Astérisque

H. HENNION
B. ROYNETTE

Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène

Astérisque, tome 74 (1980), p. 99-122
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__99_0>

UN THÉORÈME DE DICHOTOMIE POUR UNE MARCHE ALÉATOIRE SUR UN ESPACE HOMOGÈNE

H. HENNION - B. ROYNETTE

0.- Introduction

a) Soient G un groupe topologique localement compact à base dénombrable d'élément neutre e et μ une mesure de probabilité sur G. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans G et de même loi μ. Soit $Z_n^g = gX_1 \dots X_n$ la marche aléatoire droite partant de g au temps 0 associée. C'est une chaîne de Markov dont le noyau de transition Q est donné par $Q(g,A) = \varepsilon_g * \mu(A)$ ($g \in G$, A borélien de G) et dont le noyau potentiel N est donné par $N(g,A) = N1_A(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_g * \mu^{*n}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(g,A)$. La mesure μ est dite adpatée si le support de μ engendre topologiquement G. Lorsque μ est adaptée, il est bien connu (cf. [8]) que l'une ou l'autre des situations suivantes est réalisée : ou tout état est récurrent, i. e. que la marche partant de e visite p. s. une infinité de fois tout ouvert non vide et $N(g,V) = +\infty$ pour tout ouvert non vide V de G et tout g de G ; ou tout état est transitoire, i. e. que la marche partant de e visite p. s. un nombre fini de fois tout compact et $N(g,V) < +\infty$ pour tout compact V et tout g de G.

b) Soient maintenant H un sous-groupe fermé de G et $M = H\backslash G$ le quotient à droite de G par H (M est l'ensemble des classes Hg ; G opère à droite sur M). Soient π l'application canonique de G dans M et $Y_n^x = \pi(gX_1 \dots X_n) = xX_1 \dots X_n$ (avec $x = \pi(g)$). Un calcul simple (cf. par exemple [9]) prouve que Y_n^x est une chaîne de Markov sur M dont le noyau de transition P est donné par $P(x,A) = \int_G 1_A(xg)\, d\mu(g) = \varepsilon_x * \mu(A) = Q(u, \pi^{-1}A)$ ($x \in M$, A borélien de M, $x = \pi(u)$ et $u \in G$), tandis que le noyau potentiel U est donné par $U(x,A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_G 1_A(x.g)\, d\mu^{*n}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_x * \mu^{*n}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,A) = N(u, \pi^{-1}A)$. Pour toute f borélienne : $M \to \mathbb{R}_+$, les formules suivantes sont évidentes : $P^n f(x) = Q^n(f \circ \pi)(u)$ et $Uf(x) = N(f \circ \pi)(u)$ (avec $x = \pi(u)$). Nous appellerons cette chaîne Y^x la marche aléatoire droite de loi μ sur M.

c) Notre but est ici d'établir pour Y_n^x un théorème de dichotomie analogue à celui rappelé dans le premier alinéa. Si un tel théorème est évidemment vrai lorsque H est distingué dans G puisque, dans ce cas, Y_n^x s'identifie à la marche aléatoire de loi $\pi(\mu)$ sur le groupe $H\setminus G$, il n'est pas vrai en général (cf. exemple 1) ci-dessous) ; aussi devrons-nous faire quelques hypothèses sur le triplet (G, H, μ). Une étude complète des chaînes du type Y_n^x a déjà été faite par H. Hennion (cf. [6]) dans le cas où G est nilpotent discret à génération finie. Cette étude a ensuite été étendue dans [10] aux groupes de Lie nilpotents simplement connexes.

I.- Quelques remarques préliminaires sous l'hypothèse d'étalement

Dans tout ce qui suit, μ sera supposée étalée, i. e. qu'il existe un n tel que μ^{*n} soit non singulière par rapport à une mesure de Haar à gauche λ de G. Cette hypothèse est équivalente au fait qu'il existe un entier p, une constante $k_1 > 0$ et un ouvert U de G avec : $\mu^{*p}|_U \geq k_1\lambda|_U$. Pour tout n, nous noterons μ_a^{*n} (resp. μ_s^{*n}) la partie absolument continue (resp. singulière) par rapport à λ de μ^{*n}. L'hypothèse d'étalement implique l'existence d'une constante $k_2 < 1$ telle que $\|\mu_s^{*n}\| \leq k_2^n$ pour n assez grand. Le noyau P^n se décompose de la même façon en P_a^n et P_s^n, avec $P_a^n f(x) = \varepsilon_x * \mu_a^{*n}(f)$ et $P_s^n f(x) = \varepsilon_x * \mu_s^{*n}(f)$. Si f est borélienne bornée, $P_a^n f$ est continue, comme convolée d'une fonction de L^1 et de L^∞. Si f est une fonction harmonique bornée (i. e. $Pf = f$), alors f est continue. En effet : $\|f-P_a^n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty\, k_2^n$ pour n assez grand. Ainsi f est la limite uniforme de fonctions continues (cf. [2]).

Introduisons quelques notations.

Notons U_a (resp. U_s) le noyau défini par $U_a = \sum_{n=0}^{\infty} P_a^n$ (resp. $U_s = \sum_{n=0}^{\infty} P_s^n$). Remarquons qu'on a :

$$|U_s f(x)| \leq k_3 \|f\|_\infty \qquad (1) \quad ,$$

et que puisque μ est étalée, U_a envoie les fonctions positives boréliennes bornées dans les fonctions s. c. i.

Si A est une partie borélienne de M, nous noterons :

$$R_A^x = \{\omega, \sum_{n=0}^{\infty} 1_A(Y_n^x(\omega)) = +\infty\} \; ; \; h_A(x) = P(R_A^x) \qquad (x \in M)$$

$$P_A 1(x) = P(T_A^x < +\infty) \;(=1 \text{ sur } A) \text{ avec } T_A^x = \inf\{n \geq 0 \,,\, Y_n^x \in A\} \quad .$$

Nous noterons encore : $S_A^x = \inf\{n \geq 1 \; ; \; Y_n^x \in A\}$ et $g_A(x) = P\{S_A^x = +\infty\}$ si $x \in A$ et $g_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

θ désignera comme d'habitude l'opérateur de translation $(Y_n^x \circ \theta = X_{n+1}^x)$. Pour toute v. a. C (resp. pour tout événement D) , nous noterons indifféremment par $E_x(C)$ ou $E(C^x)$ (resp. $P_x(D)$ ou $P(D^x)$) l'espérance (resp. la probabilité) pour la m. a. issue de x à l'instant 0 .

Nous noterons B_+ (resp. C_+) l'ensemble des fonctions positives bornées boréliennes (resp. continues positives bornées) définies sur M .

Définition.- Un élément x de M est dit transitoire s'il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 0$. Un élément x de M est dit récurrent si pour tout voisinage V de x , $h_V(x) = 1$.

Proposition 1.- Si μ est étalée, tout état est récurrent ou transitoire. L'ensemble des éléments transitoires est ouvert.

Lemme 1.- Soit A un borélien de M tel que $h_A \leqslant a < 1$ sur A . Alors $h_A = 0$ sur A (et donc partout).

Démonstration : Soient $x \in A$ et $\alpha = h_A(x) \leqslant a$; soit T_A^p le temps de $p^{\text{ième}}$ passage dans A . Il est clair que $\{T_A^p < \infty\} \underset{p \to \infty}{\searrow} R_A$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc p tel que $P_x\{T_A^p < \infty\} \leqslant P\{R_A^x\} + \varepsilon = \alpha + \varepsilon$.

Par ailleurs, on a :

$$R_A = R_A \cap \{T_A^p < \infty\} = \{T_A^p < \infty\} \cap R_A \circ \theta_{T_A^p} .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha = P(R_A^x) &= P_x\{T_A^p < \infty ; R_A \circ \theta_{T_A^p}\} \\ &= E_x\{T_A^p < \infty ; h(Y_{T_A^p})\} \qquad (2) \\ &\leqslant a(\alpha + \varepsilon) \quad , \end{aligned}$$

puisque $Y_{T_A^p} \in A$; ainsi $\alpha \leqslant a\,\alpha$ et donc $\alpha = 0$.

Démonstration de la proposition 1 : Soit x non récurrent. Il existe V tel que $h_V(x) < 1$ (V voisinage de x) ; h_V étant harmonique est continue ; il existe donc un voisinage W de x , $W \subset V$ tel que $h_V \leqslant a < 1$ sur W . Or, $h_W \leqslant h_V$.

D'où $h_W \leqslant a < 1$ sur W et donc $h_W = 0$ sur W, ce qui prouve la proposition 1 .

<u>Proposition 2.- Supposons toujours</u> μ <u>étalée. Si</u> x <u>est un état transitoire, il existe un voisinage</u> V <u>de</u> x <u>et une constante</u> C <u>telle que</u> $U1_V \leqslant C$ <u>partout</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit x comme dans l'hypothèse. D'après la décomposition de Riesz, on a avec W comme dans la proposition précédente : $P_W 1 = Ug_W + h_W = Ug_W$. Notons avec des indices (n) la chaîne d'opérateur $P^n (Y_p^{(n)} = Y_{np})$. Il est clair que $h_W^{(n)} = 0$. Ainsi : $P_W^{(n)} 1 = U^{(n)}\ g_W^{(n)}$ $(= 1$ sur $W)$. Par ailleurs, puisque la marche partant de x ne visite W qu'un nombre fini de fois, on a : $g_W^{(n)} \underset{n \to \infty}{\to} 1$ sur W .

D'autre part, d'après l'équation de Poisson : $(I - P^n)\ U^{(n)}\ g_W^{(n)} = g_W^{(n)}$ et donc, sur W, on a :

$$\begin{aligned} g_W^{(n)} &= 1 - P^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)} \\ &= 1 - P_a^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)} - P_s^n\ g_W^{(n)} \end{aligned}$$

, d'où il résulte que $P_a^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)}$ tend vers 0 sur W .

Comme $\| P_s^n \| \leqslant k_2^n$ et $U^{(n)}\ g_W^{(n)} \leqslant 1$, on a :

$$g_W^{(n)} \geqslant 1 - k_2^n - P_a^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)} \quad .$$

Le fait que $P_a^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)}$ tend vers 0 sur W et la continuité de $P_a^n\ U^{(n)}\ g_W^{(n)}$ impliquent l'existence d'un entier n_o , d'une constante $k_4 > 0$ et d'un voisinage W' de x tels que :

$$g_W^{(n_o)} \geqslant k_4\ 1_{W'} \quad .$$

D'où :

$$1 \geqslant U^{(n_o)}\ g_W^{(n_o)} \geqslant K_4\ U^{(n_o)}\ 1_{W'} \quad .$$

On a donc $U^{(n_o)}\ 1_{W'} \leqslant 1/k_4$ partout. Ainsi :

$$U1_{W'} = (I + P + \dots + P^{n_o - 1})\ U^{(n_o)}\ 1_{W'} \leqslant n_o \frac{1}{k_4} \quad .$$

La proposition est alors prouvée, avec $W' = V$ et $C = n_o \frac{1}{k_4}$.

Nous noterons T_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ .

Proposition 3.- Si $R \neq \emptyset$, l'ensemble fermé R des états récurrents est absorbant (i. e. : $P_{R^C} 1 = 0$ sur R , ou encore $R \cdot T_\mu \subset R$) .

Démonstration : Notons déjà que si $f \in C_+$, $P^n f$ est continue et donc Uf est s. c. i. De même, si V est un ouvert de M , $U1_V$ est s. c. i.

a) Soit $x \in R$ et y tel que pour tout voisinage ouvert relativement compact V_{y_o} de y on ait : $P_x \{T_{V_o} < \infty\} = P_{V_o} 1(x) > 0$ (i. e. $y = g \cdot x$ avec $g \in T_\mu$) et que $U1_{V_o}$ est s. c. i., il existe un voisinage W de x tel que $F_{V_o} 1(x) \geqslant a > 0$ sur W .

b) $P_{V_o} 1$ étant surharmonique (i. e. : $P P_{V_o} 1 \leqslant P_{V_o} 1$) , $P_{V_o} 1(Y_n^x)$ est une surmartingale positive. Elle converge donc p. s. quand $n \to \infty$ vers une v. a. $L_{V_o}^x$. Il est bien connu (cf. [1], p. 97) que $L_{V_o}^x = 0$ sur $(R_{V_o}^x)^c$. Par ailleurs : $L_{V_o}^x = \overline{\lim_{n \to \infty}} P_{V_o} 1(Y_n^x) \geqslant a > 0$ p. s., car x est récurrent. D'où : $P (R_{V_o}^x)^c = 0$ et donc $h_{V_o}(x) = 1$. D'après (2), il existe $y_o \in V_o$ tel que $h_{V_o}(y_o) = 1$.

c) Prenant alors une suite d'ouverts relativement compacts V_n décroissants vers y , on en déduit, réitérant la construction précédente, l'existence d'une suite z_n , $z_n \in V_n$, $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y$ et telle que $h_{V_o}(z_n) \geqslant h_{V_n}(z_n) = 1$. Ainsi, $h_{V_o}(z_n) = 1$ et donc, h_{V_o} étant continue, $h_{V_o}(y) = 1$ et y est donc récurrent. D'où $x \cdot T_\mu \subset R$ et la proposition est prouvée.

Remarque : Notons que les résultats que nous venons de prouver sont vrais dans la situation suivante : Y_n est une chaîne de Markov sur M dont le noyau de transition est fortement fellérien, i. e. envoie B_+ dans C_+ .

Il existe sur M une mesure quasi-invariante σ-finie (cf. [3]) ; soit Υ une telle mesure (Υ satisfait à : $\Upsilon \cdot g$ est équivalente à Υ pour tout g de G). Cette mesure Υ est telle que : $\Upsilon(A) = 0$ si et seulement si $\lambda(\pi^{-1} A) = 0$, où λ est une mesure de Haar sur G (3) . La proposition suivante établit un théorème de dichotomie peu surprenant.

Proposition 4.- Si μ est étalée et si $T_\mu = G$, alors la chaîne Y_n^x satisfait à l'une des propriétés suivantes :

1) Tous les états sont récurrents et la chaîne est récurrente au sens de Harris par rapport à Υ .

2) Tous les états sont transitoires et le potentiel de tout compact est borné.

Lemme 2.- Supposons que M s'écrive : $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ avec $h_{M_k} \equiv 0$. Alors le potentiel de tout compact est borné.

Démonstration du lemme 2 :

a) Reprenant les notations de la proposition 2 , on a : $P_{K_k} 1 = Ug_{M_k}$ et donc $Ug_{M_k} = 1$ sur M_k . Soit $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} P^n g_{M_k}$. Puisque $Ug_{M_k} = 1$ sur M_k , il est clair que $1 \geqslant f_k > 0$ sur M_k .

Par ailleurs, de la relation $UP^n g_{M_k} \leqslant Ug_{M_k} \leqslant 1$, on déduit que $Uf_k \leqslant 1$. Posons alors : $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k$. Il est clair que $f \leqslant 1$, $f > 0$ partout sur M et $Uf \leqslant 1$.

b) Soit maintenant n assez grand pour que $\mu_a^{*n}(G) > 0$. La fonction continue $g = P_a^n f$ est alors partout strictement positive et $Ug = UP_a^n f \leqslant UP^n f \leqslant Uf \leqslant 1$. Si maintenant K est un compact de M , il existe k_5 telle que $1_K \leqslant k_5 g$ et donc $U1_K \leqslant k_5$. Ceci prouve le lemme 2.

Démonstration de la proposition 4 : Soit S_μ le semi-groupe ouvert des points de G possédant un voisinage sur lequel une puissance de μ majore un multiple de λ . De la relation $T_\mu \cdot S_\mu \subset S_\mu$ (cf. [2]) et du fait que $S_\mu \neq \emptyset$ (μ étant étalée), on déduit que $S_\mu = G$. Il en résulte que la marche Z_n^g sur G est λ-irréductible (cf. [9]) et donc que la marche Y_n^x sur M est γ-irréductible (3) . On sait alors (cf. [9]) que Y_n^x satisfait à l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

1') Il existe un ensemble absorbant $F \subset M$ portant γ et une mesure σ-finie $\gamma' \gg \gamma$ telle que la restriction de Y_n^x à F soit récurrente au sens de Harris par rapport à γ' .

2') Le noyau potentiel est propre (i. e. : il existe une suite M_k de parties de M et des constantes C_k telles que : $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ et $U1_{M_k} \leqslant C_k$) .

Supposons 1') réalisée ; pour tout A tel que $\gamma(A) > 0$, on a $\gamma'(A) > 0$ et donc $h_A = 1$ sur F ; h_A étant continue, $h_A = 1$ partout ; si par contre $\gamma(A) = 0$, (3) et (1) montrent que $U1_A = U_s 1_A \leqslant k_3$ de sorte que $h_A = 0$ partout ; et l'assertion 1 de la proposition est réalisée ; supposons 2') réalisée ; alors l'hypothèse du lemme 2 est satisfaite et l'assertion 2 de la proposition résulte de la conclusion de ce lemme.

Lorsque G est discret, nous obtenons un théorème de dichotomie complet. Ce théorème est en fait un cas particulier du théorème 1 du paragraphe suivant. Nous le présentons ici car sa démonstration est sensiblement plus simple que celle du théorème 1.

Proposition 5.- Supposons G discret (et donc dénombrable) et μ adaptée. Alors, de deux choses l'une :

- ou tout état est récurrent et il n'y a qu'une seule classe de récurrence,
- ou tout état est transitoire.

Démonstration : a) Notons $i, j, \ldots$ les éléments de M et $\check{\mu}$ l'image de μ par l'application $g \to g^{-1}$. Soient $P(i,j)$ et $\check{P}(i,j)$, $\check{U}(i,j)$ et $U(i,j)$ les transitions et les potentiels correspondants. Puisque :

$$P^n(i,j) = \mu^{*n}\{g \; ; \; ig = j\} = \check{\mu}^n\{g \; ; \; jg = i\} = \check{P}^n(i,j) \quad \text{on a :}$$

$$U(i,j) = \check{U}(i,j) \; . \qquad (4)$$

b) Soient i un état récurrent et C_i la classe de i ; si i conduit à j (i. e. : $U(i,j) > 0$) , alors j est récurrent et appartient à C_i . Ainsi :

$$i \cdot T_\mu \subset C_i \; .$$

c) Soit i un état récurrent. i alors est $\check{\mu}$-récurrent d'après (4) ; si j conduit à i (i. e. $U(i,j) > 0$) , alors $\check{U}(i,j) > 0$ et i $\check{\mu}$ - conduit à j . Ainsi j est $\check{\mu}$, donc μ-récurrent. Ainsi j conduit à i et j est μ-récurrent, i conduit donc à j , d'où :

$$i \, T_\mu^{-1} \subset C_i \; .$$

d) Finalement, μ étant adaptée, on déduit de : $i \, T_\mu \subset C_i$ et $i \, T_\mu^{-1} \subset C_i$ que $i \quad G = M \subset C_i$ et $C_i = M$. Ceci prouve la proposition 5 .

Nous allons achever ce paragraphe en donnant un exemple prouvant que la proposition 4 ne saurait être étendue telle quelle si $T_\mu \neq G$ et prouvant que la proposition 5 ne saurait être étendue telle quelle si G n'est pas discret.

Exemple 1 : Soit G le groupe affine de $\mathbb{R}$. G est l'ensemble $\{(a,b) \; ; \; a \quad 0\}$ muni de la loi de multiplication : $(a,b) \quad (a',b') = (aa', b+ab')$. G opère à gauche sur $M \simeq \mathbb{R}$ de façon transitive par la formule : $(a,b)\,x = ax + b$. Soit (X_1,Z_1) ,..., (X_n,Z_n) ,... une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans G et de loi μ . Supposons μ étalée et : Supp $\mu \subset \left]0, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$. La marche gauche Y_n^x associée est donnée par :

$$Y_n^x = X_n X_{n-1} \dots X_1 \cdot x + X_n X_{n-1} \dots X_2 Z_1 + X_n X_{n-1} \dots X_3 Z_2 + \dots + X_n Z_{n-1} + Z_n .$$

De l'hypothèse faite sur μ , on déduit que :

$$|Y_n^x| \leqslant |x| \cdot 2^{-n} + 2^{-(n-1)} + \dots 2^{-1} + 1 \qquad \text{p. s.}$$

D'où :

$$|Y_n^x| \leqslant 2 + |x| \cdot 2^{-n} \quad \text{p. s. pour tout } n .$$

Ainsi, pour $x = 0$, on a : $U1_{[-2,2]}(0) = +\infty$,

tandis que si K est un compact tel que $K \cap [-2,2] = \emptyset$,

$$U1_K(0) = 0 .$$

II.- Le théorème de dichotomie

Dans tout ce paragraphe, nous ferons les hypothèses suivantes :

H_1 . μ est adaptée et étalée.

Soient Δ_G (resp. Δ_H) la fonction module de G (resp. H) et χ le caractère (i. e. : l'homomorphisme à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) défini sur H par $\chi(h) = \dfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$.

H_2 . χ se prolonge en caractère continu sur G , noté encore χ .

H_3 . $C = \int_G \chi(g^{-1})\, d\mu(g) \leqslant 1$.

Remarques sur les hypothèses H_2 et H_3 :

a) Si H est unimodulaire, H_2 est satisfaite ; en effet, Δ_G^{-1} est un caractère sur G . Si H et G sont unimodulaires, H_2 et H_3 sont satisfaites (on peut prendre $\chi \equiv 1$ sur G) . En particulier, lorsque G est compact, ou de Lie connexe de type R , ou discret, H_2 et H_3 sont satisfaites pour tout sous-groupe H fermé de G . Lorsque H est distingué dans G , H_2 et H_3 sont satisfaites, puisque $\Delta_G = \Delta_H$ sur H dans ce cas. Si G est de Lie connexe semi-simple, H satisfait à H_2 si et seulement si H est unimodulaire, H_3 est alors satisfaite : en effet, G admet pour seul caractère le caractère trivial $\chi \equiv 1$, un caractère étant égal à 1 sur le sous-groupe dérivé (G, G) . Un argument analogue montre que

H_2 et H_3 sont satisfaites lorsque H est semi-simple ou compact.

b) L'hypothèse H_2 est équivalente à l'existence d'une mesure m positive sur $M = H/G$, σ-finie et relativement invariante par l'action de G, i. e. telle que $m \cdot g = \chi(g^{-1})\; m$ pour tout g de G. En particulier, lorsque $\chi \equiv 1$, m est invariante (cf. [3], p. 59).

Ceci étant, nous allons prouver :

<u>Théorème 1</u>.- Supposons H_1, H_2 et H_3 réalisées, et désignons par m la mesure σ-finie relativement invariante sur M de facteur χ. Alors pour la marche Y_n^x de loi μ, on a : ou l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1) Tout état de M est récurrent.

2) La marche Y_n^x est récurrente au sens de Harris par rapport à m (i. e. A borélien de M, $m(A) > 0$ implique $h_A \equiv 1$ et $m(A) = 0$ implique $h_A = 0$) ou l'une de conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

3) Tout point de M est transitoire.

4) Le potentiel de tout compact est borné.

De plus, si $C = \int_G \chi(g^{-1})\, d\ (g) < 1$, c'est la situation 3-4 qui est réalisée.

<u>Démonstration</u> : Si f_1, $f_2 \in B_+$, on note $< f_1, f_2 >_m$ l'intégrale $\int_M f_1(x)\, f_2(x)\, dm(x)$. $\check{\mu}$ désigne la mesure de probabilité sur G définie par

$$d^{\nabla}(g) = \frac{(g)\ d^{\vee}(g)}{\int_G (G)\ d^{\vee}(g)}$$

. μ étant étalée, il en est de même de $\overset{\nabla}{\mu}$. Nous noterons avec des ∇ les objets relatifs à la marche droite de loi $\overset{\nabla}{\mu}$. En particulier, pour $\rho \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\overset{\nabla}{U}{}^{\rho}$ est défini par : $\overset{\nabla}{U}{}^{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho n}\, \overset{\nabla}{P}{}^{n}$.

<u>Lemme 3</u> (dualité).- Pour toute f_1, $f_2 \in B_+$: $< Pf_1, f_2 >_m = C < f_1, \overset{\nabla}{P}f_2 >_m$ et $< Uf_1, f_2 >_m = < f_1, \overset{\nabla}{U}{}^{-\log C}\, f_2 >_m$.

<u>Démonstration du lemme 3</u> : On a :

$$\begin{aligned}
< P^n f_1, f_2 >_m &= \int_G \int_M dm(x)\ f_1(xg)\ d\mu^{*n}(g)\ f_2(x) \\
&= \int_G \int_M f_1(y)\ d\mu^{*n}(g)\ f_2(yg^{-1})\ \chi(g^{-1})\ dm(y) \\
&= \int_G \int_M f_1(y)\ d\check{\mu}^{*n}(g)\ f_2(yg)\ \chi(g)\ dm(y) \\
&= \int_G \cdots \int_G \int_M f_1(y)\ f_2(yg_1 \ldots g_n)\chi(g_1 \ldots g_n)\ dm(y)\ d\check{\mu}(g_1)\ \ldots\ d\check{\mu}(g_n)
\end{aligned}$$

$$= \int_G \cdots \int_G \int_M f_1(y)\ f_2(yg_1 \ldots g_n)\ (\chi(g_1)\ d\check{\mu}(g_1)) \ldots (\chi(g_n)\ d\check{\mu}(g_n))\ dm(y)$$

car χ est un caractère de G

$$= \int_G \int_M f_1(y)\ f_2(yg)\ C^n\ d^{\nabla * n}(g)\ dm(y)$$

$$= C^n < f_1 \ , \ P^{*n} f_2 >_m \ ,$$

ce qui prouve le lemme 3, par sommation sur n.

Comme conséquence de ce lemme 3, traitons tout de suite le cas $C < 1$.

Notons déjà l'équivalence entre 3 et 4, d'après la proposition 2. Supposons $C < 1$. Il est clair que $\overset{\nabla - \log C}{U} 1 \leqslant \frac{1}{1 - C}$. Ainsi pour tout compact V de M :

$$< U1_V, 1 >_m = < 1_V, \overset{\nabla - \log C}{U} 1 >_m \leqslant \frac{m(V)}{1 - C} \ .$$

On en déduit que $U1_V < +\infty$ m p. s. et donc que $h_V = 0$ m p. s.

h_V étant continue, on a donc $h_V = 0$ partout.

<u>Lemme 4</u>.- Soit A un borélien de M tel que $P1_A \leqslant 1_A$ m p. s. et $P1_{A^C} \leqslant 1_{A^C}$ m p. s., alors $m(A) = 0$ ou $m(A^C) = 0$.

<u>Démonstration du lemme 4</u> :

a) Soit Λ l'ensemble des produits de convolution finis des probabilités μ et $\overset{\nabla}{\mu}$ et soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des éléments de G ayant un voisinage sur lequel un élément de Λ majore un multiple de λ. Il résulte du fait que μ est adaptée et étalée que $G = \bigcup_{\rho \in \Lambda} \operatorname{Supp} \rho$ et que $\mathcal{O} \neq \emptyset$. Prouvons que $\mathcal{O} = G$. Soit $g \in \mathcal{O}$; il existe un ouvert V contenant g, $\tau \in \Lambda$ et $k_7 > 0$ tels que $\tau \geqslant k_7\, 1_V\, \lambda$.
Si $h \in G$, $W = k \,;\, 1_V(k^{-1} \cdot hg) > 0$ est un ouvert contenant h ; il existe donc un $\rho \in \Lambda$ tel que $\rho(W) > 0$. On a donc :

$\rho * \tau \geqslant k_7\, \rho * (1_V \cdot \lambda) = k_7(\rho * 1_V) \cdot \lambda$. Mais $\rho * 1_V$ est s. c. i. et $\rho * 1_V(hg) = \int 1_V(k^{-1}\, hg)\ \rho(dk) > 0$. Par suite, il existe un ouvert U contenant hg et $k_8 > 0$ avec $\rho * \tau \geqslant k_8 \cdot (1_U \cdot \lambda)$, donc $hg \in \mathcal{O}$. Ceci prouve que $\mathcal{O} = G$.

b) Remarquons ensuite que la relation $P1_{A^C} \leqslant 1_{A^C}$ m p. s. implique :

$$0 = < P1_{A^C} \ , \ 1_A >_m = < 1_{A^C} \ , \ \overset{\nabla}{P} 1_A >_m \quad \text{et donc} \quad \overset{\nabla}{P} 1_A \leqslant 1_A \ \text{m p. s.}$$

On a donc $P1_A \leqslant 1_A$ m p. s. et $\overset{\nabla}{P}1_A \leqslant 1_A$ m p. s. P et $\overset{\nabla}{P}$ étant compatibles avec l'égalité modulo m et Λ étant dénombrable, on déduit de la relation précédente l'existence d'un ensemble $N, m(N) = 0$ tel que, si $x \notin N$:

$$\int 1_A(xg)\ \tau(dg) \leqslant 1_A(x)$$

pour tout $\tau \in \Lambda$. Supposons maintenant $m(A^C) > 0$. Il existe donc un x_o appartenant à A^C et N^C . On a donc

$$\int 1_A(x_o g)\ \tau(dg) = 0 \quad .$$

Puisque $\mathcal{O} = G$, tout $x \in M$ possède un voisinage sur lequel $1_A = 0$ m p. s. et donc $m(A) = 0$. Ceci prouve le lemme 4.

Notons une autre propriété de P . D'après (3) , si $m(A) = 0$, $p_a^n(x, A) = 0$ et donc :

(5) si $m(A) = 0$ on a $U1_A = U_s 1_A \leqslant k_3$ et $h_A = 0$.

Nous allons maintenant donner deux démonstrations de notre théorème. La seconde repose sur les résultats de [12] . La première est indépendante de ces résultats. Le lecteur remarquera que ces démonstrations restent valables pour un noyau fortement fellérien satisfaisant aux conclusions des lemmes 4 et 5 .

Première démonstration : Rappelons que $C = 1$.

Lemme 5.- Soient V un compact de M et $\Gamma = \{y \ ; \ U1_V(y) = +\infty\}$. Alors, pour tout borélien A de M , $A \subset \Gamma$, tel que $m(A) > 0$, $\overset{\nabla}{U}1_A = +\infty$ p. s. sur A .

Démonstration du lemme 5 : Il n'y a rien à prouver si $m(\Gamma) = 0$. Supposons donc $m(\Gamma) > 0$.

a) Tout compact K' tel que $m(K') > 0$ contient un compact K tel que $m(K) = m(K')$ et tel que : $\forall\, k \in K$, $\forall\, V_k$ voisinage de k , $m(K \cap V_K) > 0$ (appelons un tel compact K m-parfait). En effet, il suffit de prendre $K = \{k \in K' \ ; \ \forall\, V_k$ voisinage de k , $m(V_k \cap K') > 0\}$ et de remarquer que $m(K' \setminus K) = 0$ puisqu'on peut recouvrir $K' \setminus K$ par une famille (donc par une famille dénombrable) de V_i telle que $m(V_i \cap K' \setminus K) = 0$.

b) Soit $\Theta_A = \{y \in A \ ; \ \overset{\nabla}{U}1_A(y) < +\infty\}$ (avec $A \subset \Gamma$, $m(A) > 0)$. Il nous faut prouver que $m(\Theta_A) = 0$. Supposons $m(\Theta_A) > 0$. D'après a), Θ_A contient un compact K m-parfait tel que $m(K) > 0$. Soient $k \in K$ et V_k un voisinage de k . On a donc : $\infty = < U1_V, 1_{K\, V_k} >_m = < 1_V, \overset{\nabla}{U}1_{K\, V_k} >_m$ d'après le lemme 3 . Ainsi, pour tout n , il existe t dans V tel que $\overset{\nabla}{U}1_{K\cap V_k}(t) > n$. D'après le principe du maximum, il existe $u \in K \cap V_k$ tel que $\overset{\nabla}{U}1_K(u) \geqslant \overset{\nabla}{U}1_{K\cap V_k}(u) > n$. Par ailleurs, puisque $\|U_s f\| \leqslant k_6 \|f\|_\infty$, d'après (1) , $\overset{\nabla}{U}_a 1_{K\cap V_k}(u) > n - k_6$. La fonction $\overset{\nabla}{U}_a 1_{K\cap V_k}$ étant s. c. i., $\{y \,;\, U1_{K\cap V_k}(y) > n - k_6\}$ est ouvert. Soit $\pi_n = \{u \in K \,;\, \overset{\nabla}{U}1_K(u) > n - k_6\}$. D'après ce qui précède, π_n contient un ouvert dense de K . Or $\overset{\nabla}{U}1_K$ est infini sur $\bigcap_n \pi_n$, qui est dense dans K d'après le théorème de Baire. Ceci est absurde, car $K \subset \Theta_A \subset A$ et $\overset{\nabla}{U}1_A \geqslant \overset{\nabla}{U}1_K$ est fini sur Θ_A . Ceci prouve le lemme 5.

<u>Lemme 6</u>.- Soient V un compact et $\Gamma = \{y \,;\, U1_V(y) = +\infty\}$. Pour toute $f \in B_+$ non m p. s. nulle dont le support est dans Γ , il existe une partie B de Γ relativement compacte, avec $m(B) > 0$, telle que pour tout $B' \subset B$ avec $m(B') > 0$, on ait : $< Uf, 1_{B'} >_m = +\infty$.

<u>Démonstration du lemme 6</u> : Il n'y a rien à prouver si $m(\Gamma) = 0$. Supposons $m(\Gamma) > 0$. D'après le a) du lemme 5, on peut supposer $f = 1_K$ avec $m(K) > 0$ et K m-parfait.

a) Γ^c est absorbant pour la marche Y_n^x de loi μ . En effet, soient $x \in \Gamma^c$ et $T^x = \inf \{n \,;\, Y_n^x \in \Gamma\}$. Alors, $U1_V(x) \geqslant E(U1_V(Y_{T^x}^x) \,;\, T_x < \infty) = +\infty$ si $P\{T^x < \infty\} > 0$. Donc, $P\{T^x < \infty\} = 0$ et Γ^c est absorbant.

b) Ainsi, $< U1_\Gamma, 1_{\Gamma^c} >_m = 0 = < 1_\Gamma, U1_{\Gamma^c} >_m$ par dualité. Il existe donc $\Gamma_o \subset \Gamma$, avec $m(\Gamma_o) = m(\Gamma)$ tel que $\overset{\nabla}{U}1_{\Gamma^c} = 0$ sur Γ_o . Ainsi, de tout point de Γ_o , la marche $\overset{\nabla}{Y}_n$ n'atteint pas Γ^c .

c) Soit $x_o \in \Gamma_o \cap K$; puisque $\overset{\nabla}{P}{}^n(x, \Gamma) = 1$ sur Γ_o , il existe n_o tel que $P_a^{n_o}(x_o, \Gamma) > 0$; désignons alors par B un borélien relativement compact sur lequel une densité de $\overset{\nabla}{P}{}_a^{n_o}(x_o, \cdot)$ par rapport à m soit strictement positive. Si $B' \subset B$ avec $m(B') > 0$, $P_a^{n_o}(x_o, B') = \delta > 0$; mais la continuité de la fonction $\overset{\nabla}{P}{}_a^{n_o}(\cdot, B')$ implique l'existence d'un voisinage V_{x_o} de x_o tel que pour tout $x \in V_{x_o}$, $\overset{\nabla}{P}{}_a^{n_o}(x, B') > \delta/2$. Il en résulte que si $x \in V_{x_o}$:

$$\overset{\nabla}{U}1_{B'}(x) \geqslant \overset{\nabla n}{P}{}^{o}_{a}\, \overset{\nabla}{U}1_{B'}(x) \geqslant \int_{B'} \overset{\nabla n}{P}{}^{o}_{a}(x, dy)\, \overset{\nabla}{U}1_{B'}(y) = +\infty \quad ,$$

d'après le lemme 5 .

On a donc finalement :

$$< Uf, 1_{B'} >_m = < U1_K, 1_{B'} >_m = < 1_K, \overset{\nabla}{U}1_{B'} > \text{ par dualité}$$

$$\geqslant < 1_{K\cap V_{x_o}} , \overset{\nabla}{U}1_{B'} >_m = +\infty \quad ,$$

car $m(k \cap V_{x_o}) > 0$ et $U1_{B'}$ est infini sur V_{x_o} . Ceci prouve le lemme 6.

Lemme 7.- Soit V un compact de M tel que $m(\Gamma) = m\{x \,;\, U1_V(x) = +\infty\} > 0$. Alors $U1_V = +\infty$ partout.

Démonstration du lemme 7 :

a) Soit h une fonction harmonique bornée sur M . Soient $m = \sup\limits_{x \in M} h(x)$ et $f = \{x \,;\, h(x) = m\}$. Si $f \neq \emptyset$, F est un fermé absorbant.

En effet, F est fermé puisque h est continue. Soit $x \in F$; alors pour tout n , $E\{h(Y^x_n)\} = h(x)$ et donc $Y^x_n \in F$ p. s. , ce qui prouve que F est absorbant.

b) Soit K un compact de Γ tel que $m(K) > 0$. Ecrivons $U1_K \wedge n = Ug_n + h_n$ ($g_n \geqslant 0$, $h_n \geqslant 0$ et harmonique) la décomposition de Riesz de la fonction surharmonique $U1_K \wedge n$. Écrivons $g_n = g^1_n + g^2_n$ avec $g^1_n = g_n \cdot 1_\Gamma$ et $g^2_n = g_n \cdot 1_{\Gamma^c}$. Puisque Γ^c est absorbant pour Y^x_n (point a du lemme 6) et $K \subset \Gamma$, $U1_K \wedge n$ est nulle sur Γ^c . Ainsi $h_n = 0$ sur Γ^c et $Ug^2_n = 0$ sur Γ^c et donc partout (principe du maximum). Par ailleurs, $g^1_n = 0$ m p. s. (en effet, d'après le lemme 6, on aurait sinon : $n \cdot m(B) \geqslant < Ug^1_n , 1_B > = +\infty$) .

Par dualité, la relation $g^1_n = 0$ m p. s. implique $Ug^1_n = 0$ m p. s. Finalement, $U1_K \wedge n = h_n$ m p. s. avec h_n harmonique nulle sur Γ^c . En particulier, $U1_K \wedge 1 = h_1$ m p. s. Comme $U1_K \geqslant 1$ sur K , on a : $K \subset \{h_1 = 1\} \subset \Gamma$ m p. s. Or $\{h_1 = 1\}$ est absorbant d'après a). En faisant croître K vers Γ (et une réunion dénombrable de parties absorbantes étant absorbante), on en déduit qu'il existe Γ' avec $m(\Gamma \,\Delta\, \Gamma') = 0$ et Γ' absorbante. Comme Γ^c est absorbante, on a donc : $P1_\Gamma \leqslant 1$ et $P1_{\Gamma^c} \leqslant 1_{\Gamma^c}$ m p. s. D'après le lemme 4, $m(\Gamma^c) = 0$ (car $m(\Gamma) > 0$) et $U1_V = +\infty$ m p. s.

c) Si $U1_V = +\infty$ m p. s., alors $U1_V = \infty$ partout. En effet, cela résulte immédiatement de l'inégalité $U1_V(x) \geqslant P^n_a U1_V(x)$ où n est assez grand pour que $P^n_a(x, M) > 0$. Le lemme 7 est prouvé.

Lemme 8.- Soit V un compact de M tel que $U1_V = +\infty$ partout. Alors pour tout A tel que $m(A) > 0$, $U1_A = +\infty$ partout.

Démonstration du lemme 8 : Ecrivons la décomposition de Riesz : $U1_A \wedge n = Ur_n + h_n$ (r_n, h_n 0, h_n harmonique). D'après le lemme 6, r_n est m p. s. nulle et donc par dualité $Ur_n = 0$ m p. s. Ainsi, $U1_A \wedge n = h_n$ m p. s. L'ensemble $S_n = \{h_n = n\}$ est absorbant (point a du lemme 7) et donc $\{U1_A = \infty\} = \bigcap_n S_n$ m p. s. est absorbant (une intersection dénombrable de parties absorbantes est absorbante). Comme $\{U1_A < +\infty\}$ est absorbant (lemme 6, a), on a :

$$P1_{\{U1_A=\infty\}} \leqslant 1_{\{U1_A=\infty\}} \quad \text{m p. s.} \quad \text{et} \quad P1_{\{U1_A<\infty\}} \leqslant 1_{\{U1_A<\infty\}} \quad \text{m p. s.}$$

et donc, d'après le lemme 4 :

ou $m\{U1_A < \infty\} = 0$ et alors $U1_A = \infty$ m p. s. et donc $U1_A = \infty$ partout, d'après le point c du lemme 7,

ou $m\{U1_A = \infty\} = 0$; mais alors soit B comme dans le lemme 6 . Pour n assez grand, l'ensemble $B' = \{U1_A < n\} \cap B$ est de mesure positive. On aurait alors, d'après le lemme 6 : $n \cdot m(B') \geqslant \langle U1_A, 1_{B'} \rangle = +\infty$, ce qui est absurde. La dernière alternative n'a donc pas lieu et le lemme 8 est prouvé.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. En fait, il suffit de voir que si un point est récurrent, alors la chaîne est récurrente au sens de Harris. Soit x un point récurrent. Il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 1$. h_V étant continue, h_V est strictement positive dans un voisinage de x . Ainsi, $\Gamma = \{y ; U1_V(y) = +\infty\}$ est de mesure positive, d'où $U1_A = \infty$ partout (lemme 7). Soit A tel que $m(A) > 0$. On a donc (lemme 8) $U1_A = \infty$ partout. Ainsi la chaîne Y_n^x est m-irréductible de noyau non propre (cf. [9]). On en déduit que $h_A = 1$ m p. s. et donc, h_A étant continue, $h_A = 1$ partout. Notre théorème est prouvé.

Deuxième démonstration ($C = 1$) : Cette démonstration s'appuie sur les résultats de [12] , corollaire 2. Sous l'hypothèse (5) ($m(A) = 0$ implique $h_A = 0$) , il est prouvé dans [12] que l'on a :

$$M = I \cup J \quad \text{avec}$$

a) $J = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_K$, J_K étant absorbant et récurrent au sens de Harris par rapport à une mesure ν_k pour tout k .

b) $I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_K$ avec $h_{I_K} \equiv 0$ pour tout k .

<u>Lemme 9</u>.- Soit A une borélien de M tel que $0 < m(A) < +\infty$. Si $h_A = 1$ sur A m p. s. , alors $\overset{\nabla}{h}_A = 1$ m p. s. sur A .

<u>Démonstration du lemme 9</u> : On désigne par π_A le noyau de la chaîne induite par Y_n^x sur A (cf. [9]), i. e. : $\pi_A = 1_A P\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1_{A^c} P)^n\, 1_A\right.$.

Du lemme 3, on déduit que pour $f_1 , f_2 \in B_+$, $< \pi_A f_1, f_2 >_m = < f_1, \overset{\nabla}{\pi}_A f_2 >_m$.

Sous l'hypothèse du lemme 9, on a donc : $m(A) = < \pi_A 1, 1 >_m = < 1, \overset{\nabla}{\pi}_A 1 >_m$.
D'où : $\overset{\nabla}{\pi}_A 1 = 1$ m p. s. sur A , ce qui prouve le lemme 9.

<u>Lemme 10</u>.- Soit ν_k l'unique mesure σ-finie invariante par P sur J_k . Alors :

1) ν_k est une mesure de Radon.

2) $\nu_k \ll m$ et il existe $D_k \subset J_k$ tel que ν_k soit équivalente à m sur J_k.

<u>Démonstration du lemme 10</u> :

a) Puisque ν_k est -finie, $J_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_k^i$ avec $\nu_k(E_k^i) < +\infty$. Soit $x \in J_k$.
Il existe un d et un i tels que $P_a^d\, 1_{E_k^i}(x) > 0$. Par suite, il existe un voisinage U de x et une constante k_9 tels que :

$$+\infty > \nu_k(E_k^i) \geqslant \int \nu_k(dy)\, P_a^d\, 1_{E_k^i}(y) \geqslant k_9\, \nu_k(U)$$, ce qui prouve le point 1.

b) Soit $A \subset J_k$ tel que $m(A) = 0$. D'après (5) , $h_A = 0$ et donc $\nu_k(A) = 0$, ce qui prouve que $\nu_k \ll m$. Il suffit alors de prendre $D_k = \{f_k > 0\}$, où f_k est une densité de ν_k par rapport à m .

<u>Lemme 11</u>.- Soit $K = \{x \,;\, P1_J(x) > 0\}$. Si $m(K) > 0$, il existe k_o et n_o tels que : $0 < < P_a^{n_o}\, 1_{D_{k_o}} , 1_K > = < 1_{D_{k_o}} , \overset{\nabla}{P}{}_a^{n_o}\, 1_K >$.

<u>Démonstration du lemme 11</u> : Soit $x \in K$. Il existe un indice $k(x)$ tel que $PJ_{k(x)}(x) > 0$. Cette relation implique successivement $h_{J_{k(x)}}(x) > 0$ et $h_{D_{k(x)}}(x) > 0$ (car $h_{J_k \setminus D_k} = 0$) , $U1_{D_{k(x)}}(x) = +\infty$ et $U_a\, 1_{D_{k(x)}}(x) = +\infty$ d'après (1) . Il existe donc finalement un indice $n(x)$ tel que
$P_a^{n(x)}\, 1_{D_{k(x)}}(x) > 0$.

Si maintenant $m(K) > 0$, il existe deux indices k_o et n_o tels que :

$m\{x \in K \; ; \; P_a^{n_o} 1_{D_{K_o}}(x) > 0\} > 0$. Ceci prouve le lemme 11.

Lemme 12.- On pose $J^o = \{x \; ; \; P_J 1(x) = 0\}$. Alors $J \cap J^o : \emptyset$ et $M = J \cup J^o$ m p.s.

Démonstration du lemme 12 :

Le premier point est clair. Ecrivons $M = J \cup K \cup J^o$ et supposons $m(K) > 0$. Le lemme 11 prouve qu'il existe n et k et $D'_k \subset D_k$ avec $0 < m(D'_k) < +\infty$ et $\overset{\nabla}{P}{}^n_a 1_k > 0$ sur D'_k . On a alors d'après le lemme 10, 2, $\nu_k(D'_k) > 0$ et donc $h_{D'_k} = 1$ sur D'_k ; d'après le lemme 9, il existe D''_k , $D''_k \subset D'_k$ avec $m(D''_k) = m(D'_k)$ tel que $\overset{\nabla}{h}_{D'_k} = 1$ sur D''_k . Soit $x \in D''_k$. On a

$$1 = \overset{\nabla}{h}_{D'_k}(x) = \overset{\nabla}{P}{}^n h_{D'_k}(x) \leqslant \int \overset{\nabla}{P}{}^n(x, dy) \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y) \leqslant 1 .$$

D'où :

$$\int \overset{\nabla}{P}{}^n(x, dy) (1 - \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y)) = 0 \quad \text{et donc} \quad \int_K \overset{\nabla}{P}{}^n_a(x, dy) (1 - \overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y)) = 0 .$$

Ainsi, il existe $K' \subset K$ avec $m(K') > 0$ tel que :

pour $y \in K'$, $\overset{\nabla}{P}_{D'_k} 1(y) = 1$. D'où : $\langle 1_{K'}, \overset{\nabla}{U} 1_{D'_k} \rangle_m > 0$.

Par dualité , on en déduit que $\langle U 1_{K'}, 1_{D'_k} \rangle_m > 0$, ce qui est absurde car $K' \subset J^c$ et $D'_k \subset J_k$ avec J_k absorbant. Ainsi $m(K) = 0$ et le lemme 12 est prouvé.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Du lemme 12, J et J^o étant absorbants, on déduit que $P 1_J \leqslant 1_J$ m p. s. et $P 1_{J^c} \leqslant 1_{J^c}$ m p. s. D'après le lemme 4, ou $m(J) = 0$, ou $m(J^c) = 0$.

Si $m(J^c) = 0$, $M = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} J_k$. Appliquant une nouvelle fois le lemme 4, on déduit que les J_k sont tous vides, sauf un. Ainsi $M = J_1$ m p. s. L'unicité de la mesure invariante prouve alors que $m = \nu_1$. Si $m(A) > 0$, alors $\nu_1(A) > 0$ et donc $h_A = 1$ p. s. h_A étant continue, $h_A = 1$ partout.

Si $m(J) = 0$, alors J est vide car $h_J = 0$ d'après (5). Ainsi, $M = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} J_k$ avec $h_{I_k} = 0$. Notre théorème est alors une conséquence du lemme 2 et ceci achève la deuxième démonstration.

Comme corollaire du théorème 1, nous pouvons énoncer

Théorème 2.- Soit $M = H \setminus G$ un espace homogène possédant une mesure invariante m. Alors, pour toute marche aléatoire Y_n sur M de loi μ adaptée et étalée, la conclusion du théorème 1 est vraie.

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences de notre théorème. Outre les hypothèses H_1, H_2, H_3, nous supposerons, sans le repréciser, que $\check{\mu} = \overset{\triangledown}{\mu}$, i. e. $\chi \equiv 1$, ou encore que m est invariante. Cette hypothèse est satisfaite, en particulier si G et H sont unimodulaires. On a alors $C = 1$.

Définition.- Dans la situation 1-2, la chaîne Y_n^x est dite récurrente. Elle est dite transitoire dans la situation 3-4.

Corollaire 1.- La chaîne Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la chaîne $\check{Y}_n^x$ de loi $\check{\mu}$ sur $H \setminus G$ l'est.

Démonstration du corollaire 1 : Supposons Y_n^x transitoire. Soit A un borélien tel que $0 < m(A) < +\infty$, la relation $+\infty > \langle U1_A, 1_A \rangle = \langle 1_A, \check{U}1_A \rangle$ montre que $\check{U}1_A$ est fini m. p. s. sur A et le théorème 1 permet de conclure que $\check{Y}_n^x$ est transitoire.

Notons M' l'espace quotient à gauche de G par H ($M' = G/H$, ensemble des classes gH ; G opère à gauche sur M'). A la mesure de probabilité μ sur G correspond la marche gauche $X_n \dots X_1\, g = Z_n'^g$ sur G et la chaîne gauche $Y_n'^x$ sur M' ($Y_n'^x = \pi'(Z_n'^g)$ avec $\pi'(g) = x$ et où π' est l'application canonique de G dans M'). Les objets relatifs à cette marche gauche seront notés avec des primes.

Corollaire 2.- La chaîne droite Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la chaîne gauche $\check{Y}_n'^x$ de loi $\check{\mu}$ sur $G\ H$ est récurrente.

Démonstration : Supposons Y_n^x récurrente. Alors il existe une partie compacte A symétrique de G telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H\,A) = +\infty$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \check{\mu}^{*n}(A\,H) = +\infty$. Ainsi $U'(\pi'(e), \pi'(A)) = +\infty$, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 3.- La marche Y_n^x de loi μ sur $H \setminus G$ est récurrente si et seulement si la marche gauche $Y_n'^x$ de loi μ sur $G\ H$ est récurrente.

Démonstration : Cela résulte immédiatement des corollaires 2 et 1.

Définition.- L'espace $H \setminus G$ (resp. G/H) est dit transitoire si toute marche droite (resp. gauche) de loi μ adaptée et étalée est transitoire. Il est dit récurrent sinon.

Remarque : Derriennic et Guivarc'h ont montré que si l'espace homogène $H \setminus G$ est non moyennable (cf. [5]) et s'il porte une mesure invariante, alors il est transitoire (cf. [4]).

Corollaire 4.- $H \setminus G$ est récurrent (resp. transitoire) si et seulement si $G \quad H$ est récurrent (resp. transitoire).

Corollaire 5.- Les relations : 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \quad H) = +\infty$ pour un ouvert V relativement compact ; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \quad H) = +\infty$ pour tout ouvert relativement compact V ; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H \quad V) = +\infty$ pour un ouvert V relativement compact ; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*}(H \quad V) = +\infty$ pour tout compact ouvert relativement compact, sont équivalentes.

Démonstration : Cela résulte du corollaire.

Corollaire 6.- Les relations suivantes sont équivalentes.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(H \quad V) = +\infty$ pour tout V ouvert relativement compact de G.

2) Pour tout g de G, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(g^{-1}Hg \quad V) = +\infty$.

3) Pour tout g de G, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(V \quad g^{-1}H\, g) = +\infty$.

Démonstration : L'équivalence de 2 et 3 résulte du corollaire précédent. Prouvons que 1 implique 2 . Soit π_1 (resp. π_2) l'application canonique de G dans $H \quad G$ (resp. dans $g^{-1}H\, g \quad G$) . Un calcul simple prouve que $\pi_1(g)$ est récurrent pour la marche Y_n^x de loi μ sur $H \quad G$ si et seulement si $\pi_2(e)$ est récurrent pour la marche droite Y_n^x de loi μ sur $g^{-1}H\, g/G$. Mais $\pi_1(g)$ est récurrent si et seulement si $\pi_1(e)$ l'est. Ainsi $\pi_1(e)$ et $\pi_2(e)$ sont récurrents en même temps. Le corollaire en découle sans peine.

Nous allons maintenant, lorsque $\chi \neq 1$, établir une version plus forte de notre théorème. Nous ferons l'hypothèse

$$H_4 : \int_G \operatorname{Log} \chi(g^{-1})\, d\mu(g) < 0 \quad .$$

Remarquons que lorsque $\chi \not\equiv 1$ sur G_o , composante connexe de G , H_3 implique H_4 . En effet, par convexité, on a :

$$\exp \int_G \operatorname{Log} \chi(g^{-1})\, d\mu(g) < \int_G \chi(g^{-1})\, d\mu(g) = C \leqslant 1$$

d'où $\int_G \operatorname{Log} \chi(g^{-1})\, d\mu(g) < 0$. L'inégalité précédente est stricte, car sinon, on aurait : $\chi(g^{-1}) = k_{10}(n)\ \mu^{*n}$ p. s. Prenant n assez grand, χ serait constant sur un ouvert et donc sur un voisinage ouvert de l'élément neutre et enfin sur G_o ; ainsi on aurait $\chi \equiv 1$ sur G_o , ce qui n'est pas.

Nous allons prouver

<u>Théorème 3</u>.- Supposons H_1 , H_2 et H_4 . Alors la marche de loi μ Y_n^x sur M est transitoire et le potentiel de tout compact est borné.

<u>Démonstration</u> :

a) Soient $\varepsilon < 0$ et $A_\varepsilon = \{g\ ;\ \operatorname{Log} \chi(g^{-1}) < \varepsilon\}$. Remarquons que $N 1_{A_\varepsilon} = +\infty$ d'après la loi des grands nombres et donc $N_a 1_{A_\varepsilon} = +\infty$ d'après (1) . Ainsi, $S_\mu \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$ et il existe donc un n_o tel que $\mu_a^{*n_o}(A_\varepsilon) > 0$.

b) Pour démontrer que la marche de loi μ est de potentiel borné, il suffit de prouver la même chose pour la marche de loi μ^{*n_o} (cf. proposition 2). Aussi, dans ce qui suit, supposons nous que $\mu_a(A_\varepsilon) > 0$.

c) Soit $T_n = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{Log} \chi(X_i^{-1})$ (où les X_i sont de loi μ indépendantes sur G) . T_n est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. Soient $\varepsilon < 0$ et $\Gamma_\varepsilon = \inf \{n\ ;\ T_n < \varepsilon\}$. D'après [11], on sait que $E(\Gamma_\varepsilon)$ $+\infty$ puisque $E\{\operatorname{Log} \chi(X_i^{-1})\} < 0$ d'après H_4 . Soient Γ_ε^n les itérés du temps d'arrêt Γ_ε (i. e.: $\Gamma_\varepsilon^1 = \Gamma_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon^{n+1} = \Gamma_\varepsilon^n + \Gamma_\varepsilon \circ \theta_{\Gamma_\varepsilon^n}$) A la marche Z_n^g de loi μ sur G , faisons correspondre la marche $\mathcal{Z}_n^g = Z_{\Gamma_\varepsilon^n}^g$.

Soit μ_ε la loi de cette nouvelle marche. D'après a) et b), il est clair que μ_ε est étalée. De plus : $C = \int \chi(g^{-1})\, d\mu(g) < 1$ (car $\operatorname{Log} \chi(g^{-1}) \leqslant \varepsilon < 0$ μ p. s.). Ainsi la marche Y_n^x de loi μ sur M est transitoire et de potentiel borné d'après le théorème 1 . Soit U^{Γ_ε} l'opérateur défini par

$U^{\Gamma_\varepsilon} f(x) = E\,\{\sum_{n=0}^{\Gamma_\varepsilon} f(Y_n^x)\}$. Puisque $E(\Gamma_\varepsilon) < +\infty$, il est clair qu'il existe une constante k_{11} telle que $|U^{\Gamma_\varepsilon} f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \cdot k_{11}$. Soit U le noyau potentiel de la marche Y_n^x . De la relation évidente $U f(x) = U^{\Gamma_\varepsilon}(U f)\ (x)$, on déduit alors que $U f$ est borné pour toute f à support compact et cela prouve le théorème 3 .

Montrons maintenant, sur un exemple, que la condition H_4 , lorsque $\chi \not\equiv 1$, est presque la meilleure possible.

Exemple 2.- G est encore le groupe affine de $\mathbb{R}$. Ici, le caractère χ est donné par $\chi(a,b) = a$ et la condition H_4 s'écrit $\int \operatorname{Log} a \, d\mu(a,b) > 0$. Soit μ étalée sur G telle que : $\operatorname{supp} \mu \subset \{(a,b) \; ; \; b \geqslant 0\}$, $\int \operatorname{Log} a \, d\mu(a,b) < 0$ et $\int |b| d\mu(a,b) < \infty$. Il est montré dans [7] que l'hypothèse $\int |b| d\mu(a,b) < +\infty$ peut être remplacée par l'hypothèse plus faible $\int_G \operatorname{Log} \sup(b, 1) \, d\mu(a,b) < \infty$.
On a, avec les notations de l'exemple 1 , $Y_n^x = X_n X_{n-1} \ldots X_1 x + \ldots + X_n Z_{n-1} + Z_n$.
Définissons :

$$L_n^x = (X_1,Z_1) \ldots (X_n,Z_n) \cdot x = X_1 \ldots X_n x + \ldots + X_1 Z_2 + Z_1$$

(L_n^x est obtenu comme Y_n^x , mais en faisant les produits dans l'autre sens. L_n^x n'est pas une chaîne de Markov, mais a même loi que Y_n^x) . De la relation $\int \operatorname{Log} a \, d\mu(a,b) < 0$ et $\int |b| \, d\mu(a,b) < \infty$, on déduit, d'après la loi des grands nombres, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $X_1 \ldots X_n \leqslant e^{-\alpha n}$ p. s. pour n assez grand et $|Z_n| < n$ p. s. pour n assez grand. On en déduit facilement que L_n^x est une suite de Cauchy et donc $L_n^x \xrightarrow[n \to \infty]{} L^x$ p. s. Par ailleurs, vue la forme de L_n^x , L^x ne dépend pas de x . Ecrivons $L^x = L$ et soit ν la loi de L . D'autre part, de l'hypothèse : $\operatorname{supp} \mu \subset \{(a,b) \; ; \; b \geqslant 0\}$, on déduit sans peine que $\mathbb{R}_+$ est absorbant pour Y_n^x . Ainsi : $\operatorname{supp} \nu \subset \mathbb{R}_+$. Si maintenant f est continue à support compact, on a :

$$P^n f(x) = E\{f(Y_n^x)\} = E\{f(L_n^x)\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \nu(f) \quad .$$

Si $\nu(f) > 0$, on a donc, $U f(x) = +\infty$ pour tout x . Par contre, si K est un compact de $\mathbb{R}_-^*$ et si $x \in \mathbb{R}_+$, puisque $\mathbb{R}_+$ est absorbant, $U 1_K(x) = 0$.

III.- Une réciproque

Nous allons maintenant présenter une réciproque du théorème 1.

Un espace homogène M est dit dichotomique si pour toute mesure étalée et adaptée sur G , les conclusions du théorème 1 sont vraies pour la marche de loi μ sur M (la récurrence au sens de Harris étant étendue par rapport à une mesure γ quasi-invariante, c'est-à-dire telle que $\gamma \cdot g$ est équivalente à γ pour tout g

de G ; une telle mesure existe toujours). Nous allons prouver :

Théorème 4.- Soit G de Lie connexe et H un sous-groupe fermé de G . Supposons que :

a) H est moyennable

b) $H \setminus G$ est compact et dichotomique.

Alors, il existe sur $H \setminus G = M$ une mesure positive invariante (de masse finie).

Lemme 12.- (cf. [2] , p. 67). Soit G de Lie semi simple non compact de centre fini. Soit $G = N A M \tilde{N}$ une décomposition de Bruhat de G (avec les notations classiques, M étant le centralisateur de A dans K) et $X = NAM \setminus G$ la frontière maximale de G . Alors, il existe une mesure μ sur G étalée et une mesure ν sur X μ invariante (c'est-à-dire, telle que $\nu * \mu = \nu$) et dont le support est strictement plus petit que X .

Démonstration du lemme 12 :

1°) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Lie de A et $H \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(H) < 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta$ (l'ordre mis sur les racines est celui qui a permis de déterminer N). Soit $a = \exp H$ et $c = \sup_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)$; il est clair que $c < 0$ et qu'il existe une mesure sur $\tilde{\mathcal{N}}$ (l'algèbre de Lie de $\tilde{N}$) telle que :

$$\|\mathrm{Ad}\, a \cdot Z\| \leq e^{c} \|Z\| \qquad \text{pour tout } Z \in \tilde{\mathcal{N}} .$$

Soit V une boule ouverte (pour cette norme) de $\tilde{\mathcal{N}}$ et de centre 0 , et $\overline{V}$ son adhérence. Puisque $c < 0$, on a : $\mathrm{Ad}\, a\, \overline{V} \subset V$, d'où :

$$a(\exp \overline{V})\, a^{-1} = \exp (\mathrm{Ad}\, a\, \overline{V}) \subset \exp V .$$

Soit $E = x \cdot (\exp \overline{V}) \cdot M$ (x étant l'image de NAM dans l'application canonique de G sur $NAM \setminus G$) . E est compact. Si $m \in M$, on a :

$$E \cdot m \cdot a = x \cdot (\exp \overline{V})\, M \cdot m \cdot a = x\, (a^{-1} \exp \overline{V}) \cdot M$$

(car M centralise a , et $x \cdot a^{-1} = x$) . D'où :

$$E \cdot m \cdot a \subset x(\exp V)\, M \qquad (\forall\, m \in M) .$$

Or, $E' = x(\exp V)\, M$ est ouvert dans X . Par un argument de compacité il existe un ouvert U , voisinage de e dans G , tel que :

$E \cdot m a U \subset E'$ et donc :

$E \cdot M \cdot a \cdot U \subset E$.

Soit $T = \{g \subset G ; E \cdot g \subset E\}$. Il est clair que T est un semi-groupe fermé de G qui d'après la relation précédente contient un ouvert de G . Il existe donc une mesure étalée μ sur G telle que $T_\mu \subset T$ et telle que $E \cdot T_\mu \subset E$.

2°) L'application qui a $n \in \widetilde{N}$ fait correspondre $x \cdot n \in X$ est un homéomorphisme de $\widetilde{N}$ sur un ouvert dense de X . Il est donc possible de choisir V assez petit pour que $E = x \cdot (\exp \overline{V})$ M soit un compact dont le complémentaire dans X soit un ouvert non vide (en effet, sinon, pour tout y de X , on aurait : $y = x(\exp v_n)m_n$ avec $v_n \in \overline{V}_n$; faisant tendre n vers l'infini et $\overline{V}_n \downarrow 0$, on aurait : $y = x \cdot m$ pour un m et donc X serait réduit à un point, ce qui est absurde, G n'étant pas compact).

Soit γ une mesure de probabilité portée par E et $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \gamma * \mu^p$. Un argument classique prouve que la suite ν_n possède un point adhérent ν (en topologie vague) satisfaisant à : $\nu * \mu = \nu$. Or, de la relation $E \cdot T_\mu \subset E$, on déduit que $\operatorname{supp} \nu_n \subset E$ pour tout n , et donc $\operatorname{supp} \nu \subset E$.

Lemme 13.- Soit $M = H \setminus G$ et X un G espace à droite ; soit λ une mesure sur X , H invariante (c'est-à-dire telle que $\lambda * \varepsilon_h = \lambda$, $\forall h \in H$) . Soit m une mesure sur $H \setminus G$ et $\widetilde{m}$ une mesure sur G telle que $\pi(\widetilde{m}) = m$ (π : l'application canonique de G sur $H \setminus G$) . Alors :

1°) La formule $\lambda * m =$ (par définition) $\lambda * \widetilde{m}$ définit une mesure sur X (c'est-à-dire : $\lambda * \widetilde{m}$ ne dépend pas du relèvement $\widetilde{m}$ choisi).

2°) Soit μ une probabilité sur G ; si m est μ-invariant c'est-à-dire : $m * \mu = m$) alors, $\lambda * m$ est μ-invariante.

La démonstration de ce lemme est une simple vérification (cf. [13]).

Démonstration du lemme 4 :

1°) Soit $G = R \cdot S$ une décomposition de Lévi de G (R son radical résoluble, S semi-simple). Nous ne ferons la démonstration que si le centre de S est dini. Nous allons prouver que G est moyennable. Si S est compact, c'est clair (G serait extension compacte de son radical résoluble). Supposons donc S compact et prouvons que nous arrivons à une absurdité. Soit donc S non compact et $X = NAM \setminus S$ la frontière maximale de G l'action de R sur X étant triviale). Soit μ une mesuresur X comme au lemme 12. Notons encore μ une mesure sur G

dont l'image par : $G \to R \setminus G \simeq S$ est μ . D'après le lemme 12, il existe sur X une mesure ν telle que $\nu * \mu = \nu$ et supp $\nu \neq X$.

2°) G opérant sur X , H opère sur X . H étant moyennable, il existe une mesure λ sur X invariante ; par ailleurs, la marche de loi μ sur $H \setminus G$ étant récurrente au sens de Harris par rapport à une mesure quasi-invariante (puisque $H \setminus G$ est dichotomique et compact), il existe sur $H \setminus G$ une mesure invariante par $\mu (m = m * \mu)$ (cf. [9]). On en déduit (lemme 13) que $\nu' = \lambda * \tilde{m}$ est une mesure sur X μ invariante. Or, il n'existe sur la frontière maximale X qu'une seule mesure μ invariante (cf.[13]). Ainsi, $\nu' = \nu$. Or :

- le support de ν est différent de X
- le support de m sur $H \setminus G$ est tout $H \setminus G$ (car la chaîne de loi μ est récurrente). On peut relever m en une mesure $\tilde{m}$ dont le support est G tout entier. Ainsi le support de $\nu' = \lambda * \tilde{m}$ est X tout entier.

3°) Puisque G est moyennable, l'action de G sur les mesures de probabilité de l'espace compact $H \setminus G$ possède un point fixe, et le théorème 4 est prouvé.

Bibliographie.-

[1] BREIMAN L., Probability, reading, Mass. Addison Wesley, 1968.

[2] AZENCOTT R., Espaces de Poisson des groupes localement compacts, L. N. 148, Springer Verlag 1970.

[3] BOURBAKI N., Livre VI, Intégration, chapitre VII, Hermann.

[4] DERRIENNIC Y., GUIVARC'H Y., th. de renouvellement pour les groupes non moyennables, C.R.A.S., Tome 277, Oct. 1973.

[5] EYMARD P., Moyennes invariantes et représentations unitaires, L. N. 300, Springer Verlag 1972.

[6] HENNION H., Marches aléatoires des espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie, Zeit. für Wahr. 34, p. 245-267, 1976.

[7] GRINTSEVICHYUS A. K., Th. of Proba., 1974, Vol. XIX, n° 1, p. 163-168.

[8] LOYNESR. M., Products of independent random elements in a topological group, Zeit für Wahr. 1 (1963), 446-455.

[9] REVUZ D., Markov chaines, North Holland 1975.

[10] SCHOTT R., Marches aléatoires sur un espace homogène de groupe nilpotent simplement connexe, (Thèse de 3ème Cycle, Nancy), 1976.

[11] SPITZER R., Principes des cheminements aléatoires, C.I.R.O. Dunod 1970.

[12] WINKLER W., Doeblin's and Harris' theory of Markov process, Zeit. für Wahr. 31, 1975, p. 79-88.

[13] FURSTENBERG H., "A Poisson formula for semi-simple Lie group", Ann. Math. (2) 77 (1963), p. 335-386.

Summary.-

The general result on recurrence and transience of points for Markov chains on a discrete state space extends to the case of a spread-out random walk on a homogeneous space ; if the homogeneous space has an invariant measure all the points are simultaneously recurrent or transient.

In the last part we prove the following theorem :

If G is a connected Lie group, H a closed subgroup of G. Suppose that :

a) H is amenable

b) $H \setminus G$ is compact and all its points are simultaneously recurrent or transient.

Then $G \setminus H$ has a finite positive invariant measure.

H. HENNION
Département de Mathématiques et Informatique
UNIVERSITE DE RENNES
35031 RENNES CEDEX

B. ROYNETTE
U.E.R. Sciences Mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I
54037 NANCY CEDEX