXEMPLES (i) le faisceau constant E_λ est entier ;

(ii) "entier" passe aux sous-faisceaux et aux faisceaux quotients.

DÉFINITION. Soit $w \in \mathbb{Z}$, on dit que le E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ est "pur de poids w" si, pour tout point fermé x de X, les valeurs propres de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ (là encore $\bar{x}$ est un point géométrique arbitraire localisé en x) sont des nombres algébriques α tels que

$$|\alpha| = (Nx)^{w/2} \quad (= (\sqrt{q})^w)$$

pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

REMARQUE. Si $\mathcal{F}$ est un E_λ-faisceau entier et pur de poids $w \in \mathbb{Z}$, alors $w \geqslant 0$ (en effet, soit x un point fermé de X, soit $K/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne finie contenant les valeurs propres de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$; si $d = [K:\mathbb{Q}]$, si $|\ |_1, \dots, |\ |_d$ sont les d valeurs absolues archimédiennes de K et si $\alpha \in K$, on a

$$\prod_{i=1}^{d} |\alpha|_i = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| \ ;$$

donc, si α est une valeur propre de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, on a

$$(\sqrt{q})^{dw} = \prod_{i=1}^{d} |\alpha|_i = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| \in \mathbb{N}$$

d'où $w \geqslant 0$).

DÉFINITION. Un E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}$ est dit "mixte" s'il existe une filtration finie de $\mathcal{F}$ par des sous-E_λ-faisceaux constructibles tels que les Gr_i soient purs. Si les poids des Gr_i sont majorés par un entier n, on dira que $\mathcal{F}$ est "mixte de poids $\leqslant n$".

Le résultat fondamental de Deligne (Weil II) est le suivant :

THÉORÈME 3.5.3.1. Si $f : X \to Y$ est un morphisme entre schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$, si ℓ est un nombre premier inversible sur Y, si E_λ est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ et si $\mathcal{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur X, alors

(i) si $\mathcal{F}$ est entier, les $R^i f_! \mathcal{F}$ sont aussi entiers ;

(ii) si $\mathcal{F}$ est mixte de poids $\leqslant n$, alors chaque $R^i f_! \mathcal{F}$ est mixte de poids $\leqslant$ n+i .

Précision. Si $X/\mathbb{F}_q$ est une courbe propre, lisse et géométriquement connexe, si $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est un ouvert non vide, si $\mathcal{F}$ est un E_λ-faisceau lisse sur U, pur de poids w ($E_\lambda/\mathbb{Q}_\ell$ avec $\ell \neq p = \mathrm{car}(\mathbb{F}_q)$), alors

$$H^i(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, j_*\mathcal{F})$$

est pur de poids $w+i$ $(i=0,1,2)$. Pour $i=1$, ce groupe de cohomologie est le "$\tilde{H}^1$ parabolique",

$$\tilde{H}^1(U\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}) = \mathrm{Im}(H^1_c(U\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}) \to H^1(U\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}))\ .$$

3.5.4. Application aux sommes exponentielles.

Soit V un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, soit f une fonction sur V et soit Ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$. On peut interpréter en terme de fonctions L de faisceaux ℓ adiques la fonction L définie par les sommes exponentielles

$$S_n(V,f,\Psi) = \sum_{v\in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(v)))\ .$$

On choisit pour cela un nombre $\ell \neq p$, une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$ contenant les racines p-ièmes de l'unité et on regardera Ψ comme un caractère de $\mathbb{F}_q$ à valeurs dans E_λ^*.

3.5.4.1. Première méthode. On associe à la situation (V,f,Ψ) un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V, que l'on notera $\mathcal{L}_{\Psi,f}$, tel que pour tout point fermé v de V de corps résiduel k et pour tout point géométrique $\bar{v}$ localisé en v on ait

$$\mathrm{Tr}(F_v,(\mathcal{L}_{\Psi,f})_{\bar{v}}) = \Psi(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}(f(v)))$$

($\mathcal{L}_{\Psi,f}$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V qui provient du $\mathbb{F}_q$-torseur d'Artin-Schreier d'équation

$$T^q-T = f(v)$$

par extension du groupe structural par $\bar{\Psi}:\mathbb{F}_q \to E_\lambda^*$). On voit facilement qu'on a $S_n(V,f,\Psi) = S_n(V,\mathcal{L}_{\Psi,f})$. La série L attachée à la situation, définie en 2.1.0,

$$L(V,f,\Psi;T) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n} \sum_{v\in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(v)))\Big)$$

est alors le développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle (à coefficients dans E_λ)

$$L(V,\mathcal{L}_{\Psi,f};T) = \prod_i \det(1-TF, H^i_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f}))^{(-1)^{i+1}} .$$

3.5.4.2. Deuxième méthode. Son point de départ est la relation

$$\sum_{v\in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(v))) = \sum_{u\in\mathbb{F}_{q^n}} [\# f^{-1}(u)(\mathbb{F}_{q^n})].\Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(u)) .$$

Cette relation s'interprète cohomologiquement de la façon suivante :

(a) Soit $\mathcal{L}_\Psi$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ provenant du $\mathbb{F}_q$-torseur d'Artin-Schreier sur $\mathbb{A}^1$ d'équation

$$T^q - T = u$$

(u coordonnée affine sur $\mathbb{A}^1$) par exention du groupe structural à l'aide de $\bar{\Psi} : \mathbb{F}_q \to E_\lambda^*$. Pour tout point géométrique $\bar{u}$ de $\mathbb{A}^1$ localisé en un point fermé u de $\mathbb{A}^1$, on a

$$\mathrm{Tr}(F_u, (\mathcal{L}_\Psi)_{\bar{u}}) = \Psi(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}(u))$$

si k est le corps résiduel de u .

(b) Pour tout $\tilde{u}\in\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathbb{F}_{q^n}$, qui se trouve au-dessus d'un point fermé u de degré $d|n$, et de corps résiduel k , on a

$$\begin{aligned}\# f^{-1}(\tilde{u})(\mathbb{F}_{q^n}) &= \sum_j (-1)^j \,\mathrm{Tr}(F_u^{n/d}, H^j_c(f^{-1}(u)\otimes_k \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)) \\ &= \sum_j (-1)^j \,\mathrm{Tr}(F_u^{n/d}, (R^j f_! \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{u}}) .\end{aligned}$$

(c) En combinant (a) et (b), on trouve que

$$S_n(V,f,\Psi) = \sum_{\tilde{u}\in\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_u^{n/d})} \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr}(F_u^{n/d}, (\mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{u}})$$

$$= \sum_j (-1)^j S_n(\mathbb{A}^1, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell)$$

$$= \sum_j (-1)^j \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F^n, H_c^i(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell)) \ .$$

Par suite $L(V,f,\Psi;T)$ est le développement de Taylor à l'origine de

$$\prod_{i,j} \det(1-TF, H_c^i(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+j+1}} \ .$$

REMARQUE. On a $\mathcal{L}_{\Psi,f} = f^*\mathcal{L}_\Psi$, ce qui permet de faire le lien entre les deux points de vue cohomologiques (la suite spectrale de Leray pour le morphisme f

$$E_2^{ij} = H_c^i(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{i+j}(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

permet de passer d'une interprétation cohomologique à l'autre ; d'ailleurs les calculs que l'on a fait ne sont autres que la version combinatoire, ensembliste, de cette suite spectrale).

3.5.4.3. Nous pouvons maintenant donner l'interprétation cohomologique des entiers algébriques α_i et β_j de 2.1.4 et 2.2.3.

La première interprétation cohomologique de la série $L(V,f,\Psi;T)$ nous dit que cette série est le développement de Taylor en $T=0$ d'une fraction rationnelle que l'on peut écrire, après simplification, sous la forme

$$\frac{\prod_i (1-\alpha_i T)}{\prod_j (1-\beta_j T)}$$

où $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_j\}$ sont deux ensemble finis disjoints d'éléments d'une clôture algébrique $\bar{E}_\lambda$ de E_λ : les α_i et β_j sont des valeurs propres de F agissant sur les groupes de cohomologie

$$H_c^n(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f}) \ .$$

Un argument classique (déterminants de Hankel et lemme de Fatou, cf. Deligne, Weil I) montre que les α_i et β_j sont des entiers algébriques. D'où l'énoncé 2.1.4.

L'énoncé 2.2.3 (a) est une conséquence facile de la dualité de Poincaré.

Enfin, le E_λ-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{L}_{\Psi,f}$, sur V est pur de poids 0 , donc, pour tout $n = 0,1,\ldots,2 \dim V$,

$$H_c^n(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

est mixte de poids $\leqslant n$ (3.5.3.1), d'où l'énoncé 2.2.3 (b).

4 - THÉORÈME D'UNIFORMITÉ POUR LA STRUCTURE COHOMOLOGIQUE DES SOMMES EXPONENTIELLES

Le but de ce chapitre est de prouver les résultats annoncés en 2.3.1 et 3.1.1. Nous les déduirons (cf. 4.3.2) d'un théorème dit théorème clef (4.3.1) qui sera établi en 4.8 (et amélioré en 4.9).

4.1. <u>La situation globale que l'on veut comprendre</u>.

Soit $R \subset \mathbb{C}$ un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit V un schéma de type fini sur R , soit

$$f : V \to \mathbb{A}^1_R$$

une "fonction" sur V .

Chaque fois que l'on se donne un triplet

$$(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$$

où $\mathbb{F}_q$ est un corps fini de caractéristique p , où $\varphi : R \to \mathbb{F}_q$ est un homomorphisme d'anneaux et où Ψ est un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_q$ à valeurs dans $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, ζ_p étant une racine primitive p-ième de l'unité, on peut former la série L ,

$$L((V,f)\otimes_{R\nearrow\varphi}\mathbb{F}_q, \Psi; T) \in E[[T]]$$

et pour toute place finie λ de E qui divise un nombre premier $\ell \neq p$, on a (d'après 3.5.4.2) l'interprétation cohomologique suivante de la série L

$$L((V,f)\otimes_{R\nearrow\varphi}\mathbb{F}_q, \Psi; T) = \prod_{i,j} \det(1-TF, H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes_{R\nearrow\varphi} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+j+1}}$$

(et aussi, pour mémoire

$$= \prod_i \det(1-TF, H^i_c(V\otimes_{R\nearrow\varphi} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f}))^{(-1)^i}) .$$

PROBLÈME. Comprendre la variation en fonction du triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ de :

(i) $L((V,f)\otimes_{R\nearrow\varphi}\mathbb{F}_q, \Psi; T)$

(ii) $H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes_{R\nearrow\varphi} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\Psi \otimes R^j f_! \mathbb{Q}_\ell)$ (et $H^i_c(V\otimes_{R\nearrow\varphi} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f})$).

En fait, on va voir que le problème est de comprendre les $R^j f_! \mathbb{Q}_\ell$.

4.2. A quoi ressemble un E_λ-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_R$.

On considère la situation suivante : $R \subset \mathbb{C}$ est un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, E_λ est une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_\ell$, $\mathcal{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_R$.

LEMME. Il existe $r \in R-\{0\}$ tel que

(i) $R' = R[\frac{1}{r}]$ est normal (et même lisse sur $\mathbb{Z}$)

(ii) il existe un diviseur

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{A}^1_{R'} \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}(R') \end{tikzcd}$$

fini, étale sur $\mathrm{Spec}(R')$ (i.e. $D \subset \mathrm{Spec}(R'[T])$ est défini par une équation $f(T) \in R'[T]$, unitaire, vérifiant $(f(T), f'(T)) = R'[T]$) tel que

a) $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1_{R'}-D}$ est un E_λ-faisceau lisse, donc correspond à une représentation continue de $\pi_1(\mathbb{A}^1_{R'}-D)$

b) si $(D_i)_i$ est la famille des composantes connexes de D (si $f(T) = \prod_i f_i(T)$ où $f_i(T)$ est unitaire et irréductible dans $R'[T]$, D_i est défini par l'équation $f_i(T)=0$), de sorte que $D = \coprod_i D_i$, alors, pour chaque i , $\mathcal{F}|_{D_i}$ est un E_λ-faisceau lisse sur D_i , donc correspond à une représentation continue de $\pi_1(D_i)$.

PREUVE. Comme $R \subset \mathbb{C}$, $\mathrm{Fract}(R)$ est une extension séparable de $\mathbb{Q}$ donc il existe $r_1 \in R-\{0\}$ tel que $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{r_1}])$ soit lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Posons $R_1 = R[\frac{1}{r_1}]$, $\mathcal{F}$ est constructible sur $\mathbb{A}^1_{R_1}$, donc il existe $\hat{f}(T) \in R_1[T]-\{0\}$ tel que $\mathcal{F}$ soit lisse sur $\mathbb{A}^1_{R_1}-\{\hat{f}(T)=0\}$, mais on ne sait rien de $\hat{f}(T)$. Si $\hat{f}(T) = a_o \in R_1$, alors $r = r_1 . a_o$ répond à la question $(D=\emptyset)$. Sinon

$$\hat{f}(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_o$$

avec $a_o, a_1, \ldots, a_n \in R_1$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$. Soient $r_2 = r_1 . a_n$ et $R_2 = R[\frac{1}{r_2}]$. On peut décomposer $\frac{1}{a_n} \hat{f}(T)$ en facteurs irréductibles sur $\mathrm{Fract}(R_2)$:

$$\frac{1}{a_n} \hat{f}(T) = \prod_i f_i(T)^{n_i}$$

où $f_i(T)$ sont unitaires, irréductibles à coefficients dans $\mathrm{Fract}(R_2)$. D'après le lemme de Gauss, on a en fait $f_i(T) \in R_2[T]$, pour tout i , de sorte que

$$f(T) = \prod_i f_i(T)$$

est dans $R_2[T]$. A priori le discriminant δ de $f(T)$ n'est pas inversible dans R_2 , mais peu importe car, dans $R_3 = R[\frac{1}{r_3}]$ où $r_3 = r_2 . \delta$, il l'est.

Il reste à nettoyer chaque composante connexe D_i de $D = \{f(T) = 0\}$ $(D_i = \{f_i(T) = 0\})$ des singularités du faisceau $\mathcal{F}_{|D_i}$: plus précisément, $\mathcal{F}_{|D_i}$ **est** constructible, donc il existe un ouvert dense de D_i sur lequel $\mathcal{F}$ est lisse ; cet ouvert s'écrit

$$\mathrm{Spec}(S_i[\frac{1}{s_i}])$$

où

$$S_i = R_3[T]/(f_i(T))$$

et

$$s_i \in S_i - \{0\} .$$

Alors

$$r = r_3 . \prod_i \mathrm{Norme}_{S_i/R_3}(s_i)$$

répond aux exigences du lemme.

Ce lemme nous conduit à introduire la notion suivante :

DÉFINITION. <u>Soit</u> $R \subset \mathbb{C}$ <u>un anneau normal</u>, <u>de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un</u> E_λ-<u>faisceau</u> <u>constructible sur</u> $\mathbb{A}^1_R$. <u>On dira que</u>

$$U = \mathbb{A}^1_R - D \hookrightarrow \mathbb{A}^1_R \hookleftarrow D$$

est une "décomposition adaptée à $\mathcal{F}$" *si* D *est un diviseur dans* $\mathbb{A}^1_R$, *qui est fini et étale sur* $\mathrm{Spec}(R)$ *et si* $\mathcal{F}|U$ *est lisse ainsi que* $\mathcal{F}|D_i$ *pour toute composante connexe* D_i *de* D.

On dira que $\mathcal{F}$ *est "bon sur* $\mathbb{A}^1_R$" *s'il existe une décomposition adaptée à* $\mathcal{F}$.

On peut reformuler le lemme sous la forme :

LEMME. *Si* $\mathcal{F}$ *est un* E_λ*-faisceau constructible sur* $\mathbb{A}^1_R$, *il existe* $r \in R-\{0\}$ *tel que* $R' = R[1/r]$ *soit normal et que* $\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'}$ *soit bon*.

EXEMPLE. Soit

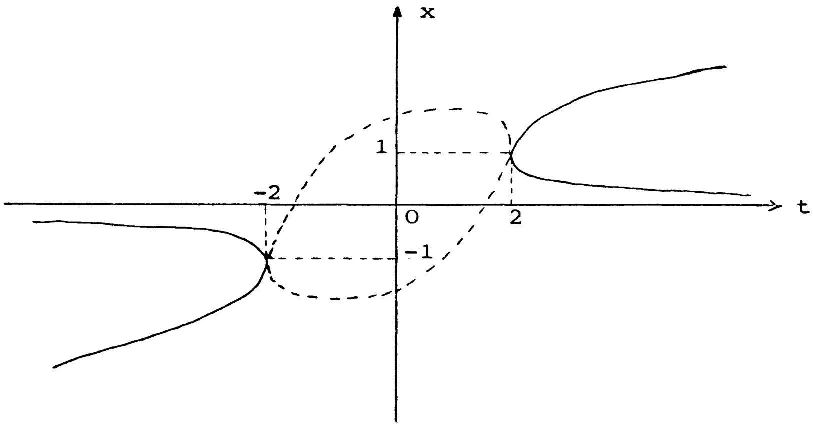
$$f : \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,\tfrac{1}{X}]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$$

le morphisme défini par

$$X + \frac{1}{X} = T$$

et soit $\mathcal{F} = f_!\mathbb{Q}_\ell$; $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ (on a $R^j f_!\mathbb{Q}_\ell = 0$ pour tout $j \geqslant 1$ car f est de dimension relative 0).

En caractéristique $p \neq 2$, le "dessin" de f est le suivant



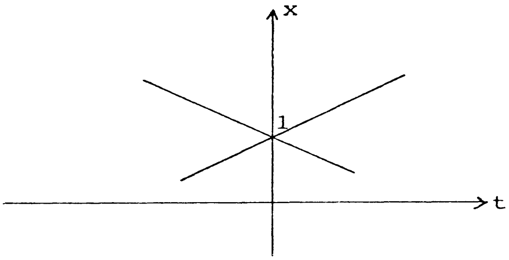
Il y a deux points de ramification, $x = 1$ et $x = -1$, qui sont modérés puisque 2 est inversible :

$$x + \frac{1}{x} = t \Longleftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x - \frac{t}{2})^2 = \frac{t^2-4}{4} .$$

Par contre, en caractéristique 2 , on a

$$x+\frac{1}{x} = t \Longleftrightarrow x^2+1 = tx \Longleftrightarrow \left(\frac{x+1}{t}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{t}\right) = \frac{1}{t}$$

donc le "dessin" est le suivant



Il n'y a qu'un point de ramification, $t=0$, mais la ramification est sauvage.

On voit donc que $\mathcal{F}$ est bon sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/2]}$ alors qu'il ne l'est pas sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$.

La situation géométrique que l'on vient de décrire est celle qui est associée aux sommes de Kloosterman à une variable,

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} \Psi(x+\frac{1}{x}) \ .$$

C'est la nature exceptionnelle de "2" dans l'étude "géométrique" ci-dessus qui nous a conduit à ajouter "de niveau une puissance de 2" dans notre question sur l'existence d'une forme modulaire non holomorphe de poids 2 attachée au produit eulérien

$$\prod_p \frac{1}{1-\mathrm{Kloos}(p;1)p^{-s}+p^{1-2s}} \ .$$

4.3. Le théorème clef et ses conséquences.

Dans ce numéro, nous allons énoncer le théorème clef et en déduire quelques corollaires, qui nous permettront de démontrer les théorèmes 2.3.1 et 3.1.1.

La démonstration du théorème clef ne sera donnée qu'au numéro 4.8 : en effet nous aurons besoin pour cela de rappels et compléments sur la cohomologie ℓ-adique qui font l'objet des numéros 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7.

4.3.1. Enoncé du théoreme clef et corollaires.

Soit $R \subset \mathbb{C}$ un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit E un corps de nombres, soit λ une place de E au-dessus d'un nombre premier ℓ, soit E_λ le complété de E en la place λ. Pour tout nombre premier $p \neq \ell$, soit $E_{\lambda,p}$ le complété de $E(\zeta_p)$ en une place divisant λ (ζ_p étant une racine primitive p-ième de l'unité).

Soit $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_R$. Quitte à remplacer R par $R[1/r\ell]$ où $r \in R-\{0\}$, on peut supposer que ℓ est inversible dans R, que R est normal et que $\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_R$ est bon. Alors, soit

$$U \xhookrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xhookleftarrow{i} D$$

une décomposition adaptée à $\mathcal{F}$. On associe à $\mathcal{F}$ et à la décomposition adaptée ci-dessus les objets suivants :

- le E_λ-faisceau constructible $j_*j^*\mathcal{F}$ sur $\mathbb{A}^1_R$ et la flèche canonique

$$\mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F} \ ;$$

- les E_λ-faisceaux constructibles $\mathcal{F}_{pct}$ et $\mathcal{F}_{npct}$ ("pct" pour "ponctuel" et "npct" pour "non ponctuel") sur $\mathbb{A}^1_R$ définis par les suites exactes

$$0 \to \mathcal{F}_{pct} \to \mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F}$$

$$0 \to \mathcal{F}_{pct} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{npct} \to 0$$

de sorte que $\mathcal{F}_{pct}$ est concentré sur D, car j est une immersion ouverte, et que $\mathcal{F}_{npct}$ est contenu dans $j_*j^*\mathcal{F}$;

- le conoyau de la flèche canonique qui n'est autre que le quotient $j_*j^*\mathcal{F}/\mathcal{F}_{npct}$, c'est un E_λ-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_R$, concentré sur D.

Un triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R sera toujours composé d'un corps fini $\mathbb{F}_q$, d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \to \mathbb{F}_q$ non trivial et d'un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$ à valeurs dans $E^*_{\lambda,p}$ (où p = caractéristique de $\mathbb{F}_q$). Si $R' = R[1/r]$ où $r \in R-\{0\}$, les triplets dans R' s'identifient aux triplets dans R dont le morphisme φ se prolonge à R', i.e. dont le morphisme φ vérifie $\varphi(r) \neq 0$.

A tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ on attache la droite $\mathbb{A}^1_\varphi = \mathbb{A}^1_R \otimes_{R \nearrow \varphi} \mathbb{F}_q$, le $E_{\lambda,p}$-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{L}_\Psi$, sur $\mathbb{A}^1_\varphi$, tel que, pour tout point fermé x de $\mathbb{A}^1_\varphi$ de corps résiduel k et pour tout point géométrique $\bar{x}$ localisé en x, on ait

$$\mathrm{Tr}(F_x, (\mathcal{L}_\Psi)_{\bar{x}}) = \Psi(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_q}(x)) ,$$

et une clôture algébrique arbitraire $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. On peut alors considérer les $E_{\lambda,p}$-faisceaux constructibles $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi$, $\mathcal{F}_{pct} \otimes \mathcal{L}_\Psi$, $\mathcal{F}_{npct} \otimes \mathcal{L}_\Psi$, sur $\mathbb{A}^1_\varphi$ et les $E_{\lambda,p}$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i \neq 0,1,2$,

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$
$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F}_{pct} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$
$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F}_{npct} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

sur lesquels $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ opère. Quand on parlera de dimension de ces espaces, il s'agira toujours de $E_{\lambda,p}$-dimension : par exemple,

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{E_{\lambda,p}}(H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)) .$$

Enfin, comme $R \subset \mathbb{C}$, on peut aussi considérer la droite $\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C}$ et les E_λ-espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i \neq 0,1,2$,

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C} , \mathcal{F})$$
$$H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C} , \mathcal{F}_{pct})$$
$$H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C} , \mathcal{F}_{npct}) .$$

Quand on parlera de dimension de ces espaces, il s'agira toujours de E_λ-dimension : par exemple,

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C}, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{E_\lambda}(H^i_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C}, \mathcal{F})) \ .$$

THÉORÈME CLEF. *Soit* $R \subset \mathbb{C}$ *un anneau de type fini sur* $\mathbb{Z}$ *et soit* $\mathcal{F}$ *un* E_λ*-faisceau constructible sur* $\mathbb{A}^1_R$. *On suppose que* R *est normal, que* ℓ *est inversible dans* R *et que* $\mathcal{F}$ *est bon sur* $\mathbb{A}^1_R$ *avec*

$$U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xleftarrow{i} D$$

comme décomposition adaptée. Alors :

(i) *pour tout triplet* $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ *dans* R , *on a*

$$H^2_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \ , \ \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

et

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \ , \ \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\mathbb{A}^1_R \otimes \mathbb{C}, \mathcal{F}) - \dim_{E_\lambda}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$$

où $\bar{\eta}$ *est un point géométrique générique de* $\mathbb{A}^1_R$;

(ii) *les* E_λ*-faisceaux constructibles* $j_* j^* \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{pct}$, $\mathcal{F}_{npct}$ *et* $\mathrm{Coker}(\mathcal{F} \to j_* j^* \mathcal{F})$ *sont bons sur* $\mathbb{A}^1_R$ *et admettent*

$$U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xleftarrow{i} D$$

pour décomposition adaptée ; *leur formation est compatible à toute extension des scalaires* $R \to A$ (*A un anneau quelconque*) ;

(iii) *pour tout triplet* $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ *dans* R , *on a le tableau suivant des isomorphies et des évanescences de la cohomologie à support propre*

	$\mathcal{F}_{pct}$	$\hookrightarrow$	$\mathcal{F}$	$\twoheadrightarrow$	$\mathcal{F}_{npct}$
$H^0_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \ , \ . \otimes \mathcal{L}_\Psi)$		$\simeq$			0
$H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \ , \ . \otimes \mathcal{L}_\Psi)$	0			$\simeq$	
$H^2_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \ , \ . \otimes \mathcal{L}_\Psi)$	0		0		0

de sorte que l'on a les formules suivantes

$$h_c^0(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\mathbb{A}_R^1 \otimes \mathbb{C} , \mathfrak{F}_{pct})$$

et

$$h_c^1(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = -\chi_c(\mathbb{A}_R^1 \otimes \mathbb{C} , \mathfrak{F}_{npct}) + \dim_{E_\lambda}(\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}) ;$$

(iv) si $j^*\mathfrak{F}$ est pur de poids w et si la flèche canonique $\mathfrak{F} \to j_*j^*\mathfrak{F}$ est un isomorphisme, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R, on a

$$H_c^i(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

pour tout entier $i \neq 1$ et

$$H_c^1(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est pur de poids $w+1$ et de dimension

$$h_c^1(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = -\chi_c(\mathbb{A}_R^1 \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{F}) + \dim_{E_\lambda}(\mathfrak{F}_{\bar{\eta}}) ;$$

(v) si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{pct}$ et si $\mathfrak{F}$ est pur de poids w, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R, on a

$$H_c^i(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0 \qquad (\forall i \neq 0)$$

et

$$H_c^0(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est pur de poids w et de dimension

$$h_c^0(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\mathbb{A}_R^1 \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{F}) .$$

On va maintenant déduire quelques corollaires de ce théorème clef qui sera démontré en 4.8. Commençons par un rappel et une définition.

Si $\mathfrak{F}$ est mixte sur $\mathbb{A}_R^1$, alors, d'après Deligne (cf. Weil II), pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R, les $E_{\lambda,p}$-espaces vectoriels

$$H_c^i(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

sont aussi mixtes pour l'action de $F \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$; on note

$$h_w^i(\mathbb{A}_\varphi^1 \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathfrak{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

la $E_{\lambda,p}$-dimension de la partie de poids w du H_c^i ci-dessus et on pose

$$\chi_w(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi) = \sum_i (-1)^i h^i_w(\mathbb{A}^1_\varphi\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi) .$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\chi_w(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi) &= \#\{\text{pôles réciproques de poids } w\}\\ &\quad - \#\{\text{zéros réciproques de poids } w\}\end{aligned}$$

pour $L(\mathbb{A}^1_\varphi, \mathfrak{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi;T)$ vue comme élément de $E_{\lambda,p}(T)$.

COROLLAIRE 1. Soit $R\subset\mathbb{C}$ un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\mathfrak{F}$ un E_λ-faisceau constructible et mixte sur $\mathbb{A}^1_R$, alors il existe $r\in R-\{0\}$ tel que, pour tout $w\in\mathbb{Z}$, l'entier

$$\chi_w(\mathbb{A}^1_\varphi\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \mathfrak{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi)$$

(défini pour tout triplet $(\mathbb{F}_q,\varphi,\Psi)$ dans R, donc à fortiori dans $R' = R[1/r\ell]$) est indépendant du triplet $(\mathbb{F}_q,\varphi,\Psi)$ choisi dans $R' = R[1/r\ell]$.

PREUVE. Par additivité de χ_w sur les suites exactes, on peut supposer que $\mathfrak{F}$ est pur (bien entendu, si on a une suite exacte courte

$$0\to\mathfrak{F}_1\to\mathfrak{F}_2\to\mathfrak{F}_3\to 0$$

de E_λ-faisceaux constructibles et mixtes sur $\mathbb{A}^1_R$ et si r_1 "marche" pour $\mathfrak{F}_1$ et r_3 "marche" pour $\mathfrak{F}_3$, alors $r_2 = r_1.r_3$ "marche" pour $\mathfrak{F}_2$, donc si r_α "marche" pour le quotient pur $\mathrm{Gr}^\alpha(\mathfrak{F})$ d'une filtration finie convenable du E_λ-faisceau constructible et mixte $\mathfrak{F}$, $r = \prod_\alpha r_\alpha$ "marchera" pour $\mathfrak{F}$).

Partons d'un E_λ-faisceau $\mathfrak{F}$ constructible et pur sur $\mathbb{A}^1_R$. Quitte à agrandir R (cf. lemme 4.2), on peut supposer que R est normal, que ℓ est inversible dans R et que $\mathfrak{F}$ est bon sur $\mathbb{A}^1_R$, donc que $\mathfrak{F}$ admet une décomposition adaptée

$$U \xhookrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xleftarrow{i} D .$$

Introduisons la notion suivante : un E_λ-faisceau $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{A}^1_R$ est dit ponctuel (relativement à la décomposition $U \xhookrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xhookleftarrow{i} D$) s'il est bon, s'il admet la décomposition

$$U \xhookrightarrow{j} \mathbb{A}^1_R \xhookleftarrow{i} D$$

comme décomposition adaptée et si la flèche canonique $\mathcal{G} \to j_*j^*\mathcal{G}$ est la flèche nulle. Les E_λ-faisceaux ponctuels et mixtes sur $\mathbb{A}^1_R$ vérifient la conclusion du corollaire 1 : en effet, si $\mathcal{G}$ est un tel faisceau, il existe $r \in R-\{0\}$ tel que $\mathcal{G}|\mathbb{A}^1_{R'}$, où $R' = R[1/r]$, admet une filtration par des sous-faisceaux à support dans D, lisses sur chaque composante de D, avec gradués lisses, purs et ponctuels ; ceci nous ramène au cas des E_λ-faisceaux ponctuels et purs sur $\mathbb{A}^1_R$ et dans ce cas la conclusion résulte de la partie (v) du théorème clef.

Montrons maintenant le corollaire pour $\mathcal{F}$ (E_λ-faisceau pur et bon sur $\mathbb{A}^1_R$). Il se dévisse en

$$0 \to j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_!i^*\mathcal{F} \to 0$$

où $i_!i^*\mathcal{F}$ est pur et ponctuel sur $\mathbb{A}^1_R$ et où $j_!j^*\mathcal{F}$ est pur et bon sur $\mathbb{A}^1_R$. Par additivité de χ_w, on est donc ramené à prouver le corollaire pour le faisceau $j_!j^*\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{H} = j^*\mathcal{F}$, alors $\mathcal{H}$ est lisse et pur sur U et on a la suite exacte

$$0 \to j_!\mathcal{H} \to j_*\mathcal{H} \to i_!i^*j_*\mathcal{H} \to 0$$

où $i_!i^*j_*\mathcal{H} = \mathrm{Coker}(j_!\mathcal{H} \to j_*j^*j_!\mathcal{H})$ est ponctuel et mixte (cf. partie (ii) du théorème clef). Toujours par additivité de χ_w, on est ramené à prouver le corollaire pour le faisceau $j_*\mathcal{H}$. La conclusion résulte alors de la partie (iv) du théorème clef.

COROLLAIRE 1' (Deligne). <u>Sous les hypothèses du corollaire</u> 1 , <u>il existe</u> $r \in R-\{0\}$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $i = 0,1,2$ <u>et pour tout</u> $w \in \mathbb{Z}$,

$$h^i_w(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\psi)$$

<u>est indépendant du triplet</u> $(\mathbb{F}_q, \varphi, \psi)$ <u>choisi dans</u> $R[1/r\ell]$.

PREUVE. Quitte à agrandir R , on peut supposer $\mathcal{F}$ bon sur $\mathbb{A}^1_R$, de sorte que $\mathcal{F}$ admet une décomposition adaptée et que pour cette décomposition on dispose de $\mathcal{F}_{pct}$ et $\mathcal{F}_{npct}$, qui sont des E_λ-faisceaux bons sur $\mathbb{A}^1_R$ eux aussi. Appliquons le corollaire 1 à $\mathcal{F}_{pct}$ et à $\mathcal{F}_{npct}$, on trouve ainsi qu'il existe $r \in R-\{0\}$ tel que $\chi_w(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F}_{pct} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$ et $\chi_w(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F}_{npct} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$ sont indépendants du triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ choisi dans $R[1/r\ell]$. Il ne reste plus qu'à appliquer les résultats d'évanescences de la partie (iii) du théorème clef.

COROLLAIRE 2. _Soient_ $R \subset \mathbb{C}$ _un anneau de type fini sur_ $\mathbb{Z}$, V _un schéma de type fini sur_ R , $f : V \to \mathbb{A}^1_R$ _un_ R-_morphisme et_ $\mathcal{F}$ _un_ E_λ-_faisceau constructible sur_ V . _Alors, il existe_ $r \in R-\{0\}$ _tel que les_ E_λ-_faisceaux constructibles_

$$R^b f_! \mathcal{F} \qquad (b \in \mathbb{N})$$

sont simultanément bons sur $\mathbb{A}^1_{R'}$, $R' = R[1/r\ell]$. _Pour tout triplet_ $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ _dans_ R' , _si l'on pose_ $V_\varphi = V \otimes_{R \nearrow \varphi} \mathbb{F}_q$ _et_ $\mathcal{L}_{\Psi,f} = f^* \mathcal{L}_\Psi$, _la suite spectrale de Leray pour_

$$\begin{array}{c} V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q - \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f} \\ f \big\downarrow \\ \mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \end{array}$$

qui s'écrit

$$E_2^{ab} = H^a_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , (R^b f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{a+b}_c(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

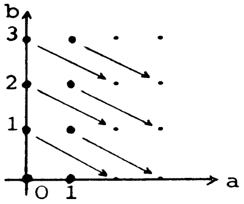
dégénère en E_2 _et, pour tout_ $n \in \mathbb{N}$, _on a la suite exacte courte_

$$0 \to H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , (R^{n-1} f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \to H^n_c(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$
$$\to H^0_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q , (R^n f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \to 0 .$$

PREUVE. L'existence de r résulte du lemme 4.2 et du fait que $R^b f_! \mathcal{F} = 0$, pour tout $b \gg 0$. Pour ce qui est de la dégénérescence de la suite spectrale, notons d'abord que $E_2^{a,b} = 0$ si $a \geqslant 3$ (dimension cohomologique d'une courbe). D'après la partie (i) du théorème clef, on a

$$E_2^{2,b} = H_c^2(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\,,\ (R^b f_! \mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

pour tout $b \in \mathbb{N}$. Donc toutes les flèches d_2 , d_3 , ... sont nulles, faute de place, c'est-à-dire que la suite spectrale dégénère en E_2 ,



(flèches d_2)

$$E_2^{a,b} = E_\infty^{a,b} \qquad (\forall a,b) .$$

Il ne reste que les suites exactes courtes

$$0 \to E_2^{1,n-1} \to E_\infty^n \to E_2^{0,n} \to 0$$

d'où la conclusion.

COROLLAIRE 3. *Soit* $R \subset \mathbb{C}$ *un anneau de type fini sur* $\mathbb{Z}$, *soit* V *un* R-*schéma de type fini*, *soit* $f : V \to \mathbb{A}^1_R$ *un* R-*morphisme et soit* $\mathcal{F}$ *un* E_λ-*faisceau constructible et mixte sur* V . *Alors il existe* $r \in R-\{0\}$ *tel que*, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $w \in \mathbb{Z}$, *la* $E_{\lambda,p}$-*dimension*

$$h_w^i(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\,,\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

de la partie de poids w *de* $H_c^i(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\,,\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$ *est indépendante du triplet* $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ *choisi dans* $R' = R[1/r\ell]$.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du corollaire 1' et du corollaire 2.

COROLLAIRE 4. *Soient* $R \subset \mathbb{C}$ *un anneau de type fini sur* $\mathbb{Z}$, V *un* R-*schéma de type fini et* $f : V \to \mathbb{A}^1_R$ *un* R-*morphisme*. *Supposons que le morphisme* f *a toutes ses fibres géométriques de dimension majorée par un certain entier* N *et que sa fibre générique géométrique est soit irréductible de dimension exactement* N , *soit de dimension* $< N$. *Alors il existe* $r \in R-\{0\}$ *tel que*, *pour tout triplet* $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ *dans* $R' = R[1/r\ell]$, $H_c^i(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\,, \mathcal{L}_{\Psi,f})$ *est mixte de poids* $\leq 2N$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

PREUVE. Quitte à agrandir R , on peut supposer que tous les $R^b f_! \mathbb{Q}_\ell$ $(b \in \mathbb{N})$ sont bons sur $\mathbb{A}^1_R$. Essayons alors de montrer que, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R , le groupe de cohomologie

$$E_2^{a,b} = H^a_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \,,\, (R^b f_! \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est mixte de poids $\leqslant 2N$, pour tous $a,b \in \mathbb{N}$; d'après le corollaire 2 , cela montrera le corollaire 4. Notons que $E_2^{a,b} = 0$ si $a \neq 0,1$ ou si $b > 2N$; de plus, d'après le théorème de Deligne (3.5.3), $R^b f_! \mathbb{Q}_\ell$ est mixte de poids $\leqslant b$ $(\forall b \in \mathbb{N})$ et, comme $\mathcal{L}_\Psi$ est pur de poids 0 , $E_2^{a,b}$ est mixte de poids $\leqslant a+b$ $(\forall a,b \in \mathbb{N})$. Or, pour $(a,b) \in \{0,1\} \times \{0,1,2,\ldots,2N\}$, $(a,b) \neq (1,2N)$, on a $a+b \leqslant 2N$, donc, il reste à essayer de montrer que, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R , le groupe de cohomologie

$$E_2^{1,2N} = H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \,,\, (R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est mixte de poids $\leqslant 2N$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques rappels.

RAPPELS. $\mathbb{Q}_\ell(1)$ désigne le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell])$, correspondant au caractère χ de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, non ramifié en dehors de ℓ , suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\chi"'] & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathbb{Z}_\ell^* \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})$ est le sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ engendré par les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ . Si $\bar{x}$ est un point géométrique de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell])$ localisé en un point fermé x , F_x agit sur $\mathbb{Q}_\ell(1)_{\bar{x}} \simeq \mathbb{Q}_\ell$ comme l'homothétie de rapport

$$\chi(F_x) = N(x)^{-1} \; ;$$

en particulier $\mathbb{Q}_\ell(1)$ est pur de poids -2 .

Si X est un schéma à caractéristiques résiduelles premières à ℓ, on note encore $\mathbb{Q}_\ell(1)$ l'image réciproque du faisceau ci-dessus par le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell])$.

Si toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ existent dans X (par exemple, si X est un k-schéma où k est un corps séparablement clos de caractéristique $p \neq \ell$), alors $\mathbb{Q}_\ell(1)$ est isomorphe (non canoniquement) au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur X.

Si X est de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$, pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X localisé en un point fermé x, F_x agit sur $\mathbb{Q}_\ell(1)_{\bar{x}} \simeq \mathbb{Q}_\ell$ comme l'homothétie de rapport $N(x)^{-1}$; en particulier, $\mathbb{Q}_\ell(1)$ est pur de poids -2. $\mathbb{Q}_\ell(1)$ correspond à la représentation continue, de dimension 1, ρ, de $\pi_1(X)$ caractérisée par le fait que

$$\rho(F_x) = N(x)^{-1}$$

pour tout point fermé x de X (cf. théorème de densité de Čebotarev (3.4.1)).

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathbb{Q}_\ell(n) = \mathbb{Q}_\ell(1)^{\otimes n}$$

$\mathbb{Q}_\ell(n)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur X. Si X est de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$, pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X localisé en un point fermé x, F_x agit sur $\mathbb{Q}_\ell(n)_{\bar{x}} \simeq \mathbb{Q}_\ell$ comme l'homothétie de rapport $N(x)^{-n}$; en particulier, $\mathbb{Q}_\ell(n)$ est pur de poids $-2n$.

Ces rappels étant faits, revenons à la démonstration du corollaire. Le morphisme

$$\begin{array}{c} V \\ f\big\downarrow \\ \mathbb{A}^1_{R[1/\ell]} \end{array}$$

étant à fibres de dimension $\leqslant N$, on sait associer un "morphisme trace" (SGA 4, XVIII)

$$R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Q}_\ell(-N)$$

qui est un isomorphisme précisément aux points géométriques de $\mathbb{A}^1_R$ où la fibre géométrique du morphisme f est irréductible de dimension N. Le noyau, Ker, de ce morphisme trace est concentré aux points où la fibre géométrique de f est réductible de dimension N, alors que le conoyau, Coker, de ce morphisme trace est concentré aux points où la fibre géométrique de f est de dimension $< N$. Choisissons $R' = R[1/r\ell]$ tel que Ker et Coker soient bons sur $\mathbb{A}^1_{R'}$ (rappelons que tous les $R^b f_! \mathbb{Q}_\ell$, en particulier $R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell$, sont déjà supposés bons sur $\mathbb{A}^1_R$).

Si la fibre géométrique générique de f est de dimension $< N$, le faisceau $R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell$ est ponctuel, car il est bon sur $\mathbb{A}^1_R$ et que sa fibre en un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_R$ est nulle ; par suite, on conclut dans ce cas que

$$E_2^{1,2N} = 0$$

grâce aux résultats d'évanescence du théorème clef, partie (iii).

Supposons maintenant que la fibre géométrique générique de f est irréductible de dimension N, alors Ker et Coker sont ponctuels sur $\mathbb{A}^1_{R'}$ (même raisonnement que ci-dessus). On a le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
\mathrm{Ker} \\
\downarrow \\
R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell \\
\downarrow \\
0 \to (R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{Ker} \to \mathbb{Q}_\ell(-N) \to \mathrm{Coker} \to 0 \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

et, comme Ker est ponctuel, on a

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathrm{Ker} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R'. On obtient donc un diagramme

$$\begin{array}{c} H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\, , R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell) \\ \big\downarrow \wr \end{array}$$

$$H^0_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathrm{Coker} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \xrightarrow{(*)} H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, ((R^{2N} f_! \mathbb{Q}_\ell)/\mathrm{Ker}) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \to H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell(-N) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \to 0$$

où la flèche verticale est un isomorphisme et où la suite horizontale est exacte. Comme Coker est un quotient de $\mathbb{Q}_\ell(-N)$, Coker est mixte de poids $\leqslant 2N$, donc d'après le théorème de Deligne (3.5.3),

$$H^0_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\, , \mathrm{Coker} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est mixte de poids $\leqslant 2N$ ($\mathcal{L}_\Psi$ est pur de poids 0). Par suite, on aura gagné si l'on montre que la flèche (*) est surjective, c'est-à-dire si l'on montre que

$$H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q\, , \mathbb{Q}_\ell(-N) \otimes \mathcal{L}_\Psi) = 0 .$$

Or, sur $\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$, $\mathbb{Q}_\ell(-N)$ est isomorphe (non canoniquement) au faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$, donc le corollaire 4 résulte du lemme suivant :

LEMME. <u>Pour tout caractère additif non trivial</u> $\Psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)^*$, <u>on a</u>

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

<u>pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$.

PREUVE DU LEMME. On considère le revêtement d'Artin-Schreier

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q} = \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q[T]) \\ \big\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad T^q - T = X \\ \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q} = \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q[X]) \end{array}\right) \; \mathbb{F}_q \xrightarrow{\Psi} \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)^* .$$

Le groupe de Galois $\mathbb{F}_q$ agit par translation

$$(T, \lambda) \mapsto T + \lambda \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{F}_q)$$

en haut, donc agit sur les

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)) = H^i_c(\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q[T]), \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))$$

$(i \in \mathbb{N})$ et on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_\Psi) = H^i_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^\Psi .$$

Or

$$H^0_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)) = H^1_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)) = 0$$

et

$$H^2_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)) = \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p)(-1)$$

avec action triviale de $\mathbb{F}_q$ ("classe de cohomologie d'un point").
Comme Ψ est non trivial, on a

$$H^2_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell(\zeta_p))^\Psi = 0$$

d'où le lemme.

4.3.2. <u>Démonstration</u> (<u>modulo le théorème clef</u>) <u>des énoncés</u> 2.3.1 <u>et</u> 3.1.1.

Fixons un nombre premier ℓ. On se ramène à la situation du théorème clef et de ses corollaires 2 et 3 (et pour 2.3.1, à celle du corollaire 4), en prenant pour R l'anneau $\mathbb{Z}$, pour E le corps $\mathbb{Q}$, $\lambda = \ell$ et pour $\mathcal{F}$ le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$ sur V.

D'après le corollaire 3, sous les hypothèses de 3.1.1, il existe $r \in \mathbb{Z}-\{0\}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $w \in \mathbb{Z}$, la $E_{\lambda,p}$-dimension

$$h^i_w(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

de la partie de poids w de $H^i_c(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f})$ soit indépendante du triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ choisi dans $\mathbb{Z}[1/r\ell]$.

Par suite, si l'on pose

$$h^i_w = h^i_w(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f}) ,$$

où $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ est un triplet arbitraire dans $\mathbb{Z}[1/r\ell]$, les h^i_w ainsi définis vérifient les assertions de 3.1.1 (on aura alors :

$$P_{i,w}(T) = \prod_{j=1}^{h^i_w} (1-\alpha_{i,w,j}T)$$

où les $\alpha_{i,w,j}$ sont les valeurs propres de poids w de F agissant sur $H_c^i(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\Psi,f}))$.

Si l'on fait les hypothèses géométriques supplémentaires de 2.3.1, le corollaire 4 nous dit alors que

$$h_w^i = 0$$

pour $w > 2N$. Par suite, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans $\mathbb{Z}[1/r\ell]$, on a :

$$\left|\sum_{x \in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x))\right| \leqslant A.(\sqrt{q})^{2N} ,$$

où

$$A = \sum_{i,w=0}^{2N} h^{i,w}$$

(cf. 2.2.1 (i) et 3.1.2 (i)). Comme A est indépendant du triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ choisi dans $\mathbb{Z}[1/r\ell]$, le théorème 2.3.1 est établi.

4.4. <u>Description explicite d'un</u> E_λ<u>-faisceau constructible sur une courbe</u>.

Soit k un corps parfait, soit X/k une courbe propre, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions K , de point générique η.

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , définissant un point géométrique générique $\bar{\eta}$. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans $\bar{K}$.

Les points fermés de X sont en bijection avec les places v de K . Toute place v de K se prolonge en une place $\bar{v}$ de $\bar{K}$ et tous les prolongements sont conjugués sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Soit $\bar{v}$ une place de $\bar{K}$ prolongeant une place v de K , le groupe de décomposition de $\bar{v}$ est le sous-groupe

$$D_{\bar{v}} = \{\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \mid \gamma.\bar{v} = \bar{v}\}$$

de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$; il s'identifie au groupe de Galois de l'extension locale $\bar{K}_{\bar{v}}/K_v$ entre complétés. Si $k(v)$ est le corps résiduel de la place v (celui de $\bar{v}$ étant $\bar{k}$), on a un homomorphisme surjectif

$$D_{\bar{v}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v))$$

et le noyau de cet homomorphisme est le groupe d'inertie $I_{\bar{v}}$ de la place $\bar{v}$. Si $(\bar{k}.K_v)^{\wedge}$ est l'adhérence de $\bar{k}.K_v$ dans $\bar{K}_{\bar{v}}$, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v))$ s'identifie au groupe de Galois de l'extension $(\bar{k}.K_v)^{\wedge}/K_v$ et $I_{\bar{v}}$ au groupe de Galois de l'extension $\bar{K}_{\bar{v}}/(\bar{k}.K_v)^{\wedge}$. En résumé, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{K} \arrow[r, hook] \arrow[dd, dash] & \bar{K}_{\bar{v}} \arrow[dd, dash, "D_{\bar{v}}"'] \arrow[dr, dash, "I_{\bar{v}}"] & \\
& & (\bar{k}.K_v)^{\wedge} \arrow[dl, dash, "\mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v))"] \\
K \arrow[r, hook] & K_v &
\end{tikzcd}$$

Si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, alors $D_{\gamma.\bar{v}} = \gamma.D_{\bar{v}}.\gamma^{-1}$ et $I_{\gamma.\bar{v}} = \gamma.I_{\bar{v}}.\gamma^{-1}$.

Si $V \subset X$ est un ouvert non vide, alors on a un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
& I(V) \arrow[r, equal] \arrow[d] & I(V) \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{K}/K.\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(V \otimes \bar{k}, \bar{\eta}) \arrow[r] \arrow[d, "k"] & \pi_1(V, \bar{\eta}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \arrow[r] & 1 \\
& 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

où $I(V)$ est le sous-groupe distingué fermé de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ engendré par les sous-groupes d'intertie $I_{\bar{v}}$, où $\bar{v}$ parcourt les places de $\bar{K}$ au-dessus des places v de K qui correspondent aux points fermés de V (on écrira $\bar{v}|v \in V$ pour une telle place $\bar{v}$) : en effet, $\mathrm{Gal}(K.\bar{k}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ car $K \cap \bar{k} = k$, puisque, par hypothèse, X est géométriquement connexe.

Soit $U \subset X$ un ouvert non vide, un E_λ-faisceau constructible $\mathfrak{F}$ sur U admet alors les deux descriptions suivantes :

Première description. Pour chaque $v \in U$, on choisit $\bar{v}|v$. Se donner $\mathcal{F}$, c'est se donner

(i) un ouvert, non vide, $V \subset U$, et une représentation continue de $\pi_1(V,\bar{\eta})$ dans un E_λ-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$;

(ii) pour chaque $v \in U-V$, une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v)) \simeq D_{\bar{v}}/I_{\bar{v}}$ dans un E_λ-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_{\bar{v}}$;

(iii) pour chaque $v \in U-V$, une flèche $D_{\bar{v}}$-équivariante

$$s_{\bar{v},\bar{\eta}} : \mathcal{F}_{\bar{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

dite flèche de spécialisation (ou ce qui revient au même, une flèche $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k(v))$-équivariante

$$s_{\bar{v},\bar{\eta}} : \mathcal{F}_{\bar{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}^{I_{\bar{v}}}) \ .$$

REMARQUE. Pour tout $v \in V$, on peut définir

$$\mathcal{F}_{\bar{v}} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}} \quad \text{et} \quad s_{\bar{v},\bar{\eta}} = \mathrm{id} \ .$$

Deuxième description. Se donner $\mathcal{F}$, c'est se donner

(i) une représentation continue ρ de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ dans un E_λ-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$;

(ii) pour toute place $\bar{v}|v \in U$, un E_λ-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{F}_{\bar{v}}$ et une flèche, dite de spécialisation,

$$s_{\bar{v},\bar{\eta}} : \mathcal{F}_{\bar{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

de telle sorte qu'il existe un ouvert non vide $V \subset U$ tel que $s_{\bar{v},\bar{\eta}}$ soit un isomorphisme pour toute $\bar{v}|v \in V$;

(iii) pour toute place $\bar{v}|v \in U$ et tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, un isomorphisme, noté encore γ ,

$$\gamma : \mathcal{F}_{\bar{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\gamma.\bar{v}} \ ,$$

transitif en γ , de telle sorte que

(a) le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\bar v} & \xrightarrow{s_{\bar v,\bar\eta}} & \mathcal{F}_{\bar\eta} \\ \gamma \downarrow \wr & & \wr\downarrow \rho(\gamma) \\ \mathcal{F}_{\gamma.\bar v} & \xrightarrow{s_{\gamma.\bar v,\bar\eta}} & \mathcal{F}_{\bar\eta} \end{array}$$

est commutatif ;

(b) l'action de $D_{\bar v}$ sur $\mathcal{F}_{\bar v}$ ainsi définie est continue et l'action de $I_{\bar v} \subset D_{\bar v}$ est même triviale.

Pour ces deux descriptions, les notions suivantes sont claires : "morphisme", "suite exacte", "section globale", "passage de U à $U \otimes_k \bar k$".

REMARQUE. Dire que le E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur U est lisse, c'est dire que l'on peut prendre $V = U$ dans les descriptions ci-dessus (V est un ouvert de lissité du faisceau $\mathcal{F}$) ; on a alors $\mathcal{F}_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar\eta}$ et $s_{\bar v,\bar\eta} = \mathrm{id}$ pour toute $\bar v | v \in U$.

EXEMPLES. Dans les cinq exemples ci-dessous, on part d'un E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur un ouvert U , non vide, de X .

(1) Si $j : U' \hookrightarrow U$ est une immersion ouverte, le E_λ-faisceau <u>restriction de</u> $\mathcal{F}$ <u>à</u> U' , $j^*\mathcal{F}$, est décrit de la façon suivante :

$$(j^*\mathcal{F})_{\bar\eta} = \mathcal{F}_{\bar\eta} ,$$

on remplace V par $V' = j^{-1}(V)$ et l'action de $\pi_1(V,\bar\eta)$ sur $\mathcal{F}_{\bar\eta}$ par sa restriction à $\pi_1(V',\bar\eta)$, enfin, pour toute place $\bar v | v \in U'$,

$$(j^*\mathcal{F})_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar v}$$

la flèche de spécialisation $s_{\bar v,\bar\eta}$ étant la même pour $\mathcal{F}$ et $j^*\mathcal{F}$.

(2) Si $j : U \hookrightarrow U''$ est une immersion ouverte, le E_λ-faisceau <u>image directe de</u> $\mathcal{F}$ <u>par</u> j , $j_*\mathcal{F}$, est décrit de la façon suivante

$$(j_*\mathcal{F})_{\bar\eta} = \mathcal{F}_{\bar\eta}$$

avec même action de $\pi_1(V'',\bar\eta) = \pi_1(V,\bar\eta)$ où $V''=j(V)$, pour toute place $\bar v | v \in U$,

$$(j_*\mathcal{F})_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar v}$$

et la flèche de spécialisation $s_{\bar v,\bar\eta}$ est celle de $\mathcal{F}$, enfin, pour toute place $\bar v | v \in U''-j(U)$

$$(j_*\mathcal{F})_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar\eta}^{I_{\bar v}}$$

et

$$s_{\bar v,\bar\eta} : (j_*\mathcal{F})_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar\eta}^{I_{\bar v}} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\bar\eta} = (j_*\mathcal{F})_{\bar\eta}$$

est l'inclusion.

(3) Si $j : U \hookrightarrow U''$ est une immersion ouverte, le E_λ-faisceau <u>prolongement par zéro de</u> $\mathcal{F}$, $j_!\mathcal{F}$, est décrit de la façon suivante :

$$(j_!\mathcal{F})_{\bar\eta} = \mathcal{F}_{\bar\eta}$$

avec même action de $\pi_1(V'',\bar\eta) = \pi_1(V,\bar\eta)$ où $V''=j(V)$, pour toute place $\bar v | v \in U$,

$$(j_!\mathcal{F})_{\bar v} = \mathcal{F}_{\bar v}$$

et la flèche de spécialisation $s_{\bar v,\bar\eta}$ est celle de $\mathcal{F}$, enfin, pour toute place $\bar v | v \in U''-j(U)$

$$(j_!\mathcal{F})_{\bar v} = 0$$

et

$$s_{\bar v,\bar\eta} : (j_!\mathcal{F})_{\bar v} = 0 \longrightarrow (j_!\mathcal{F})_{\bar\eta}$$

est l'unique flèche possible.

(4) Le E_λ-faisceau $\mathcal{F}_{pct}$ est décrit de la façon suivante :

$$(\mathcal{F}_{pct})_{\bar\eta} = 0$$

et pour toute place $\bar v | v \in U$,

$$(\mathcal{F}_{pct})_{\bar v} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_{\bar v} \xrightarrow{s_{\bar v,\bar\eta}} \mathcal{F}_{\bar\eta}) ,$$

la flèche de spécialisation

$$s_{\bar{v},\bar{\eta}} : (\mathcal{F}_{pct})_{\bar{v}} \longrightarrow 0 = (\mathcal{F}_{pct})_{\bar{\eta}}$$

étant l'unique flèche possible.

(5) Le E_λ-faisceau $\mathcal{F}_{npct}$ est décrit de la façon suivante :

$$(\mathcal{F}_{npct})_{\bar{\eta}} = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

avec même action de $\pi_1(V,\bar{\eta})$ et, pour toute place $\bar{v}|v \in U$,

$$(\mathcal{F}_{npct})_{\bar{v}} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\bar{v}} \xrightarrow{s_{\bar{v},\bar{\eta}}} \mathcal{F}_{\bar{\eta}}) ,$$

la flèche de spécialisation

$$s_{\bar{v},\bar{\eta}} : (\mathcal{F}_{npct})_{\bar{v}} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\bar{v}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}}) \longrightarrow \mathcal{F}_{\bar{\eta}} = (\mathcal{F}_{npct})_{\bar{\eta}}$$

étant l'inclusion.

<u>Relations entre les foncteurs</u> j^* , j_* , $j_!$, $(.)_{pct}$, $(.)_{npct}$.

(a) Soit $j : U' \hookrightarrow U$ une immersion ouverte, le foncteur j_* admet j^* comme adjoint à gauche; on a, pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ sur U , une flèche d'adjonction

$$\mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F} .$$

Pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}'$ sur U' , la flèche naturelle

$$j^*j_*\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'$$

est un isomorphisme.

D'autre part, pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ sur U , on a une injection

$$j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

et pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}'$ sur U'

$$j^*j_!\mathcal{F} = \mathcal{F} .$$

(b) Soit $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau sur U , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{pct} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{npct} \longrightarrow 0 .$$

Si $j : U' \hookrightarrow U$ est une immersion ouverte, le noyau et le conoyau de la flèche d'adjonction

$$\mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F}$$

ainsi que le conoyau de la flèche

$$j_!j^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}$$

sont ponctuels ($\mathcal{F}$ est dit "ponctuel" si $\mathcal{F}_{pct} = \mathcal{F}$).

Enfin, si V est le plus grand ouvert de lissité de $\mathcal{F}$, si $j : V \hookrightarrow U$ est l'inclusion, alors

$$\mathcal{F}_{pct} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}_{npct} = \mathrm{Im}\,(\mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F}) \ .$$

4.5. Cohomologie des E_λ-faisceaux constructibles sur les courbes.

Comme au numéro précédent, soit k un corps parfait, soit X/k une courbe propre, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions K, de point générique η. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, définissant un point géométrique générique $\bar{\eta}$, et soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans $\bar{K}$.

Soit E_λ une extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_\ell$ avec $\ell \neq p = \mathrm{car}(k)$. Soit U un ouvert non vide de X ; on note $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. A tout E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur U, on associe, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, trois espaces de cohomologie

$$H^i(U \otimes_k \bar{k}, \mathcal{F})$$

$$\tilde{H}^i(U \otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}) \overset{\underline{\mathrm{dfn}}}{=\!=} H^i(X \otimes_k \bar{k}, j_*\mathcal{F})$$

$$H^i_c(U \otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}) \overset{\underline{\mathrm{dfn}}}{=\!=} H^i(X \otimes_k \bar{k}, j_!\mathcal{F}) \ .$$

Ce sont des E_λ-espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i > 2$, sur lesquels $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit.

REMARQUES. (i) Si $U = X$, ces trois espaces de cohomologie coïncident.

(ii) Pour $U \subset X$ quelconque (non vide), on a

$$\tilde{H}^0(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = H^0(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$$
$$\tilde{H}^1(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \mathrm{Im}(H^1_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) \to H^1(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}))$$
$$\tilde{H}^2(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = H^2_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$$

de sorte que la cohomologie "parabolique" $\tilde{H}^*$ n'est vraiment intéressante que par son $\tilde{H}^1$.

(iii) Si $U \subsetneq X$, on a, quel que soit $\mathcal{F}$,

$$H^2(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = 0 .$$

4.5.1. <u>Supposons, dans un premier temps,</u> $\mathcal{F}$ <u>lisse sur</u> U , i.e. correspondant à une représentation $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ de $\pi_1(U,\bar{\eta})$. Alors :

(i) <u>dualité de Poincaré</u> : l'accouplement naturel (compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$), pour $i = 0,1,2$,

$$H^i(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) \times H^{2-i}_c(U\otimes_k \bar{k},\check{\mathcal{F}}(1)) \longrightarrow H^2_c(U\otimes_k \bar{k},E_\lambda(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} E_\lambda$$

est une dualité parfaite de E_λ-espaces vectoriels.

<u>Variante</u> (dualité chère à Deligne) : l'accouplement naturel (compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$), pour $i = 0,1,2$,

$$\tilde{H}^i(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) \times \tilde{H}^{2-i}(U\otimes_k \bar{k},\check{\mathcal{F}}(1)) \longrightarrow H^2(X\otimes_k \bar{k},E_\lambda(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} E_\lambda$$

est une dualité parfaite de E_λ-espaces vectoriels ;

(ii) on a

$$H^0(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\bar{\eta}})^{\pi_1(U\otimes_k \bar{k},\bar{\eta})} ,$$

l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ se faisant à travers

$$1 \to \pi_1(U\otimes_k \bar{k},\bar{\eta}) \to \pi_1(U,\bar{\eta}) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1 ,$$

et on a

$$H^2_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}_{\bar{\eta}})_{\pi_1(U\otimes_k \bar{k},\bar{\eta})}(-1) ,$$

isomorphisme compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;

(iii) si $U \subsetneq X$, on a

$$H^2(U\otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}) = 0$$

et

$$H^0_c(U\otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}) = 0 \ .$$

4.5.2. <u>Cas général</u>, $\mathcal{F}$ <u>est un</u> E_λ-<u>faisceau</u> <u>constructible sur</u> $U \subsetneq X$. Alors, on dévisse $\mathcal{F}$ en

$$0 \to \mathcal{F}_{pct} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{npct} \to 0 \ ;$$

on note $V \subset U$ l'ouvert de lissité de $\mathcal{F}$, de sorte que $\mathcal{F}_{pct}$ est concentré sur $U-V$ et que $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{npct}$ sur V ; $\mathcal{F}_{|V}$ est donné par une représentation $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ de $\pi_1(V,\bar{\eta})$. Alors, on a le tableau suivant :

	$\mathcal{F}_{pct}$	$\hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow$	$\mathcal{F}_{npct}$
$H^0_c(U\otimes_k \bar{k}, .)$		$=$	0
$H^1_c(U\otimes_k \bar{k}, .)$	0	$=$	
$H^2_c(U\otimes_k \bar{k}, .)$	0	$=$	

avec

$$H^2_c(U\otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}) = H^2_c(U\otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}_{npct}) = (\mathcal{F}_{\bar{\eta}})_{\pi_1(V\otimes_k \bar{k}, \bar{\eta})}(-1) \ .$$

4.6. <u>Caractéristique d'Euler-Poincaré</u>. <u>Ramification sauvage</u>.

Dans ce numéro, on considère toujours la situation suivante : k est un corps parfait, X/k est une courbe propre, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions K , de point générique η ; on choisit une clôture algébrique $\bar{K}$ de K , c'est-à-dire un point géométrique $\bar{\eta}$ localisé en η et on note $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans $\bar{K}$; enfin, on fixe une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$ pour un nombre premier $\ell \neq p = \mathrm{car}(k)$.

Soit $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau constructible sur un ouvert non vide U de X, on pose

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i h^i(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$$

et

$$\chi_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i h^i_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) .$$

LEMME(*). $\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$.

PREUVE. La suite spectrale de Leray pour l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ donne la relation

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \chi(X\otimes_k \bar{k},R^i j_*\mathcal{F}),$$

soit

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi(X\otimes_k \bar{k},j_*\mathcal{F}) - \sum_{x\in(X-U)(\bar{k})} \dim(R^1 j_*\mathcal{F})_{\bar{x}} .$$

D'autre part, la suite exacte

$$0 \to j_!\mathcal{F} \to j_*\mathcal{F} \to i_*i^*j_*\mathcal{F} \to 0$$

(où $i : X-U \hookrightarrow X$ est l'inclusion) donne la relation

$$\chi(X\otimes_k \bar{k},j_*\mathcal{F}) = \chi_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) + \sum_{x\in(X-U)(\bar{k})} \dim(j_*\mathcal{F})_{\bar{x}} .$$

Par suite, on a la relation

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) + \sum_{x\in(X-U)(\bar{k})} [\dim(j_*\mathcal{F})_{\bar{x}} - \dim(R^1 j_*\mathcal{F})_{\bar{x}}] .$$

Or, pour tout $x \in (X-U)(\bar{k})$, on a

$$(R^i j_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = H^i(I_{\bar{x}},\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) \qquad (\forall i \in \mathbb{N}) .$$

et

$$\chi(I_{\bar{x}},\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) = h^0(I_{\bar{x}},\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) - h^1(I_{\bar{x}},\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) = 0$$

(cf. Serre, Cohomologie Galoisienne ; SGA 5, exposé I), d'où la conclusion.

<u>REMARQUES</u>. (i) Pour tout ouvert V, non vide, de U, on a trivialement

(*) Ce résultat a été récemment généralisé en toute dimension par O. Gabber et, indépendamment, par G. Laumon (à paraître).

$$\chi_c(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_c(V\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}|V) + \sum_{u\in(U-V)(\bar{k})} \dim(\mathcal{F}_{\bar{u}}) .$$

(ii) En caractéristique nulle, si $\mathcal{F}|V$ est lisse, on peut montrer, par voie transcendante, que

$$\chi(V\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}|V) = \mathrm{rang}(\mathcal{F}).\chi(V\otimes_k \bar{k})$$

où $\chi(V\otimes_k \bar{k}) = 2 - 2g - \#\,(X-V)(\bar{k})$, g étant le genre de $X\otimes_k \bar{k}$.

Ces remarques, nous amènent à introduire la <u>caractéristique d'Euler-Poincaré modérée</u> du E_λ-faisceau $\mathcal{F}$: si $V\subset U$ est un ouvert, $V\neq\emptyset$, au-dessus duquel $\mathcal{F}$ est lisse, c'est l'entier

$$\chi_{mod}(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}).\chi(V\otimes_k \bar{k}) + \sum_{u\in(V-U)(\bar{k})} \dim(\mathcal{F}_{\bar{u}})$$

(il est facile de vérifier que cet entier ne dépend pas de l'ouvert V de lissité choisi).

QUESTION. A-t-on $\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_{mod}(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$ et sinon, comment exprimer la différence ?

REPONSE. En termes des <u>conducteurs de Swan</u> de $\mathcal{F}$ (cf. Raynaud, Séminaire Bourbaki 1965, et Grothendieck, SGA 5, exposé X).

<u>Rappels sur les conducteurs de Swan</u>. $\mathcal{F}$ désigne toujours un E_λ-faisceau constructible sur un ouvert non vide U de X , $V\subset U$ est un ouvert non vide sur lequel $\mathcal{F}$ est lisse. Alors, pour tout $x\in X(\bar{k})$, on peut définir un entier

$$\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F}) \geqslant 0$$

ayant les propriétés suivantes

(i) si $x\in V(\bar{k})$, $\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F}) = 0$;

(ii) $\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F})$ ne dépend que de la restriction de la représentation qui définit $\mathcal{F}|V$,

$$\rho : \pi_1(V,\bar{\eta}) \longrightarrow GL(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}) ,$$

au groupe d'inertie $I_{\bar{x}}$ (on a

$$I_{\bar{x}} \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}/\bar{k}.K) \twoheadrightarrow \pi_1(V \otimes_k \bar{k}, \bar{\eta}) \hookrightarrow \pi_1(V, \bar{\eta})) \;;$$

(iii) le groupe d'inertie admet un dévissage

$$1 \longrightarrow P_{\bar{x}} \longrightarrow I_{\bar{x}} \longrightarrow I_{\bar{x}}^{\mathrm{mod}} \longrightarrow 1$$

où $P_{\bar{x}}$ est un pro-p-groupe, appelé la partie sauvage de $I_{\bar{x}}$, et où $I_{\bar{x}}^{\mathrm{mod}}$ est un groupe "d'ordre" premier à P qu'on appelle le groupe d'inertie modéré. Si t est un paramètre local sur X en x , de sorte que

$$(K.\bar{k})_x \cong \bar{k}((t)) \; ,$$

on a, pour une clôture séparable $\bar{k}((t))^{\mathrm{sep}}$ de $\bar{k}((t))$,

$$I_{\bar{x}} = \mathrm{Gal}(\bar{k}((t))^{\mathrm{sep}}/\bar{k}((t)))$$

et $P_{\bar{x}}$, $I_{\bar{x}}^{\mathrm{mod}}$ sont définis comme groupe de Galois des extensions

$$I_{\bar{x}} \left(\begin{array}{ccc} & \bar{k}((t))^{\mathrm{sep}} & \\ & | & \Big) \, P_{\bar{x}} \\ \bigcup\limits_{(n,p)=1} & \bar{k}((t^{1/n})) & \\ & | & \Big) \, I_{\bar{x}}^{\mathrm{mod}} \\ & \bar{k}((t)) & \end{array} \right.$$

on a canoniquement (i.e. indépendamment du choix du paramètre local t) un isomorphisme

$$I_{\bar{x}}^{\mathrm{mod}} \cong \prod_{\ell \neq p} \mathbf{Z}_\ell(1) \; .$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F}) = 0$

(b) la restriction de ρ à $P_{\bar{x}}$ est triviale ; si ces conditions sont vérifiées, on dit que $\mathcal{F}$ est modérément ramifié en x ;

(iv) si $\mathcal{G}$ est un E_λ-faisceau constructible sur U , modérément ramifié en x , alors

$$\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \mathrm{Swan}_x(\mathcal{F}).\mathrm{rang}(\mathcal{G}_{\bar{\eta}}) \;;$$

(v) on a la formule d'Ogg-Safarevitch-Grothendieck,

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_{mod}(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) - \sum_{x\in X(\bar{k})} \mathrm{Swan}_x(\mathcal{F}) \ ;$$

en particulier,

$$\chi(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F}) = \chi_{mod}(U\otimes_k \bar{k},\mathcal{F})$$

si et seulement si $\mathcal{F}$ est modérément ramifié en tout point $x \in X(\bar{k})$.

La construction de $\mathrm{Swan}_x(\mathcal{F})$ est basée sur la théorie de la ramification ; on dispose, sur le groupe d'inertie $I_{\bar{x}}$, de la filtration de ramification en numérotation supérieure $(I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)})_{\varepsilon\geqslant 0}$ (Serre, corps locaux, ch. 4) : pour chaque nombre réel $\varepsilon \geqslant 0$, $I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}$ est un sous-groupe distingué fermé de $I_{\bar{x}}$, pour tous $\varepsilon' \geqslant \varepsilon \geqslant 0$,

$$I_{\bar{x}}^{(\varepsilon')} \subset I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)} \subset I_{\bar{x}}^{(0)} = I_{\bar{x}}$$

et

$$P_{\bar{x}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}} \quad , \quad \bigcap_{\varepsilon\geqslant 0} I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)} = \{1\} \ .$$

A toute représentation continue de $I_{\bar{x}}$ sur un E_λ-espace vectoriel de dimension finie M (pour ce qui nous intéresse, $M = \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$), on associe alors la fonction croissante

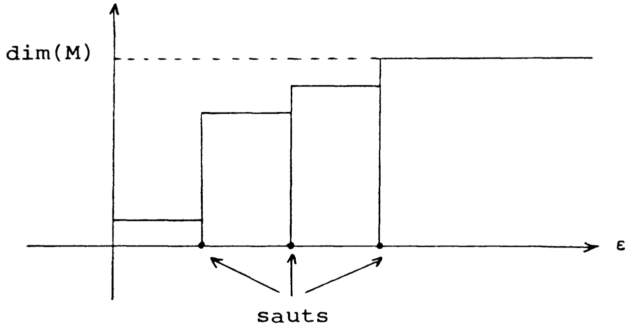
$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \varepsilon &\longmapsto \dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}}) \ . \end{aligned}$$

Cette fonction présente un nombre fini de sauts $\mu > 0$,

$$\dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\mu)}}) < \dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\mu+\varepsilon)}}) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \ ,$$

et, pour $\varepsilon \gg 0$, on a

$$\dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}}) = \dim_{E_\lambda}(M) \ .$$



Dans le cas modérément ramifié, on a

$$\dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}}) = \dim_{E_\lambda}(M)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ (la fonction est constante).

Alors

$$\mathrm{Swan}(M) = \sum_{\substack{\mu > 0 \\ \mu \text{ saut}}} \mu . \dim_{E_\lambda}(M^{I_{\bar{x}}^{(\mu+0)}} / M^{I_{\bar{x}}^{(\mu)}}) .$$

Le fait que $\mathrm{Swan}(M) \in \mathbb{Z}$ équivaut au théorème de Hasse-Arf.

EXERCICES. (1) Si $\rho : I \to GL(M)$ se factorise à travers un quotient fini G de I, on a aussi

$$\mathrm{Swan}(M) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{[G_o : G_i]} \dim_{E_\lambda}(M/M^{G_i})$$

où

$$G = G_o \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$$

est la filtration de ramification en numérotation inférieure (G_1 est un p-groupe et G_o/G_1 est cyclique d'ordre premier à p).

(2) Si M est un E_λ-vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de $P_{\bar{x}}$, cette action se factorise à travers un quotient fini (utiliser le fait que $P_{\bar{x}}$ est un pro-p-groupe et que E_λ est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ avec $\ell \neq p$).

(3) Swan est additif sur les suites exactes courtes.

(4) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{E_\lambda}$-module libre de type fini, muni d'une action continue de $I_{\bar{x}}$, alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a

$$\dim_{E_\lambda}(\mathcal{M}\otimes E_\lambda)^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}} = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{E_\lambda}}(\mathcal{M})^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}} = \dim_{\mathbb{F}_\lambda}(\mathcal{M}\otimes\mathbb{F}_\lambda)^{I_{\bar{x}}^{(\varepsilon)}}$$

($\mathcal{O}_{E_\lambda}$ est l'anneau des entiers de E_λ, $\mathbb{F}_\lambda$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{E_\lambda}$; c'est ce résultat qui permet de faire le lien entre la définition de Swan pour les $\mathbb{F}_\lambda$-faisceaux donnée dans les références ci-dessus et le Swan pour les E_λ-faisceaux).

QUESTION. Si l'on définit, pour une $\bar{\mathbb{F}}_p$-représentation de $I_{\bar{x}}$ se factorisant par un quotient fini G, le conducteur de Swan par la formule de l'exercice (1) ci-dessus, obtient-on un entier ? Est-ce que ce conducteur est additif sur les suites exactes ?

4.7. <u>Spécialisation de la cohomologie</u> (cf. SGA 1, exposé XIII ; SGA 4, exposé XVI ; SGA 4½, Appendice à [Finitude] ; Deligne, Weil II ; SGA 7, exposé XIII).

Soit S un schéma noethérien, irréductible, et soit $\bar{\xi}$ un point géométrique générique de S. On considère une situation

$$\begin{tikzcd} U = X-D \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\bar{f}"] & D = \coprod_\alpha D_\alpha \arrow[l] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où $\bar{f}$ est un morphisme propre, lisse, de dimension relative 1, à fibres géométriquement connexes et où D est un sous-schéma fermé de X, fini, étale sur S, de composantes connexes $(D_\alpha)_\alpha$.

Soit ℓ un nombre premier inversible sur S et soit E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. On se donne un E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ lisse sur U.

THÉORÈME 4.7.1. <u>On suppose</u>, <u>de plus</u>, $\mathcal{F}|U_{\bar{\xi}}$ <u>modérément ramifié en tout point de</u> $X_{\bar{\xi}}$. <u>Alors</u>

(i) <u>pour tout point géométrique</u> $\bar{s}$ <u>de</u> S , $\mathcal{F}|U_{\bar{s}}$ <u>est modérément ramifié en tout point de</u> $X_{\bar{s}}$ <u>et</u>

$$\chi(U_{\bar{s}},\mathcal{F}) = \mathrm{rang}(\mathcal{F}).\chi(U_{\bar{\xi}})$$

(ii) <u>les</u> $R^i f_! \mathcal{F}$ <u>sont des</u> E_λ<u>-faisceaux</u> <u>lisses sur</u> S ;

(iii) <u>la formation de</u> $j_*\mathcal{F}$ <u>sur</u> X <u>commute à tout changement de base</u> $S' \to S$ <u>et, pour chaque</u> α , $(j_*\mathcal{F})|D_\alpha$ <u>est un</u> E_λ<u>-faisceau</u> <u>lisse sur</u> D_α ;

(iv) <u>se donner un</u> E_λ<u>-faisceau</u> <u>constructible</u> $\mathcal{G}$ <u>sur</u> X <u>qui prolonge</u> $\mathcal{F}$ <u>revient à se donner, pour tout</u> α , <u>un</u> E_λ<u>-faisceau</u> <u>constructible</u> $\mathcal{G}_\alpha$ <u>sur</u> D_α <u>et une flèche</u> $\mathcal{G}_\alpha \longrightarrow (j_*\mathcal{F})|D_\alpha$.

<u>Si, de plus,</u> $\mathcal{F}$ <u>est pur de poids</u> w , <u>alors</u> :

(v) <u>pour chaque</u> α , $(j_*\mathcal{F})|D_\alpha$ <u>est mixte de poids</u> $\leqslant w$ <u>et admet une filtration, dite "de la monodromie", par des sous-faisceaux lisses, de gradués purs, cette filtration étant compatible à tout changement de base</u> $S' \to S$.

PREUVE. La partie (i) résulte de SGA 1, Exposé XIII 2.3 a), et de la formule de Néron-Ogg-Šafarevič, appliquée à $\mathcal{F}|U_{\bar{s}}$. La partie (ii) résulte de ce que les $R^i f_! \mathcal{F}$ sont des faisceaux constructibles sur S , de formation compatible à tout changement de base (théorèmes généraux) et de ce que toutes les flèches de spécialisation sont des isomorphismes (pour le voir, il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet avec corps résiduel algébriquement clos et, dans ce cas, d'invoquer SGA 7, XIII, 2.1.11). Nous verrons ci-dessous que (iii) résulte du lemme d'Abhyankar relatif. On a mis (iv) pour mémoire. La partie (v) est prouvée dans Weil II ; c'est un des points clefs de Weil II, on va en rappeler certains aspects ci-dessous.

REMARQUES. (1) De façon imagée, on peut dire que les parties (i), (ii) et (iii) du théorème expriment le fait que, localement sur S , la situation considérée est "topologiquement" triviale.

(2) Si le point générique $\bar{\xi}$ de S est de caractéristique nulle, l'hypothèse que $\mathcal{F}|U_{\bar{\xi}}$ est modérément ramifié en tout point de $X_{\bar{\xi}}$ est automatiquement vérifiée.

4.7.2. <u>Précisions et compléments sur la démonstration de</u> 4.7.1.

Reprenons la situation de 4.7.1. Nous allons rappeler la description très explicite des faisceaux $j_*\mathcal{F}|D_\alpha$ et de leur filtration par la monodromie donnée dans Weil II. Pour ceci, il sera commode de supposer qu'il existe un ouvert $V \subset X$ et une fonction $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ sur V tels que

$$D \subset V$$

et D est défini dans V par l'équation

$$g = 0$$

(quitte à se localiser, pour la topologie de Zariski, on peut toujours trouver un tel couple (V, g)).

Désignons par $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers qui sont inversibles sur S et par $\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)$ le faisceau lisse

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} \prod_{\ell \in \mathbb{L}} \mathbb{Z}_\ell(1)$$

sur un S-schéma quelconque.

En nous servant de l'équation $g = 0$ pour D, nous allons construire un foncteur

$$\mathcal{F} \longmapsto (\mathcal{F}_0, \rho_D)$$

de la catégorie des E_λ-faisceaux lisses $\mathcal{F}$ sur $V-D$, dont la restriction à $V_{\bar{\xi}} - D_{\bar{\xi}}$ est modérément ramifiée en tout point de $D_{\bar{\xi}}$, dans la catégorie des E_λ-faisceaux lisses $\mathcal{F}_0$ sur D munis d'une action ρ_D du faisceau $\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)$; la formation de $(\mathcal{F}_0, \rho_D)$ à partir de $\mathcal{F}$ commutera à tout changement de base $S' \to S$.

Pour construire ce foncteur, nous allons utiliser le lemme d'Abhyankar relatif ci-dessous.

Pour chaque entier N inversible dans S, désignons par V_N le μ_N-revêtement fini et plat de V défini par $\sqrt[N]{g}$, i.e.

$$V_N = V[T]/(T^N - g) .$$

Notons que le diviseur d'équation $T = 0$ dans V_N peut-être identifié à D et que $V_N - D$ est fini, étale, galoisien sur $V-D$ de groupe μ_N.

LEMME D'ABHYANKAR RELATIF. <u>Soit</u> S <u>un schéma noethérien, irréductible, de point générique</u> ξ, <u>soit</u> $\bar{\xi}$ <u>un point géométrique localisé en</u> ξ. <u>Soit</u> V <u>un</u> S-<u>schéma lisse de dimension relative</u> 1 <u>et soit</u> $D \subset V$ <u>un diviseur, fini étale sur</u> S, <u>qui est défini dans</u> V <u>par une équation</u> $f = 0$. <u>Soit</u> $\mathcal{G}$ <u>un faisceau localement constant sur</u> $V-D$ <u>dont la restriction à</u> $V_{\bar{\xi}} - D_{\bar{\xi}}$ <u>est modérément ramifiée en tout point fermé de</u> $D_{\bar{\xi}}$. <u>Alors, il existe un entier</u> N <u>inversible sur</u> S <u>tel que l'image réciproque de</u> $\mathcal{G}$ <u>sur</u> $V_N - D$ <u>se prolonge, de façon unique, en un faisceau localement constant sur</u> V_N <u>tout entier</u>.

PREUVE. Grâce à SGA 1, XIII, 2.3 a), l'hypothèse implique que $\mathcal{G}$ est modérément ramifié sur $V-D$ le long de D au sens de SGA 1, XIII, 2.1.1. La conclusion découle alors de SGA 1, XIII, 5.5 par la méthode de SGA 4, XVI, 3.5 et 3.5.1.

On veut appliquer ce lemme à $\mathcal{F}$, mais $\mathcal{F}$ est lisse sans être nécessairement localement constant. Le E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ correspond à une représentation continue de $\pi_1(V-D, \bar{\eta})$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$ ($\bar{\eta}$ est un point géometrique générique de $V-D$), i.e. dans un groupe linéaire λ-adique, mais cette représentation ne se factorise pas nécessairement par un quotient fini de $\pi_1(V-D, \bar{\eta})$. Par contre, comme $\pi_1(V-D, \bar{\eta})$ est compact, il existe un $\mathcal{O}_\lambda$-réseau stable $\mathfrak{F}_{\bar{\eta}} \subset \mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ ($\mathcal{O}_\lambda$ est l'anneau des entiers de E_λ) ; nous noterons $\mathfrak{F}$ le $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau correspondant. Pour tout entier $\nu \geq 1$, le faisceau

$$\mathfrak{F}_\nu \overset{\mathrm{dfn}}{=\!=} \mathfrak{F}/\lambda^\nu . \mathfrak{F}$$

est un $\mathcal{O}_\lambda/\lambda^\nu.\mathcal{O}_\lambda$-faisceau lisse, et donc est localement constant sur V-D (il correspond à une représentation continue de $\pi_1(V-D,\bar{\eta})$ dans le groupe <u>fini</u> $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_{\bar{\eta}}/\lambda^\nu.\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$).

On peut donc appliquer le lemme d'Abhyankar relatif à chacun des faisceaux localement constants $\mathcal{F}_\nu$ $(\nu \geqslant 1)$. On trouve que, pour chaque entier $\nu \geqslant 1$, il existe un entier N, dépendant de ν, inversible sur S, tel que l'image réciproque de $\mathcal{F}_\nu$ sur V_N-D se prolonge, de façon unique, en un faisceau lisse sur V_N tout entier. Si nous fixons les notations par le diagramme ci-dessous

$$\mu_N \circlearrowright \quad \begin{array}{ccc} V_N-D & \xrightarrow{j_N} & V_N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & \downarrow{\scriptstyle p_N} \\ V-D & \xrightarrow{j} & V \end{array}$$

nous pouvons exprimer ce résultat en disant que, pour un tel N, le faisceau

$$(j_N)_*(\pi_N)^*(\mathcal{F}_\nu)$$

sera lisse sur V_N. Notons aussi que ce faisceau est naturellement muni d'une action de μ_N.

Il est tautologique que nous pouvons récupérer $\mathcal{F}_\nu$ sur V-D et son image directe $j_*\mathcal{F}_\nu$ sur V à partir du faisceau lisse $(j_N)_*(\pi_N)^*(\mathcal{F}_\nu)$ sur V_N muni de son action de μ_N à l'aide des formules suivantes :

$$\mathcal{F}_\nu = [(\pi_N)_*(j_N)^*((j_N)_*(\pi_N)^*\mathcal{F}_\nu)]^{\mu_N}$$

$$j_*\mathcal{F}_\nu = [(p_N)_*((j_N)_*(\pi_N)^*\mathcal{F}_\nu)]^{\mu_N}$$

et

$$(j_*\mathcal{F}_\nu)|D = [((j_N)_*(\pi_N)^*\mathcal{F}_\nu)|D]^{\mu_N} \quad .$$

Ceci étant, la construction qui associe à $\mathcal{F}_\nu$ le $\mathcal{O}_\lambda/\lambda^\nu.\mathcal{O}_\lambda$-faisceau sur D

$$((j_N)_*(\pi_N)^*\mathfrak{F}_\nu)|D$$

muni de l'action naturelle de μ_N , pour N inversible dans S et suffisamment grand, passe à la limite et définit le foncteur voulu (qu'on vérifie être indépendant des choix faits, en particulier du choix du réseau $\mathfrak{F}$),

$$\mathcal{F} \longmapsto (\mathcal{F}_o \text{ sur } D \text{ muni d'une action de } \mathbb{Z}_L(1)) .$$

Notons que, par passage à la limite, nous avons la formule

$$(j_*\mathcal{F})|D \cong \mathcal{F}_o^{\mathbb{Z}_L(1)} .$$

C'est l'unicité du prolongement de $(\pi_N)^*\mathfrak{F}_\nu$ en un faisceau localement constant sur V_N qui assure que la formation de $(\mathcal{F}_o, \rho_D)$ commute à tout changement de base $S' \to S$. De cette propriété, il s'ensuit que la formation de $j_*\mathcal{F}$ commute à tout changement de base $S' \to S$ et que le faisceau $(j_*\mathcal{F})|D$ est encore lisse sur D.

COROLLAIRE 4.7.3. <u>Soient</u> S , V <u>et</u> D <u>comme dans le lemme d'Abhyankar relatif</u>. <u>Si</u> $\mathcal{F}$ <u>est un</u> E_λ<u>-faisceau constructible sur</u> V <u>tel que</u> $\mathcal{F}|V-D$ <u>et</u> $\mathcal{F}|D$ <u>soient tous deux lisses et tel que</u> $\mathcal{F}|V_{\bar{\xi}} - D_{\bar{\xi}}$ <u>soit modérément ramifié en tout point de</u> $D_{\bar{\xi}}$, <u>alors</u>

$$\mathcal{F}_{pct} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F})$$

<u>est concentré sur</u> D , <u>lisse sur</u> D <u>et de formation compatible à tout changement de base</u> $S' \to S$. <u>Le faisceau</u>

$$\mathcal{F}_{npct} = \mathcal{F}/\mathcal{F}_{pct}$$

<u>est isomorphe à</u> $\mathcal{F}$ <u>sur</u> $V-D$, <u>sa restriction à</u> D <u>est lisse et sa formation commute à tout changement de base</u> $S' \to S$.

EXERCICE. Soit R un anneau intègre normal, dont le corps des fractions K est de caractéristique nulle. Soit T une indéterminée. On considère l'anneau $R((T))$. Soit A une $R((T))$-algèbre finie étale. Montrer qu'il existe un entier N inversible dans R et une R-algèbre finie étale B tels que le revêtement fini étale de $B((T^{1/N}))$ obtenu à partir de A par l'extension des scalaires $R((T)) \to B((T^{1/N}))$, i.e.

$$A \otimes_{R((T))} B((T^{1/N})) ,$$

est complètement décomposé, i.e. isomorphe à une somme directe de copies de $B((T^{1/N}))$. Déduire de ce résultat que le groupe fondamental de Spec(R((T))) est un produit semi-direct

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(R((T)))) \simeq \pi_1(\mathrm{Spec}(R)) \ltimes \mathbb{Z}_{\mathbf{L}}(1)(\bar{K})$$

du groupe fondamental de Spec(R) et du groupe $\mathbb{Z}_{\mathbf{L}}(1)(\bar{K})$ où $\mathbf{L}$ est l'ensemble des nombres premiers inversibles dans R .

Notons, en particulier, que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}((T)))$ est simplement connexe !

4.7.4. La filtration de la monodromie.

En termes du foncteur

$$\mathfrak{F} \longmapsto (\mathfrak{F}_o, \rho_D)$$

rappelons aussi la définition de la "filtration de la monodromie" du faisceau $\mathfrak{F}_o$ sur D (la filtration de la monodromie du faisceau $(j_*\mathfrak{F})|D$ sur D n'est autre que la filtration induite sur $(j_*\mathfrak{F})|D$ vu comme le sous-faisceau des invariants $\mathfrak{F}_o^{\mathbb{Z}_{\mathbf{L}}(1)}$ de $\mathfrak{F}_o$).

Pour ceci, nous supposerons en plus que le schéma de base S est de type fini sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$. S'il en est ainsi, le théorème de monodromie locale (SGA 7, exposé I ; Weil II) garantit l'existence d'un endomorphisme nilpotent, nécessairement unique,

$$N : \mathfrak{F}_o \longrightarrow \mathfrak{F}_o(-1) ,$$

ayant la propriété suivante : désignons par

$$t_\ell : \mathbb{Z}_L(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

la projection sur la composante d'indice ℓ , $\ell \in \mathbf{L}$; alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}_L(1)$, nous disposons d'un endomorphisme nilpotent

$$t_\ell(a).N : \mathfrak{F}_o \longrightarrow \mathfrak{F}_o$$

<u>ce qui nous permet de définir une action de</u> $\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)$ <u>sur</u> $\mathfrak{F}_o$ <u>par la formule</u>

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & \exp(t_\ell(a).N) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_o) \end{array} .$$

<u>Alors cette action coïncide avec l'action donnée</u> ρ_D <u>de</u> $\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)$ <u>sur</u> $\mathfrak{F}_o$ <u>sur un sous-groupe ouvert de</u> $\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)$.

Ceci étant, Deligne définit la filtration de la monodromie de $\mathfrak{F}_o$ comme l'unique filtration finie croissante

$$\ldots M_i\mathfrak{F}_o \subset M_{i+1}\mathfrak{F}_o \subset \ldots$$

telle que

$$N(M_i\mathfrak{F}_o) \subset (M_{i-2}\mathfrak{F}_o)(-1)$$

et telle que, pour tout entier $i \geqslant 0$, l'application induite sur le gradué

$$N^i : Gr_i^M(\mathfrak{F}_o) \longrightarrow Gr_{-i}^M(\mathfrak{F}_o)(-i)$$

soit un isomorphisme. Sa construction se fait dans la catégorie abélienne des E_λ-faisceaux lisses $\mathfrak{F}_o$ sur D, munis d'un endomorphisme nilpotent $N : \mathfrak{F}_o \to \mathfrak{F}_o(-1)$; en particulier, les E_λ-faisceaux $M_i\mathfrak{F}_o$, $Gr_i^M(\mathfrak{F}_o)$, $(M_i\mathfrak{F}_o) \cap (\mathfrak{F}_o^{\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)})$ et $Gr_i^M(\mathfrak{F}_o^{\mathbb{Z}_{\mathbb{L}}(1)})$ sont tous des faisceaux lisses sur D, dont la formation commute à tout changement de base $S' \to S$ (le point étant l'unicité de la filtration).

Notons en passant que

$$(j_*\mathfrak{F})|D \subset \mathrm{Ker}(N : \mathfrak{F}_o \to \mathfrak{F}_o(-1)) \subset M_o(\mathfrak{F}_o)$$

(on a $\mathrm{Ker}(N) \subset M_o$ car

$$N^i : M_i/M_{i-1} \xrightarrow{\sim} M_{-i}/M_{-i-1}$$

donc si $i \geqslant 1$ et si $\mathrm{Ker}\, N \subset M_i$, on a $\mathrm{Ker}\, N \subset M_{i-1}$ et par suite, comme $M_i = \mathfrak{F}_o$ pour i assez grand, on gagne par récurrence descendante) ; par suite

$$\mathrm{Gr}_i^M(j_*\mathcal{F})|D) = 0$$

pour tout entier $i > 0$.

La dernière partie (v) du théorème 4.7.1 résulte du théorème suivant de Deligne (Weil II, 1.8) :

THÉORÈME. Soit S un schéma noethérien, irréductible, de type fini sur $\mathbb{Z}$, de point générique ξ , soit $\bar{\xi}$ un point géométrique localisé en ξ , soit ℓ un nombre premier inversible sur S . Soient V et D comme ci-dessus (D défini par une équation $g = 0$ dans V) et soit $\mathcal{F}$ un E_λ-faisceau lisse sur $V-D$ $(\lambda|\ell)$ tel que $\mathcal{F}|V_{\bar{\xi}} - D_{\bar{\xi}}$ est modérément ramifié en tout point de $D_{\bar{\xi}}$. Supposons que $\mathcal{F}$ est pur d'un certain poids w . Alors, pour tout entier i , le faisceau lisse $\mathrm{Gr}_i^M(\mathcal{F}_o)$ sur D est pur de poids $w+i$. En particulier, pour tout entier $i \leqslant 0$, le faisceau lisse $\mathrm{Gr}_i^M((j_*\mathcal{F})|D)$ sur D est pur de poids $w+i$ (il est nul pour $i > 0$).

4.7.5. L'analogue transcendant.

Soit S un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, soit V un S-schéma lisse de dimension relative 1 et soit $D \subset V$ un diviseur fini étale sur S , défini dans V par une équation $g = 0$. On considère des faisceaux sur les espaces topologiques $V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$ et $D(\mathbb{C})^{an}$ (pour la topologie "classique"). On va construire un foncteur

$$\mathcal{F}^{an} \longmapsto (\mathcal{F}_o^{an}, \rho_D)$$

de la catégorie des faisceaux localement constants $\mathcal{F}^{an}$ sur l'espace topologique $V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$ dans la catégorie des faisceaux localement constants $\mathcal{F}_o^{an}$ sur $D(\mathbb{C})^{an}$ munis d'une action ρ_D de $2\pi i\mathbb{Z}$, foncteur qui sera l'analogue transcendant du foncteur

$$\mathcal{F} \longmapsto (\mathcal{F}_o, \rho_D)$$

construit précédemment, dans un sens que l'on va préciser.

Voici la construction : au-dessus de l'espace analytique $V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$ nous fabriquons le revêtement étale, galoisien, de groupe $\mathbb{Z}$, défini par $\log g$; plus précisément, nous posons

$$V_{\log} = \{(v,t) \mid v \in V(\mathbb{C})^{an}, t \in \mathbb{C}, e^t = g(v)\}$$

(si $(v,t) \in V_{\log}$, on a en fait $v \in V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$). Alors $V_{\log}$ se trouve dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V_{\log} \arrow[d, "\pi"] \arrow[d, bend right=60, no head, "2\pi i\mathbb{Z}"'] \arrow[drr, "k"] & & \\
V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[rr, hook, "j"] & & V(\mathbb{C})^{an} \arrow[d] & D(\mathbb{C})^{an} \arrow[l, hook', "i"'] \\
& & S(\mathbb{C})^{an} &
\end{tikzcd}$$

où $\pi((v,t)) = v$. Ceci étant, posons

$$\mathfrak{F}_o^{an} = i^* k_* \pi^* \mathfrak{F}^{an} = i^* j_* \pi_* \pi^* \mathfrak{F}^{an} \; ;$$

$\mathfrak{F}_o^{an}$ est muni d'une action ρ_D de $2\pi i\mathbb{Z}$ provenant de l'action naturelle de $2\pi i\mathbb{Z}$ sur $\pi_*\pi^*\mathfrak{F}^{an}$ qui, elle-même, provient de l'action naturelle de $2\pi i\mathbb{Z}$ sur le couple $(V_{\log}, \pi^*\mathfrak{F}^{an})$. Il nous reste à voir, pour terminer la construction, que $\mathfrak{F}_o^{an}$ est localement constant sur $D(\mathbb{C})^{an}$.

Pour tout point $d \in D(\mathbb{C})^{an}$, on doit donc montrer qu'il existe un voisinage de d dans $D(\mathbb{C})^{an}$ au-dessus duquel $\mathfrak{F}_o^{an}$ est un faisceau constant. Fixons un point $d \in D(\mathbb{C})^{an}$ d'image s dans $S(\mathbb{C})^{an}$. Il est clair que le comportement de $\mathfrak{F}_o^{an}$ au voisinage de d dans $D(\mathbb{C})^{an}$ ne dépend que du comportement de $\mathfrak{F}^{an}$ au voisinage de d dans $V(\mathbb{C})^{an}$, par suite, on peut se localiser, au sens analytique, dans $V(\mathbb{C})^{an}$ autour de d.

Plus précisément, on peut trouver un voisinage contractile $\mathcal{S}$ de s dans $S(\mathbb{C})^{an}$, un voisinage $\mathcal{V}$ de d dans $V(\mathbb{C})^{an}$, un réel $\varepsilon > 0$ et un $\mathcal{S}$-isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \mathcal{S} \times \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \arrow[d, "pr_1"] \\
& \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

qui transforme la fonction $g|\mathcal{U}$ en la coordonnée z . Par suite

$$D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \times \{z = 0\}$$

$$(V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}) \cap \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S} \times \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$$

et

$$\begin{aligned} V_{log}|\mathcal{U} &\simeq \mathcal{S} \times \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon \, , \, e^t = z\} \\ &\simeq \mathcal{S} \times \{t \in \mathbb{C} \mid Re(t) < Log\ \varepsilon\} \ . \end{aligned}$$

En résumé, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_{log}|\mathcal{U} \arrow[loop left, "2\pi i\mathbb{Z}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "k"] & & \\
(V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}) \cap \mathcal{U} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{U} \arrow[d] & D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U} \arrow[l, hook', "i"'] \\
& \mathcal{S} &
\end{tikzcd}$$

est $\mathcal{S}$-isomorphe au produit par $\mathcal{S}$ du diagramme habituel de la monodromie locale

$$\begin{tikzcd}
\{t \in \mathbb{C} \mid Re(t) < Log\ \varepsilon\} \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, "\overline{\exp} = j \circ \exp"] & & \\
\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\} \arrow[r, hook, "j"] & \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} & \{z = 0\} \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd} .$$

Quant au faisceau $\mathcal{F}^{an}|(V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}) \cap \mathcal{U}$, vu comme faisceau localement constant sur l'espace analytique produit

$$\mathcal{S} \times \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$$

il est isomorphe à

$$pr_2^* \, \mathcal{G}^{an}$$

où

$$pr_2 : \mathcal{S} \times \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < \varepsilon\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < \varepsilon\}$$

est la seconde projection et où

$$\mathcal{G}^{an} = (pr_2)_* \mathcal{F}^{an}$$

est un faisceau localement constant sur $\{0 < |z| < \varepsilon\}$, le point étant que, par hypothèse, $\mathcal{S}$ est contractile.

On a alors

$$\mathcal{F}_0^{an} | D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} pr_2^*(i^* \overline{\exp}_* \exp^* \mathcal{G}^{an})$$

où maintenant

$$pr_2 : D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U} \simeq \mathcal{S} \times \{z = 0\} \longrightarrow \{z = 0\}$$

est la seconde projection. Ceci montre bien que $\mathcal{F}_0^{an} | D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U}$ est constant de valeur

$$i^* \overline{\exp}_* \exp^* \mathcal{G}^{an} = (\overline{\exp}_* \exp^* \mathcal{G}^{an})_0 \ .$$

On peut préciser cette valeur en remarquant que $\{t \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(t) < \mathrm{Log}\ \varepsilon\}$ est simplement connexe, donc que $\exp^* \mathcal{G}^{an}$ est un faisceau constant de valeur

$$H^0(\{t \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(t) < \mathrm{Log}\ \varepsilon\}, \exp^* \mathcal{G}^{an}) \ ;$$

cette valeur est clairement indépendante du choix de ε , donc $\mathcal{F}_0^{an} | D(\mathbb{C})^{an} \cap \mathcal{U}$ est le faisceau constant de valeur

$$H^0(\{t \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(t) < \mathrm{Log}\ \varepsilon\}, \exp^* \mathcal{G}^{an})$$

(pour un ε arbitraire) muni de l'action évidente de $2\pi i \mathbb{Z}$.

REMARQUE. De cette description explicite de $\mathcal{F}_0^{an}$, on déduit le résultat suivant

$$(j_* \mathcal{F}^{an}) | D(\mathbb{C})^{an} \simeq (\mathcal{F}_0^{an})^{2\pi i \mathbb{Z}} \ .$$

En particulier, si $\mathcal{F}^{an}$ se prolonge en un faisceau localement constant $\tilde{\mathcal{F}}^{an}$ sur $V(\mathbb{C})^{an}$ tout entier, alors, on a

$$\mathcal{F}_o^{an} \simeq \tilde{\mathcal{F}}^{an}|_D$$

avec action triviale de $2\pi i\mathbb{Z}$.

4.7.6. <u>Comparaison de la construction algébrique et de la construction transcendante</u>.

On garde les notations de 4.7.5. Supposons que $\mathcal{F}^{an}$ se prolonge en un faisceau localement constant sur $V_N(\mathbb{C})^{an}$ où $V_N \longrightarrow V$ est le revêtement fini obtenu par extraction de la racine N-ième de l'équation g de D , pour un certain entier N . Alors nous aurions pu aussi considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_N(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[r, hook, "j_N"] \arrow[d, "\pi_N"'] & V_N(\mathbb{C})^{an} \arrow[d, "p_N"] & D(\mathbb{C})^{an} \arrow[l, hook', "i_N"'] \arrow[d, equal] \\
V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[r, hook, "j"] & V(\mathbb{C})^{an} & D(\mathbb{C})^{an} \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}$$

qui s'insère dans le diagramme pour V_{log} de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
V_{log} \arrow[d, "\pi^{(N)}"'] \arrow[dr, "k^{(N)}"] \arrow[ddr, bend left, "k"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi"'] & & \\
V_N(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[r, hook, "j_N"] \arrow[d, "\pi_N"'] & V_N(\mathbb{C})^{an} \arrow[d, "p_N"] & D(\mathbb{C})^{an} \arrow[l, hook', "i_N"'] \arrow[d, equal] \\
V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[r, hook, "j"] & V(\mathbb{C})^{an} & D(\mathbb{C})^{an} \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}$$

les groupes de Galois sont les suivants

$$\begin{tikzcd}
V_{log} \arrow[d, "2\pi iN\mathbb{Z}"'] \arrow[dd, bend right=60, "2\pi i\mathbb{Z}"'] \\
V_N(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an} \arrow[d, "\mu_N"'] \\
V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}
\end{tikzcd}$$

avec la suite exacte

$$0 \longrightarrow 2\pi i N\mathbb{Z} \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha \mapsto e^{\alpha/N}} \mu_N \longrightarrow 1$$

qui les relie.

LEMME. *Si* $j_{N_*}\pi_N^*\mathfrak{F}^{an}$ *est localement constant sur* $V_N(\mathbb{C})^{an}$, *alors on a*

$$\mathfrak{F}_o^{an} = i_N^* j_{N_*}\pi_N^*\mathfrak{F}^{an}$$

et l'action de $2\pi i\mathbb{Z}$ *sur* $\mathfrak{F}_o^{an}$ *se factorise à travers l'action de* μ_N *sur* $i_N^* j_{N_*}\pi_N^*\mathfrak{F}^{an}$ *par l'homomorphisme "transcendant"*

$$2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha \mapsto e^{\alpha/N}} \mu_N \ .$$

PREUVE. En effet, on a par définition

$$\mathfrak{F}_o^{an} = i^* k_* \pi^* \mathfrak{F}^{an}$$

or

$$i^* k_* \pi^* \mathfrak{F}^{an} = i^* p_{N_*} k_*^{(N)} \pi^{(N)*} \pi_N^* \mathfrak{F}^{an}$$

et, par le théorème de changement de base propre pour p_N , on a donc

$$\mathfrak{F}_o^{an} = i_N^* k_*^{(N)} \pi^{(N)*} (\pi_N^* \mathfrak{F}^{an}) \ .$$

Comme le faisceau $\pi_N^*\mathfrak{F}^{an}$ sur $V_N(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$ se prolonge, par hypothèse, en un faisceau localement constant $j_{N_*}\pi_N^*\mathfrak{F}^{an}$ sur $V_N(\mathbb{C})^{an}$, lui appliquer $i_N^* k_*^{(N)} \pi^{(N)*}$, i.e. la construction transcendante, redonne sa restriction à $D(\mathbb{C})^{an}$, d'où le résultat. La compatibilité entre les actions de $2\pi i\mathbb{Z}$ et de μ_N résulte de la formule

$$\sqrt[N]{g} = \exp\left(\frac{t}{N}\right)$$

sur $V_{\log}$ (puisque $e^t = g$).

A partir du lemme précédent, un passage à la limite donne le théorème suivant de comparaison.

THÉORÈME. *Soit* S *un schéma de type fini sur* $\mathbb{C}$, *soit* V *un* S-*schéma lisse de dimension relative* 1 *et soit* $D \subset V$ *un diviseur, fini étale sur* S , *défini par une équation* $g = 0$ *dans* V . *Soit* $\mathfrak{F}$ *un*

E_λ-faisceau lisse sur V-D et soit $\mathfrak{F}^{an}$ le faisceau localement constant en E_λ-espaces vectoriels sur $V(\mathbb{C})^{an} - D(\mathbb{C})^{an}$ associé (cf. SGA 4, XI, 4 et XVI, 4). Alors nous avons un isomorphisme canonique de faisceaux localement constants sur $D(\mathbb{C})^{an}$

$$(\mathfrak{F}_o)^{an} \simeq \mathfrak{F}_o^{an} ;$$

l'action de $2\pi i\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{F}_o^{an}$ se factorise à travers l'action de

$$\hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_N \mu_N$$

sur $(\mathfrak{F}_o)^{an}$ par l'homomorphisme canonique

$$2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}(1)$$

limite des homomorphismes

$$2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_N$$

qui envoient $2\pi i a$ sur $e^{2\pi i a/N}$.

COROLLAIRE. L'action de $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ sur $\mathfrak{F}_o$ est unipotente sur un sous-groupe ouvert de $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ si et seulement si l'action de $2\pi i\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{F}_o^{an}$ est unipotente sur un sous-groupe d'indice fini dans $2\pi i\mathbb{Z}$. S'il en est ainsi, désignons par

$$\ldots M_i\mathfrak{F}_o \subset M_{i+1}\mathfrak{F}_o \subset \ldots$$

et par

$$\ldots M_i(\mathfrak{F}_o^{an}) \subset M_{i+1}(\mathfrak{F}_o^{an}) \subset \ldots$$

les filtrations par la monodromie correspondantes pour $\mathfrak{F}_o$ et pour $\mathfrak{F}_o^{an}$. Alors l'isomorphisme

$$(\mathfrak{F}_o)^{an} \simeq \mathfrak{F}_o^{an}$$

induit des isomorphismes de faisceaux localement constants sur $D(\mathbb{C})^{an}$

$$(M_i\mathfrak{F}_o)^{an} \simeq M_i(\mathfrak{F}_o^{an})$$

et

$$((j_*\mathfrak{F})|D\cap M_i\mathfrak{F}_o)^{an} \simeq j_*(\mathfrak{F}^{an})|D(\mathbb{C})^{an}\cap M_i(\mathfrak{F}_o^{an})$$

<u>pour tout entier</u> i .

4.8. <u>Preuve du théorème clef</u>.

Rappelons brièvement la situation considérée en 4.3 : $R\subset\mathbb{C}$ est un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$; E est un corps de nombres et E_λ est le complété de E en une place finie λ de E , λ divisant un nombre premier ℓ ; $\mathfrak{F}$ est un E_λ-faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_R$; $r\in R-\{0\}$ est tel que $R' = R[1/r\ell]$ soit normal et que $\mathfrak{F}|\mathbb{A}^1_{R'}$ soit bon ;

$$U \xhookrightarrow{j} \mathbb{A}^1_{R'} \longleftarrow D = \coprod_\alpha D_\alpha$$

est une décomposition adaptée à $\mathfrak{F}|\mathbb{A}^1_{R'}$.

4.8.1. <u>Conséquences du théorème de spécialisation de la cohomologie</u>.

Soit

$$\mathbb{A}^1_{R'} \xhookrightarrow{k} \mathbb{P}^1_{R'}$$

la complétion projective de $\mathbb{A}^1_{R'}$ et soit D_∞ le diviseur à l'infini de $\mathbb{A}^1_{R'}$ dans $\mathbb{P}^1_{R'}$. Comme R' est normal et de caractéristique nulle, les hypothèses du théorème 4.7.1 sont vérifiées par la situation

$$\begin{tikzcd} U = \mathbb{P}^1_{R'} - (D\cup D_\infty) \arrow[r, hook, "\bar{j}"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^1_{R'} \arrow[d] & D\cup D_\infty = (\coprod_\alpha D_\alpha) \amalg D_\infty \arrow[l, hook', "\bar{i}"'] \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(R') & \end{tikzcd}$$

(où $\bar{i}$, $\bar{j}$ sont les inclusions) et le faisceau $\mathfrak{F}|U$.

Par suite, on a les conclusions suivantes :

(i) pour tout homomorphisme d'anneaux non trivial

$$\varphi : R' \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

et toute clôture algébrique $\bar{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ ($\mathbb{F}_q$ est un corps fini nécessairement de caractéristique $p\neq\ell$), $\mathfrak{F}|U_\varphi\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q$ est modérément ramifié le long de $D\cup D_\infty$ et

$$\chi(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F}) = \chi(\mathbb{A}^1_{R'} \otimes_{R'} \mathbb{C}, \mathcal{F})$$

$(\mathbb{A}^1_\varphi = \mathbb{A}^1_{R'} \otimes_{R' \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{F}_q}$, $U_\varphi = U \otimes_{R' \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{F}_q})$;

(ii) le noyau et le conoyau de la flèche d'adjonction

$$\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'} \longrightarrow j_* j^* (\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'})$$

sont bons sur $\mathbb{A}^1_{R'}$, avec même décomposition adaptée que $\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'}$, et leur formation commute à toute extension des scalaires $R' \longrightarrow A$; en particulier, $\mathcal{F}_{pct}$ et $\mathcal{F}_{npct}$ sont bons sur $\mathbb{A}^1_{R'}$ et de formation compatible à toute extension des scalaires $R' \longrightarrow A$.

4.8.2. <u>Lemme clef</u>.

Pour tout nombre premier $p \neq \ell$, soit $E_{\lambda,p}$ le complété du corps $E(\zeta_p)$, où ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité, en une place qui prolonge la place λ de E . Pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p et pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$ à valeurs dans $E^*_{\lambda,p}$, on dispose sur l'ouvert affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} = \{X_o \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[X_o, X_1])$ d'un $E_{\lambda,p}$-faisceau lisse de rang 1 , $\mathcal{L}_\Psi$, déduit du $\mathbb{F}_q$-torseur d'Artin-Schreier d'équation

$$T^q - T = X_1/X_o$$

par extension du groupe structural à l'aide du caractère $\bar{\Psi} : \mathbb{F}_q \longrightarrow E^*_{\lambda,p}$; si $\bar{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, on note encore $\mathcal{L}_\Psi$ l'image réciproque de $\mathcal{L}_\Psi$ sur $\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$.

LEMME CLEF. <u>Si</u> $\mathcal{F}$ <u>est un</u> E_λ-<u>faisceau</u> <u>constructible sur l'ouvert</u> <u>affine</u> $\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ <u>de</u> $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$, <u>modérément ramifié à l'infini</u>, <u>alors on a</u> :

(0) <u>la flèche canonique</u>

$$H^*_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^*(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

<u>est un isomorphisme</u> ;

(i) $H^2_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = (0)$

(ii) $\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi) = \dim(\mathcal{F}_{\bar\eta})$.

<u>Si, de plus,</u> $\mathcal{F}$ <u>est modérément ramifié en tout point de</u> $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$, <u>on a</u>

(iii) $\chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi) = \chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F}) - \dim(\mathcal{F}_{\bar\eta})$.

PREUVE. La partie (i) est conséquence de la partie (0) et du théorème de Lefschetz affine qui nous assure que

$$H^2(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi) = 0 .$$

La partie (iii) résulte par Ogg-Šafarevič-Grothendieck de la partie (ii).

Il nous reste donc à montrer (0) et (ii). Pour cela, considérons une clôture algébrique $\bar K$ du corps des fractions K de $\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ et choisissons une place $\bar\infty$ de $\bar K$ prolongeant la place ∞ de K . On dispose alors du groupe d'inertie

$$I_{\bar\infty} \subset \mathrm{Gal}(\bar K/K) ;$$

soit $P_{\bar\infty}$ la partie sauvage de $I_{\bar\infty}$. Si $\bar\eta = \mathrm{Spec}(\bar K)$, $I_{\bar\infty}$ agit sur

$$(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta} = \mathcal{F}_{\bar\eta}\otimes(\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta} .$$

L'hypothèse de ramification modérée à l'infini s'exprime par le fait que $P_{\bar\infty}$ agit trivialement sur $\mathcal{F}_{\bar\eta}$. On va voir maintenant que pour montrer (0) (resp. (ii)) il suffit de montrer

$$\text{(0')} \qquad ((\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta})^{P_{\bar\infty}} = 0$$

(resp. (ii') $\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\psi) = 1$).

En effet, l'assertion (0) est équivalente à la nullité de la cohomologie galoisienne de $I_{\bar\infty}$ agissant sur $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta}$, i.e.

$$H^*(I_{\bar\infty}, (\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta}) = 0 ;$$

or

$$H^*(I_{\bar\infty}, (\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta}) = H^*(I_{\bar\infty}/P_{\bar\infty}, ((\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\psi)_{\bar\eta})^{P_{\bar\infty}})$$

car

$$H^i(P_{\overline{\infty}}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}}) = 0 \qquad (\forall i > 0)$$

($P_{\overline{\infty}}$ est un pro-p-groupe, alors que $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}}$ est une représentation ℓ-adique de $P_{\overline{\infty}}$) ; par suite, pour montrer (0), il suffit de montrer que

$$((\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{P_{\overline{\infty}}} = 0$$

i.e.

$$(\mathcal{F}_{\overline{\eta}} \otimes (\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{P_{\overline{\infty}}} = 0$$

i.e.

$$\mathcal{F}_{\overline{\eta}} \otimes ((\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{P_{\overline{\infty}}} = 0$$

puisque $P_{\overline{\infty}}$ agit trivialement sur $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$, ce qui nous ramène à montrer (0').

D'autre part

$$\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \dim(\mathcal{F}_{\overline{\eta}}).\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\Psi)$$

car $\mathcal{F}$ est modéré à l'infini, donc (ii) équivaut à (ii)'.

Pour montrer enfin (0') et (ii'), on considère la filtration de ramification en numérotation inférieure du groupe $G = \mathbb{F}_q$ du torseur d'Artin-Schreier : elle s'écrit simplement

$$(0) = \ldots = G_3 = G_2 \subset G_1 = G_0 = \mathbb{F}_q$$

donc

$$((\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{P_{\overline{\infty}}} = ((\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{G_1} = 0$$

car Ψ est non trivial et

$$\begin{aligned}\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\Psi) &= \frac{1}{[G_0 : G_1]} \dim_{E_{\lambda,p}}((\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}}/((\mathcal{L}_\Psi)_{\overline{\eta}})^{G_1}) \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où le lemme clef.

REMARQUE. Pour montrer $\mathrm{Swan}_\infty(\mathcal{L}_\Psi) = 1$, on aurait aussi pu invoquer la formule d'Ogg-Šafarevič-Grothendieck et le fait que

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

puisque

$$H^*_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi) = H^*_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, E_{\lambda,p})^\Psi = (0)$$

(Ψ est non trivial).

4.8.3. Conséquences du lemme clef.

Pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R', le lemme clef s'applique à $\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$, compte-tenu des résultats de 4.8.1, et par suite, on a :

(i) $H^2_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = (0)$

(ii) $\chi_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\mathbb{A}^1_R, \otimes_{R}, \mathbb{C}) - \dim(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$

où $\bar{\eta}$ désigne un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_R$

(iii) $h^0(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi(\mathbb{A}^1_R, \otimes_R, \mathbb{C}, \mathcal{F}_{pct})$

(iv) $-h^1(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi(\mathbb{A}^1_R, \otimes_R, \mathbb{C}, \mathcal{F}_{npct}) - \dim(\mathcal{F}_{\bar{\eta}})$

(pour les deux dernières assertions, il suffit de remarquer que

$$((\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q) \otimes \mathcal{L}_\Psi)_{pct} = (\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q)_{pct} \otimes \mathcal{L}_\Psi = (\mathcal{F}_{pct}|\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q) \otimes \mathcal{L}_\Psi$$

puisque la formation de $\mathcal{F}_{pct}$ commute aux changements de bases, idem pour "npct").

4.8.4. Dernière étape.

Faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

(i) $\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'} \xrightarrow{\sim} j_*j^*(\mathcal{F}|\mathbb{A}^1_{R'})$,

(ii) $\mathcal{F}|U$ est pur de poids w,

on va voir alors que, pour tout triplet $(\mathbb{F}_q, \varphi, \Psi)$ dans R',

$$H^i_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = (0)$$

pour tout $i \neq 1$ et que

$$H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est pur de poids $1+w$. Pour cela utilisons le théorème de Deligne (Weil II) qui dit que, pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{G}$ lisse et pur de poids w sur $U_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$, le groupe de cohomologie

$$H^1(\mathbb{P}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \bar{j}_* \mathcal{G})$$

est pur de poids $1+w$. On applique ce théorème à

$$\mathcal{G} = j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \ ;$$

on aura gagné si l'on montre que

$$H^1(\mathbb{P}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \bar{j}_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)) = H^1_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

donc si l'on montre que

$$\bar{j}_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = k_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \ .$$

Pour cela on remarque que

$$\bar{j}_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = k_*(j_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi))$$

et que

$$j_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) = (j_* j^* \mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}_\Psi$$

($\mathcal{L}_\Psi$ est lisse sur $\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$), donc, comme par hypothèse

$$j_* j^* \mathcal{F} \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}$$

sur $\mathbb{A}^1_\varphi \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$, on a

$$\bar{j}_* j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \cong k_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi) \ .$$

Maintenant

$$(k_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi))_{\bar{\infty}} = (\mathcal{F}_{\bar{\eta}} \otimes (\mathcal{L}_\Psi)_{\bar{\eta}})^{I_{\bar{\infty}}}$$

donc

$$(k_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_\Psi))_{\bar{\infty}} \subset (\mathcal{F}_{\bar{\eta}} \otimes (\mathcal{L}_\Psi)_{\bar{\eta}})^{P_{\bar{\infty}}}$$

et comme $P_{\bar{\infty}}$ agit trivialement sur $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ et que

$$((\mathcal{L}_\Psi)_{\bar{\eta}})^{P_{\bar{\infty}}} = (0)$$

on a

$$(k_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi))_{\bar{\infty}} = (0)$$

d'où

$$\bar{j}_* j^*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi) \cong k_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi) = k_!(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_\Psi)$$

ce qui achève la démonstration du théorème clef.

4.9. Indépendance de la place λ .

La démonstration du théorème 3.1.1 donnée en 4.3.2 faisait intervenir un choix préliminaire d'un nombre premier ℓ dans la définition des h_w^i . Nous allons voir que les h_w^i ainsi définis sont en fait essentiellement indépendants de ce choix en un sens qui sera précisé plus loin.

4.9.1. E-familles faibles et E-familles : sorites.

Soit E un corps de nombre, i.e. une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$, et soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$. Nous appelons E-famille faible de faisceaux sur X les données suivantes :

(1) pour toute place λ de E , un E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}_\lambda$ sur $X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/\ell]$ où E_λ est le complété de E en la place λ et où ℓ désigne la caractéristique résiduelle en λ ;

(2) un E-faisceau algébriquement constructible sur l'espace analytique $(X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an}$;

(3) pour toute place λ de E , un isomorphisme

$$\varphi_{\lambda,\infty} : (\mathcal{F}_\lambda | X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\infty\otimes_E E_\lambda$$

de E_λ-faisceaux algébriquement constructibles sur $(X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an}$.

Etant données deux E-familles faibles $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sur X, un morphisme

$$\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est une famille de morphismes de faisceaux

$$\begin{cases} \alpha_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{G}_\lambda & \text{pour toute place } \lambda \\ \alpha_\infty : \mathcal{F}_\infty \longrightarrow \mathcal{G}_\infty \end{cases}$$

telle que, pour toute place λ de E , le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
(\mathfrak{F}_\lambda | X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{an} & \xrightarrow{(\alpha_\lambda)^{an}} & (\mathcal{G}_\lambda | X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{an} \\
\varphi_{\lambda,\infty} \downarrow \wr & & \wr \downarrow \varphi_{\lambda,\infty} \\
\mathfrak{F}_\infty \otimes_E E_\lambda & \xrightarrow{\alpha_\infty \otimes \mathrm{id}_{E_\lambda}} & \mathcal{G}_\infty \otimes_E E_\lambda
\end{array}$$

soit commutatif.

Avec cette définition, on vérifie facilement que la catégorie des E-familles faibles sur X est une catégorie abélienne et que les foncteurs

$$\mathfrak{F} \longmapsto \mathfrak{F}_\lambda \ ,$$

de la catégorie des E-familles faibles sur X dans la catégorie des E_λ-faisceaux constructibles sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\ell]$, et

$$\mathfrak{F} \longmapsto \mathfrak{F}_\infty \ ,$$

de la catégorie des E-familles faibles sur X dans la catégorie des E-faisceaux algébriquement constructibles sur $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{an}$, sont tous <u>exacts</u>.

Nous dirons qu'une E-famille faible $\mathfrak{F}$ est une E-<u>famille</u> s'il existe une décomposition finie de X en sous-schémas localement fermés

$$X = \coprod_{i \in I} Z_i$$

avec les propriétés suivantes

(i) pour toute place λ de E,

$$\mathfrak{F}_\lambda | Z_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\ell]$$

est lisse quel que soit $i \in I$;

(ii) pour tout $i \in I$,

$$\mathfrak{F}_\infty | (Z_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{an}$$

est un faisceau localement constant de E-espaces vectoriels de dimension finie (nous dirons simplement "lisse" dans ce cas aussi).

Nous regarderons les E-familles comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des E-familles faibles. Les E-familles forment une sous-catégorie abélienne et, un peu plus généralement, on a la propriété suivante :

(*) étant donné une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

de E-familles faibles, si deux des E-familles faibles $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des E-familles, alors il en est de même de la troisième et toute décomposition

$$X = \coprod_{i \in I} Z_i$$

qui "marche" pour deux d'entre elles "marche" aussi pour la troisième.

EXEMPLES DE E-FAMILLES : (1) la E-famille triviale définie par

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\lambda = E_\lambda & \text{pour toute place } \lambda \text{ de } E \\ \mathcal{F}_\infty = E \end{cases}$$

(2) si Z est un sous-schéma localement fermé de X et si

$$j : Z \hookrightarrow X$$

est l'inclusion, alors, étant donné une E-famille $\mathcal{G}$ sur Z , nous définissons une E-famille $j_!\mathcal{G}$ sur X en prenant

$$\begin{cases} (j_!\mathcal{G})_\lambda = j_!(\mathcal{G}_\lambda) & \text{pour toute } \lambda \\ (j_!\mathcal{G})_\infty = j_!(\mathcal{G}_\infty) \end{cases}$$

(3) étant donné un morphisme

$$f : X \longrightarrow Y$$

entre schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$ et une E-famille $\mathcal{H}$ sur Y , nous définissons une E-famille $f^*\mathcal{H}$ sur X en prenant

$$\begin{cases} (f^*\mathcal{H})_\lambda = f^*(\mathcal{H}_\lambda) & \text{pour toute } \lambda \\ (f^*\mathcal{H})_\infty = f^*(\mathcal{H}_\infty) \end{cases}$$

<u>Propriétés supplémentaires que peut avoir une</u> E-<u>famille</u> : une E-famille $\mathfrak{F}$ sur X est dite

- <u>lisse</u> si la décomposition $X = X$ "marche" pour $\mathfrak{F}$, i.e. si tous les $\mathfrak{F}_\lambda$ et $\mathfrak{F}_\infty$ sont lisses sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\ell]$ et $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{an}$ respectivement

- <u>pure de poids</u> w si tous les faisceaux $\mathfrak{F}_\lambda$ sont ponctuellement purs de poids w sur les schémas $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\ell]$

- <u>pure</u> si elle est pure de poids w pour un certain w

- <u>entière</u> si tous les $\mathfrak{F}_\lambda$ sont entiers

- <u>mixte</u> si elle admet une filtration finie <u>dans la catégorie des</u> E-<u>familles</u> dont chaque gradué associé est pur (<u>attention</u> ! contrairement aux propriétés précédentes, mixte ne se vérifie pas $\mathfrak{F}_\lambda$ par $\mathfrak{F}_\lambda$).

4.9.2. E-<u>familles</u> <u>sur les courbes</u>.

Soit S un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ qui est irréductible et dont le point générique est de caractéristique nulle. Soit

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\bar{f}"] \\ S \end{tikzcd}$$

une courbe propre et lisse sur S à fibres géométriquement connexes et soit

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\bar{f}"'] & D \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl] \\ S \end{tikzcd}$$

un diviseur dans C qui est fini étale sur S . Nous supposons aussi qu'il existe un voisinage ouvert de D dans C dans lequel D est défini par une équation "$g = 0$". Désignons par U l'ouvert C-D de C , par $j : U \hookrightarrow C$ l'inclusion et par $f : U \longrightarrow S$ la restriction de $\bar{f}$ à U :

$$\begin{tikzcd} U = C-D \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & C \arrow[d, "\bar{f}"] & D \arrow[l, hook', "i"'] \\ & S & \end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{F}$ *une* E-*famille sur* C *telle que* $\mathcal{F}|U$ *et* $\mathcal{F}|D$ *sont lisses* (*une telle* E-*famille* $\mathcal{F}$ *sera dite* "*bonne*" *sur* C , *adaptée à la décomposition* (U,D) *de* C). *Alors on a* :

(i) *les faisceaux* $j_*j^*(\mathcal{F}_\lambda)$, $j_*j^*(\mathcal{F}_\infty)$ *sur* C *définissent une* E-*famille, notée* $j_*j^*\mathcal{F}$, *sur* C , *qui est bonne sur* C *et adaptée à la décomposition* (U,D) ;

(ii) *le noyau et l'image de l'application canonique*

$$\mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F} ,$$

que nous désignerons par $\mathcal{F}_{pct}$ *et* $\mathcal{F}_{npct}$ *respectivement, sont des* E-*familles bonnes sur* C , *adaptée à la décomposition* (U,D) ;

(iii) *la filtration de la monodromie sur les faisceaux* $j_*j^*(\mathcal{F}_\lambda)|D$, $j_*j^*(\mathcal{F}_\infty)|D$ *définit une filtration finie, dite encore de la monodromie, de la* E-*famille* $j_*j^*\mathcal{F}|D$,

$$\ldots \subset \mathrm{Fil}^M_i(j_*j^*\mathcal{F}|D) \subset \mathrm{Fil}^M_{i+1}(j_*j^*\mathcal{F}|D) \subset \ldots$$

par des sous-E-*familles lisses sur* D . *Les gradués* $\mathrm{Gr}^M_i(j_*j^*\mathcal{F}|D)$ *sont des* E-*familles lisses sur* D *et on a*

$$\mathrm{Gr}^M_i(j_*j^*\mathcal{F}|D) = 0$$

si $i > 0$;

(iv) *si* $j^*\mathcal{F}$ *sur* U *est pur de poids* w , *alors* $\mathrm{Gr}^M_i(j_*j^*\mathcal{F}|D)$ *est pur de poids* w+i *pour tout entier* $i \leqslant 0$ (*et nul pour* $i > 0$) ;

(v) *les faisceaux* $R^i\bar{f}_*\mathcal{F}_\lambda$, $R^i\bar{f}_*\mathcal{F}_\infty$ *forment une* E-*famille lisse, notée* $R^i\bar{f}_*\mathcal{F}$, *sur* S ;

(vi) *si* $j^*\mathcal{F}$ *sur* U *est pur de poids* w , *alors, pour tout entier* $i \geqslant 0$, *la* E-*famille lisse* $R^i\bar{f}_*(j_*j^*\mathcal{F})$ *est pure de poids* w+i .

DÉMONSTRATION. Comme S est supposé irréductible avec point générique de caractéristique zéro, les faisceaux $j^*\mathfrak{F}_\lambda$ sur $U\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/\ell]$ sont automatiquement modérément ramifiés le long de $D\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/\ell]$. Les énoncés (i), (ii) et (iii) découlent immédiatement de ceci et de la comparaison entre la monodromie locale algébrique et transcendante (cf. 4.7.6).

L'énoncé (iv), qui se vérifie λ par λ, est dû à Deligne (cf. 4.7.4).

Une fois vérifié (v), (vi) se vérifie λ par λ et équivaut alors au théorème fondamental de Deligne. Vérifions (v) : il résulte de 4.7.1 que les faisceaux $R^i\bar{f}_*\mathfrak{F}_\lambda$, $R^i\bar{f}_*\mathfrak{F}_\infty$ sont lisses sur $S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/\ell]$, $(S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an}$ respectivement ; ils forment une E-famille grâce à l'isomorphisme de commaraison entre cohomologie étale et cohomologie transcendante sur $\mathbb{C}$,

$$(R^i\bar{f}_*\mathfrak{F}_\lambda \mid S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an} \simeq R^i\bar{f}_*(\mathfrak{F}_\lambda \mid X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an} :$$

en effet, puisque $\mathfrak{F}$ est une E-famille, on a un isomorphisme

$$\varphi_{\lambda,\infty} : (\mathfrak{F}_\lambda \mid X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_\infty\otimes_E E_\lambda$$

donc des isomorphismes

$$\begin{tikzcd} R^i\bar{f}_*(\mathfrak{F}_\lambda \mid X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})^{an} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & R^i\bar{f}_*(\mathfrak{F}_\infty\otimes_E E_\lambda) \arrow[d, "\wr"] \\ & (R^i\bar{f}_*\mathfrak{F}_\infty)\otimes_E E_\lambda \end{tikzcd}$$

d'où la conclusion.

4.9.3. Le cas général.

THÉORÈME. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\mathfrak{F}$ une E-famille sur X. Alors on a les résultats suivants :

(1) il existe un entier $N \geqslant 1$ (dépendant de f et de $\mathfrak{F}$) tel que pour tout entier $i \geqslant 0$, les faisceaux $R^if_!\mathfrak{F}_\lambda$, $R^if_!\mathfrak{F}_\infty$ forment une E-famille, notée $R^if_!\mathfrak{F}$, sur $Y\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/N]$;

(2) <u>si</u> $\mathcal{F}$ <u>est entière, alors les</u> $R^i f_! \mathcal{F}$ <u>sont entières</u> ;

(3) <u>si</u> $\mathcal{F}$ <u>est mixte de poids</u> $\leq w$, <u>alors, pour tout entier</u> $i \geq 0$, $R^i f_! \mathcal{F}$ <u>est mixte de poids</u> $\leq w+i$.

DÉMONSTRATION. Le théorème est visiblement vrai pour f une immersion fermée avec $N=1$. Par le dévissage habituel (couper Y en morceaux, couper X en morceaux, factoriser le morphisme f), on se ramène au cas où Y est irréductible et où $X=\mathbb{A}^1_Y$. De là, on se ramène au cas où $X=\mathbb{P}^1_Y$ en prolongeant la E-famille $\mathcal{F}$ par zéro. Quitte à couper Y en morceaux une fois de plus, on peut supposer qu'il existe un diviseur $D\subset\mathbb{P}^1_Y$, qui est fini étale sur Y et qui est défini par une équation "$g=0$" dans un voisinage de lui-même dans $\mathbb{P}^1_Y$, tel que la E-famille $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^1_Y$ soit "bonne" adaptée à la décomposition $(\mathbb{P}^1_Y-D,D)$.

Si le point générique de Y est de caractéristique $p>0$, on prend $N=p$ et il n'y a rien à prouver.

Si le point générique de Y est de caractéristique zéro, l'énoncé (1), avec $N=1$, résulte de 4.9.2 (v). Pour démontrer (3), un dévissage standard nous ramène à traiter le cas où $\mathcal{F}|\mathbb{P}^1_Y-D$ est pur de poids w et où $\mathcal{F}|D=0$; dans ce cas, l'énoncé (3) résulte de 4.9.2 (iv) et (vi), via une suite exacte longue de cohomologie que le lecteur explicitera.

4.9.4. <u>Applications aux questions d'indépendance</u>.

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> R <u>un sous-anneau de</u> $\mathbb{C}$ <u>qui est de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$ <u>et soit</u> V <u>un</u> R-<u>schéma</u> <u>de type fini</u>. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>une</u> E-<u>famille</u> <u>mixte sur</u> V (exemple : $E=\mathbb{Q}$, $\mathcal{F}_\ell=\mathbb{Q}_\ell$, $\mathcal{F}_\infty=\mathbb{Q}$). <u>Alors il existe un élément</u> $r\in R-\{0\}$ <u>tel que, pour tout corps fini</u> $\mathbb{F}_q$, <u>pour tout homomorphisme</u> $\varphi: R[1/r]\rightarrow\mathbb{F}_q$ <u>et pour toute place</u> λ <u>de</u> E <u>de caractéristique résiduelle</u> $\ell\neq\mathrm{car}(\mathbb{F}_q)$, <u>on a l'énoncé suivant</u> :

"<u>pour tout entier</u> $i\geq 0$ <u>et pour tout entier</u> w , <u>la dimension</u> h^i_w <u>de la partie de poids</u> w <u>de</u>

$$H^i_c(V\otimes_{R\xrightarrow{\varphi}}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}_\lambda)$$

est indépendante du choix de $(\mathbb{F}_q,\varphi,\lambda)$".

PREUVE. Pour r convenable, les $R^i f_! \mathcal{F}$ sont des E-familles lisses sur $\mathrm{Spec}(R[1/r])$ qui admettent une filtration finie par des sous-E-familles lisses dont les gradués sont des E-familles lisses et pures. La somme des rangs des gradués de $R^i f_! \mathcal{F}$ qui sont purs de poids w est alors l'entier h^i_w, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 2. Soit R un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$, soit V un R-schéma de type fini, soit $f : V \to \mathbb{A}^1_R$ une fonction sur V et soit $\mathcal{F}$ une E-famille mixte sur V. Alors il existe un élément $r \in R-\{0\}$ tel que, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, pour tout homomorphisme $\varphi : R[1/r] \to \mathbb{F}_q$, pour tout caractère non trivial

$$\Psi : (\mathbb{F}_q,+) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$$

et pour toute place λ de E de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, on a les énoncés suivants :

(1) pour tout entier $i \geqslant 0$ et tout entier w, la $E_{\lambda,p}$-dimension

$$h^i_w(V \otimes_{R \xrightarrow{\varphi}} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

de la partie de poids w de

$$H^i_c(V \otimes_{R \xrightarrow{\varphi}} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

est indépendante du choix de $(\mathbb{F}_q,\varphi,\Psi,\lambda)$;

(2) la suite spectrale de Leray

$$E_2^{a,b} = H^a_c(\mathbb{A}^1_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, (R^b f_! \mathcal{F}_\lambda) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{a+b}_c(V_\varphi \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\Psi,f})$$

satisfait $E_2^{a,b} = 0$, pour $a \neq 0,1$, et par conséquent dégénère en E_2.

PREUVE. Démontrons (2). Quitte à se localiser sur $\mathrm{Spec}(R)$, nous pouvons supposer que les E-familles $R^i f_! \mathcal{F}$ sur $\mathbb{A}^1_R$ sont "bonnes", adaptées à une décomposition $(\mathbb{A}^1_R - D, D)$ où $D \subset \mathbb{A}^1_R$ est un diviseur fini étale au-dessus de $\mathrm{Spec}(R)$, défini par une équation. Cela étant, il résulte de 4.7.1 que les $R^i f_! \mathcal{F}_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\ell]$ sont modérément ramifiés le long de $l'\infty$, d'où $E_2^{2,b} = 0$ (cf. 4.8.2). Pour une raison de dimension, on a $E_2^{a,b} = 0$ pour $a > 2$, et on trouve l'énoncé (2).

Démontrons (1). Grâce à (2) et au théorème 4.9.3, on se ramène au cas $V = \mathbb{A}^1_R$, $f = id$ et $\mathcal{F}$ = "une E-famille mixte sur $\mathbb{A}^1_R$". Quitte à rétrécir R , nous pouvons supposer en plus que R est lisse sur Spec($\mathbb{Z}$), donc que R est normal, que $\mathcal{F}$ est "bonne" sur $\mathbb{A}^1_R$, adaptée à une décomposition $(\mathbb{A}^1_R - D, D)$, avec $D \subset \mathbb{A}^1_R$ un diviseur fini étale sur Spec(R), défini par une équation, et que $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{pct}$ et $\mathcal{F}_{npct}$ admettent toutes les trois des filtrations finies par des sous-E-familles qui sont toutes bonnes sur $\mathbb{A}^1_R$, adaptées à $(\mathbb{A}^1_R - D, D)$, et que les gradués de ces filtrations sont des E-familles pures. Dans cette situation, le théorème clef de 4.3 et ses corollaires 1 et 1' marchent tout aussi bien dans le cadre des E-familles (car dans les formules explicites de ces énoncés, seuls entrent en ligne de compte les entiers $\chi_c((\mathbb{A}^1_R \otimes_R \mathbb{C})^{an}, \mathcal{F}_\infty)$, $\dim((\mathcal{F}_\infty)_{\bar{\eta}})$ et leurs analogues pour $\mathcal{F}_{pct}$ et $\mathcal{F}_{npct}$).

RETOUR AU THÉORÈME 3.1.1. Prenons pour E le corps $\mathbb{Q}$ et pour R l'anneau $\mathbb{Z}$. D'après le corollaire 2 ci-dessus, appliqué à la $\mathbb{Q}$-famille triviale $(\ldots, \mathbb{Q}_\ell, \ldots, \mathbb{Q})$ sur V , il existe $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tel que les entiers

$$h^i_w = h^i_w(V \otimes_{\mathbb{Z} \overset{\varphi}{\to}} \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{L}_{\Psi, f})$$

définis en (loc. cit. (1)) soient indépendants du choix de

$$(\varphi : \mathbb{Z}[1/r] \to \mathbb{F}_q, \Psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{Q}(\zeta_p)^* \text{ non trivial}, \ell \neq p).$$

Les entiers h^i_w ne dépendent que de $f : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, à la différence de ceux définis en 4.3.2, qui dépendaient du choix de ℓ .

Par contre on ne sait pas si les polynômes

$$\det(1 - TF, H^i_c(V \otimes_{\mathbb{Z} \overset{\varphi}{\to}} \bar{\mathbb{F}}_q , \mathcal{L}_{\Psi, f})$$

sont indépendants de la place ℓ choisie (cf. 3.2.2). Cela nous conduit à poser le problème plus général suivant :

4.9.5. <u>Question</u>.

Disons qu'une E-famille $\mathfrak{F}$ sur un schéma X de type fini sur $\mathbb{Z}$ est "compatible" si pour tout point fermé x de X et pour toute place λ de E de caractéristique résiduelle $\ell \neq \mathrm{car}(k(x))$, le polynôme caractéristique

$$\det(1-T.F_x,(\mathfrak{F}_\lambda)_{\bar{x}}) ,$$

qui à priori se trouve dans $E_\lambda[T]$, est en fait dans $E[T]$ où il est <u>indépendant</u> du choix de la place λ .

Est-il vrai que, si $f : X \to Y$ est un morphisme entre schémas de type fini sur $\mathbb{Z}$ et si $\mathfrak{F}$ est une E-famille compatible sur X , alors il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que les $R^i f_! \mathfrak{F}$ sur $Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/N]$ soient encore des E-familles compatibles ? Y a-t-il une notion encore plus exigeante de "E-familles strictement compatibles" qui est stable par les $R^i f_!$ et telle que la E-famille triviale $(\ldots,\mathbb{Q}_\ell,\ldots,\mathbb{Q})$ soit une E-famille strictement compatible ? On n'en sait presque rien !

5 - ANALYSE PRÉCISE DE SOMMES EXPONENTIELLES DONT LA GÉOMETRIE EST TRÈS BELLE

5.1. Introduction.

Le théorème clef du numéro 4 est un théorème générique ("pour presque tout p , on a...") ; dans une situation particulière ("p donné"), il ne nous fournit par contre aucun résultat.

Cependant, si on considère une situation

$$\begin{array}{c} V \\ \Big\downarrow f \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \end{array} \quad , \qquad \Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$$

où V est un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, f une fonction sur V et Ψ un caractère additif non trivial, on dispose, pour toute place λ de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda | \ell \neq p$, d'un $\mathbb{Q}(\zeta_p)_\lambda$-faisceau lisse de rang 1 , $\mathcal{L}_\Psi$, sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ et des groupes de cohomologie

$$H^i_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

sur lesquels "Frobenius" agit et on attend les résultats suivants :

(1) les dimensions et les structures de poids de ces groupes de cohomologie sont indépendantes du choix de la place λ de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda | \ell \neq p$;

(2) les polynômes caractéristiques

$$P_{i,\lambda}(T) = \det(1-T.F, H^i_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi))$$

sont, en fait, à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et indépendants du choix de la place $\lambda | \ell \neq p$ (rappelons qu'on sait seulement jusqu'à présent que la fonction L ,

$$L(T) = \prod_i P_{i,\lambda}(T)^{(-1)^{i+1}}$$

est à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et est indépendante du choix de la place $\lambda | \ell \neq p$) ;

(3) on espère aussi que les structures de poids des groupes de cohomologie ci-dessus sont indépendantes du choix du caractère additif non trivial Ψ .

Dans certains cas que l'on va traiter ci-dessous, on sait démontrer qu'il existe $i_o \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute place λ de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda | \ell \neq p$, et pour tout caractère additif non trivial $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$

(a) $H^i_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \neq i_o$

(b) $H^{i_o}_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ est pur de poids i_o .

On en déduit aussitôt que

(i) les $P_{i,\lambda}(T)$ sont à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et sont indépendants du choix de la place $\lambda | \ell \neq p$ ($P_{i,\lambda}(T) = 1$ si $i \neq i_o$ et

$$P_{i_o,\lambda}(T) = L(T)^{(-1)^{i_o+1}}) \ ;$$

(ii) les racines réciproques de

$$P_{i_o,\lambda}(T) = L(T)^{(-1)^{i_o+1}}$$

sont des entiers algébriques α_j purs de poids i_o .

Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme trigonométrique

$$S_n = \sum_{v \in V(\mathbb{F}_{q^n})} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(v))) = (-1)^{i_o} \sum_j \alpha_j^n$$

admet la majoration

$$|S_n| \leqslant (-1)^{i_o} . \chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) . (\sqrt{q})^{ni_o}$$

et cette majoration est la meilleure possible au sens où

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|S_n|}{(\sqrt{q})^{ni_o}} = (-1)^{i_o} . \chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \ .$$

Si, de plus, on connait une formule explicite donnant $\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ en fonction des degrés des polynômes qui servent à définir $V/\mathbb{F}_q$ et $f : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, on aura complètement résolu le problème de majoration des sommes trigonométriques S_n ci-dessus.

La fin de ce cours est consacrée à la démonstration de théorèmes qui résolvent ce problème de majoration dans des cas où la géométrie est particulièrement belle. Le premier de ces théorèmes s'énonce :

THEOREME 5.1.1. Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension m, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q} = \mathbb{P}$ un plongement projectif de X, soit $L \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ définissant un hyperplan de $\mathbb{P}$, noté encore L, transverse à X, soit $H \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d))$, $d \in \mathbb{N}^*$, d premier à la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$, définissant une hypersurface de $\mathbb{P}$, notée encore H, transverse à $X \cap L$. On associe à ces données le $\mathbb{F}_q$-schéma de type fini

$$V = X - (X \cap L)$$

et la fonction

$$f = H/L^d : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} .$$

Pour tout caractère additif non trivial $\Psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$ et pour toute place λ de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda | \ell$, $\ell \neq p$, on a

(0) pour tout $i \in \mathbb{N}$, la flèche canonique

$$H^i_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^i(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

est un isomorphisme ;

(1) $H^i_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \neq m$;

(2) $H^m_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ est pur de poids m ;

(3) $\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(X-(X \cap L)) - d.\chi_c((X \cap L) - (X \cap L \cap H))$;

(3') si $\tilde{H} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d))$ définit une hypersurface de $\mathbb{P}$, notée encore $\tilde{H}$, transverse à X et à $X \cap L$ (H n'est pas supposée transverse à X),

$$\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(X-(X \cap L)) - \chi_c((X \cap \tilde{H}) - (X \cap \tilde{H} \cap L)) ;$$

(3") si $c(X)$ est la classe de Chern totale de X,

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \int_X \frac{c(X)}{(1+L)(1+dL)} .$$

REMARQUE. Deux cas particuliers de ce théorème sont déjà connus :

(i) (Deligne, cf. Weil I). Cas où

$$X = \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[X_o, X_1, \ldots, X_N])$$

où $H = H(X_o, X_1, \ldots, X_N)$ est un polynôme homogène de degré d, $(d,p)=1$, et $L=X_o$. Si $x_i = X_i/X_o$ $(i=1,\ldots,n)$, on a

$$V = X - (X\cap L) = \mathbb{A}^N_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_N])$$

et

$$f = f(x_1,\ldots,x_N) = H/L^d = H(1,x_1,\ldots,x_N) .$$

L'hypothèse signifie que la partie homogène de degré d de $f(x_1,\ldots,x_N)$ définit une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^{N-1}_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_N])$. Deligne a prouvé alors que les conclusions (0), (1), (2) du théorème sont vérifiées et que

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = (-1)^N(d-1)^{N+1}$$

(énoncé équivalent dans cette situation aux énoncés (3), (3') et (3")), de sorte que

$$\left|\sum_{x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{F}_{q^n}} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(f(x_1,\ldots,x_N)))\right| \leqslant (d-1)^{N+1}(\sqrt{q})^{Nn} .$$

(ii) (Katz, exposés à Irvine 1977 ; cf. Séminaire E.N.S. 1978-1979, exposé n° 10). Cas où

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[X_o,X_1,X_2,X_3])$$

est une hypersurface de degré D, $(D,p)=1$ (X est défini par un polynôme homogène $G(X_o,X_1,X_2,X_3)$ de degré D), où $H = \alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3$ et où $L=X_o$. Si $x_i = X_i/X_o$ $(i=1,2,3)$, on a

$$V = X - (X\cap L) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{F}_q} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[x_1,x_2,x_3])$$

et

$$f = f(x_1,x_2,x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \ .$$

Alors les conclusions (0), (1), (2) du théorème sont vérifiées et

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = D(D-1)^2$$

(énoncé équivalent à (3), (3') et (3")), de sorte que

$$\left|\sum_{\substack{x_1,x_2,x_3\in\mathbb{F}_{q^n}\\ G(1,x_1,x_2,x_3)=0}} \Psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3))\right| \leqslant D(D-1)^2\ q^n \ .$$

HISTORIQUE. Le cas (i), démontré par Deligne, était conjecturé depuis longtemps par Mordell, et plus récemment par Bombieri.

Le cas (ii) était "commandé" par C. Hooley, dans le cas $d=3$, X une surface de Fermat ; il en avait besoin pour ses travaux sur le problème de Waring.

QUESTIONS (1) Si $p|d$, que devient le théorème ?

(2) Sous les hypothèses du théorème, quelle est la dépendance en Ψ du "polygone de Newton" (i.e. des valuations p-adiques des valeurs propres de Frobenius sur $H_c^m(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$) ?

(3) Si l'on part de $X, L, H, \ldots$ définis sur $\mathbb{Z}$, quelle est la dépendance en p, $(p,d)=1$, du polygone de Newton ?

EXEMPLE (Sperber). Soit V l'hypersurface affine de $\mathbb{A}^{m+1}_{\mathbb{F}_q}$ d'équation

$$\prod_{i=1}^{m+1} x_i = 1$$

et soit

$$f = \sum_{i=1}^{m+1} x_i \ .$$

Deligne a montré que Frobenius agissant sur $H_c^m(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ admet $m+1$ valeurs propres α_j $(j=1,\ldots,m+1)$ de poids m et Sperber a montré que, si $p \geqslant m+2$, les $\mathrm{ord}_q(\alpha_j)$ forment un ensemble qui est

$$\{0,1,2,\ldots,m\} \ .$$

Ce qui est frappant dans cet exemple, c'est que le polygone de Newton est indépendant de p . En général, on ne sait rien sur la variation avec p du polygone de Newton. Même le fait que, dans l'exemple de Sperber, les sommets du polygone ("break points") sont à coordonnées entières semble tout à fait exceptionnel, ce n'est déjà plus vrai pour la somme à une variable

$$\sum_{x \neq 0} \Psi(x^2+1/x)$$

(les pentes sont 0 , $1/2$ et 1).

<u>Les idées de la démonstration de</u> 5.1.1.

Notons $j : V = X - (X \cap L) \hookrightarrow X$ l'inclusion, l'énoncé (0) résulte, via la suite spectrale de Leray pour j , de l'énoncé local à l'infini de V suivant :

(0') la flèche canonique

$$j_! f^* \mathcal{L}_\Psi \longrightarrow j_* f^* \mathcal{L}_\Psi$$

est un isomorphisme et

$$R^i j_* f^* \mathcal{L}_\Psi = 0$$

pour tout entier $i > 0$.

(Cet énoncé est un cas particulier de résultats plus forts dus à Deligne, cf. Séminaire ENS, 1978-1979, exposé n° 10 ; cependant on donnera une démonstration globale de l'énoncé (0) au numéro 5.3).

Les énoncés (1) et (2) se déduisent alors de l'énoncé (0) via la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz affine et le théorème fondamental de Deligne (Weil II).

Pour les formules (3) et (3'), la suite spectrale de Leray pour le morphisme $f : V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbf{F}}_q}$ nous ramène au calcul des

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbf{F}}_q}, (R^i f_! \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \qquad (i \in \mathbb{N}) \ ;$$

pour cela, on utilise le lemme clef du numéro 4.8.2 : en effet, on sait montrer que les $R^i f_! \mathbb{Q}_\ell$ $(i \in \mathbb{N})$ sont modérés à l'infini.

Enfin, on passe des formules (3) et (3') à la formule (3") en utilisant les relations suivantes entre caractéristiques d'Euler-Poincaré ℓ-adiques et degrés des classes de Chern (cf. SGA 7, XVII) :

$$\chi(X) = \int_X c(X)$$

$$\chi(X\cap L) = \int_X \frac{L}{1+L}\, c(X)$$

$$\chi(X\cap \widetilde{H}) = \int_X \frac{dL}{1+dL}\, c(X)$$

et

$$\chi(X\cap L\cap \widetilde{H}) = \int_X \frac{dL^2}{(1+L)(1+dL)}\, c(X) .$$

Concluons ce numéro en remarquant que 5.1.1 est un cas particulier du théorème un peu plus général suivant :

THEOREME 5.1.2. <u>Soit</u> X <u>une variété projective lisse, géométriquement connexe, de dimension</u> m , <u>sur un corps fini</u> $\mathbb{F}_q$, <u>soit</u> $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q} = \mathbb{P}$ <u>un plongement projectif de</u> X , <u>soit</u> $Z \in H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a.\delta))$ <u>définissant une hypersurface de</u> $\mathbb{P}$, <u>notée encore</u> Z , <u>transverse à</u> X , <u>soit</u> $H \in H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(b.\delta))$, <u>définissant une hypersurface de</u> $\mathbb{P}$, <u>notée encore</u> H , <u>transverse à</u> $X\cap Z$. <u>On suppose que</u> $a,b,\delta \in \mathbb{N}^*$ <u>vérifient</u> :

$$(a,b) = (a,p) = (b,p) = 1 \qquad (p = \mathrm{car}(\mathbb{F}_q)).$$

<u>On associe à ces données le</u> $\mathbb{F}_q$<u>-schéma de type fini</u>

$$V = X - (X\cap Z)$$

<u>et la fonction</u>

$$f = H^a/Z^b : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} .$$

<u>Pour tout caractère additif non trivial</u> $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$ <u>et pour toute place</u> λ <u>de</u> $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda|\ell$, $\ell\neq p$, <u>on a</u> :

(0) <u>pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$, <u>la flèche canonique</u>

$$H^i_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^i(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

<u>est un isomorphisme</u> ;

(1) $H^i_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0$ <u>pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$, $i \neq m$;

(2) $H^m_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ <u>est pur de poids</u> m ;

(3) $\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(X-(X\cap Z)) - b\chi_c((X\cap Z)-(X\cap Z\cap H))$;

(3') <u>si</u> $\widetilde{H} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(b.\delta))$ <u>définit une hypersurface de</u> $\mathbb{P}$, <u>notée encore</u> $\widetilde{H}$, <u>transverse à</u> X <u>et à</u> $X\cap Z$

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(X-(X\cap Z)) - a.\chi_c((X\cap\widetilde{H})-(X\cap\widetilde{H}\cap Z)) ;$$

(3") <u>si</u> $c(X)$ <u>est la classe de Chern totale de</u> X,

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \int_X \frac{1+b(1-a)\delta L}{(1+a\delta L)(1+b\delta L)}\, c(X)$$

<u>où</u> L <u>est la classe d'une section hyperplane de</u> $\mathbb{P}$.

Comme l'énoncé 5.1.2 n'est pas beaucoup plus difficile à démontrer que l'énoncé 5.1.1, on se placera dorénavant dans la situation un peu plus générale de 5.1.2.

5.2. <u>Preuve de</u> 5.1.2.

PREUVE DE (0), (1) et (2). Soit $j : V = X-(X\cap Z) \hookrightarrow X$ l'inclusion, Deligne a démontré le résultat suivant (cf. Séminaire ENS, 1978-1979, exposé n° 10) :

(0') <u>la flèche canonique</u>

$$j_! f^*\mathcal{L}_\Psi \longrightarrow j_* f^*\mathcal{L}_\Psi$$

<u>est un isomorphisme et</u>

$$R^s j_* f^*\mathcal{L}_\Psi = 0$$

<u>pour tout entier</u> $s > 0$.

Considérons alors la suite spectrale de Leray pour j,

$$E_2^{rs} = H^r(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, R^s j_* f^*\mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{r+s}(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) ;$$

d'après (0'), on a

$$E_2^{r,o} = H_c^r(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \qquad (\forall r \in \mathbf{N})$$

et, pour tout entier $s > 0$,

$$E_2^{rs} = 0 \qquad (\forall r \in \mathbf{N}) ,$$

donc la suite spectrale dégénère en E_2 et se réduit à une collection d'isomorphismes

$$E_2^{r,o} \xrightarrow{\sim} E_\infty^r \qquad (\forall r \in \mathbf{N})$$

d'où (0) (pour une autre démonstration, cf. 5.3).

Maintenant, déduisons (1) et (2) de (0). Tout d'abord, comme V est affine, on a

$$H^i(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0 \qquad (\forall i > m)$$

donc, d'après (0), on a aussi

$$H_c^i(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0 \qquad (\forall i > m) .$$

D'autre part, $V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$ est lisse sur $\bar{\mathbf{F}}_q$ et $f^*\mathcal{L}_\Psi$ est lisse sur $V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$, donc, par dualité de Poincaré

$$H_c^i(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = (H^{2m-i}(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, (f^*\mathcal{L}_\Psi)^\vee)(m))^\vee$$

et par Lefschetz affine, on en déduit que l'on a encore

$$H_c^i(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0 \qquad (\forall i < m) .$$

On a donc prouvé (1). Pour (2), on remarque que $\mathcal{L}_\Psi$, donc $f^*\mathcal{L}_\Psi$, est pur de poids 0 , donc d'après le théorème fondamental de Deligne (Weil II),

$$H_c^m(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

est mixte de poids $\leqslant m$; d'autre part, la dualité de Poincaré donne l'égalité

$$H^m(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = (H_c^m(V \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, (f^*\mathcal{L}_\Psi)^\vee)(m))^\vee$$

donc, si on applique de nouveau le théorème fondamental de Deligne, on trouve que

$$H^m(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

est mixte de poids $\geqslant m$; la conclusion résulte alors de (O) (cf. aussi SGA $4\frac{1}{2}$, [Sommes Trig.], prop. 1.20).

PREUVE DE (3), (3') ET (3"). La suite spectrale de Leray pour le morphisme $f : V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ et le faisceau $f^*\mathcal{L}_\Psi$ sur $V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q$ s'écrit

$$E_2^{ij} = H_c^i(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi\otimes R^j f_!\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{i+j}(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

par suite

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \sum_j (-1)^j\, \chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi\otimes R^j f_!\mathbb{Q}_\ell) .$$

Si l'on montre que les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux constructibles $R^j f_!\mathbb{Q}_\ell$ $(j\in\mathbb{N})$ sur $\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ sont modérément ramifiés à l'infini, on pourra appliquer le lemme clef du numéro 4.8.2 et on aura, pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi\otimes R^j f_!\mathbb{Q}_\ell) = \chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, R^j f_!\mathbb{Q}_\ell) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(R^j f_!\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}}$$

où $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$. Par suite, on aura

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(V) - \chi_c(f^{-1}(\bar{\eta}))$$

Si l'on montre que

$$\begin{aligned}\chi_c(f^{-1}(\bar{\eta})) &= b.\chi_c((X\cap Z) - (X\cap Z\cap H)) \\ &= a.\chi_c((X\cap \tilde{H}) - (X\cap \tilde{H}\cap Z))\end{aligned}$$

on aura gagné pour ce qui est des formules (3) et (3'). On passe ensuite de ces formules à la formule (3") de la manière habituelle (cf. SGA 7, XVII).

On va prouver simultanément la modération des $R^j f_!\mathbb{Q}_\ell$ et les formules donnant la valeur de $\chi_c(f^{-1}(\bar{\eta}))$.

PREUVE DE LA MODÉRATION DES $R^j f_!\mathbb{Q}_\ell$ ET CALCUL DE $\chi_c(f^{-1}(\bar{\eta}))$. Commençons par remarquer que, quitte à remplacer le plongement projectif donné de la situation par son δ-ième multiple, on peut supposer $\delta = 1$; on suppose donc que

$$\deg(Z) = a \ , \ \deg(H) = b \ ,$$

avec $(a,b) = (a,p) = (b,p) = 1$.

On considère alors le revêtement suivant

$$\begin{tikzcd} Y = X[H^{1/b}, Z^{1/a}] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}' \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, hook] & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

(si $\mathbb{P} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[X_o, X_1, \ldots, X_N])$ et si $X \hookrightarrow \mathbb{P}$ est défini par l'idéal homogène $I \subset \mathbb{F}_q[X_o, X_1, \ldots, X_N])$, alors $\mathbb{P}' = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}_q[X_o, X_1, \ldots, X_N, T, U])$ et $Y \hookrightarrow \mathbb{P}'$ est défini par l'idéal homogène J engendré par I , T^b-H et U^a-Z). Y est une variété projective lisse sauf en un nombre fini de points, ceux qui sont au-dessus des points singuliers de $X \cap H$ (Z est transverse à H et transverse à $X \cap H$, donc d'une part le lien singulier de $X \cap H$ ne rencontre pas Z ; d'autre part $X \cap H$ ne présente qu'un nombre fini de points singuliers, puisque toute courbe singulière dans $X \cap H$ rencontrerait Z).

LEMME. <u>Pour tout</u> $\lambda \in \mathbb{G}_m$, <u>le revêtement</u> π <u>induit un morphisme</u>

$$\pi_\lambda : Y \cap (H^{1/b} = \lambda Z^{1/a}) \longrightarrow X \cap (H^a = \lambda^{ab} Z^b)$$

<u>qui est radiciel, surjectif et propre</u>.

PREUVE. Comme π est propre, il ne reste à montrer que π_λ est radiciel et surjectif et pour cela, on peut supposer X affine ; H et Z induisent des fonctions h et z sur X respectivement. Un point de $X(\bar{\mathbb{F}}_q) \cap (H^a = \lambda^{ab} Z^b)$ est un point $x \in X(\bar{\mathbb{F}}_q)$ tel que

$$(\lambda^{-b} h(x))^a = z(x)^b$$

et un point de $Y(\bar{\mathbb{F}}_q) \cap (H^{1/b} = \lambda Z^{1/a})$ au-dessus de x est un triplet (x,t,u) où t , $u \in \bar{\mathbb{F}}_q$ et où

$$t^b = h(x) \ , \ u^a = z(x) \quad \text{et} \quad t = \lambda u \ .$$

Or, si on se donne $A, B \in \bar{\mathbb{F}}_q$ tels que $A^a = B^b$, il existe un unique $u \in \bar{\mathbb{F}}_q$ tel que

$$u^b = A \quad , \quad u^a = B$$

puisque $(a,b) = 1$ (d'après Bezout $1 = aa' + bb'$ et $u = A^{b'}B^{a'}$). Donc

$$\pi_\lambda : Y(\bar{\mathbb{F}}_q) \cap (H^{1/b} = \lambda Z^{1/a}) \longrightarrow X(\bar{\mathbb{F}}_q) \cap (H^a = \lambda^{ab} Z^b)$$

est bijectif, d'où la conclusion.

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$, on a

$$\chi(X \cap (H^a = \lambda^{ab} Z^b)) = \chi(Y \cap (H^{1/b} = \lambda Z^{1/a})) \ .$$

Considérons la variété d'incidence

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_2"] \\ \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

où, pour $\lambda \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$,

$$\varphi^{-1}(\lambda) = Y \cap (H^{1/b} = \lambda Z^{1/a}) \ ;$$

$\tilde{Y}$ est l'éclaté de Y le long de $(H^{1/b} = Z^{1/a} = 0)$ et $\tilde{Y}$ est lisse sauf en un nombre fini de points appartenant à $\varphi^{-1}(0)$ (Y est lisse sauf en un nombre fini de points, ceux qui sont au-dessus des points singuliers de $X \cap H$). De plus, $\varphi^{-1}(\lambda)$ est non singulière pour λ général ; plus précisément, si ∞ est le point à l'infini de $\mathbb{A}^1$ dans $\mathbb{P}^1$, $\varphi^{-1}(\infty)$ est non singulière : en effet,

$$\varphi^{-1}(\infty) = Y \cap (Z^{1/a} = 0) = (X \cap Z)[H^{1/b}] \ ,$$

H est transverse à $X \cap Z$ et b est premier à p .

Comme $(b,p) = 1$, la formule d'Hurwitz (cf. 5.5.2) permet de calculer $\chi(\varphi^{-1}(\infty))$ et on obtient

$$\chi(\varphi^{-1}(\infty)) = b.\chi_c((X \cap Z) - (X \cap Z \cap H)) + \chi(X \cap Z \cap H) \ .$$

Par suite, pour $\lambda \in \mathbb{G}_m$, λ général, on a

$$\begin{aligned}\chi(X\cap(H^a=\lambda^{ab}Z^b)) &= \chi(\varphi^{-1}(\lambda)) = \chi(\varphi^{-1}(\infty))\\ &= b.\chi_c((X\cap Z)-(X\cap Z\cap H)) + \chi(X\cap Z\cap H)\end{aligned}$$

d'où

$$\chi_c(f^{-1}(\bar\eta)) = b.\chi_c((X\cap Z)-(X\cap Z\cap H))$$

puisque, pour $\lambda\in\mathbb{G}_m$, on a

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda^{ab}) &= (X-(X\cap Z))\cap(H^a=\lambda^{ab}Z^b)\\ &= (X\cap(H^a=\lambda^{ab}Z^b))-(X\cap Z\cap H)\ .\end{aligned}$$

Maintenant, si $\widetilde H$ est une hypersurface de degré b transverse à X et à $X\cap Z$, on a clairement

$$\chi_c((X\cap Z)-(X\cap Z\cap H)) = \chi_c((X\cap Z)-(X\cap Z\cap\widetilde H))$$

donc pour montrer que

$$\chi_c(f^{-1}(\bar\eta)) = a.\chi_c((X\cap\widetilde H)-(X\cap\widetilde H\cap Z))$$

on peut remplacer $f=H^a/Z^b$ par $\widetilde f=\widetilde H^a/Z^b$ ou, ce qui revient au même, on peut supposer que $\widetilde H=H$, i.e. que H est transverse aussi à X. Mais alors $\varphi^{-1}(0)$ est non singulière : en effet,

$$\varphi^{-1}(0) = Y\cap(H^{1/b}=0) = (X\cap H)[Z^{1/a}]$$

et Z est transverse à $X\cap H$, qui lui-même est non singulier ; de plus, on a

$$\chi(\varphi^{-1}(0)) = a.\chi_c((X\cap H)-(X\cap H\cap Z)) + \chi(X\cap H\cap Z)$$

(formule classique d'Hurwitz puisque $(a,p)=1$) ; donc pour $\lambda\in\mathbb{G}_m$, λ général, on a

$$\begin{aligned}\chi(X\cap(H^a=\lambda^{ab}Z^b)) &= \chi(\varphi^{-1}(\lambda)) = \chi(\varphi^{-1}(0))\\ &= a.\chi_c((X\cap H)-(X\cap H\cap Z))+\chi(X\cap H\cap Z)\end{aligned}$$

d'où comme précédemment

$$\chi_c(f^{-1}(\bar\eta)) = a.\chi_c((X\cap H)-(X\cap H\cap Z))\ .$$

Prouvons maintenant la modération des $R^j f_! \mathbb{Q}_\ell$ à l'infini. Pour cela, considérons la variété d'incidence

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \hookrightarrow & X \times \mathbb{P}^1 \\ \theta \downarrow & \swarrow_{pr_2} & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

où, pour tout $\lambda \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, on a

$$\theta^{-1}(\lambda) = X \cap (H^a = \lambda Z^b) \ .$$

La projection $pr_1 : X \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ induit un morphisme propre $\gamma : \tilde{X} \longrightarrow X$ tel que

$$\gamma^{-1}(X \cap H \cap Z) = (X \cap H \cap Z) \times \mathbb{P}^1$$

et que

$$\gamma | (\tilde{X} - \gamma^{-1}(X \cap H \cap Z)) \ : \ \tilde{X} - \gamma^{-1}(X \cap H \cap Z) \longrightarrow X - (X \cap H \cap Z)$$

soit un isomorphisme, de sorte que l'on peut identifier $X - (X \cap H \cap Z)$ à l'ouvert de $\tilde{X}$, complémentaire du fermé $\gamma^{-1}(X \cap H \cap Z) = (X \cap H \cap Z) \times \mathbb{P}^1$.
On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} V = X - (X \cap Z) & \hookrightarrow & X - (X \cap H \cap Z) & \hookrightarrow & \tilde{X} & \hookleftarrow & \tilde{X}|\mathbb{A}^1 \\ \downarrow f = H^a/Z^b & \square & \downarrow g = H^a/Z^b & & \downarrow \theta & \square & \downarrow \theta|\mathbb{A}^1 \\ \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 & = & \mathbb{P}^1 & \hookleftarrow & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

où le dernier carré est cartésien par construction ; on vérifie sans peine que le premier carré est lui aussi cartésien ; par suite, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$(R^j g_! \mathbb{Q}_\ell)|\mathbb{A}^1 = R^j f_! \mathbb{Q}_\ell$$

et

$$(R^j \theta_! \mathbb{Q}_\ell)|\mathbb{A}^1 = R^j(\theta|\mathbb{A}^1)_! \mathbb{Q}_\ell$$

(théorème de changement de base pour la cohomologie à support propre).
Or on a la suite d'excision sur $\mathbb{P}^1$

$$\longrightarrow R^j g_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^j \theta_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathcal{H}^j \longrightarrow \cdots$$

où $\mathcal{H}^j$ est le $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constant sur $\mathbb{P}^1$ de valeur $H^j(X \cap H \cap Z)$, donc par restriction à $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, on a la suite exacte longue

$$\longrightarrow R^j f_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^j(\theta|\mathbb{A}^1)_! \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathcal{H}^j|\mathbb{A}^1 \longrightarrow \cdots .$$

Comme la partie sauvage $P_{\overline{\infty}}$ du groupe d'inertie $I_{\overline{\infty}}$ du point $\infty \in \mathbb{P}^1$ est un pro-p-groupe, les représentations continues ℓ-adiques de dimension finie de $P_{\overline{\infty}}$ sont semi-simples ; donc les foncteurs qui associent à de telles représentations leurs composantes isotypiques sont des foncteurs exacts. Si on applique ce résultat à la suite exacte longue ci-dessus, on trouve que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Swan}_\infty(R^j f_! \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Swan}_\infty(R^j(\theta|\mathbb{A}^1)_! \mathbb{Q}_\ell) .$$

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}|\mathbb{A}^1 \arrow[d, "\theta|\mathbb{A}^1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X}|\mathbb{G}_m \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\theta|\mathbb{G}_m"] & \widetilde{Y}|\mathbb{G}_m \arrow[l, "\widetilde{\pi}|\mathbb{G}_m"'] \arrow[d, "\varphi|\mathbb{G}_m"] \\
\mathbb{A}^1 & \mathbb{G}_m \arrow[l, hook'] & \mathbb{G}_m \arrow[l, "\lambda \overset{\text{"ab"}}{\longmapsto} \lambda^{ab}"']
\end{tikzcd}$$

où, par construction, le premier carré est cartésien ; le second carré de ce diagramme est "topologiquement cartésien", i.e. que la flèche

$$\widetilde{Y}|\mathbb{G}_m \xrightarrow{(\widetilde{\pi}|\mathbb{G}_m) \times_{\mathbb{G}_m} (\varphi|\mathbb{G}_m)} (\widetilde{X}|\mathbb{G}_m) \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

déduite de ce carré est propre, surjective et radicielle (cf. Lemme ci-dessus), par suite, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$(R^j(\theta|\mathbb{A}^1)_! \mathbb{Q}_\ell)|_{\mathbb{G}_m} = R^j(\theta|\mathbb{G}_m)_! \mathbb{Q}_\ell$$

et

$$(\text{"ab"})^*(R^j(\theta|\mathbb{G}_m)_! \mathbb{Q}_\ell) = R^j(\varphi|\mathbb{G}_m)_! \mathbb{Q}_\ell$$

(théorème de changement de base pour la cohomologie à support propre et le fait qu'un morphisme surjectif, propre et radiciel est "innocent" pour la topologie étale). Or

$$\varphi : \widetilde{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

est propre et lisse au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{P}^1$ contenant le point ∞, donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$R^j(\varphi|\mathbb{G}_m)_!\mathbb{Q}_\ell = (R^j\varphi_!\mathbb{Q}_\ell)|\mathbb{G}_m$$

se prolonge sur $\mathbb{P}^1$ en un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau, $R^j\varphi_!\mathbb{Q}_\ell$, lisse au voisinage de ∞. Comme "ab" est modéré $((a,p) = (b,p) = 1)$, on a

$$\mathrm{Swan}_\infty(R^j(\theta|\mathbb{G}_m)_!\mathbb{Q}_\ell) = 0$$

donc

$$\mathrm{Swan}_\infty(R^j(\theta|\mathbb{A}^1)_!\mathbb{Q}_\ell) = 0$$

et on a gagné.

5.3. <u>Preuve directe de la partie</u> (0) <u>du théorème</u> 5.1.2 (<u>méthode globale</u>).

Considérons l'action de $\mu_b \times \mu_a$ sur $Y = X[H^{1/b}, Z^{1/a}]$ définie par

$$\begin{array}{ccc} ((\zeta_b,\zeta_a),(x,H^{1/b},Z^{1/a})) & \longmapsto & (x,\zeta_b.H^{1/b},\zeta_a.Z^{1/a}) \\ \Cap & & \Cap \\ (\mu_b\times\mu_a)\times X[H^{1/b},Z^{1/a}] & \longrightarrow & X[H^{1/b},Z^{1/a}] \end{array}$$

et l'action de $\mu_b \times \mu_a$ sur $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ définie sur $\mathbb{A}^1$ par

$$\begin{array}{ccc} ((\zeta_b,\zeta_a),\lambda) & \longmapsto & (\zeta_b/\zeta_a).\lambda \\ \Cap & & \Cap \\ (\mu_b\times\mu_a)\times\mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

et qui laisse fixe le point ∞. Alors

(1) l'action produit de $\mu_b \times \mu_a$ sur $Y \times \mathbb{P}^1$ induit une action de $\mu_b \times \mu_a$ sur la variété d'incidence $\widetilde{Y} \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^1$ et le morphisme

$$\varphi : \widetilde{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

est $\mu_b \times \mu_a$-équivariant pour les actions de $\mu_b \times \mu_a$ sur $\widetilde{Y}$ et sur $\mathbb{P}^1$ que l'on vient de décrire (on rappelle que pour tout $\lambda \in \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, on a $\varphi^{-1}(\lambda) = (H^{1/b} = \lambda.Z^{1/a}) \cap Y)$;

(2) si on passe au quotient par l'action de $\mu_b \times \mu_a$, le morphisme $\varphi : \tilde{Y} \to \mathbb{P}^1$ induit un morphisme

$$\bar{\varphi} : \tilde{Y}/\mu_b \times \mu_a \longrightarrow \mathbb{P}^1/\mu_b \times \mu_a$$

qui est topologiquement isomorphe au morphisme

$$\theta : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

via le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\theta"'] & \tilde{Y} \arrow[l, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{P}^1 & \mathbb{P}^1 \arrow[l, "\text{"ab"}"] \end{tikzcd}$$

(on rappelle que la variété d'incidence $\tilde{X} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ est définie par $\theta^{-1}(\lambda) = X \cap (H^a = \lambda . Z^b)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, que le morphisme "ab" : $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ prolonge le morphisme $\lambda \mapsto \lambda^{ab}$ de $\mathbb{A}^1$ dans $\mathbb{A}^1$ et que, au-dessus de $\mathbb{G}_m$, le carré ci-dessus est topologiquement cartésien).

D'autre part, rappelons que les seules singularités de Y sont des singularités isolées au-dessus des points de X où H n'est pas transverse à X (les singularités de $X \cap H$ sont isolées car Z est transverse à $X \cap H$) ; en particulier, Y est lisse dans un voisinage de $Y \cap H^{1/b} \cap Z^{1/a}$, donc $\tilde{Y}$ est lisse dans un voisinage du diviseur exceptionnel $(Y \cap H^{1/b} \cap Z^{1/a}) \times \mathbb{P}^1$ de l'éclatement $\tilde{Y} \to Y$ et ce diviseur exceptionnel est lui-même lisse.

On peut alors calculer la cohomologie de $V = X - (X \cap Z)$ à valeurs dans $f^*\mathcal{L}_\Psi$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H^*(V, f^*\mathcal{L}_\Psi) &\simeq H^*(\tilde{X}_{\mathbb{A}^1} - (X \cap Z \cap H) \times \mathbb{A}^1, \theta^*\mathcal{L}_\Psi) \\ &\simeq H^*(\tilde{Y}_{\mathbb{A}^1} - (Y \cap Z^{1/a} \cap H^{1/b}) \times \mathbb{A}^1, \tilde{\pi}^*\theta^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a} \\ &\simeq H^*(\tilde{Y}_{\mathbb{A}^1} - (Y \cap Z^{1/a} \cap H^{1/b}) \times \mathbb{A}^1, \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a} . \end{aligned}$$

Pour aller plus loin nous aurons besoin de quelques rappels.

RAPPELS. Soit X un schéma et soit D un fermé de X , pour tout faisceau (pour la topologie étale) $\mathcal{F}$ sur X , on dispose de la suite exacte longue de cohomologie à support

$$\dashrightarrow H^i_D(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X-D,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}_D(X,\mathcal{F}) \longrightarrow ---$$

et d'une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(D,\mathcal{H}^q_D(X,\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}_D(X,\mathcal{F})$$

où, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^q_D(X,\mathcal{F})$ est la restriction à D du faisceau sur X associé au préfaisceau

$$U \longmapsto H^q_{D\times_X U}(U,\mathcal{F}|U) \ .$$

Si $D \subset V \subset U$, où V est un ouvert de X , la suite spectrale ci-dessus montre que

$$H^i_D(X,\mathcal{F}) = H^i_D(V,\mathcal{F}) \qquad (\forall i \in \mathbb{N}) \ .$$

Supposons maintenant que X est un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos, que D est lisse sur k et admet dans X un voisinage ouvert V qui lui-même est lisse sur k et que D est purement de codimension c dans X . Alors

$$H^i_D(X,\mathcal{F}) \simeq H^{i-2c}(D,\mathcal{F}(-c)) \qquad (\forall i)$$

pour tout E_λ-faisceau $\mathcal{F}$ lisse sur X $(\lambda | \ell \neq \mathrm{car}(k))$: en effet, on a, pour tout i ,

$$H^i_D(X,\mathcal{F}) = H^i_D(V,\mathcal{F}) \ ,$$

on a la suite spectrale

$$H^p(D,\mathcal{H}^q_D(V,\mathcal{F})) \Longrightarrow H^{p+q}_D(V,\mathcal{F}) \ ,$$

on a, pour tout q ,

$$\mathcal{H}^q_D(V,\mathcal{F}) = \mathcal{H}^q_D(V,\mathbb{Q}_\ell) \otimes (\mathcal{F}|D)$$

et le théorème de pureté relative (SGA 4, XVI) permet de calculer les $\mathcal{H}^q_D(V,\mathbb{Q}_\ell)$,

$$\mathcal{H}^q_D(V,\mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq 2c \\ \mathbb{Q}_\ell(-c) & \text{si} \quad q = 2c \end{cases} .$$

Donc la suite spectrale ci-dessus dégénère en E_2 et fournit les isomorphismes cherchés. En résumé, on a donc une suite exacte longue, dite de Gysin,

$$\dashrightarrow H^{i-2c}(D,\mathfrak{F}(-c)) \longrightarrow H^i(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow H^i(X-D,\mathfrak{F}) \longrightarrow H^{i-2c+1}(D,\mathfrak{F}(-c)) \dashrightarrow$$

Si l'on revient au calcul de $H^*(V,f^*\mathcal{L}_\Psi)$, on a une suite exacte de Gysin

$$\dashrightarrow H^{i-2}(D,\mathfrak{F}(-1)) \longrightarrow H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1}-D,\mathfrak{F}) \longrightarrow H^{i-1}(D,\mathfrak{F}(-1)) \dashrightarrow$$

où l'on a posé $D = (Y \cap Z^{1/a} \cap H^{1/b}) \times \mathbb{A}^1$ et $\mathfrak{F} = \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi$. Or

$$H^*(D,\mathfrak{F}) = H^*(Y \cap Z^{1/a} \cap H^{1/b},\mathbb{Q}_\ell) \otimes H^*(\mathbb{A}^1,(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)$$

et

$$H^*(\mathbb{A}^1,(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a} = H^*(\mathbb{A}^1,\mathcal{L}_\Psi) = 0$$

donc

$$H^*(D,\mathfrak{F}(-1))^{\mu_b \times \mu_a} = 0$$

et on a des isomorphismes

$$H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1},\varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a} \xrightarrow{\sim} H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1} - (Y \cap Z^{1/a} \cap H^{1/b}) \times \mathbb{A}^1,\varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc

$$H^i(V,f^*\mathcal{L}_\Psi) \simeq H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1},\varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En travaillant avec la suite exacte longue d'excision à la place de la suite exacte longue de Gysin, on verrait de la même manière que, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$H^i_c(V,f^*\mathcal{L}_\Psi) \simeq H^i_c(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1},\varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)^{\mu_b \times \mu_a} .$$

On aura gagné si l'on montre que les flèches d'oubli des supports

$$H^i_c(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1}, \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^i(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1}, \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)$$

sont des isomorphismes. Pour cela, si l'on considère les deux suites spectrales de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{A}^1, (R^q\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes (ab)^*\mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{p+q}(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1}, \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)$$

$$E_2^{pq} = H^p_c(\mathbb{A}^1, (R^q\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes (ab)^*\mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1}, \varphi^*(ab)^*\mathcal{L}_\Psi)$$

pour le morphisme $\varphi : \widetilde{Y}_{\mathbb{A}^1} \to \mathbb{A}^1$ (on rappelle que φ est propre), il suffit de montrer que pour tout couple (p,q), la flèche d'oubli des supports

$$H^p_c(\mathbb{A}^1, (R^q\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes (ab)^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^p(\mathbb{A}^1, (R^q\varphi_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes (ab)^*\mathcal{L}_\Psi)$$

est un isomorphisme. La conclusion résulte alors du fait que les $R^q\varphi_*\mathbb{Q}_\ell$ sont modérés à l'infini et du lemme clef du numéro 4.

REMARQUE. Dans le cas $(a,b) = (1,d)$ du théorème, la variété $\mathbf{Y}$ devient simplement $X[H^{1/d}]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$, le morphisme

$$\pi_\lambda : Y \cap (H^{1/d} = \lambda . Z) \longrightarrow X \cap (H = \lambda^d Z^d)$$

est un isomorphisme et pour presque tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$, la variété $X \cap (H = \lambda^d Z^d)$ est par conséquent lisse (pour $\lambda = \infty$, cette variété devient $Y \cap (Z = 0) = (X \cap Z)[H^{1/d}]$, or H est supposé transverse à $X \cap Z$ et d est premier à p, donc $(X \cap Z)[H^{1/d}]$ est bien lisse).

Or, dans le cas $(a,b) = (1,d)$, si nous remplaçons (Z,H) par $(Z, H+\lambda Z^d)$, la variété $V = X - (X \cap Z)$ ne change pas et la fonction $f = H/Z^d$ est remplacée par $f+\lambda$; un tel changement est donc inoffensif pour l'étude de la somme exponentielle

$$\sum_{x \in V(\mathbb{F}_q)} \Psi(f(x)) .$$

Autrement dit, on aurait pu ajouter aux hypothèses du théorème 5.1.1 l'hypothèse que H est transverse à X (on remplace H par $H+\lambda Z^d$ pour λ assez général dans $\mathbb{G}_m$) sans affaiblir ce théorème. On verra plus loin (cf. 5.4.1) un cas où l'on ne sait pas si on peut ajouter l'hypothèse que H est transverse à X sans rien perdre.

5.4. Une variante du théorème 5.1.2.

Dans ce numéro, nous allons démontrer le théorème suivant

THÉORÈME 5.4.1. *Soit* X *une variété projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension* m, *sur un corps fini* $\mathbb{F}_q$, *soit* $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q} = \mathbb{P}$ *un plongement projectif de* X, *soient* $d_1,\dots,d_r$ *des entiers* ≥ 1, *soit, pour* $i=1,\dots,r$, $Z_i \in H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_i))$ *définissant une hypersurface de* $\mathbb{P}$ *notée encore* Z_i, *soient* $b_1,\dots,b_r$ *des entiers* ≥ 1, *premiers à la caractéristique* p *de* $\mathbb{F}_q$, *soit* $d = \sum_{i=1}^{r} b_i d_i$ *et soit* $H \in H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d))$ *définissant une hypersurface de* $\mathbb{P}$, *notée encore* H. *On suppose que pour tout sous-ensemble non vide* $I \subset \{1,\dots,r\}$, *on a les deux conditions de transversalité suivantes*

(a) $X \cap \bigcap_{i\in I} Z_i$ *est lisse de codimension* $\# I$ *dans* X ;

(b) $X \cap H \cap \bigcap_{i\in I} Z_i$ *est lisse de codimension* $\# I+1$ *dans* X.

On associe à ces données le $\mathbb{F}_q$*-schéma de type fini*

$$V = X - (X \cap (\bigcup_{i=1}^{r} Z_i))$$

et la fonction

$$f = H/\prod_{i=1}^{r} Z_i^{b_i} : V \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} .$$

Alors, pour tout caractère additif non trivial $\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$ *et pour toute place* λ *de* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, $\lambda | \ell$, $\ell \neq p$, *on a*

(1) $H^i_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $i \neq m$;

(2) $H^m_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ *est pur de poids* m.

Si l'on suppose en plus que H *est transverse à* X, *i.e. que* $H \cap X$ *est lisse de codimension* 1 *dans* X, *alors on a la formule suivante*

$$(-1)^m h_c^m(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \int_X \frac{c(X)}{(1+dL).\prod_{i=1}^{r}(1+d_iL)}$$

<u>où</u> L <u>est la classe d'une section hyperplane de</u> $\mathbb{P}$. <u>Plus explicitement, si l'on suppose en plus que</u> $X\subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}_q}$ <u>est une intersection complète de multidegré</u> $(a_1,\dots,a_{N-m})$, <u>alors</u> $\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$ <u>est le coefficient de</u> L^N <u>dans l'expression</u>

$$\frac{a_1.\cdots.a_{N-m}.L^{N-m}.(1+L)^{N+1}}{(1+dL).\prod_{i=1}^{r}(1+d_iL).\prod_{j=1}^{N-m}(1+a_j.L)} .$$

DÉMONSTRATION. Considérons la variété d'incidence

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} \arrow[dl, "pr_2"] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} & \end{tikzcd}$$

définie par

$$\tilde{f}^{-1}(\lambda) = X\cap (H=\lambda.\prod_{i=1}^{r} Z_i^{b_i})$$

pour tout $\lambda\in\mathbb{A}^1\subset\mathbb{P}^1$. De façon naturelle, on peut voir V comme l'ouvert des couples $(v,f(v))$ de $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$; le complémentaire de V dans $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est le produit $(X\cap H\cap(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i))\times\mathbb{A}^1$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{X}_{\mathbb{A}^1} \arrow[d, "\tilde{f}"] & (X\cap H\cap(\bigcup_{i=1}^{r} Z_i))\times\mathbb{A}^1 \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\ & \mathbb{A}^1 & \end{tikzcd}$$

Nous allons démontrer les deux assertions suivantes

(i) $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est lisse sur $\mathbb{F}_q$;

(ii) les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux $R^i\tilde{f}_!\mathbb{Q}_\ell$ sur $\mathbb{A}^1$ sont modérément ramifiés à l'infini.

Admettons provisoirement les assertions (i) et (ii) et déduisons de ces assertions le théorème.

Pour les parties (1) et (2) du théorème, il suffit de montrer l'assertion suivante :

(0) <u>pour tout entier</u> i , <u>la flèche d'oubli des supports</u>

$$H_c^i(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^i(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

<u>est un isomorphisme</u>.

En effet, V est affine, lisse sur $\mathbb{F}_q$, purement de dimension m et $f^*\mathcal{L}_\Psi$ est lisse et pur de poids 0 sur V , donc (1) et (2) se déduisent de (0) par Lefschetz affine, dualité de Poincaré et l'estimation fondamentale de Deligne (cf. 5.2).

Prouvons donc (0) à partir des énoncés (i) et (ii). Tout d'abord, comme

$$H_c^*(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_\Psi) = 0$$

la suite spectrale de Leray pour

$$pr_2 : (X\cap H\cap (\bigcup_{i=1}^{r} Z_i))\times\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

dégénère en une suite spectrale identiquement nulle, donc

$$H_c^*(((X\cap H\cap (\bigcup_{i=1}^{r} Z_i))\times\mathbb{A}^1)\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, pr_2^*\mathcal{L}_\Psi) = 0 .$$

La suite exacte longue d'excision pour l'immersion ouverte $j : V \hookrightarrow \widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ donne alors un isomorphisme

$$H_c^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \xleftarrow[j_*]{\sim} H_c^*(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) .$$

Ce résultat est encore vrai pour le caractère $\bar{\Psi}$; comme $(\mathcal{L}_\Psi)^\vee = \mathcal{L}_{\bar{\Psi}}$, que, par (i), $\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est lisse sur $\mathbb{F}_q$ et que V est lisse sur $\mathbb{F}_q$, nous obtenons, par dualité de Poincaré, un isomorphisme

$$H^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \xrightarrow[j^*]{\sim} H^*(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi)$$

(le twist à la Tate disparait puisqu'il est le même des deux côtés, $\dim \widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} = \dim V$). Les isomorphismes ci-dessus se trouvent dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_c^*(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) & \xrightarrow[j_*]{\sim} & H_c^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) & \xleftarrow[j^*]{\sim} & H^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches d'oubli des supports. Pour démontrer l'assertion (0), il suffit donc de montrer que la flèche canonique

$$H_c^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi)$$

est un isomorphisme. Pour ceci, considérons les deux suites spectrales de Leray pour $\widetilde{f} : \widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \longrightarrow \mathbb{A}^1$ (en cohomologie à support propre et en cohomologie ordinaire) ; comme $\widetilde{f}$ est propre, elles s'écrivent

$$E_2^{pq} = H_c^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi)$$

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H^{p+q}(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) .$$

On a une flèche canonique de la première de ces suites spectrales dans la seconde, on veut montrer que cette flèche est un isomorphisme sur les aboutissements, il suffit pour cela de montrer que cette flèche est un isomorphisme au niveau E_2. Or grâce à (ii), on sait que les $R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell$ sont modérés à l'infini, donc le lemme clef de 4.8 nous assure que la flèche d'oubli des supports

$$H_c^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \longrightarrow H^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi)$$

est bien un isomorphisme pour tout couple (p,q) d'entiers ; d'où l'énoncé (0) et les parties (1) et (2) du théorème.

Essayons maintenant de calculer

$$\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = (-1)^m h_c^m(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \ .$$

Vu les isomorphismes

$$H_c^*(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) \xrightarrow[j_*]{\sim} H_c^*(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi)$$

et la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H_c^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi)$$

nous avons

$$\begin{aligned}\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) &= \chi_c(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \widetilde{f}^*\mathcal{L}_\Psi) \\ &= \sum_q (-1)^q \chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) \ .\end{aligned}$$

Or, par (ii), les $R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell$ sont modérément ramifiés à l'infini, donc le lemme clef de 4.8 s'applique et

$$\chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, (R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) - \dim(R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{\eta}}$$

où $\bar{\eta}$ est un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1$. Vu la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H_c^p(\mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}, R^q\widetilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell)$$

et le fait que $\widetilde{f}$ est propre, on obtient le résultat suivant

$$\chi_c(V \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \chi_c(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}) - \chi(\widetilde{f}^{-1}(\bar{\eta})) \ .$$

Le terme $\chi_c(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1})$ se calcule de manière purement combinatoire :

$$\begin{aligned}\chi_c(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}) &= \chi_c(V) + \chi_c((X \cap H \cap (\bigcup_{i=1}^r Z_i)) \times \mathbb{A}^1) \\ &= \chi(X) - \chi(X \cap (\bigcup_{i=1}^r Z_i)) + \chi(X \cap H \cap (\bigcup_{i=1}^r Z_i))\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\chi_c(\widetilde{X}_{\mathbb{A}^1}) = \chi(X) &- \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,r\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\#I-1} \chi(X \cap (\bigcap_{i \in I} Z_i)) \\ &+ \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,r\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\#I-1} \chi(X \cap H \cap (\bigcap_{i \in I} Z_i))\end{aligned}$$

ou encore

$$\chi_c(\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}) = \sum_{I\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{\#I}\chi(X\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i))$$

$$- \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,r\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{\#I}\chi(X\cap H\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i)) .$$

Pour le terme $\chi(\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta}))$ nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire que H est transverse à X ; en effet, cette hypothèse assure que $\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta})$ est lisse : $\tilde{f}^{-1}(0)$ est lisse $(\tilde{f}^{-1}(0) = X\cap H)$ et donc $\tilde{f}^{-1}(\lambda)$ est lisse pour presque tout $\lambda\in\mathbb{A}^1$.

REMARQUE. Il semble probable que cette lissité générique des fibres de $\tilde{f}$ résulte déjà des hypothèses que l'on a faites sans qu'on ait besoin de supposer H transverse à X (comme c'était le cas dans 5.1.1 où il n'y avait qu'un seul Z_i), mais je ne sais pas le prouver.

En tout cas, si on suppose H transverse à X , $\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta})$ est lisse et

$$\chi(\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta})) = \chi(\tilde{f}^{-1}(\lambda))$$

pour tout $\lambda\in\mathbb{A}^1$ tel que $\tilde{f}^{-1}(\lambda)$ soit lisse, en particulier, comme $\tilde{f}^{-1}(0) = X\cap H$ est lisse, on a

$$\chi(\tilde{f}^{-1}(\bar{\eta})) = \chi(X\cap H) .$$

En résumé,

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbf{F}_q}\bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \sum_{I\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{\#I}[\chi(X\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i)) - \chi(X\cap H\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i))] .$$

Pour finir, on utilise les formules suivantes

$$\chi(X\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i)) = \int_X c(X).\prod_{i\in I}\frac{d_iL}{1+d_iL}$$

$$\chi(X\cap H\cap(\bigcap_{i\in I} Z_i)) = \int_X c(X).\frac{dL}{1+dL}.\prod_{i\in I}\frac{d_iL}{1+d_iL}$$

(cf. SGA 7, XVII). Alors

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbf{F}_q}\bar{\mathbf{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \sum_{I\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{\#I}.\int_X c(X).(1-\frac{dL}{1+dL}).\prod_{i\in I}\frac{d_iL}{1+d_iL}$$

ou encore

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \int_X c(X).(1-\frac{dL}{1+dL}).\sum_{I\subset\{1,\ldots,r\}}(-1)^{\# I}.\prod_{i\in I}\frac{d_iL}{1+d_iL}$$
$$= \int_X c(X).\frac{1}{1+dL}.\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1+d_iL}\ .$$

Dans le cas particulier où X est une intersection complète dans $\mathbb{P}^N$ de multi degré $(a_1,\ldots,a_{N-m})$ on a de plus

$$c(X) = \frac{c(\mathbb{P}^N)}{\prod_{j=1}^{N-m}(1+a_j.L)}\Big|_X = \frac{(1+L)^{N+1}}{\prod_{j=1}^{N-m}(1+a_jL)}$$

(cf. SGA 7, XVII), donc

$$\chi_c(V\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q, f^*\mathcal{L}_\Psi) = \int_X \frac{(1+L)^{N+1}}{(1+dL).\prod_{i=1}^{r}(1+d_iL).\prod_{j=1}^{N-m}(1+a_jL)}$$
$$= \int_{\mathbb{P}^N}\frac{a_1\ldots a_{N-m}.L^{N-m}(1+L)^{N+1}}{(1+dL).\prod_{i=1}^{r}(1+d_iL).\prod_{j=1}^{N-m}(1+a_jL)}$$

d'où la conclusion.

Il nous reste à établir les points (i) et (ii). Le point (i), la lissité de $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$, est facile. En dehors de $(X\cap H\cap(\bigcup_{i=1}^{r}Z_i))\times\mathbb{A}^1$, $\tilde{X}$ est isomorphe à l'ouvert V de X, donc est lisse par hypothèse. En un point (x_o,λ_o) de $(X\cap H\cap(\bigcup_{i=1}^{r}Z_i))\times\mathbb{A}^1$, il existe $s\in\{1,\ldots,r\}$ tel que x_o soit dans s des hypersurfaces Z_i et ne soit pas dans les $r-s$ autres. Quitte à renuméroter les Z_i, on peut supposer que

$$z_1(x_o) = \ldots\ldots = z_s(x_o) = 0$$

et

$$z_{s+1}(x_o) \neq 0,\ldots\ldots,z_r(x_o) \neq 0\ .$$

Par hypothèse, $X\cap H\cap Z_1\cap\ldots\cap Z_s$ est lisse de codimension $s+1$ dans X, donc il existe des coordonnées locales $(h,z_1,\ldots,z_s,y_1,\ldots,y_{m-s-1})$ sur X centrées en x_o telles que dans les coordonnées locales $(h,z_1,\ldots,z_s,y_1,\ldots,y_{m-s-1},\lambda-\lambda_o)$ sur $X\times\mathbb{A}^1$ centrées en (x_o,λ_o),

$\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est défini par une équation du type

$$h - \lambda . g . \prod_{i=1}^{s} z_i^{b_i}$$

où g est une fonction sur X inversible en x_o . Si l'on désigne par

$$\mathcal{M} = (h, z_1, \ldots, z_s, y_1, \ldots, y_{m-s-1}, \lambda - \lambda_o) . \mathcal{O}$$

l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}$ de $X \times \mathbb{A}^1$ en (x_o, λ_o), on a

$$h - \lambda . g . \prod_{i=1}^{s} z_i^{b_i} \equiv h - \lambda_o . g(x_o) . \prod_{i=1}^{s} z_i^{b_i} \pmod{\mathcal{M}^2}$$

or

$$h - \lambda_o . g(x_o) . \prod_{i=1}^{s} z_i^{b_i} \in \mathcal{M} - \mathcal{M}^2$$

donc

$$h - \lambda . g . \prod_{i=1}^{s} z_i^{b_i} \in \mathcal{M} - \mathcal{M}^2$$

de sorte que, près de (x_o, λ_o), $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est défini dans la variété lisse $X \times \mathbb{A}^1$ par l'annulation d'une fonction de $\mathcal{M} - \mathcal{M}^2$, donc $\tilde{X}_{\mathbb{A}^1}$ est lisse en (x_o, λ_o).

Le point (ii), la modération à l'infini des $R^i\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell$, est un peu plus délicat. Commençons par remarquer qu'il suffit de démontrer qu'il existe un entier $B \geq 1$ tel que, si $[B]$ désigne l'application B-ième puissance

$$\begin{aligned} [B] : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ \lambda &\longmapsto \lambda^B , \end{aligned}$$

alors les faisceaux, sur $\mathbb{A}^1$,

$$[B]^*(R^i\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell)$$

sont modérément ramifiés à l'infini. Le point (ii) est donc conséquence du résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 5.4.2. <u>Si</u> B <u>est un multiple du p.p.c.m. de</u> $b_1, b_2, \ldots, b_r$, <u>alors les faisceaux</u>

$$[B]^*(R^i\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell)$$

<u>ont une monodromie à l'infini unipotente d'exposant</u> $i+1$, <u>donc</u>, <u>à fortiori</u>, <u>sont modérément ramifiés à l'infini</u>.

COMMENTAIRES. Si $\rho : I_{\overline{\infty}} \longrightarrow GL(V)$ est la représentation locale correspondant au faisceau $[B]^*(R^i\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell)$, V étant un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, la première conclusion de 5.4.2 signifie que

$$(\rho(\sigma)-1_V)^{i+1} = 0$$

pour tout $\sigma \in I_{\overline{\infty}}$. La partie sauvage $P_{\overline{\infty}}$ de $I_{\overline{\infty}}$ est un pro-p-groupe, donc $\rho(P_{\overline{\infty}}) \subset GL(V)$ est un sous-groupe fini de $GL(V)$. Comme $\rho(P_{\overline{\infty}})$ est contenu dans les unipotents, $\rho(P_{\overline{\infty}}) = (1_V)$ ce qui n'est autre que la seconde conclusion de 5.4.2.

PREUVE DE 5.4.2. Nous allons nous servir de la méthode des cycles évanescents pour ramener cette question à une question "locale en haut". Notre démonstration est calquée sur la démonstration "géométrique" du théorème de monodromie locale (cf. SGA 7, Exposé I).

Considérons la variété d'incidence

$$\begin{array}{c} \tilde{X} \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

et soit

$$\begin{array}{c} \tilde{X}[B] \\ {\scriptstyle \tilde{f}[B]}\downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

l'image réciproque de $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ par le morphisme $[B] : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ qui prolonge le morphisme, $[B] : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, élévation à la B-ième puissance. Soit $\mu = 1/\lambda$ l'uniformisante standard de $\mathbb{P}^1$ centrée au point ∞ , soit

$$S = \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q[[\mu]])$$

le complété de $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ au point ∞ et soit

$$\begin{array}{l} Y = \{(x,\mu) \mid \mu^B.H(x) = \prod_{i=1}^{r} Z_i(x)^{b_i}\} \\ g \big\downarrow \\ S = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[[\mu]]) \end{array}$$

l'image réciproque de $\tilde{f}[B] : \tilde{X}[B] \longrightarrow \mathbb{P}^1$ par la flèche évidente $S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ qui envoie le point fermé s de S sur le point ∞ de $\mathbb{P}^1$. Soit η le point générique de S, $\eta = \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q((\mu)))$ et soit $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η, $\bar{\eta} = \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q((\mu))^{sep})$ où $\bar{\mathbb{F}}_q((\mu))^{sep}$ est une clôture séparable de $\bar{\mathbb{F}}_q((\mu))$. On doit montrer que l'action de

$$I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$$

sur la fibre du faisceau $[B]^*(R^i\tilde{f}_*\mathbb{Q}_\ell)$ au point géometrique $\bar{\eta}$ de $\mathbb{P}^1$ est unipotente d'exposant $i+1$. Il résulte du théorème de changement de base propre que cette action s'identifie à l'action par transport de structure de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $H^i(Y_{\bar{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$. Pour montrer la proposition, on doit donc montrer que l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $H^i(Y_{\bar{\eta}},\mathbb{Q}_\ell)$ est unipotente d'exposant $i+1$, ou, ce qui revient au même vu la définition de la cohomologie ℓ-adique, que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ sur $H^i(Y_{\bar{\eta}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ est unipotente d'exposant $i+1$. Pour le faire, nous allons utiliser la méthode des cycles évanescents.

<u>Interlude</u> : <u>la méthode des cycles évanescents</u>.

Considérons une "situation de cycles évanescents"

$$\begin{tikzcd} Y_{\bar{\eta}} \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "g_{\bar{\eta}}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y_s \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g_s"] \\ \bar{\eta} \arrow[r] & S & s \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où S est un trait strictement hensélien de point fermé s, de point générique η , où $\bar{\eta}$ est un point géométrique localisé en η et où $g : Y \longrightarrow S$ est un morphisme propre ; soit Λ un anneau de torsion première à la caractéristique résiduelle de S . On s'intéresse à l'action de la monodromie, i.e. l'action du groupe de Galois

$$I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$$

par transport de structure sur les groupes de cohomologie $H^i(Y_{\bar{\eta}},\Lambda)$. Plus précisément on cherche un critère "local en haut" qui assure que cette action sur $H^i(Y_{\bar{\eta}},\Lambda)$ est unipotente d'exposant $i+1$, pour tout degré i . Pour cela, on calcule les groupes $H^i(Y_{\bar{\eta}},\Lambda)$, munis de l'action de I , à l'aide de la suite spectrale de Leray pour le morphisme

$$\bar{j} : Y_{\bar{\eta}} \longrightarrow Y .$$

Cette suite spectrale s'écrit

$$E_2^{p,q} = H^p(Y,R^q\bar{j}_*\Lambda) \Longrightarrow H^{p+q}(Y_{\bar{\eta}},\Lambda) .$$

Comme le morphisme $g : Y \longrightarrow S$ est propre et que S est strictement hensélien, la flèche de restriction

$$H^*(Y,\mathcal{F}) \longrightarrow H^*(Y_s,i^*\mathcal{F})$$

est un isomorphisme pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur Y , de sorte que l'on peut réécrire la suite spectrale de Leray ci-dessus sous la forme

$$E_2^{p,q} = H^p(Y_s,i^*R^q\bar{j}_*\Lambda) \Longrightarrow H^{p+q}(Y_{\bar{\eta}},\Lambda) .$$

Les faisceaux

$$R^q\Psi_\eta\Lambda \overset{\underline{\mathrm{dfn}}}{=\!=} i^*R^q\bar{j}_*\Lambda$$

sur Y_s s'appellent les faisceaux de cycles évanescents pour le morphisme $Y \xrightarrow{g} S$ à coefficients dans Λ ; ils sont munis d'une action canonique de I pour laquelle la suite spectrale ci-dessus est I-équivariante.

Compte-tenu de la suite spectrale I-équivariante

$$E_2^{p,q} = H^p(Y_s, R^q\Psi_\eta\Lambda) \Longrightarrow H^{p+q}(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$$

pour prouver que I agit de façon unipotente sur le groupe $H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$ avec exposant $i+1$, ceci quel que soit le degré i, il suffit de prouver que I agit trivialement sur les faisceaux $R^q\Psi_\eta\Lambda$: en effet, si $\sigma \in I$ agit trivialement sur tous les termes E_2^{pq} de la suite spectrale, I agit aussi trivialement sur tous les termes $E_\infty^{p,q}$, or $H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$ est filtré avec comme gradués

$$Gr^p(H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)) = E_\infty^{p,i-p}$$

de sorte qu'il y a au plus $i+1$ gradués non nuls et que sur ces gradués I agit trivialement; ceci implique bien que l'action de I sur $H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$ est unipotente d'exposant $i+1$.

Pour prouver que l'action de la monodromie sur $H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$ est unipotente d'échelon $i+1$ $(\forall i)$, il suffit donc de montrer que pour tout entier q, l'action de I sur $R\Psi_n\Lambda$ est triviale, i.e. que pour tout point fermé y de Y_s, I agit trivialement sur les fibres

$$(R^q\Psi_\eta\Lambda)_y \qquad (q \in \mathbb{N}) .$$

Or, ces fibres se calculent de la façon suivante : soit $Y_{(y)}$ l'hensélisé strict de Y en y et soit $Y_{(y)\bar\eta}$ la fibre en $\bar\eta$ du morphisme composé

$$Y_{(y)} \longrightarrow Y \xrightarrow{g} S ,$$

alors, on a un isomorphisme I-équivariant

$$(R^q\Psi_\eta\Lambda)_y \simeq H^q(Y_{(y)\bar\eta}, \Lambda)$$

pour tout entier q.

En résumé, pour montrer que l'action de I sur $H^i(Y_{\bar\eta}, \Lambda)$ est unipotente d'échelon $i+1$, il suffit de montrer que pour tout point fermé y de Y et pour tout entier $q \geqslant 0$, l'action naturelle de I sur $H^q(Y_{(y)\bar\eta}, \Lambda)$ est triviale.

Revenons à la situation de 5.4.2 : Y est défini dans $X \times S$ par l'équation

$$\mu^B . H(x) = \prod_{i=1}^{r} Z_i(x)^{b_i} .$$

En un point fermé de $Y_s \subset X \times \{0\}$, on a $\mu = 0$ donc certains des Z_i s'annulent. Quitte à réordonner les Z_i, on peut supposer qu'au point fermé considéré, on a

$$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_t = 0$$

et

$$Z_{t+1} \neq 0, \ldots, Z_r \neq 0$$

avec $t \geqslant 1$.

Si H s'annule au point considéré, l'équation de Y dans $X \times S$ s'écrit en coordonnées locales $(h, z_1, \ldots, z_t, \mu$, autres coordonnées) sous la forme

$$\mu^B . h = (\prod_{i=1}^{t} z_i^{b_i}) . u$$

où u est une fonction sur X, inversible au point considéré.

Si H ne s'annule pas au point considéré, l'équation de Y dans $X \times S$ s'écrit en coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_t, \mu$, autres coordonnées) sous la forme

$$\mu^B = (\prod_{i=1}^{t} z_i^{b_i}) . u$$

où u est une fonction sur X, inversible au point considéré.

Comme les b_i sont premiers à p, en particulier le b_1 qui apparait ici est premier à p (on a besoin que tous les b_i soient premiers à p, car on réordonne arbitrairement les Z_i, donc les b_i),

$$(h, z_1 . u^{1/b_1}, z_2, \ldots, z_t, \text{autres})$$

et

$$(z_1 . u^{1/b_1}, z_2, \ldots, z_t, \text{autres})$$

sont des coordonnées locales dans un voisinage du point considéré de Y . Dans ces coordonnées, Y est défini dans $X \times S$ par une équation qui s'écrit suivant les cas, soit

$$\mu^B.h = \prod_{i=1}^{t} z_i^{b_i} ,$$

soit

$$\mu^B = \prod_{i=1}^{t} z_i^{b_i} ,$$

le point considéré étant l'origine des coordonnées.

La conclusion résulte du lemme plus général suivant (lemme qui peut éventuellement servir à d'autres estimations de sommes trigonométriques).

LEMME. _Soient_ k _un corps séparablement clos,_ ℓ _un nombre premier distinct de la caractéristique de_ k _et_ m _et_ n _deux entiers_ $\geqslant 1$. _Dans l'espace affine sur_ k

$$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \times \operatorname{Spec}(k[[\mu]])$$

avec coordonnées $(h_1,\ldots,h_n,z_1,\ldots,z_m,\mu)$, _on considère la variété_ V _définie par une équation_

$$\mu^B.\prod_{j=1}^{n} h_j^{a_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{b_i}$$

où les a_i _sont des entiers_ $\geqslant 0$, _où les_ b_i _sont des entiers_ $\geqslant 1$ _et où_ B _est un entier_ $\geqslant 1$ _dans l'idéal engendré par les_ $a_1,\ldots,a_n$ _et les_ $b_1,\ldots,b_m$. _Désignons par_ $V_{(0)}$ _l'hensélisé strict de_ V _en l'origine_ $(0,\ldots,0)$ _des coordonnées et par_ $V_{(0)\bar{\eta}}$ _la fibre de_ $V_{(0)}$ _pour la projection de_ $V_{(0)}$ _sur_ $\operatorname{Spec}(k[[\mu]])$ _en un point géométrique_ $\bar{\eta}$ _au-dessus du point générique_ $\eta = \operatorname{Spec}(k((\mu)))$ _de_ $\operatorname{Spec}(k[[\mu]])$. _Alors le groupe d'inertie_ $I = \operatorname{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ _agit trivialement sur les groupes de cohomologie_

$$H^i(V_{(0)\bar{\eta}},\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$$

$(i \in \mathbb{N}\ ,\ \nu \in \mathbb{N}^*)$.

REMARQUE. On ne suppose plus les b_i premiers à p .

DÉMONSTRATION DU LEMME. Fixons i et ν . D'après un théorème de Deligne (SGA 4½, [Finitude]), nous savons que

$$H^i(V_{(0)\bar{\eta}},\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$$

est un groupe fini. L'action de I sur ce groupe de cohomologie est donc définie par un homomorphisme continu

$$I \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i(V_{(0)\bar{\eta}},\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}))$$

dont le noyau est un sous-groupe distingué ouvert de I , correspondant à une extension galoisienne finie E de $k((\mu))$: si $\bar{\eta} = \mathrm{Spec}(k((\mu))^{sep})$ où $k((\mu))^{sep}$ est une clôture séparable de $k((\mu))$, on a la tour d'extensions

$$\begin{array}{ccc} & k((\mu))^{sep} & \\ & \Big| & \Big\} \mathrm{Ker} \\ I \left(\right. & E & \\ & \Big| & \Big\} I/\mathrm{Ker} \\ & k((\mu)) & \end{array}$$

Il nous faut montrer que $\mathrm{Ker} = I$, i.e. que

$$E = k((\mu)) .$$

Commençons par quelques remarques sur les cycles évanescents. Soit K un corps quelconque et soit

$$\begin{array}{c} Z \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(K[[u]]) \end{array}$$

un morphisme ; ce morphisme se met dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} Z_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & Z_s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\eta} = \mathrm{Spec}(K((\mu))^{sep}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(K[[\mu]]) & \hookleftarrow & \mathrm{Spec}(K) = s \end{array}$$

où $K((\mu))^{sep}$ est une clôture séparable de $K((\mu))$. Soit K^{sep} la clôture séparable de K dans $K((\mu))^{sep}$, après l'extension des scalaires $K \longrightarrow K^{sep}$, ce morphisme devient

$$\begin{array}{c} Z' = Z \otimes_K K^{sep} \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec}(K^{sep} \otimes_K K[[\mu]]) \end{array}$$

et se met dans un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} (Z')_{\bar\eta} = Z_{\bar\eta} \arrow[r, "\bar j"] \arrow[d] & Z' \arrow[d] & Z'_{s'} = Z_s \otimes_K K^{sep} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d] \\ \bar\eta \arrow[r] & \operatorname{Spec}(K^{sep} \otimes_K K[[\mu]]) & \operatorname{Spec}(K^{sep}) = s' \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Or l'anneau

$$K^{sep} \otimes_K K[[\mu]] = \bigcup_{K'} K'[[\mu]] \subsetneqq K^{sep}[[\mu]]$$

(où K' parcourt les extensions finies séparables de K contenues dans K^{sep}) est un trait strictement hensélien, donc le diagramme ci-dessus est un diagramme de cycles évanescents et on dispose des faisceaux de cycles évanescents

$$R^i\Psi_{\eta'}(\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$$

sur $Z'_{s'} = Z_s \otimes_K K^{sep}$ (η' = "Spectre du corps des fractions de l'anneau $K^{sep} \otimes_K K[[\mu]]$"). Ces faisceaux sur $Z'_{s'}$ sont munis d'une action de $\operatorname{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu)))$ au-dessus de l'action évidente de son quotient $\operatorname{Gal}(K^{sep}/K)$ sur $Z'_{s'} = Z_s \otimes_K K^{sep}$ (cf. SGA 7, Exposé XIII). En particulier, si $z' \in Z'_{s'}(K^{sep})$ est fixe par $\operatorname{Gal}(K^{sep}/K)$, alors tout le groupe $\operatorname{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu)))$ agit sur la fibre en z' des faisceaux de cycles évanescents $R^i\Psi_{\eta'}(\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$.

Dans notre situation, prenons $K = k(t)$ où t est une indéterminée. Nous disposons de deux k-homomorphismes

$$k[[\mu]] \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightrightarrows}} K[[\mu]]$$

définis par

$$\mu \overset{(1)}{\longmapsto} \mu$$

$$\mu \overset{(2)}{\longmapsto} t\mu \ .$$

Les deux $K[[\mu]]$-schémas déduits de

$$\begin{array}{l} V = \{(h_1,\ldots,h_n,z_1,\ldots,z_m,\mu) \mid \mu^B . \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{b_i}\} \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k[[\mu]]) \end{array}$$

par ces deux extensions de scalaires sont $K[[\mu]]$-isomorphes par un isomorphisme qui fixe l'origine $(0,\ldots,0)$. Explicitement, ces deux $K[[\mu]]$-schémas, que l'on notera W_1 et W_2 , sont définis dans l'espace affine

$$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \times \mathrm{Spec}(K[[\mu]])$$

par les équations

$$W_1 : \mu^B . \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{b_i}$$

$$W_2 : \mu^B . t^B . \prod_{j=1}^{n} h_j^{a_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{b_i} \ .$$

Or, par hypothèse, il existe des entiers $c_1,\ldots,c_n,d_1,\ldots,d_m$ tels que

$$B = \sum_{j=1}^{n} c_j . a_j - \sum_{i=1}^{m} d_i . b_i$$

de sorte qu'un $K[[\mu]]$-isomorphisme $W_1 \to W_2$, préservant l'origine, est donné par

$$\begin{cases} h_j \longmapsto t^{c_j} . h_j \\ z_i \longmapsto t^{d_i} . z_i \ . \end{cases}$$

Choisissons maintenant une clôture séparable $K((\mu))^{sep}$ de $K((\mu))$ et soit K^{sep} la clôture séparable de K dans $K((\mu))^{sep}$. Soit T le trait, spectre de l'anneau de valuation discrète strictement hensélien

$$K[[\mu]] \otimes_K K^{sep} ;$$

on note δ le point générique de T et $\bar{\delta}$ le point géométrique, localisé en δ, défini par la clôture séparable $K((\mu))^{sep}$. Pour chacune des deux flèches

$$k[[\mu]] \xrightarrow{(\theta)} K[[\mu]] \qquad (\theta = 1,2)$$

on dispose d'une situation de cycles évanescents

$$\begin{array}{l} (V \otimes_{k[[\mu]] \xrightarrow[(\theta)]{} } K[[\mu]]) \otimes_K K^{sep} = W_\theta \otimes_K K^{sep} = W'_\theta \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(K[[\mu]] \otimes_K K^{sep}) = T \end{array}$$

donc de faisceaux de cycles évanescents

$$R^i\Psi_\delta(\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}, \theta) .$$

On va décrire l'action de $\mathrm{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu)))$ sur la fibre en $(0,\ldots,0)$ de ces faisceaux de cycles évanescents, i.e. la flèche

$$\mathrm{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu))) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i((W'_\theta)_{(0)\bar{\delta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}))$$

pour $\theta = 1,2$.

Pour cela, remarquons que ces deux situations de cycles évanescents proviennent par les deux changements de traits strictement henséliens

$$k[[\mu]] \overset{(1)}{\underset{(2)}{\rightrightarrows}} K[[\mu]] \longrightarrow K[[\mu]] \otimes_K K^{sep}$$

de la <u>même</u> situation de cycles évanescents

$$\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k[[\mu]]) . \end{array}$$

Or, d'après un théorème de Deligne (SGA 4½, [Finitude]), la formation des faisceaux de cycles évanescents commute aux changements de traits. Par suite, pour $\theta = 1,2$, si l'on choisit une inclusion

$$k((\mu))^{sep} \xhookrightarrow{(\theta)^{sep}} K((\mu))^{sep}$$

qui recouvre l'inclusion

$$k((\mu)) \xhookrightarrow{(\theta)} K((\mu))$$

on a un isomorphisme

$$H^i(V_{(0)\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i((W'_\theta)_{(0)\bar{\delta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu))) & \xrightarrow{s_\theta} & \mathrm{Gal}(k((\mu))^{sep}/k((\mu))) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Aut}(H^i((W'_\theta)_{(0)\bar{\delta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Aut}(H^i(V_{(0)\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}))
\end{array}$$

où la surjection entre les deux groupes de Galois est induite par le couple d'inclusions $((\theta),(\theta)^{sep})$ (c'est une surjection, car chaque extension finie séparable de $k((\mu))$ est totalement ramifiée, donc reste un corps, extension finie séparable de $K((\mu))$, après tensorisation par $K((\mu))$ au-dessus de $k((\mu))$).

Maintenant, si on se rappelle que les deux situations

$$\begin{array}{c} W_\theta \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(K[[\mu]]) \end{array} \qquad (\theta = 1,2)$$

sont $K[[\mu]]$-isomorphes, on a la conclusion suivante : les deux représentations $(\theta = 1,2)$

$$\mathrm{Gal}(K((\mu))^{sep}/K((\mu))) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i((W'_\theta)_{(0)\bar{\delta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}))$$

ont même noyau, donc, si N est le noyau de la représentation

$$\mathrm{Gal}(k((\mu))^{sep}/k((\mu))) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i(V_{(0)\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})) ,$$

on a

$$s_1^{-1}(N) = s_2^{-1}(N)$$

et par suite

$$E \otimes_{k((\mu)) \xrightarrow[(1)]{}} K((\mu)) = E \otimes_{k((\mu)) \xrightarrow[(2)]{}} K((\mu))$$

si l'on voit ces deux corps comme extensions de $K((\mu))$ contenues dans $K((\mu))^{sep}$ au moyen des couples d'inclusions $((1),(1)^{sep})$ et $((2),(2)^{sep})$ respectivement.

En termes plus concrets, choisissons un polynôme d'Eisenstein dans $k[[\mu]][X]$, disons

$$f(\mu,X) = X^e + a_1(\mu)X^{e-1} + \ldots + a_e(\mu) ,$$

tel que

$$E = k((\mu))[x]$$

où x est une racine dans $k((\mu))^{sep}$ de $f(\mu,X)$ (on a

$$a_1(\mu),\ldots,a_{e-1}(\mu) \in \mu.k[[\mu]]$$
$$a_e(\mu) \equiv \alpha.\mu \text{ modulo } \mu^2.k[[\mu]]$$

où $\alpha \in k^*$ et $e = [E : k((\mu))]$). Nous avons alors

$$E \otimes_{k((\mu)) \xrightarrow[(1)]{}} K((\mu)) = K((\mu))[\pi_1] ,$$

où $\pi_1 = (1)^{sep}(x)$ est racine dans $K((\mu))^{sep}$ de $f(\mu,X)$ vu comme élément de $K[[\mu]][X]$, et nous avons

$$E \otimes_{k((\mu)) \xrightarrow[(2)]{}} K((\mu)) = K((\mu))[\pi_2]$$

où $\pi_2 = (2)^{sep}(x)$ est racine dans $K((\mu))^{sep}$ du polynôme en X, $f(t\mu,X) \in K((\mu))[X]$. On a établi jusqu'à présent que

$$K((\mu))[\pi_1] = K((\mu))[\pi_2] .$$

Il nous reste à voir que $e = 1$ pour terminer la démonstration du lemme. Pour cela remarquons que π_1 et π_2 sont deux uniformisantes de la même extension de $K((\mu))$, cette extension étant totalement ramifiée, donc nous avons un développement de π_2 en série en π_1 :

$$\pi_2 = b_1(t).\pi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(t).\pi_1^i$$

avec

$$b_i(t) \in K = k(t) \qquad (\forall i \geqslant 1) \ .$$

D'autre part, comme l'extension en question est totalement ramifiée de degré e et que μ est une uniformisante de $K((\mu))$, on a un développement en série en π_1 de μ :

$$\mu = \sum_{i=e}^{\infty} c_i.\pi_1^i$$

où $c_i \in k$ $(\forall i \geqslant e)$ et $c_e \in k^*$. Considérons alors l'équation

$$f(t\mu, \pi_2) = 0 \ ;$$

comme $\mu \equiv 0 \pmod{\pi_1^e}$ et $\pi_2 \equiv 0 \pmod{\pi_1}$, on a

$$f(t\mu, \pi_2) \equiv \pi_2^e + \alpha t\mu \pmod{\pi_1^{e+1}}$$

et comme $\pi_2 \equiv b_1(t).\pi_1 \pmod{\pi_1^2}$ et $\mu \equiv c_e.\pi_1^e \pmod{\pi_1^{e+1}}$, on a

$$f(t\mu, \pi_2) \equiv ((b_1(t))^e + \alpha.t.c_e)\pi_1^e \pmod{\pi_1^{e+1}}$$

donc

$$\pi_1^e(b_1(t)^e + \alpha.t.c_e) \equiv 0 \pmod{\pi_1^{e+1}}$$

et

$$b_1(t)^e + \alpha.t.c_e = 0$$

donc, on a

$$b_1(t)^e = -\alpha.c_e.t$$

dans $K = k(t)$, ce qui implique $e = 1$ et la conclusion.

5.5. Application aux sommes de Kloosterman et à diverses généralisations de ces sommes.

5.5.1. Fixons un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p , un entier $n \geqslant 1$ et un n-uple

$$\underline{b} = (b_1,\ldots,b_n)$$

d'entiers positifs ($b_i \geqslant 1$ pour $i = 1,\ldots,n$). Notons d la somme des b_i ,

$$d = \sum_{i=1}^{n} b_i \ .$$

Nous désignerons par $G_{\underline{b}}$ le sous-groupe algébrique de $(\mathbb{G}_m)^n$ défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i} = 1$$

où x_i est la coordonnée standard sur le i-ième facteur $\mathbb{G}_m$ du produit $(\mathbb{G}_m)^n$; $G_{\underline{b}}$ est un groupe algébrique commutatif défini sur $\mathbb{F}_q$.

Soit

$$\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_p)^*$$

un caractère additif <u>non trivial</u> de $\mathbb{F}_q$ et soit

$$\chi : G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{q-1})^*$$

un caractère <u>quelconque</u> du groupe fini $G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q)$ (ζ_{q-1} étant une racine primitive $(q-1)$-ième de l'unité).

Etant donné un entier $k \geqslant 1$ et un n-uple d'éléments de $\mathbb{F}_q^*$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

nous pouvons former la somme exponentielle définie par

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_q) = \sum_{\underline{x}\in G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q)} \chi(\underline{x})\Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i^k\Big)$$

et, plus généralement, pour une extension finie $\mathbb{F}_{q^\nu}$ de $\mathbb{F}_q$ nous pouvons former la somme exponentielle définie par

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_{q^\nu}) = \sum_{\underline{x}\in G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_{q^\nu})} \chi_\nu(\underline{x})\Psi_\nu\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i^k\right)$$

où $\chi_\nu = \chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{F}_q}$ et $\Psi_\nu = \Psi \circ Tr_{\mathbb{F}_{q^\nu}/\mathbb{F}_q}$.

Dans le cas particulier où

$$\underline{b} = (1,\dots,1)$$

$$\chi = \text{caractère trivial}$$

$$k = 1$$

nous retrouvons les sommes de Kloosterman multiples

$$\sum_{\substack{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \\ x_i \in \mathbb{F}_q^*}} \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i\right)$$

avec lesquelles nous avons commencé le cours. Comme nous l'avons déjà dit, par un argument fort astucieux, Deligne a démontré que, pour la somme de Kloosterman ci-dessus, les groupes de cohomologie correspondants sont nuls pour $i \neq n-1$, que le H_c^{n-1} est pur de poids $n-1$ et que la dimension de ce H_c^{n-1} est n . Nous allons donner une nouvelle démonstration de ce résultat dans le cas où l'entier n est premier à p . En compensation pour la restriction "n premier à p", qui est une limitation intrinsèque de notre méthode, nous allons mettre en évidence et exploiter une relation frappante entre la somme de Kloosterman ci-dessus et la famille à un paramètre λ des hypersurfaces de degré n dans $\mathbb{P}^{n-1}$ d'équation homogène

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . T_i^n = \lambda . \prod_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Dans le cas général des sommes

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_q)$$

nous allons prouver que, si <u>les entiers</u> $b_1,\ldots,b_n$, $d=\sum_{i=1}^{n} b_i$ <u>et</u> k <u>sont tous premiers à</u> p , alors les groupes de cohomologie correspondants sont nuls pour tout degré $i\neq n-1$, que le H_c^{n-1} est pur de poids $n-1$ et que la dimension de ce H_c^{n-1} est $d.k^{n-1}$. Comme dans le cas particulier des sommes de Kloosterman, notre méthode de démonstration dans le cas général s'appuie sur une relation entre nos sommes et une famille convenable à un paramètre d'hypersurfacesdans $\mathbb{P}^{n-1}$ qui sont encore des "single-monomial deformations" des hypersurfaces de Fermat.

Il serait très intéressant d'essayer de se servir de cette relation en cohomologie p-adique pour étudier les polygones de Newton associés à nos sommes. Déjà dans le cas où χ est le caractère trivial et où $k=1$, donc dans le cas de la somme

$$\sum_{\substack{\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}=1 \\ x_i\in\mathbb{F}_q^*}} \Psi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)$$

quelle est la règle qui donne les valuations p-adiques des $d=\sum_{i=1}^{n} b_i$ "racines réciproques" correspondantes en fonction du n-uple $\underline{b}=(b_1,\ldots,b_n)$? Dans le cas $\underline{b}=(1,\ldots,1)$, Sperber a démontré que les n racines réciproques ont pour valuations p-adiques (normalisées par $\mathrm{ord}(q)=1$) $0,1,\ldots$ et $n-1$, ceci indépendamment du choix du nombre premier $p\geqslant n+2$. Que se passe-t-il pour $\underline{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ en général ? Pour le moment, personne n'en sait rien !

5.5.2. <u>Interlude</u> : "<u>formules d'Hurwitz</u>".

Dans notre étude des sommes

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_{q^\nu})$$

nous allons nous servir plusieurs fois du théorème suivant qui contrôle les caractéristiques d'Euler-Poincaré des revêtements finis, étales, galoisiens d'ordre permier à p (on s'est déjà servi de ce théorème dans la démonstration de 5.1.2 sous le nom de "formule d'Hurwitz"). Dans le cas des "coefficients constants" ce théorème est dû à Deligne-Lustig. Notre légère généralisation en découle facilement. La voici :

THÉORÈME. *Soit* k *un corps algébriquement clos de caractéristique* p, *soit* V *un* k-*schéma séparé de type fini, soit* G *un groupe fini d'ordre premier à* p *qui agit librement sur* V (i.e. *pour* $g \in G$, $g \neq \mathrm{id}$, g *agit sans point fixe*). *On suppose que le quotient* V/G *existe* (*ce qui est automatique si* V *est supposé quasi-projectif*) *et on le note* U ; *on note* π *l'application quotient*,

$$\begin{array}{c} V \\ \pi \downarrow \;\big)\; G \\ U = V/G \end{array} .$$

Soit d'autre part H *un groupe fini, soit* W *un* H-*torseur sur* U,

$$\begin{array}{c} W \\ \varphi \downarrow \;\big)\; H \\ U \end{array}$$

soit E *un corps de nombres, extension finie de* $\mathbb{Q}$, *et soit* M *un* E-*vectoriel de dimension finie muni d'une action* ρ *de* H,

$$\rho : H \longrightarrow \mathrm{Aut}_E(M) .$$

Pour toute place λ *de* E *dont la caractéristique résiduelle* ℓ *est* $\neq p$, *on désigne par* ρ_λ *la représentation* λ-*adique correspondante*,

$$\rho_\lambda : H \longrightarrow \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M \otimes_E E_\lambda)$$

et par $\mathcal{F}_\lambda$ *le* E_λ-*faisceau lisse sur* U *obtenu à partir du* H-*torseur* W *par "extension du groupe structural" à l'aide de* ρ_λ,

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[d, "\varphi"'] \\
U
\end{tikzcd}
\Big) \; H \xrightarrow{\rho_\lambda} \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(M \otimes_E E_\lambda) \; .
$$

Considérons alors les groupes de cohomologie

$$H^i_c(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda)$$

qui sont des E_λ-représentations de G, ainsi que leur somme alternée

$$\sum_i (-1)^i \, H^i_c(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda)$$

qui est une E_λ-représentation virtuelle de G. Alors

(1) pour toute place λ de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, le caractère de la représentation virtuelle de G, donnée par

$$\Sigma \; (-1)^i \, H^i_c(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda) \; ,$$

est à valeurs dans E, et ce caractère est indépendant du choix de λ ;

(2) pour toute place λ de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, le caractère de cette représentation virtuelle est le caractère d'une représentation virtuelle donnée par une différence de $\mathcal{O}_{E_\lambda}[G]$-modules projectifs;

(3) pour toute place λ de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, l'entier

$$\chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda) \overset{\mathrm{dfn}}{=\!=} \sum_i (-1)^i \dim_{E_\lambda}(H^i_c(U, \mathcal{F}_\lambda))$$

est indépendant de λ et nous avons l'égalité de représentations virtuelles de G

$$\sum_i (-1)^i \, H^i_c(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda) = \chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda) . \mathrm{Reg}(G)$$

où $\mathrm{Reg}(G)$ désigne la représentation régulière de G.

PREUVE. Désignons par Z le $G \times H$-torseur au-dessus de U défini par

$$Z = V \times_U W \; ,$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "H"'] \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, "G \times H"] & \\
V \arrow[dr, "G"'] & & W \arrow[dl, "H"] \\
 & U &
\end{tikzcd}
$$

Alors, pour toute place λ de E, nous avons des $E_\lambda[G]$-isomorphismes canoniques

$$H_c^i(V,\pi^*\mathcal{F}_\lambda) \simeq (H_c^i(Z,E_\lambda)\otimes_E M)^H \qquad (i \in \mathbb{N}) .$$

Par suite, pour tout $g \in G$, nous avons les relations

$$\mathrm{Tr}(g,H_c^i(V,\pi^*\mathcal{F}_\lambda)) = \frac{1}{\# H} \sum_{h\in H} \mathrm{Tr}(h.g,H_c^i(Z,E_\lambda)).\mathrm{Tr}(h,M)$$

et donc, en prenant la somme alternée de ces relations, nous avons, pour tout $g \in G$,

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g,H_c^i(V,\pi^*\mathcal{F}_\lambda)) = \frac{1}{\# H} \sum_{h\in H} \mathrm{Tr}(h,M).\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(h.g,H_c^i(Z,E_\lambda)) .$$

D'après Deligne-Lustig (cf. Ann. of Math. 103, 1 (1976) p. 119, proposition 3.3), pourvu que l'on suppose λ de caractéristique $\ell \neq p$, pour tout $h \in H$ et tout $g \in G$ fixés, la somme interne

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(h.g,H_c^i(Z,E_\lambda))$$

est un entier indépendant du choix de la place λ ; ceci rend évident l'assertion (1).

L'assertion (2) est un "general nonsense" (cf. Deligne-Lustig, p. 120, proposition 3.5) et serait valable pour un E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}_\lambda$ sur U quelconque.

A partir de (1) et (2), l'argument donné dans Deligne-Lustig (cf. théorème 3.2) montre que, pour tout $g \in G$, $g \neq \mathrm{id}$, nous avons bien

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(g,H_c^i(V,\pi^*\mathcal{F}_\lambda)) = 0$$

pour toute place λ de caractéristique $\ell \neq p$, ce qui veut dire précisément que, pour une telle place λ, la représentation virtuelle

$$\sum_i (-1)^i H_c^i(V,\pi^*\mathcal{F}_\lambda)$$

est un multiple de la représentation régulière de G. Comme le caractère de notre représentation virtuelle est indépendant de λ, ce multiple l'est aussi, i.e. nous avons

$$\sum_i (-1)^i H_c^i(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda) = N.\mathrm{Reg}(G)$$

avec un entier N indépendant de λ .

Si nous prenons la dimension des invariants des deux côtés de l'égalité de représentations virtuelles ci-dessus, nous obtenons la formule

$$\sum_i (-1)^i \dim[H_c^i(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda)^G] = N$$

formule valable pour toute place λ de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$. Compte-tenu des isomorphismes canoniques de E_λ-vectoriels

$$H_c^i(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda)^G \xleftarrow{\sim} H_c^i(U, \mathcal{F}_\lambda)$$

on en déduit l'assertion (3).

REMARQUE. En fait, il est connu que la relation entre représentations virtuelles

$$\sum_i (-1)^i H_c^i(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda) = \chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda).\mathrm{Reg}(G)$$

est vraie pour un E_λ-faisceau constructible $\mathcal{F}_\lambda$ sur U quelconque, E_λ étant une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, avec $\ell \neq p$, et $\pi : V \to U$ étant un G-torseur avec G un groupe fini d'ordre premier à p . Ce résultat est lui-même un cas particulier d'un théorème général de Deligne, exposé par Illusie au séminaire E.N.S., 1978-79.

COROLLAIRE 1. <u>Avec les hypothèses et les notations du théorème, nous avons la "formule d'Hurwitz"</u>

$$\chi_c(V, \pi^* \mathcal{F}_\lambda) = \#G.\chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda) .$$

COROLLAIRE 2. <u>Avec les notations et les hypothèses du théorème, soit</u>

$$\chi : G \longrightarrow E^*$$

<u>un caractère linéaire de</u> G . <u>Soit</u> λ <u>une place de</u> E <u>de caractéristique résiduelle</u> $\ell \neq p$; <u>on note</u> χ_λ <u>le caractère</u>

$$G \xrightarrow{\chi} E^* \hookrightarrow E_\lambda^*$$

et $\mathcal{L}_{\chi_\lambda}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur U obtenu à partir du G-torseur V par extension du groupe structural par χ_λ^{-1},

$$\begin{array}{c} V \\ \pi \big\downarrow \circlearrowright G \xrightarrow{\chi_\lambda^{-1}} E_\lambda^* \\ U \end{array} .$$

Alors (pour mémoire) nous avons, pour tout entier i, un isomorphisme canonique

$$H_c^i(U, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\chi_\lambda}) \xrightarrow{\sim} H_c^i(V, \pi^*\mathcal{F}_\lambda)^{\chi_\lambda}$$

(où l'exposant χ_λ désigne la composante χ_λ-isotypique). Par conséquent, nous avons la formule

$$\chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\chi_\lambda}) = \chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda) = \frac{1}{\# G}\, \chi_c(V, \pi^*\mathcal{F}_\lambda) .$$

PREUVE DES DEUX COROLLAIRES. La première "formule d'Hurwitz" découle de l'égalité

$$\Sigma\ (-1)^i\ H_c^i(V, \pi^*\mathcal{F}_\lambda) = \chi_c(U, \mathcal{F}_\lambda).\mathrm{Reg}(G)$$

en prenant les dimensions virtuelles des deux côtés. La seconde découle de la même égalité, mais en prenant maintenant les dimensions virtuelles des χ_λ-composantes isotypiques des deux côtés et en se servant des isomorphismes

$$H_c^i(U, \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}_{\chi_\lambda}) \xrightarrow{\sim} H_c^i(V, \pi^*\mathcal{F}_\lambda)^{\chi_\lambda} .$$

5.5.3. Retour aux sommes $S(\underline{b}, k, \underline{\alpha}, \Psi, \chi; \mathbb{F}_{q^\nu})$.

Pour un n-uplet d'entiers $\geqslant 1$ donné,

$$\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) ,$$

le groupe $G_{\underline{b}}$ ne va être connexe que si les b_i sont premiers entre eux. Pour se ramener à ce cas, il sera commode d'introduire

$$r = \text{p.g.c.d}(b_1,\dots,b_n)$$

et

$$\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$$

avec

$$a_i = b_i/r \qquad (i=1,\dots,n)$$

de sorte que

$$\underline{b} = r.\underline{a}$$

et

$$\text{p.g.c.d}(a_1,\dots,a_n) = 1 .$$

Pour tout n-uplet $\underline{c} = (c_1,\dots,c_n)$ d'entiers, on désigne par

$$[\underline{c}] : (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

le caractère

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}$$

du tore trivial $(\mathbb{G}_m)^n$, de sorte que $G_{\underline{b}}$ est le noyau du caractère

$$[\underline{b}] : (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow \mathbb{G}_m .$$

Nous avons alors un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{G}_m)^n \arrow[d, "{[\underline{a}]}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_{(q-1)\underline{b}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "{[\underline{a}]}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_{\underline{b}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "{[\underline{a}]}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_{\underline{a}} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "{[\underline{a}]}"] \\
\mathbb{G}_m & \mu_{(q-1)r} \arrow[l, hook'] & \mu_r \arrow[l, hook'] & \{1\} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} .$$

Si nous choisissons, de plus, des entiers $a'_1,\dots,a'_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, a'_i = 1$$

alors l'application

$$(\underline{a}') : \mathbb{G}_m \longrightarrow (\mathbb{G}_m)^n$$
$$\lambda \longmapsto (\ldots,\lambda^{a'_i},\ldots)$$

définit une section de $[\underline{a}]$,

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{G}_m)^n \arrow[d, "{[\underline{a}]}"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[u, bend left=60, "(\underline{a}')"] \end{tikzcd}$$

et induit des décompositions en produit

$$(\mathbb{G}_m)^n \simeq G_{\underline{a}} \times \mathbb{G}_m$$
$$G_{(q-1)\underline{b}} \simeq G_{\underline{a}} \times \mu_{(q-1)r}$$
$$G_{\underline{b}} \simeq G_{\underline{a}} \times \mu_r \quad .$$

Considérons le "revêtement de Lang" du groupe $(\mathbb{G}_m)^n$ par lui-même, i.e. l'endomorphisme "élévation à la puissance $(q-1)$-ième",

$$(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) \left(\begin{tikzcd} (\mathbb{G}_m)^n \arrow[d, "\text{"q-1"}"] \\ (\mathbb{G}_m)^n \end{tikzcd} \right.$$

qui fait de $(\mathbb{G}_m)^n$ un $(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$-torseur sur lui-même. L'image réciproque de ce torseur sur $G_{\underline{b}} \subset (\mathbb{G}_m)^n$ est le torseur

$$(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) \left(\begin{tikzcd} G_{(q-1)\underline{b}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{"q-1"}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (\mathbb{G}_m)^n \arrow[d, "\text{"q-1"}"] \\ G_{\underline{b}} \arrow[r, hook] & (\mathbb{G}_m)^n \end{tikzcd} \right. \quad .$$

Etant donné un caractère

$$\chi : G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow E^*$$

où E est un corps qui contient $\mathbb{Q}(\zeta_p,\zeta_{q-1})$, nous pouvons toujours le prolonger en un caractère $\widetilde{\chi}$ du groupe $(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & E^* \\ \cup & \nearrow_{\chi} & \\ G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q) & & \end{array}$$

Pour chaque place λ de E de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, notons $\tilde{\chi}_\lambda$ le caractère

$$(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\tilde{\chi}} E^* \hookrightarrow E_\lambda^*$$

de $(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans E_λ^* et désignons, provisoirement, par $\mathcal{L}_{\tilde{\chi}_\lambda}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $G_{\underline{b}}$ déduit du $(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$-torseur $G_{(q-1)\underline{b}}$ sur $G_{\underline{b}}$ par extension du groupe structural par $\tilde{\chi}_\lambda^{-1}$,

$$\text{"q-1"} \quad \begin{array}{c} G_{(q-1)\underline{b}} \\ \downarrow \\ G_{\underline{b}} \end{array} \qquad (\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\tilde{\chi}_\lambda^{-1}} E_\lambda^* \quad .$$

On vérifie facilement, à l'aide du théorème de densité de Čebotarev, que le E_λ-faisceau $\mathcal{L}_{\tilde{\chi}_\lambda}$ sur $G_{\underline{b}}$ ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{\chi}$ du caractère χ, nous pouvons donc noter ce faisceau $\mathcal{L}_{\chi_\lambda}$.

D'autre part, étant donné un n-uplet

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

d'éléments de $\mathbb{F}_q^*$ et un entier $k \geqslant 1$, nous désignons par

$$f_{k,\underline{\alpha}} : G_{\underline{b}} \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

la fonction définie par

$$f_{k,\underline{\alpha}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i^k \; .$$

Etant donné le caractère additif non trivial

$$\Psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow E^*$$

nous disposons du E_λ-faisceau lisse de rang 1 , $\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}$, sur $\mathbb{A}^1$, d'où par image réciproque du E_λ-faisceau lisse de rang 1 , $f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})$ sur $G_{\underline{b}}$.

La formule des traces de Lefschetz montre que pour toute place λ de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, notre somme exponentielle

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_{q^\nu})$$

n'est autre que

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F^\nu, H^i_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))) .$$

THÉORÈME 5.5.3.1. Avec les notations ci-dessus, supposons que les entiers $b_1,\ldots,b_n$, $d = \sum_{i=1}^n b_i$ et k sont tous premiers à p . Alors, pour tout caractère χ du groupe $G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q)$, pour tout caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{F}_q$ et pour toute place λ de E de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, nous avons les résultats suivants :

(1) pour tout entier i , l'application naturelle

$$H^i_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \longrightarrow H^i(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

est un isomorphisme ;

(2) pour $i \neq n-1$, on a

$$H^i_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) = 0$$

et

$$H^{n-1}_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

est pur de poids $n-1$;

(3) la dimension de ce H^{n-1}_c est $d.k^{n-1}$;

(4) désignons par $\bar{\chi}$ et $\bar{\Psi}$ les caractères χ^{-1} et Ψ^{-1} inverses de χ et Ψ respectivement, alors le cup-produit

$$H^{n-1}_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \times H^{n-1}_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\bar{\chi}_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\bar{\Psi}_\lambda}))$$
$$\longrightarrow H^{2n-2}_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, E_\lambda) \xrightarrow{\operatorname{Tr}} E_\lambda(1-n)$$

<u>est une dualité parfaite à valeurs dans</u> $E_\lambda(1-n)$; <u>si l'on désigne par</u> $\{\gamma_1,\dots,\gamma_j,\dots\}$ <u>les valeurs propres de</u> "F" <u>sur le premier de ces</u> E_λ-<u>espaces vectoriels, alors les valeurs propres de</u> "F" <u>sur le second sont</u>

$$\{q^{n-1}/\gamma_1,\dots,q^{n-1}/\gamma_j,\dots\} = \{\bar\gamma_1,\dots,\bar\gamma_j,\dots\}$$

<u>pour toute conjugaison complexe</u> $\gamma \mapsto \bar\gamma$ <u>de la clôture algébrique de</u> $\mathbb{Q}_\ell$.

PREUVE. Compte-tenu de l'existence d'un isomorphisme

$$G_{\underline{b}} \simeq G_{\underline{a}} \times \mu_r$$

où $G_{\underline{a}}$ est un tore de dimension $n-1$, nous voyons que $G_{\underline{b}}$ est affine, lisse, purement de dimension $n-1$; dès lors, (2) et (4) résultent de (1) par l'argument habituel et (3) équivaut à l'énoncé :

(3bis) $$\chi_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda} \otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) = (-1)^{n-1} d.k^{n-1} .$$

Nous allons commencer par nous ramener à traiter une situation du même type dans laquelle χ est trivial. Pour cela considérons le revêtement fini, étale galoisien

$$G \left(\pi \Big\downarrow \quad \begin{array}{ccc} V & = & G_{(q-1)\underline{b}} \\ & & \Big\downarrow \text{"}q-1\text{"} \\ U & = & G_{\underline{b}} \end{array} \right) (\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$$

et le faisceau

$$\mathcal{F}_\lambda = f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})$$

sur $U = G_{\underline{b}}$. Nous pouvons appliquer le théorème 5.5.2 ("de Hurwitz") à cette situation, car le groupe

$$G = (\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)$$

est d'ordre $(q-1)^n$, donc d'ordre premier à p . Plus précisément nous appliquons le corollaire 2 de 5.5.2 : si $\tilde\chi$ est un prolongement quelconque du caractère χ au groupe $(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q) = G$, nous avons donc des isomorphismes canoniques

$$H^i_c(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda}\otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq H^i_c(G_{(q-1)\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, f^*_{(q-1)k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))^{\tilde{\chi}_\lambda}$$

et

$$H^i(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda}\otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq H^i(G_{(q-1)\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, f^*_{(q-1)k,\underline{\gamma}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))^{\tilde{\chi}_\lambda}$$

(le point étant que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G_{(q-1)\underline{b}} \arrow[d, "\text{"}q-1\text{"}"'] \arrow[dr, "f_{(q-1)k,\underline{\alpha}}"] & \\
G_{\underline{b}} \arrow[r, "f_{k,\underline{\alpha}}"'] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

est commutatif), de sorte que l'énoncé (1) pour $S((q-1)\underline{b},(q-1)k,\underline{\alpha},\Psi,$ trivial$;\mathbb{F}_{q^\nu})$ implique l'énoncé (1) pour $S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_{q^\nu})$. De plus, on a l'égalité

$$\chi_c(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \mathcal{L}_{\chi_\lambda}\otimes f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) = \frac{1}{\#(\mathbb{G}_m)^n(\mathbb{F}_q)}\,\chi_c(G_{(q-1)\underline{b}}\otimes\mathbb{F}_q, f^*_{(q-1)k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

de sorte que l'énoncé (3bis) pour $S((q-1)\underline{b},(q-1)k,\underline{\alpha},\Psi,$trivial$;\mathbb{F}_{q^\nu})$ équivaut à l'énoncé (3bis) pour $S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\chi;\mathbb{F}_{q^\nu})$.

Il suffit donc de démontrer le théorème avec l'hypothèse supplémentaire "χ trivial".

Considérons donc la situation de la somme exponentielle

$$S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\varepsilon;\mathbb{F}_{q^\nu})$$

où ε désigne le caractère trivial de $G_{\underline{b}}(\mathbb{F}_q)$. Notre deuxième réduction consiste à nous ramener au cas où les b_i sont premiers entre eux, i.e. au cas où $r=1$ et $\underline{a}=\underline{b}$. En effet, nous avons un isomorphisme

$$G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q \xleftarrow{\sim} \coprod_{\zeta\in\mu_r(\bar{\mathbb{F}}_q)} G_{\underline{a}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q$$

(à (ζ,x) où $\zeta\in\mu_r(\bar{\mathbb{F}}_q)$, $x\in G_{\underline{a}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q$, cet isomorphisme associe l'élément

$$\zeta^{\underline{a}'}x = (\zeta^{a'_1}x_1, \ldots, \zeta^{a'_n}x_n)$$

de $G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q)$ à travers lequel l'application

$$f_{k,\underline{\alpha}} : G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$$

devient l'application somme disjointe pour ζ parcourant $\mu_r(\bar{\mathbb{F}}_q)$ des applications

$$f_{k,\zeta^{k\underline{a}'}.\underline{\alpha}} : G_{\underline{a}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{F}}_q}$$

où

$$\zeta^{k\underline{a}'}.\underline{\alpha} = (\zeta^{ka'_1}\alpha_1, \ldots, \zeta^{ka'_n}.\alpha_n) \ .$$

Nous trouvons donc des isomorphismes de groupes de cohomologie

$$H^*_c(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq \bigoplus_{\zeta \in \mu_r(\bar{\mathbb{F}}_q)} H^*_c(G_{\underline{a}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, f_{k,\zeta^{k\underline{a}'}.\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

et

$$H^*(G_{\underline{b}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq \bigoplus_{\zeta \in \mu_r(\bar{\mathbb{F}}_q)} H^*(G_{\underline{a}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, f_{k,\zeta^{k\underline{a}'}.\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

de sorte que les assertions (1) et (3bis) pour $S(\underline{b},k,\underline{\alpha},\Psi,\varepsilon;\mathbb{F}_{q^\nu})$ sont équivalentes respectivement aux assertions (1) et (3bis) pour $S(\underline{a},k,\zeta^{k\underline{a}'}.\underline{\alpha},\Psi,\varepsilon;\mathbb{F}_{q^\nu})$.

On est donc ramené à montrer le théorème dans le cas où $\chi = \varepsilon$ et où le p.g.c.d des b_i est 1 . Dans ce cas $G_{\underline{b}}$ est un tore de dimension n-1 . Nous allons "voir" $G_{\underline{b}}$ comme un ouvert dans l'hypersurface

$$H(\underline{b}) \subset \mathbb{P}^n$$

définie, dans des coordonnées homogènes

$$(Z;X_1;\ldots;X_n)$$

sur $\mathbb{P}^n$, par l'équation homogène

$$\prod_{i=1}^{n} X_i^{b_i} = Z^d \ .$$

De façon évidente nous avons

$$G_{\underline{b}} = H(\underline{b}) - H(\underline{b}) \cap (Z = 0) \ .$$

Considérons d'autre part le tore $\mathbf{T}$ de dimension $n-1$ qu'est l'ouvert de $\mathbb{P}^{n-1}$

$$\mathbf{T} = \mathbb{P}^{n-1} - \mathbb{P}^{n-1} \cap \left(\prod_{i=1}^{n} T_i = 0\right)$$

(où $(T_1;\ldots;T_n)$ sont des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^{n-1}$). Nous avons un homomorphisme de tores

$$\begin{tikzcd} G_{\underline{b}} \arrow[d, "\mu_d"'] & \ni & (Z;X_1;\ldots;X_n) \arrow[d, mapsto] \\ \mathbf{T} & \ni & (X_1;\ldots;X_n) \end{tikzcd}$$

dont le noyau s'identifie au sous-groupe μ_d de $G_{\underline{b}}$ formé des éléments

$$(\zeta,\ldots,\zeta)$$

où ζ parcourt μ_d . Par conséquent, l'endomorphisme "d" de $\mathbf{T}$ se factorise à travers cet homomorphisme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T} \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[dr, "\text{"d"}"'] & G_{\underline{b}} \arrow[d, "\mu_d"] \\ & \mathbf{T} \end{tikzcd}$$

On voit facilement que l'homomorphisme π est donné en coordonnées homogènes par la formule

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T} \arrow[d, "\pi"'] & \ni & (T_1;\ldots;T_n) \arrow[d, mapsto] \\ G_{\underline{b}} & \ni & \left(\prod_{i=1}^{n} T_i^{b_i}; T_1^d;\ldots;T_n^d\right) \end{tikzcd}$$

et que, si H est le groupe fini étale d'ordre d^{n-2} , sous-groupe de

$$\mathrm{Ker}(\text{"d"}) = (\mu_d)^n/\mu_d$$

($\mu_d \subset (\mu_d)^n$ comme sous-groupe diagonal), formé des classes modulo μ_d des éléments

$$(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in (\mu_d)^n$$

qui vérifie

$$\prod_{i=1}^{n} \zeta_i^{b_i} = 1 ,$$

alors π donne à $\mathbf{T}$ une structure de torseur sur $G_{\underline{b}}$ sous le groupe H. En particulier, après tensorisation par $\bar{\mathbb{F}}_q$, nous trouvons une situation

$$\begin{array}{ccc} V & = & \mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q \\ G\ \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \quad H(\bar{\mathbb{F}}_q) \\ U & = & G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q \end{array}$$

à laquelle nous pouvons appliquer le corollaire 2 de 5.5.2. Nous avons donc des isomorphismes canoniques

$$H_c^*(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq H_c^*(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))^{H(\bar{\mathbb{F}}_q)}$$

et

$$H^*(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \simeq H^*(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))^{H(\bar{\mathbb{F}}_q)}$$

et la formule

$$\begin{aligned}\chi_c(G_{\underline{b}}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) &= \frac{1}{\#H(\bar{\mathbb{F}}_q)}\ \chi_c(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \\ &= \frac{1}{d^{n-2}}\ \chi_c(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) .\end{aligned}$$

Ceci nous ramène à démontrer que la flèche d'oubli des supports

$$H_c^*(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) \longrightarrow H^*(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda}))$$

est un isomorphisme et que

$$\chi_c(\mathbf{T}\otimes\bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f_{k,\underline{\alpha}}^*(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) = (-1)^{n-1}(dk)^{n-1} .$$

Or la flèche composée $f_{k,\underline{\alpha}}\circ\pi$ s'écrit en coordonnées homogènes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ \cup\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\cup \\ (T_1;\dots;T_n) & \longmapsto & \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . T_i^{dk}}{\prod_{i=1}^{n} T_i^{b_i k}} \end{array}$$

donc, ce qui nous reste à démontrer est un cas particulier du théorème 5.4.1: cas où l'on prend (notations de 5.4.1)

$$\begin{cases} X = \mathbb{P}^{n-1} \\ H \subset X \text{ , hypersurface de degré } dk \text{ , d'équation } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; T_i^{dk} = 0 \\ Z_i \subset X \text{ , hypersurface d'équation } T_i = 0 \text{ , pour } i = 1,\dots,n \\ b_i \; := b_i k \text{ et } d_i = 1 \quad (i = 1,\dots,n) \; . \end{cases}$$

L'ouvert

$$V = X - X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i \right)$$

n'est autre que $\mathbb{T}$ et la fonction sur V

$$f = \frac{H}{\prod_{i=1}^{n} Z_i^{b_i}}$$

n'est autre que la fonction $f_{k,\underline{\alpha}} \circ \pi$. Par suite d'après le théorème, la flèche d'oubli des supports est bien un isomorphisme et on a la formule explicite suivante

$$\begin{aligned} \chi_c(\mathbb{T} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \pi^* f^*_{k,\underline{\alpha}}(\mathcal{L}_{\Psi_\lambda})) &= \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{c(\mathbb{P}^{n-1})}{(1+dkL) . \prod_{i=1}^{n} (1+L)} \\ &= \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{(1+L)^n}{(1+dkL)(1+L)^n} \\ &= \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{1}{1+dkL} \\ &= (-dk)^{n-1} \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER.- Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas SGA 4. Springer Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag (1972/73).

E. BOMBIERI.- On exponential sums in finite fields. Amer. J. Math. 88 (1966), 71-105.

E. BOMBIERI.- On exponential sums in finite fields II, Inv. Math. 47 (1978), 29-39.

H. DAVENPORT.- The Collected Works of Harold Davenport (ed. Birch, Halberstam, Rogers). Academic Press, London, New York, San Francisco (1977).

P. DELIGNE.- Cohomologie Etale (SGA 4½). Springer Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag (1977).

P. DELIGNE.- La conjecture de Weil I. Pub. Math. I.H.E.S. 48 (1974), 273-308.

P. DELIGNE.- La conjecture de Weil II. A paraître dans Pub. Math. I.H.E.S.

P. DELIGNE and N. KATZ.- Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. SGA 7 II, Springer Lecture Notes in Math. 340 (1973).

P. DELIGNE and G. LUSZTIG.- Representations of reductive groups over finite fields. Ann. Math. 103, 1 (1976), 103-161.

B. DWORK.- On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. Amer. J. Math. 82 (1960), 631-648.

A. GROTHENDIECK.- Revêtements Etales et Groupe Fondamental SGA I. Springer Lecture Notes in Math. 224 (1971).

A. GROTHENDIECK.- Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique SGA 7, I. Springer Lecture Notes in Math. 288 (1972).

A. GROTHENDIECK.- Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L SGA 5. Springer Lectures Notes in Math. 589, Springer Verlag (1977).

H. HASSE.- Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantkörper. J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 37-54.

H. HASSE and H. DAVENPORT.- Die Nullstellen der Kongruenz zeta-funktionen in gewissen zyklischen Fällen. J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 151-182.

C. HOOLEY.- Travaux en préparation sur le problème de Waring.

L. ILLUSIE.- Formule d'Euler-Poincaré et Théorie de Brauer (d'après P. Deligne). Séminaire de l'ENS 1978/79, à paraître dans Astérisque.

G. LAUMON.- Majoration de sommes exponentielles (d'après P. Deligne et N. Katz). Séminaire de l'ENS 1978/79, à paraître dans Astérisque.

N. KATZ.- Crystalline Cohomology, Dieudonné Modules and Jacobi Sums. Proceedings of the 1979 Tata Int'l, Colloquium on Number Theory and Automorphic Forms, to appear.

L.J. MORDELL.- On a cubic exponential sum in two variables. J. London Math. Soc. 38 (1963), 356-358.

M. RAYNAUD.- Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. Séminaire Bourbaki, exposé 286, 1964/65, W.A. Benjamin Publ., New York (1966).

J.-P. SERRE.- Corps Locaux. Act Sci. Ind. 1296, Hermann, Paris (1962).

J.-P. SERRE.- Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves. W.A. Benjamin Publ., New York (1968).

J.-P. SERRE.- Représentations Linéaires. Des Groupes Finis. Troisième édition corrigée, Hermann, Paris (1978).

J.-P. SERRE.- Majoration de sommes exponentielles. Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42 (1977), 111-126

S. SPERBER.- P-adic hypergeometric functions and their cohomology. Duke. Math. J. 44, n° 3 (1977), 535-589.

S. SPERBER.- Congruence properties of the hyperkloosterman sum. Compositio Math., Vol. 40, Fasc. 1 (1980), 3-33.

A. WEIL.- Collected Papers. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1979).

Nicholas M. KATZ
University of Princeton
Department of Mathematics
08544 PRINCETON, N.J. (USA)

English Summary

These notes are devoted to the theory of exponential sums over finite fields. The first chapter recalls some of the number-theoretic interest of such sums. The second chapter discusses the L-functions attached to such sums, the "Weil conjectures" for these L-functions as established by Deligne, and the consequences for the exponential sums themselves. The third chapter is devoted to the cohomological interpretation of exponential sums and of their associated L-functions. These first three chapters are largely of an expository nature.

The main new results are found in chapters four and five. Chapter four is devoted to theorems of uniformity "for almost all p" for the cohomological structure of quite general exponential sums. Chapter five is devoted to a precise analysis of the cohomological structure of certain specific classes of exponential sums for which the associated algebro-geometric situation is especially attractive.