Yves Guivarc'h

Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire

Astérisque, tome 74 (1980), p. 47-98

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__47_0>

SUR LA LOI DES GRANDS NOMBRES
ET LE RAYON SPECTRAL D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

par

Y. GUIVARC'H

Introduction

Soit G un groupe localement compact séparable engendré par un voisinage compact V de l'élément neutre e de G et p une mesure de probabilité sur les boréliens de G. On considère la fonction δ_V sur G définie par

$$\delta_V(g) = \text{Inf}\{n > 0 \ ; \ g \in V^n\}$$

et le comportement asymptotique de $\delta_V(s_n)$ où $s_n = g_1 \dots g_n$ est le produit des g_i considéré comme fonction de $\omega = (g_1,\dots,g_n,\dots)$ sur $G^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité produit $p^{\mathbb{N}}$. On montre ci-dessous que $\frac{\delta_V(s_n)}{n}$ a une limite finie γ indépendante de ω pourvu que l'intégrale $\int_G \delta_V(g)\, dp(g)$ soit finie. On s'intéresse en particulier aux cas de nullité de cette limite sous une hypothèse naturelle d'apériodicité de p.

Des questions voisines ont été examinées par H. Furstenberg [18] à [21] et V.I. Tutubalin [40] dans le cas des groupes de Lie semi-simples.

Dans le cas particulier où $G = \mathbb{R}$ et $V = [-1,1]$, ceci correspond, d'après la loi des grands nombres, à la nullité du barycentre de p. Dans le cas où G est un groupe de Lie connexe moyennable on montre qu'il en est de même, le barycentre de p étant à définir comme celui de l'image de p dans le plus grand quotient abélien sans torsion de G. Par contre, si G est non moyennable, la limite considérée est toujours strictement positive. D'autres nombres associés à l'opérateur de convolution par p sont en relation avec γ. Il en est ainsi de l'entropie de p au sens de [2], que nous étendons à la situation envisagée ici et de la limite supérieure de la suite $\frac{1}{n} \text{Log}\, p^n(V)$ qui est nulle en même temps que γ, pourvu que $e^{\alpha\delta_V}$ soit p-intégrable pour tout réel α. L'une des parties de cette dernière équivalence est obtenue de manière indirecte, par une étude détaillée des deux nombres γ et $\overline{\lim} \frac{1}{n} \text{Log}\, p^n(V)$. Ces propriétés sont à rapprocher de résultats connus concernant le mouvement brownien sur les variétés riemanniennes [35] et suggèrent des conjectures naturelles. Dans le cas du revêtement universel d'une variété compacte, le nombre γ peut s'interpréter dans le groupe de Poincaré et d'autre part, le nombre $\overline{\lim}_n \frac{1}{n} \text{Log}\, p^n(V)$ est analogue à la première valeur propre du Laplacien.

La première partie est consacrée à une étude préliminaire donnant des estimations des fonctions δ_V. On étudie dans la deuxième partie le cas d'un groupe de Lie moyennable. Le cas d'un groupe non moyennable est envisagé dans la troisième partie. On y retrouve, par une autre voie, des résultats de H. Furstenverg concernant les groupes de Lie semi-simples. La quatrième partie contient l'étude du nombre $\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \operatorname{Log} p^n(V)$. Enfin quelques remarques sur les mouvements browniens sont rassemblées dans un appendice. Les démonstrations sont simplifiées grâce à deux théorèmes donnés dans la suite de cette introduction.

Enfin, nous voulons remercier R. Azencott, qui est à l'origine de ce travail, ainsi que Hubert Hennion qui y a contribué par d'utiles remarques.

L'étude du comportement du produit $s_n = g_1 \dots g_n$, est simplifiée par le théorème suivant :

Théorème 1.- Soit δ une fonction borélienne positive sur G vérifiant : $\forall x,y \in G \quad \delta(xy) \leqslant \delta(x)+\delta(y)$, p une mesure de probabilité telle que δ soit p-intégrable et γ le réel défini par

$$\gamma = \operatorname*{Inf}_n \frac{p^n(\delta)}{n} = \lim_n \frac{p^n(\delta)}{n}$$

Alors la suite des fonctions $\frac{1}{n}\delta(g_1 \dots g_n)$ converge vers γ presque partout et dans L^1.

Preuve : Ceci découle d'un théorème ergodique sous-additif dû à JFC Kingmann (cf [31]). Avec les notations de [31], on a, en posant

$$f_n(\omega) = \delta(g_1 \dots g_n) \qquad \omega = (g_1,\dots,g_n,\dots)$$

et en désignant par θ l'automorphisme de (G^N, p^N) défini par

$$\theta(g_1,\dots,g_n,\dots) = (g_2,\dots,g_{n+1},\dots)$$

$$f_{n+m}(\omega) \leqslant f_n(\omega)+f_m(\theta^n\omega)$$

à cause de la sous-additivité de δ.

Comme $\int_{G^N} f_1(\omega)dp^N(\omega) = \int_G \delta(g)dp(g) < +\infty$ on a bien la convergence de $\frac{1}{n} f_n(\omega)$ presque partout et dans L^1 vers $F(\omega)$ avec $\gamma = \int F(\omega)dp^N(\omega) = \lim_n \frac{p^n(\delta)}{n}$ et $F(\theta\omega) = F(\omega)$. La loi de zéro-un de Kolmogorov affirme l'ergodicité de θ et il en découle $F(\omega) = \gamma$.

Rappelons [17] qu'une probabilité est dite admettre un moment d'ordre $\alpha > 0$ si pour un voisinage compact V de e engendrant G on a $\int_G \delta_V^\alpha(g)dp(g) < +\infty$. On verra au paragraphe suivant que cette notion ne dépend pas de V. L'existence d'un moment d'ordre un implique que si λ est un homomorphisme de G dans le groupe additif de $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_G \lambda(g)dp(g)$ existe.

Définition : La mesure de probabilité p sera dite centrée si elle admet un moment d'ordre un et si pour tout homomorphisme λ de G dans $\mathbb{R}$ on a $\int_G \lambda(g)dp(g) = 0$.

La proposition suivante montre que cette notion se ramène à la notion classique dans les espaces vectoriels réels.

Soit G^* l'ensemble des homomorphismes λ de G dans $\mathbb{R}$, ensemble qui est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel réel. Si l'on désigne par G' l'adhérence du groupe dérivé de G on peut noter que $G^* = ({}^G/_{G'})^* = (\widetilde{G})^*$ où $\widetilde{G}$ désigne le quotient de ${}^G/_{G'}$ par son sous-groupe compact maximum. En particulier G^* est de dimension finie et si l'on désigne son dual par $\hat{G}$, une application canonique de G dans $\hat{G}$ notée $x \to \hat{x}$ se trouve définie, application qui envoie G sur un sous-groupe fermé de $\hat{G}$ de la forme $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, engendrant $\hat{G}$.

Proposition : Soit p une probabilité admettant un moment d'ordre un sur G. Alors p est centrée si et seulement si son image canonique $\hat{p}$ dans l'espace vectoriel $\hat{G}$ l'est.

Preuve : Supposons p centrée et soit μ un homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $x \to \mu(\hat{x})$ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}$ et donc : $\int_G \mu(\hat{x})dp(x) = 0$ ou encore $\int_{\hat{G}} \mu(\hat{x})d\hat{p}(\hat{x}) = 0$ ce qui prouve que $\hat{p}$ est centrée.

Inversement si λ est un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}$, il se prolonge à $\hat{G}$ par la formule $\lambda(\hat{x}) = \hat{x}(\lambda)$ et donc $\int_{\hat{G}} \lambda(\hat{x})d\hat{p}(\hat{x}) = 0$ soit, puisque $\lambda(x) = \lambda(\hat{x})$: $\int_G \lambda(x)dp(x) = 0$.

Les démonstrations seront simplifiées grâce au théorème "de relèvement" suivant :

Théorème 2.- Soit π un homomorphisme de G sur ${}^G/_H$, p une probabilité centrée sur ${}^G/_H$ admettant des moments de tous ordres. Alors il existe une probabilité q sur G centrée et admettant des moments de tous ordres dont l'image par π est égale à p.

Preuve : Soit V un voisinage compact de e dans G, engendrant G et notons $\bar{V} = \pi(V)$ son image dans ${}^G/_H$. On a alors $\forall x \in {}^G/_H$, $\delta_{\bar{V}}(x) = \inf\limits_{\pi(g)=x} \delta_V(g)$.

Il en résulte l'existence d'une section borélienne σ de G au-dessus de $G/_H$ telle que : $\forall x \in G/_H$; $\delta_V[\sigma(x)] \leqslant \delta_{\overline{V}}(x) + 1$.

Posons $q_o = \sigma(p)$ et notons que, d'après la relation précédente q_o admet des moments de tous ordres, comme p.

Ecrivons $q_o = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_r q_r$ avec $\alpha_i \geqslant 0$ $\sum_1^r \alpha_i = 1$ et $r = \dim \hat{H} + 1$. Ecrivons aussi $q = \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i \delta_{h_i} * q_i$ avec $h_i \in H$ et notons que q_o, q ont pour image p et des moments de tous ordres. Considérons les images de q_o et q_i dans $\hat{G}$ et leurs barycentres $E(\hat{q}_o)$ et $E(\hat{q})$:

$$E(\hat{q}_o) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i E(\hat{q}_i)$$

$$E(\hat{q}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [\hat{h}_i + E(\hat{q}_i)]$$

Notons que $\widehat{(G/_H)}$ s'identifie au quotient de $\hat{G}$ par le sous-espace vectoriel, noté $\dot{H}$, engendré par l'image canonique de H dans $\hat{G}$. On en déduit, puisque p est centrée, que le barycentre de $\hat{q}_o$ appartient à $\dot{H}$:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i E(\hat{q}_i) = E(\hat{q}_o) \in \hat{H}$$

Il est alors possible de trouver des $\alpha_i \geqslant 0$ et des $h_i \in H$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \hat{h}_i = -E(\hat{q}_o)$$

puisque le sous-espace vectoriel de $\hat{G}$ engendré par l'image de H contient $E(\hat{q}_o)$. On a alors $E(\hat{q}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [\hat{h}_i + E(\hat{q}_i)] = 0$, et donc q est centrée.

A - Fonctions sous-additives

On rassemble dans ce paragraphe diverses propriétés élémentaires qui interviendront dans la suite et l'on donne des estimations de fonctions sous-additives pour certains groupes de Lie connexes.

Définition 1.- Soit δ une application borélienne du groupe localement compact séparable G dans R. On dira que δ est sous-additive [resp. est une jauge] si l'on a la relation

$$\forall x \in G,\ y \in G \quad \delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y)$$

[resp. $\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + C$ où C est une constante].

Exemple : Si G est engendré par un voisinage compact V de l'identité, c'est-à-dire $G = \bigcup_{n \geq 0} V^n$, on pose

$$\delta_V(g) = \mathrm{Inf}\{n \geq 1 \; ; \; g \in V^n\}$$

et de la relation $V^{m+n} \supset V^m V^n$ découle $\delta_V(gh) \leq \delta_V(g)+\delta_V(h)$. Donc δ_V est sous-additive.

Remarque 1 : Si l'on se donne une représentation ρ de G par des isométries dans un espace normé E et un cocycle continu σ à valeurs dans E, c'est-à-dire une application continue de G dans E vérifiant $\sigma(gh) = \sigma(g)\sigma(h)+\sigma(g)$ on obtient une fonction sous-additive δ sur G qui est continue, symétrique, positive et s'annulant en l'identité en posant

$$\delta(g) = \|\sigma(g)\| \quad \text{car} \quad \delta(gh) = \|\sigma(gh)\| \leq \|\sigma(h)\| + \|\sigma(g)\| = \delta(h)+\delta(g)$$

$$\sigma(e) = 0, \; \|\sigma(g^{-1})\| = \|\sigma(g^{-1})\sigma(g)\| = \|\sigma(g)\|.$$

Inversement toute fonction sous-additive δ possédant ces propriétés s'obtient ainsi : il suffit de prendre pour E l'espace des fonctions uniformément continues à droite et bornées, pour ρ la représentation de G par translations à droite dans E et de poser

$$\sigma(g)[x] = \delta(xg)-\delta(x).$$

Le fait que $\sigma(g)$ est bornée résulte de

$$-\delta(g^{-1}) \leq \delta(xg)-\delta(x) \leq \delta(g).$$

Comme δ est uniformément continue, $\sigma(g)$ appartient bien à E et σ est un cocycle par construction :

$$\sigma(gh)[x] = \delta(xgh)-\delta(x) = \delta(xgh)-\delta(xg)+\delta(xg)-\delta(x).$$

$$\sigma(gh)[x] = \sigma(h)[xg]+\sigma(g)[x]$$

$$\sigma(gh) = \rho(g)\sigma(h)+\sigma(g)$$

Enfin $\|\sigma(g)\| = \sup_x |\delta(xg)-\delta(x)| = \delta(g)$ d'après les relations

$$-\delta(g^{-1}) \leq \delta(xg)-\delta(x) \leq \delta(g)$$

$$\delta(g) = \delta(g^{-1}), \; \delta(g) = \delta(eg)-\delta(e).$$

Définition 2 : On dira qu'une fonction f' domine une fonction f s'il existe deux constantes positives A et B telles que

$$\forall g \in G \qquad f(g) \leqslant Af'(g)+B.$$

Deux fonctions qui se dominent mutuellement sont dites équivalentes.

Définition 3 : Si le groupe G est engendré par un compact V, une jauge positive à δ_V sera dite principale.

Remarque 2 : Toute jauge δ est équivalente à une fonction sous-additive γ définie par :

$$\gamma(x) = \operatorname*{Sup}_y \delta(xy)-\delta(y)$$

car $\qquad \gamma(x) \geqslant \delta(xe)-\delta(e) = \delta(x)-C'$

et $\qquad \delta(xy)-\delta(y) \leqslant \delta(x)+C$

d'après la définition d'une jauge.

Proposition 1.- Toute jauge est localement bornée supérieurement. En particulier si G est engendré par un compact, V contenant l'identité, une jauge quelconque est dominée par δ_V.

Preuve : Posons $\mathcal{B}_n = \{g \in G \ ; \ \delta(g) \leqslant n\}$ et notons que $G = \bigcup_{n\in Z} \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{m+n+r}$ car $\delta(gh) \leqslant \delta(g)+\delta(h)+r$.

Comme les $\mathcal{B}_n$ sont des boréliens, la première relation montre que l'un au moins est de mesure positive au sens d'une mesure de Haar sur G, donc contient un borélien borné $\mathcal{B}$ de mesure positive. Comme la fonction $1_{\mathcal{B}} * 1_{\mathcal{B}}$ est continue, nulle en dehors de $\mathcal{B}^2$ et non négligeable, le borélien $\mathcal{B}^2$ a au moins un point intérieur, ce qui entraîne que $\mathcal{B}_{2n+r}$ est d'intérieur non vide et donc qu'il existe un ouvert où δ est bornée supérieurement. La propriété de définition d'une jauge entraîne alors que δ est localement majorée.

Majorons δ sur l'ensemble borné $V^{n+1}-V^n$ posant

$$g = g_1 \ldots g_{n+1} \quad (g_i \in V)$$

on obtient $\delta(g) \leqslant (n+1)r + \sum_{1\leqslant i\leqslant n+1} \delta(g_i)$

$$\delta(g) \leqslant (n+1)[r+\operatorname*{Sup}_{g\in V} \delta(g)] = A\,\delta_V(g)$$

puisque δ est bornée supérieurement sur le compact V.

Remarque 3 : Il résulte de cette proposition que toutes les jauges de la forme δ_V sont équivalentes, ce qui justifie la définition 3.

Proposition 2.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une jauge δ soit principale est qu'elle soit bornée inférieurement et qu'il existe un voisinage compact V de l'identité engendrant G tel que

$$\forall n \geqslant 1 \;:\; \mathcal{B}_n^\delta = \{g \in G \;;\; \delta(g) \leqslant n\} \subset V^n$$

Preuve : Supposant δ principale, on a avec $A > 0$

$$\forall g \in G \qquad \delta(g) \geqslant A\ \delta_V(g)+B$$

et donc, si $g \in \mathcal{B}_n^\delta$:

$$\delta_V(g) \leqslant \frac{n-B}{A} \leqslant kn$$

où k est un entier supérieur à $\frac{1-B}{A}$ ce qui entraîne $\mathcal{B}_n^\delta \subset W^n$ avec

$$W = V^k \supset V.$$

D'autre part, il est clair que

$$\forall g \in G \qquad \delta(g) \geqslant A+B$$

Réciproquement, minorons $\delta(g)$ sur $V^{n+1}-V^n$: la relation $\mathcal{B}_n^\delta \subset V^n$ entraîne

$$(V^{n+1}-V^n) \cap \mathcal{B}_n^\delta = \emptyset$$

donc sur $V^{n+1}-V^n$ on a $\delta(g) \geqslant n$. D'où finalement :

$$\delta(g) \geqslant \delta_V(g)-1$$

pour $\delta_V(g) \geqslant 2$.

Puisque δ est bornée inférieurement on a sur V :

$$\delta(g) \geqslant \delta_V(g)+\text{Cte}$$

ce qui donne, pour tout g dans G

$$\delta(g) \geqslant \delta_V(g)+\text{Cte}$$

et δ est donc équivalente à δ_V.

Définition 4.- Soit A *un groupe d'automorphismes du groupe localement compact* B, δ *une jauge sur* B. *On dit que* δ *est A-principale si pour tout* $a \in A$, *la fonction* $|\delta[a(x)]-\delta(x)|$ *est bornée et si toute jauge vérifiant cette condition est dominée par* δ.

L'introduction de cette notion est justifiée par la proposition qui suit.

Proposition 3.- Soit $G = B.A$ *un groupe localement compact qui est produit semi-direct de deux sous-groupes* A *et* B, α *et* δ *deux jauges principales sur* A *et* G, β *une jauge A-principale sur* B. *Alors la fonction* λ *définie par*

$$\lambda(g) = \lambda(b.a) = \beta(b)+\alpha(a)$$

est équivalente à δ.

Preuve : La lettre C_i désignera diverses constantes. On a les relations

$$\delta(g) \leqslant \delta(a)+\delta(b)+C_1$$

$$\delta(a) \leqslant C_2\alpha(a)+C_3$$

On en déduit

$$|\delta[a(b)]-\delta(b)| \leqslant \delta(a)+\delta(a^{-1})+2C_1$$

$$\sup_{b\in B}|\delta[a(b)]-\delta(b)| < +\infty$$

Comme β est A-principale on a donc

$$\delta(b) \leqslant C_4\beta(b)+C_5$$

Ce qui donne

$$\delta(g) \leqslant \delta(b)+\delta(a)+C_1 \leqslant C_6\lambda(g)+(C_3+C_1+C_5)$$

Posons $\mu(g) = \mu(ba) = \beta(b)$ et considérons

$$\mu(gg')-\mu(g') = \beta[b.a(b')]-\beta(b') \leqslant \beta(b)+\beta[a(b')]-\beta(b')$$

Comme $\sup_{b'\in B} \beta[a(b')]-\beta(b')$ est une fonction sous-additive de a, on en déduit

$$\mu(gg')-\mu(g') \leqslant \beta(b)+C_7\alpha(a)+C_8$$

$$\sup_{g'\in G} \mu(gg')-\mu(g') \leq C_9\lambda(g)+C_8$$

La fonction du premier membre est sous-additive et supérieure à $\mu(g)-\mu(e) = \beta(b)-\beta(e)$. Comme δ est principale on a

$$\beta(b)-\beta(e) \leq \sup_{g'\in G} \mu(gg')-\mu(g') \leq C_{10}\delta(g)+C_{11}$$

comme on a clairement $\alpha(a) \leq C_{12}\delta(g)+C_{13}$ on en conclut

$$\lambda(g) \leq (C_{10}+C_{12})\delta(g)+\beta(e)+C_{11}+C_{13}$$

Corollaire : Soit G un groupe localement compact, A et B deux sous-groupes fermés de G tel que $G = BA$, B étant distingué dans G, α et β deux jauges principales sur A et G, β une jauge A-principale sur B. Alors on a

$\forall b \in B$, $\forall a \in A$, $\delta(ba) \leq C_1|\alpha(a)+\beta(b)|+C_2$ où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Preuve : On définit un homomorphisme f du produit semi-direct $B.A$ dans G par : $f(b.a) = ba$.

Alors $\delta[f(b.a)]$ est sous-additive sur $B.A$ et, d'après la proposition précédente, est donc majorée par

$$C_1[\alpha(a)+\beta(b)]+C_2$$

On va maintenant donner, dans le cas des groupes de Lie connexes, des calculs ou des estimations de jauges principales qui seront utiles dans la suite. Dans le cas des groupes de Lie de type R de tels calculs ont essentiellement été effectués en [26]. Rappelons le résultat obtenu dans le cas d'un groupe nilpotent simplement connexe N identifié à son algèbre de Lie par l'application exponentielle. Considérons la suite centrale descendante de N : $N = N^1 \supset N^2 \supset \ldots \supset N^r \supset N^{r+1} = \{e\}$ et écrivons l'espace vectoriel N sous forme de somme directe :

$N = \bigoplus_{i=1}^{i=r} N^i/N^{i+1}$. Si pour x de N décomposé sous la forme

$X = \sum_{i=1}^{i=r} x_i$ $(x_i \in N^i/N^{i+1})$ on pose $\delta(x) = \sup_{1\leq i\leq r} \|x_i\|^{1/i}$

où $\|x_i\|$ est une forme euclidienne convenable sur N^i/N^{i+1} , on obtient une jauge principale [26 p. 343-344].

Enfin, si H est un sous-groupe fermé du groupe localement compact G tel que $G/_H$ soit compact, la restriction d'une jauge principale de G à H est une jauge principale de H d'après la proposition I.4 de [26].

Définition 5.- Un automorphisme u d'un espace vectoriel réel de dimension finie sera dit dilatant si les modules de ses valeurs caractéristiques sont supérieurs à un.

Conséquence : Si u est dilatant et si B est une boule relative à une norme fixée sur V, il existe deux constantes $C > 0$ et $\rho > 1$ telles que l'on ait :

$$\forall n \in N \qquad u^n B \supset C\rho^n B$$

En effet, on a par hypothèse

$$\lim_n \|u^{-n}\|^{1/n} = \frac{1}{\rho'} < 1$$

ce qui donne $u^{-n}B \subset \frac{1}{\rho^n} B$ à partir d'un certain rang $(\rho' > \rho > 1)$.

D'où : $\forall n \in N \quad u^n B \supset C\rho^n B$

Définition 6.- Si u est un automorphisme d'un espace vectoriel V on notera V_u le plus grand sous-espace de V sur lequel u est dilatant, c'est-à-dire : $V_u = \{x \,;\, \overline{\lim_n}\|u^{-n}x\|^{1/n} = 0\}$ V_u sera appelé sous-espace dilatant relatif à u.

Définition 7.- Un groupe d'automorphismes G d'un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe N sera dit dilatant si la sous-algèbre de Lie de N, supposée identifiée à N, engendrée par les N_g $(g \in G)$ est égale à N.

Proposition 4.- Soit G un groupe d'automorphismes dilatant du groupe de Lie nilpotent simplement connexe N et $x \to \|x\|$ une fonction sous-additive (resp jauge) principale positive sur N. Alors $\delta(x) = \operatorname{Log}(1+\|x\|)$ est une fonction sous-additive (resp. jauge) G-principale sur N.

Preuve : Plaçons-nous dans le cas des fonctions sous-additives, le cas des jauges étant semblable. La sous-additivité de $\operatorname{Log}(1+\|x\|)$ résulte de

$$\begin{aligned}(1+\|x\|)(1+\|x'\|) &= 1+\|x\|+\|x'\|+\|x\|\,\|x'\| \\ &\geqslant 1+\|x\|+\|x'\|.\end{aligned}$$

On a de plus

$$\delta(gx)-\delta(x) = \mathrm{Log}\,\frac{1+\|gx\|}{1+\|x\|}$$

Comme $x \to \|gx\|$ est sous-additive on a

$$\|gx\| \leqslant A\|x\|+B \quad (A > 1) \quad \text{et donc} \quad \frac{1+\|gx\|}{1+\|x\|} \leqslant \frac{A(1+\|x\|)+B}{1+\|x\|} \leqslant A+B$$

Il en résulte que $\delta(gx)-\delta(x)$ est bornée supérieurement. En changeant g en g^{-1}, on obtient que cette fonction de x est aussi bornée inférieurement. Pour montrer que δ est G-principale, on suppose d'abord que N est un espace vectoriel et que G est engendré par un seul automorphisme dilatant g.

Notons que si η est une fonction sous-additive sur N telle que $|\eta(gx)-\eta(x)|$ soit bornée par $C > 0$, on a

$$\eta(g^n x) \leqslant \eta(x)+C_n$$

On peut supposer que $x \to \|x\|$ est une norme sur N. Si alors B_α désigne la boule de rayon α, on obtient, en tenant compte de $g^n B_1 \supset C\rho^n B_1$ $(\rho > 1,\ C > 0)$, que la relation $\|x\| \leqslant C\rho^n$ entraîne $\eta(x) \leqslant C_n+D$ $(C > 0)$, d'où, en général

$$\eta(x) \leqslant C\ \mathrm{Log}(1+\|x\|)+D$$

Si N est nilpotent on l'identifie à son algèbre de Lie et si l'on désigne par N' le groupe dérivé de N, l'hypothèse sur l'action de G et le cas particulier précédent entraînent l'existence d'une base (e_i) d'un supplémentaire de N' telle que

$$\delta(\lambda e_i) \leqslant C\ \mathrm{Log}(1+|\lambda|)+D$$

Cette condition se traduit, à cause de l'expression d'une jauge principale sur N, par la relation $\delta(x) \leqslant C\ \mathrm{Log}(1+\|x\|)+D$ si x est colinéaire à l'un des e_i. Supposons d'abord que l'algèbre N soit niloptente libre de classer sur les $(e_i)_{i=1\ldots r}$ et introduisons les automorphismes u_λ définis par

$$u_\lambda(e_i) = \lambda e_i$$

On sait, toujours d'après l'expression d'une jauge principale sur N que si x varie dans un compact on a

$$A|\lambda|+B \leqslant \|u_\lambda(x)\| \leqslant A'|\lambda|+B'$$

Posant $I_k = \{\zeta e_k : |\zeta| \leqslant 1\}$ on obtient alors

$$\delta(u_\lambda(x)) \leqslant C \operatorname{Log}(1+\|u_\lambda(x)\|)+D$$

$$\delta(u_\lambda(x)) \leqslant C' \operatorname{Log}(1+|\lambda|)+D'$$

Si x varie dans l'un des I_k.

Puisque le sous-groupe engendré par les I_k est égal à N, le théorème de Baire entraîne que l'un des produits des I_k contient un voisinage U de l'identité. On en déduit que pour x dans U on a, avec de nouvelles constantes

$$\delta(u_\lambda(x)) \leqslant C \operatorname{Log}(1+|\lambda|)+D$$

$$\delta(u_\lambda(x)) \leqslant C' \operatorname{Log}(1+\|u_\lambda(x)\|)+D'$$

Soit : $\forall y \in N \quad \delta(y) \leqslant C' \operatorname{Log}(1+\|y\|)+D'$

Si l'algèbre N n'est pas libre elle est le quotient d'une algèbre de Lie libre associée à un groupe nilpotent $\tilde{N}$. Si l'on désigne par π l'homomorphisme canonique de $\tilde{N}$ sur N on peut définir à partir de δ une fonction sous-additive $\tilde{\delta}$ sur $\tilde{N}$ par

$$\tilde{\delta}(x) = \delta[\pi(x)]$$

L'étude précédente entraîne alors

$$\delta(x) \leqslant C \operatorname{Log}(1+\|x\|)+D$$

d'où

$$\delta(y) \leqslant C \inf_{\pi(x)=y} \operatorname{Log}(1+\|x\|)+D$$

$$\delta(y) \leqslant C' \operatorname{Log}(1+\|y\|)+D'$$

<u>Définition 8</u>.- Soit G un groupe de Lie moyennable connexe. On appelle sous-groupe instable de G le plus petit sous-groupe distingué fermé N de G tel que G/N soit un groupe de Lie de type R. (un groupe de Lie connexe est dit de type R si les poids de la représentation adjointe sont de module un).

Pour justifier cette définition, il faut vérifier que si N_i $(i \in I)$ est une famille de sous-groupes fermés distingués tels que G/N_i soit de type R pour tout i et si $P = \bigcap_{i\in I} N_i$, G/P est encore de type R. Notons par $\mathcal{N}_i$, $\mathcal{G}$ les algèbres de Lie de N_i et G, posons $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{N}_i$ et montrons que l'algèbre

$\mathcal{G}/\mathfrak{m}$ est de type $\mathcal{R}$; on peut supposer I fini et considérer l'homomorphisme canonique de $\mathcal{G}$ dans $\prod_{i\in I} \mathcal{G}/\mathfrak{n}_i$: son image, isomorphe à $\mathcal{G}/\mathfrak{m}$ est de type $\mathcal{R}$ comme $\prod_{i\in I} \mathcal{G}/\mathfrak{n}_i$. Le sous-groupe M correspondant à $\mathfrak{m}$ est contenu dans P. L'algèbre de G/P est donc de type R comme quotient de $\mathcal{G}/\mathfrak{m}$.

<u>Remarque</u> : Il découle du raisonnement précédent que N est contenu dans le nilradical de G puisque le quotient de G par celui-ci est localement isomorphe au produit d'un groupe compact et d'un groupe abélien. En particulier N est nilpotent. De plus N est connexe puisqu'un revêtement d'un groupe de type R est aussi de type R.

Une construction de N apparaît dans la démonstration de la proposition suivante.

<u>Proposition 5</u>.- Soit G un groupe de Lie moyennable connexe admettant N pour sous-groupe instable. Alors il existe un sous-groupe fermé connexe A de G qui est de type R, opère de manière dilatante sur le quotient de N par son sous-groupe compact maximum et qui vérifie G = N.A

<u>Preuve</u> : Soit $\mathcal{G} = \mathcal{K}\oplus\mathcal{R}$ une décomposition de Levi de $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ étant ici une sous-algèbre compacte maximale de $\mathcal{G}$. On raisonne comme en [23], en considérant une sous-algèbre de Cartan $\mathcal{P}$ du centralisateur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{R}$. On considère la décomposition en sous-espaces primaires de la représentation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$: on obtient deux sous-espaces $\mathcal{P}$-invariants de $\mathcal{R}$, en somme directe, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{S}$, tels que les valeurs caractéristiques de adx dans $\mathcal{S}$ soient imaginaires pures pour tout x de $\mathcal{P}$ tandis que dans $\mathcal{J}$ elles soient de parties réelles non nulles, pour certains x de $\mathcal{P}$. D'après un calcul classique, $\mathcal{S}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}$ et puisque

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} + [\mathcal{G},\mathcal{R}]$$

c'est une algèbre de type R ; d'après ce même calcul on a $[\mathcal{P},\mathcal{J}] \subset \mathcal{J}$, ce qui montre que la sous-algèbre $\bar{\mathcal{J}}$ engendrée par $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{R}$. Comme par ailleurs $[\mathcal{K},\mathcal{J}] \subset \mathcal{J}$ et $[\mathcal{K},\mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ on obtient que $\mathcal{S}\oplus\mathcal{K}$ est une algèbre de type R et que $\bar{\mathcal{J}}$ est un idéal de $\mathcal{G}$ vérifiant

$$\mathcal{G} = (\mathcal{S}\oplus\mathcal{K}) + \bar{\mathcal{J}}$$

Enfin, puisque $\mathcal{R} = \mathcal{P} + [\mathcal{G},\mathcal{R}]$, il est clair que $\bar{\mathcal{J}} \subset [\mathcal{G},\mathcal{R}]$ est nilpotent. On va montrer que l'adhérence dans G du sous-groupe correspondant à $\bar{\mathcal{J}}$

n'est autre que le sous-groupe instable N de G et que l'adhérence du sous-groupe correspondant à $\mathcal{K} \oplus \mathcal{S}$ est un sous-groupe A satisfaisant la proposition.

Notons d'abord que, puisque A opère de manière dilatante sur $\bar{\mathcal{J}}$ et que $G/_N$ est de type R on a $\bar{\mathcal{J}} \subset \mathcal{N}$ et le sous-groupe N_1 correspondant à $\bar{\mathcal{J}}$ est contenu, ainsi que son adhérence, dans N. De plus, comme $\mathcal{J}/\bar{\mathcal{J}}$ est de type R il en est de même de $G/_{\bar{N}_1}$, ce qui montre que $\bar{N}_1 \supset N$. Si l'on désigne par C le sous-groupe compact maximum de N, on a $N_1.C = N$ car l'image de N_1 dans $N/_C$, qui est nilpotent, simplement connexe, étant connexe est fermée et donc égale à N puisqu'elle y est dense. On en conclut que A qui opère de manière dilatante sur $\bar{\mathcal{J}}$ et N_1 opère aussi de manière dilatante sur $N/_C$.

<u>Corollaire</u> : Soient δ et α des jauges principales sur G et A. On a alors, avec des constantes convenables A et B :

$$\forall n \in N, \forall a \in A : \delta(na \leqslant A+B[Log(1+\|\bar{n}\|)+\alpha(a)] \quad \text{où} \quad n \to \|\bar{n}\| \quad \text{est}$$

une jauge principale sur $N/_C$.

La proposition suivante permet de ramener le cas des groupes de type R au cas nilpotent.

<u>Proposition 6</u>.- Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe qui est de type R. Alors il existe un tore C formé d'automorphismes de G tel que le produit semi-direct C. G soit aussi le produit semi-direct d'un groupe compact contenant C et d'un groupe nilpotent simplement connexe N tel que

$$\overline{G.N} = C.G$$

Cette proposition découlera du lemme.

<u>Lemme</u> : Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, R son radical, A.R un "semi-simple splitting" de R. Alors il existe un sous-groupe de Levi S de G tel que les automorphismes de R définis par les éléments de S et ceux de A commutent.

<u>Preuve</u> : On reprend, en l'adaptant une construction due à L. Auslander et L.W. Green [1]. Considérons les actions adjointes de R sur les algèbres de Lie $\mathcal{R}$ et $\mathcal{G}$ de R et G et notons $\hat{R}$ et $\mathring{R}$ les adhérences algébriques des

images de R dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ et $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$: ce sont des groupes résolubles connexes algébriques et ils admettent donc des décompositions de la forme [5] $\hat{R} = \hat{T}.\hat{N}$, $\dot{R} = \dot{T}.\dot{N}$ où $\tilde{T}$ et $\dot{T}$ sont des tores algébriques maximaux et $\hat{N}$, $\dot{N}$ les sous-groupes unipotents maximaux. Puisque R laisse stable $\mathcal{R}$ et opère de manière triviale sur $\mathcal{G}/\mathcal{R}$, il en est de même de $\dot{R}$ et l'homomorphisme de restriction à $\mathcal{R}$ envoie donc $\dot{R}$ dans $\hat{R}$. L'image de $\dot{T}$ est alors formée d'éléments semi-simples et est donc contenue dans un tore algébrique maximal de $\hat{R}$ [5] : on peut supposer que $\hat{T}$ contient l'image de $\dot{T}$. Enfin le noyau de l'homomorphisme de restriction est contenu dans $\dot{N}$ puisque $\dot{R}$ opère trivialement sur $\mathcal{G}/\mathcal{R}$: $\dot{T}$ est isomorphe à son image dans $\hat{T}$. Puisque $\dot{T}$ opère de manière semi-simple sur l'algèbre $\mathcal{G}$, il laisse fixe une sous-algèbre réductive maximale de $\mathcal{G}$, d'après un théorème de G.D. Mostow [22] ; cette sous-algèbre réductive maximale est le produit de son radical par une sous-algèbre de Lévi $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ qui est invariante par $\dot{T}$. Comme $\dot{T}$ opère trivialement sur $\mathcal{G}/\mathcal{R}$, il opère trivialement sur $\mathcal{S}$ et si S désigne le sous-groupe de G correspondant, les automorphismes de R associés aux éléments de $\dot{T}$ et S commutent. Puisque, par définition A est l'image de R dans $\tilde{T}$, on obtient bien l'assertion du lemme.

<u>Preuve de la proposition 6</u> : Avec les notations du lemme précédent, soit K un sous-groupe compact semi-simple de G qui commute avec A et considérons l'adhérence C de A dans le groupe des automorphismes de R : C commute avec l'action de K et l'on peut donc considérer le produit semi-direct $C.G = (C\times K).R$. Puisque $A \subset C$ et que C est abélien, l'action de C sur $C.G$ laisse invariant $A.R.$ qui d'après [1] est égal à $A.N.$ où N est le nilradical de $A.R.$ Il en découle que N est distingué fermé dans $C.G.$ On a donc $C.R = C.N$ et $C.G = K.(C.R) = (K\times C).N.$

Enfin $GN = KRN = KAN$

$$\overline{GN} = (K\times\bar{A}).N = C.G$$

puisque $RN = AN$, [1].

<u>*Définition*</u> *: On dira qu'une fonction à valeurs complexes sur un groupe de Lie engendré par un compact V est à croissance lente si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g\in V^n} |f(g)|^{1/n} \leqslant 1$$

Notons enfin que la proposition précédente admet la conséquence suivante.

<u>*Proposition 7*</u>*.- Soit G un groupe de Lie moyennable connexe et simplement connexe. Alors l'ensemble des fonctions représentatives sur G à croissance*

lente est une algèbre stable par translations. Cette algèbre est formée de fonctions constantes suivant les classes du sous-groupe dilatant de G et sépare ces classes.

Le lemme suivant précise la structure des fonctions représentatives à croissance lente.

<u>Lemme</u> : *Soit G un groupe de Lie engendré par un compact V, f une fonction représentative sur G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f est à croissance lente

2) il existe des éléments g_1, g_r de G tels que, pour tout h de G

$$\liminf_n \left[\sup_{1 \leqslant i \leqslant r} f(g^n h g_i) \right] > 0$$

3) il existe un entier d et une constante C telle que

$$|f(g)| \leqslant C[\delta_V(g)]^d$$

<u>Preuve</u> : Soit E est l'espace vectoriel engendré par les translatées à gauche de f et ρ la représentation de G dans E par translations. $1 \Rightarrow 2$: La condition 1 implique que pour tout g de G on a $\lim_n \|\rho(g^n)\|^{1/n} \leqslant 1$ où $\| \ \|$ désigne une norme sur E. Ceci signifie que, pour tout g, les valeurs propres de $\rho(g)$ sont de module un. On en déduit

$$\liminf_n \|\rho(g^n) f\| < 0$$

Si alors g_i $(i = 1,\dots,r)$ est une partie finie de G telle que pour tout x de E

$$\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} |x(g_i)|$$

on obtient la condition 2.

$2 \Rightarrow 3$: La condition 2 implique $\liminf_n \|\rho(g^n)\| > 0$ où x est une translatée de f^n.

Cela signifie que les valeurs propres de $\rho(g)$, dans le sous-espace invariant par $\rho(g)$ engendré par x, sont de module un au moins. Il en est de même dans E puisque les translatées de f engendrent E. Finalement, les valeurs propres de $\rho(g)$ dans E sont de module un. Montrons que cette propriété implique, par réccurrence sur $\dim E$, l'existence d'un entier d et d'une constante C telle que :

$\|\rho(g)\| \leqslant C[\delta_V(g)]^d$. Si dim $E = 1$, l'assertion est claire car $\rho(g)$ est une multiplication par un nombre complexe de module un.

Dans le cas général, on sait d'après [7] qu'il existe un sous-espace $E_1 \neq \{0\}$ de E invariant par $\rho(G)$ et sur lequel $\rho(G)$ laisse invariant un produit scalaire. Notons $\tilde{\rho}$ et $\bar{\rho}$ les représentations déduites de ρ dans E_1 et E/E_1 et écrivons $E = E_1 \oplus E_2$ où E_2 est isomorphe à E/E_1. Définissons une norme sur E_1 et E_2 par la formule $\|x\| = \mathrm{Sup}(\|x_1\|, \|x_2\|)$ où $x = x_1+x_2$ $(x_1 \in E_2,\ x_2 \in E_2)$. On a alors, pour g et h de G :

$$\|\rho(gh)\| \leqslant \|\rho(g)\| \; \|\bar{\rho}(h)\| + \|\tilde{\rho}(g)\| \; \|\rho(h)\|$$

Si l'on pose

$$\phi(n) = \sup_{g \in V^n} \|\rho(g)\|, \quad \psi(n) = \sup_{h \in V^n} \bar{\rho}(h)$$

On obtient alors

$$\phi(n+1) \leqslant C'\psi(n) + \phi(n)$$

puisque $\qquad \|\tilde{\rho}(g)\| = 1$

L'hypothèse de récurrence $\psi(n) \leqslant Cn^d$ implique alors

$$\phi(n) \leqslant C''n^{d+1}$$

Preuve de la proposition : La première assertion est claire.

Si f est une fonction représentative à croissance lente et si ρ est la représentation associée, $\rho(G)$ est formé d'opérateurs dont les valeurs propres sont de module un ; l'image de $\rho(G)$ dans la représentation adjointe possède la même propriété et $\rho(G)$ est donc de type R. Ceci montre que le noyau de ρ contient le sous-groupe dilatant de G. Si G est produit semi-direct d'un groupe compact K et d'un groupe nilpotent simplement connexe N on obtient un ensemble séparant de fonctions représentatives en prenant les fonctions représentatives de $G/N = K$ et les polynômes sur N prolongés à G par la formule $P(n \circ k) = P(n)$ $[n \in N,\ k \in K]$. Comme ces fonctions sont à croissance lente, le théorème est démontré dans ce cas. Si G est de type R, l'injection de la proposition 6 dans un groupe du type précédent fournit le résultat. Cette conclusion s'applique au quotient de G par son sous-groupe dilatant, qui est simplement connexe de type R et la proposition en découle.

B - La loi des grands nombres pour les groupes de Lie moyennables

D'après la proposition 5 de la première partie et son corollaire, on est ramené à étudier le cas d'un groupe d'automorphismes dilatant d'un groupe nilpotent et le cas d'un groupe de type R. Dans ce dernier ces, qui est le plus substanciel, les théorèmes découleront d'une étude de l'opérateur de convolution par une mesure bornée sur l'algèbre des polynômes sur un groupe nilpotent simplement connexe. On utilisera en particulier une notion de degré qui est un cas tès spécial des filtrations étudiées systématiquement en [15].

Le passage au cas d'un groupe de type R général se fera en utilisant la technique du "semi-simple splitting" [1].

Il sera commode pour alléger l'exposé de supposer que la probabilité considérée admet des moments de tous ordres. Les résultats resteraient valables avec seulement l'existence d'un moment d'ordre un et pourraient s'obtenir par des techniques de troncature.

La proposition et les théorèmes qui suivent sont des résultats partiels qui serviront à établir le résultat final énoncé dans le théorème 3.

Proposition 1.- Soit $G = B.A$ *un produit semi-direct du groupe localement compact* B *et du groupe d'automorphismes* A, β *et* α *des jauges principales sur* B *et* A, p *une probabilité sur* G. *Posons*

$$g = b(g).a(g) \quad \text{avec} \quad b(g) \in B,\ a(g) \in A.$$

Si l'on suppose que presque sûrement on a $\lim\limits_n \dfrac{\alpha[a(g_1,..g_n)]}{n} = 0$ *que* $\mathrm{Log}[1+\beta[b(g)]]$ *est p-intégrable, alors on a*

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathrm{Log}[1+\beta[b(g_1,...g_n)]] = 0.$$

Preuve : Remarquons d'abord que si u est un automorphisme de B on a

$$1+\beta(ub) \leqslant \rho(u)[1+\beta(b)]$$

pour une fonction $\rho(u)$ vérifiant $\rho(uv) \leqslant \rho(u)\rho(v)$.

En effet $\dfrac{1+\beta(ub)}{1+\beta(b)}$ est bornée par $\dfrac{1+A\beta(b)+B}{1+\beta(b)} \leqslant A+B$.

Car $\beta(ub)$ est aussi une jauge et β est principale. On pose alors

$$\rho(u) = \sup_{b\in B} \frac{1+\beta(ub)}{1+\beta(b)} .$$

Observons aussi que si X_n est une suite de variables aléatoires réelles indépendantesayant même loi et un moment d'ordre un ; on a presque partout, ε étant fixé, $|X_n| \leqslant \varepsilon_n + A$ avec une constante A convenable. Ceci découle du lemme de Borel-Cantelli.

Posons alors $gbg^{-1} = \tilde{g}(b)$ $b(g_i) = b_i$ et l'on obtient

$$b(g_1 \dots g_{n+1}) = b_1 \; \tilde{g}_1(b_2) \widetilde{g_1 g_2}(b_3) \quad \widetilde{g_1 \dots g_n}(b_{n+1})$$

$$\beta[b(g_1 \dots g_{n+1})] \leqslant C(n+1) + \beta(b_1) + \beta(\tilde{g}_1 b_2) + \dots + \beta(\widetilde{g_1 \dots g_n} b_{n+1})$$

Utilisant $1+\beta(\widetilde{g_1 \dots g_k} b_{k+1}) \leqslant \rho(\widetilde{g_1 \dots g_k})[1+\beta(b_{k+1})]$ et se plaçant sur la partie Ω_A^ε de G^N où l'on a simultanément

$$\rho(g_1 \dots g_k) \leqslant A(1+\varepsilon)^k$$

$$1+\beta(b_k) \leqslant A(1+\varepsilon)^k$$

on obtient

$$1+\beta[(g_1 \dots g_{n+1})] \leqslant C(n+1) + A^2 \sum_{k=o}^{k=n} (1+\varepsilon)^{2k}$$

$$1+\beta[b(g_1 \dots g_{n+1})] \leqslant C(n+1) + A^2 (1 + \frac{1}{\varepsilon})(1+\varepsilon)^{2n}$$

$$\overline{\lim_n} [1+\beta[b(g_1 \dots g_n)]]^{1/n} \leqslant (1+\varepsilon)^2$$

Enfin l'hypothèse $\mathrm{Log}[1+\beta(b(g))]$ p-intégrable et le fait que l'on ait

$$\rho(g) \leqslant e^{A\alpha(g)+B}$$

entraînent que la réunion des Ω_A^ε lorsque A varie est $G^{\mathbb{N}}$ sauf une partie négligeable et la proposition découle donc de l'arbitraire de ε.

Dans le cas des groupes de type R, on a les résultats suivants qui précisent considérablement la proposition.

Théorème 1.- Supposons que G soit un produit semi-direct d'un groupe nilpotent $\mathbb{N}$ et d'un groupe compact K. Alors si p est centrée et si la projection canonique de G sur K est apériodique, on a pour toute jauge principale δ sur G :

$$\lim_n \frac{p^n(\delta)}{n} = 0$$

Théorème 2.- Supposons que G soit un groupe de Lie connexe de type R et que p soit apériodique et centrée. Alors, pour toute jauge principale δ sur G on a

$$\lim_n \frac{p^n(\delta)}{n} = 0$$

Le théorème 1 découlera aisément du théorème 1' et le théorème 2 du théorème 1.

Théorème 1'.- *Supposons que G soit le produit semi-direct d'un groupe nilpotent N et d'un groupe compact K et que p soit une probabilité centrée à support compact dont la projection sur K est strictement apériodique. Alors, pour toute jauge principale δ la suite $\frac{p^n(\delta)}{\sqrt{n}}$ est bornée.*

Le théorème 1' résultera de deux propositions, pour l'énoncé desquelles nous avons besoin de quelques notations.

Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe que l'on identifie à son algèbre de Lie et où le produit $x \circ y$ de deux éléments x et y s'exprime donc, par la formule de Haussdorf, comme une somme de monomes de Lie en x et y.

Soit $N = N^1 \supset N^2 \supset \ldots \supset N^r \supset N^{r+1} = \{0\}$ la suite centrale descendante de N, $(e_i)_{1<i<n}$ une base adaptée à cette suite, c'est-à-dire telle que, pour tout $s \leqslant r$, les vecteurs e_i appartenant à N^s en forment une base. Désignons par $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions polynômes sur l'espace vectoriel N et par $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ le système des fonctions coordonnées associé à la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

On définit une notion de degré sur cette algèbre en attribuant un degré à chaque générateur x_i ; le degré de x_i, noté "deg x_i", est par définition égal au plus grand entier s tel que e_i appartienne à N^s.

On peut alors énoncer la

Proposition 1.- *Soit p une probabilité sur N ayant des moments d'ordre quelconque.
Alors la convolution à gauche par p conserve le degré des polynômes et si p est centrée, la convolution par $p-\delta_0$ abaisse les degrés de deux unités au moins.*

Cette proposition résulte immédiatement du quatrième des lemmes suivants en y prenant $\mu = p-\delta_o$.

Lemme 1.- *Pour tout polynôme A sur N, le polynôme de deux variables $A(x \circ y)-A(x)-A(y)$ est de degré total au plus égal à celui de A et de degré partiel, par rapport à chacune des variables, strictement inférieur.*

Preuve : Observons que les coordonnées d'un monome de Lie en x et y sont des polynômes en x et y dont le degré total, au sens ici défini, est inférieur ou égal à r et dont les degrés partiels sont donc au plus égal à $r-1$ si les deux variables y figurent. On peut alors prouver l'assertion du lemme par récurrence sur la classe r de N et l'on peut supposer que $A = x_i$ est l'une des fonctions coordonnées.

Si $r = 1$ $x_i(x\circ y)-x_i(x)-x_i(y)$ est nul et l'assertion est claire.

Si $r > 1$ et x_i est de degré strictement inférieur à r la conclusion résulte de l'hypothèse de récurrence.

Si x_i est de degré égal à r, la conclusion découle de l'observation initiale car $x\circ y-x-y$ est une somme de monomes de Lie.

Soit $\mathcal{U}$ l'algèbre enveloppante de N, $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{U}$ engendré par N et $\bar{\mathcal{U}}$ l'algèbre complétée de $\mathcal{U}$ par rapport à la filtration définie par les puissances $\mathcal{J}^n$ de $\mathcal{J}$. On appellera ordre d'un élément de $\mathcal{U}$ le plus grand entier n tel que cet élément appartienne à $\mathcal{J}^n$. Enfin, on peut faire opérer un élément de $\mathcal{U}$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$ comme un opérateur différentiel invariant à droite par le groupe N. Le lemme suivant précise cette action et montre qu'elle se prolonge à $\bar{\mathcal{U}}$:

<u>Lemme 2</u>.- *Le transformé d'un polynôme de degré d par un élément de $\mathcal{U}$ d'ordre n est un polynôme de degré $d-n$ au plus.*
L'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{A}$ se prolonge donc à $\bar{\mathcal{U}}$ avec la même propriété.

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier que les éléments de N, opérant par dérivation, abaissent les degrés d'une unité. Or prenant un élément u de N et un élément A de $\mathcal{A}$ on a :

$$(u\,A)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{A(tu\circ x)-A(x)}{t}$$

ce qui montre, grâce au lemme 1, que $(u\,A)(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur à celui de A.

<u>Lemme 3</u>.- *Soit un élément de N. Alors l'action sur $\mathcal{A}$ de l'élément de $\bar{\mathcal{U}}$: $C = 1+x+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots$ est la translation à gauche par x.*

<u>Preuve</u> : Soit y un élément fixé de N et considérons le polynôme en t

$$Q(t) = A(t\,x\circ y)$$

Ecrivons $Q(1) = Q(0)+Q'(0)+\ldots+\frac{1}{k!}Q^k(0)+\ldots$ et notons que

$$Q'(t) = \lim_{\theta\to 0} \frac{A(\theta x\circ t\, x\circ y)-A(tx\circ y)}{\theta} = (x\, A)(tx\circ y)$$

En remplaçant, dans la formule précédente $Q^k(0)$ par sa valeur $(x^kA)(y)$ on obtient

$$A(x\circ y) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}(x^kA)(y) = (e^xA)(y).$$

Lemme 4.- Supposons que la mesure bornée μ ait des moments d'ordre quelconque. Alors l'action sur $\mathcal{A}$ de l'élément de $\mathcal{U}$ $\bar{\mu} = \int_N e^{-x}d\mu(x)$ n'est autre que la convolution à gauche par μ. En particulier, si la masse de μ est nulle et si l'élément $\int_N x\, d\mu(x)$ appartient à N^2, la convolution à gauche par μ abaisse les degrés de deux unités au moins.

Preuve : On a d'après le lemme 3 :

$$(\mu * A)(y) = \int_N A(-x\circ y)d\mu(x) = \int_N e^{-x}A(y)d\mu(x) = \mu A(y)$$

$$\bar{\mu} = \int d\mu(x) - \int x\, d\mu(x)+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}\int x^k d\mu(x)+\ldots$$

et l'hypothèse $\int d\mu(x) = 0$ $\int x\, d\mu(x) = 0$ entraîne bien que $\bar{\mu}$ est d'ordre 2. D'où la conclusion d'après le lemme 2.

Proposition 2.- Soit N un groupe nilpotent simplement connexe, K un groupe compact d'automorphismes de N, p une probabilité sur le produit semi-direct $N.K$ dont la projection p sur K est apériodique et considérons l'opérateur P de convolution par p sur l'espace homogène $N = G/_K$.
Alors, si un polynôme A vérifie $(P-I)^k$ $A = 0$, pour un certain k, il vérifie aussi $\deg(p_*A-A) \leqslant \deg A-2$.

Avant de démontrer cette proposition, introduisons quelques notations et démontrons deux lemmes. On notera $\tilde{p}$ et $\bar{p}$ respectivement les projections de p sur $K = G/N$ et $N = G/K$ et l'on désignera par $\hat{p}$ la limite vague de la suite de mesures $\hat{p}_n = \frac{1}{n}(\delta_e+\tilde{p}+\ldots+\tilde{p}^n)$.

Lemme : Pour tout polynôme A sur N vérifiant $(P-I)^kA = 0$ pour un certain k, on a :

$$A = \hat{p}*A+B$$

avec $\deg B < \deg A$.

Preuve : Considérons les actions de p, $\tilde{p}$, et $\hat{p}$ sur $\mathcal{A}_d/\mathcal{A}_{d-1}$ quotient de l'espace des polynômes de degré d au plus par celui des polynômes de degré $d-1$ au plus. Puisque N opère trivialement sur cet espace, les opérateurs Q, $\tilde{Q}$ associés à p et $\tilde{p}$ coïncident et comme l'opérateur $\hat{Q}$ associé à $\hat{p}$ vérifie

$$\hat{Q} = \lim_n \frac{1}{n}(I+\tilde{Q}+\ldots+\tilde{Q}^n)$$

On a classiquement :

$$\mathcal{A}_d/\mathcal{A}_{d-1} = \operatorname{Ker}(\tilde{Q}-I) \oplus \operatorname{Im}(\tilde{Q}-I)$$

$$\operatorname{Ker}(\tilde{Q}-I) = \operatorname{Ker}(\hat{Q}-I)$$

$$\operatorname{Im}(\tilde{Q}-I) = \operatorname{Im}(\hat{Q}-I)$$

La relation $(P-I)^k A = 0$ donne alors, en notant $\mathring{A}$ l'image de A supposée de degré d, dans $\mathcal{A}_d/\mathcal{A}_{d-1}$:

$$(\tilde{Q}-I)^k\mathring{A} = 0, \quad (\tilde{Q}-I)\mathring{A} = 0, \quad \hat{Q}\mathring{A} = \mathring{A}.$$

Ceci signifie que $\hat{p}*A-A$ est de degré strictement inférieur à d et achève la démonstration.

Lemme : Si $\tilde{p}$ est apériodique, la mesure sur N $\hat{p}*\bar{p}$ est centrée au sens du groupe nilpotent N.

Preuve : On sait que, puisque $\tilde{p}$ est apériodique, $\hat{p}$ coïncide avec la mesure de Haar normalisée sur K. Soit f une forme linéaire sur N nulle sur N' c'est-à-dire un homomorphisme de N dans le groupe additif des réels et considérons

$$\hat{p}*\bar{p}(f) = \int_N f(x)\,d(\hat{p}*\bar{p})(x) = \iint_{N\times K} f(kx)\,d\hat{p}(k)\,d\bar{p}(x)$$

$$(\hat{p}*\bar{p})(f) = \int_N g(x)\,d\bar{p}(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \int_K f(kx)\,d\hat{p}(k)$$

Comme g est ici K-invariante, elle se prolonge en un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}$ qui est trivial sur K. L'hypothèse p centrée dans G entraîne alors que l'intégrale $\int_N g(x)\,d\bar{p}(x)$ est nulle et donc que $\hat{p}*\bar{p}$ est centrée.

On peut maintenant démontrer la proposition : considérons les décompositions

$$A = \hat{p}*A+B$$

$$(p-\delta_e)*A = \hat{p}*(p-\delta_e)A+C$$

avec deg $B <$ deg A, deg $C <$ deg$(p-\delta_e)*A$.

Notons d'abord que, puisque $\hat{p}*A$ est K-invariant, on a :

$$(p-\delta_e)*A = (\bar{p}-\delta_e)*\hat{p}*A+(p-\delta_e)*B$$

et donc $(p-\delta_e)*A$ est de degré strictement inférieur à celui de A noté d.

Il suffit donc de voir que $\hat{p}*(p-\delta_e)*A$ est de degré $d-2$ au plus :

$$\hat{p}*(p-\delta_e)*A = \hat{p}*(\bar{p}-\delta_e)*\hat{p}*A+\hat{p}*(p-\delta_e)*B$$

$$\hat{p}*(p-\delta_e)*A = (\hat{p}*\bar{p}-\delta_e)*(\hat{p}*A)+\hat{p}*(p-\delta_e)*B$$

Comme $\hat{p}*\bar{p}$ est centrée, le lemme précédent montre que le premier terme est bien de degré $d-2$ au plus. Calculons le second terme modulo $\mathcal{A}_{d-2}$: l'action de $\hat{p}*(\tilde{p}-\delta_e)$ se réduit dans $\mathcal{A}_{d-1}/\mathcal{A}_{d-2}$ à celle de $\hat{p}*(p-\delta_e)$ et est donc nulle d'après la définition de $\hat{p}$.

<u>*Corollaire*</u> *: Considérons la situation de la proposition 2 et supposons de plus $\bar{p}$ strictement apériodique. Alors, pour tout polynôme A sur N, $p^n*A(0)$ est somme d'un polynôme en n de degré au plus égal à $\left[\frac{\deg A}{2}\right]$ et d'une fonction exponentielle polynôme tendant vers zéro à l'infini.*

<u>Preuve</u> : Montrons que les valeurs propres de P différentes de 1 sont strictement inférieures à 1 en module. Soit $\mathcal{A}_d$ l'espace des polynômes de degré d au plus et considérons l'action de P sur $\mathcal{A}_d/\mathcal{A}_{d-1}$: l'action de N, par translation sur cet espace est triviale et P est donc, sur cet espace, l'opérateur associé à $\tilde{p}$. Comme $\tilde{p}$ est strictement apériodique, les valeurs propres de l'opérateur associé ne peuvent être de module 1 sans être égales à 1 [16].

Décomposons l'espace $\mathcal{A}_d$ en somme de sous-espaces caractéristiques : si A appartient à un tel sous-espace, supposé différent de $E_d = \bigcup_{k\geq 1}\mathrm{Ker}(P-I)^k$, $(p^n*A)(0)$ est une exponentielle polynôme dont les termes exponentiels sont les valeurs propres différentes de 1 de P et qui tend donc bien vers zéro à l'infini d'après ce qui précède. Enfin, en restriction à E_d, on a $P = I+U$ où U est nilpotent avec $U^{[d/2+1]} = 0$ d'après la proposition 2. On a donc :

$$P^n = \sum_{k\leq\left[\frac{d}{2}\right]} C_n^k U^k$$

d'où le résultat car C_n^k est un polynôme de degré k.

<u>Preuve du théorème 1'</u> : On peut maintenant démontrer le théorème 1' : on passe d'abord au quotient par le sous-groupe compact maximum distingué de N qui est carac-

téristique dans N.K. Puis supposant N sans sous-groupe compact propre, on considère le groupe de Lie $\hat{N}$ connexe et simplement connexe qui contient N comme sous-groupe uniforme [21] : K opère sur $\hat{N}$ par automorphismes et $N.K$ est donc un sous-groupe uniforme de $\hat{N}.K$; il en découle qu'une jauge principale sur $\hat{N}.K$ fournit une jauge principale sur $N.K$, par restriction ; d'autre part, un homomorphisme λ de $\hat{N}.K$ dans $\mathbb{R}$ se restreint à $N.K$ en un homomorphisme et l'on a donc, puisque p est centrée :

$$\int_{\hat{N}.K}\lambda(g)dp(g) = \int_{N.K}\lambda(g)dp(g) = 0$$

Ce qui permet de supposer N de Lie simplement connexe. Il suffit aussi de démontrer le théorème pour une jauge principale particulière. Supposant l'espace vectoriel N identifié à $\bigoplus_{1\leq k\leq r} N^k/_{N^{k+1}}$ on obtient une jauge principale δ sur N en posant [26]

$$x = \sum_{1\leq k\leq r} x^k \quad (x^k \in N^k/_{N^{k+1}})$$

$$\delta(x) = \sup_{1\leq k\leq r} \|x^k\|^{1/k}$$

où $\|x^k\|$ désigne une norme euclidienne convenable sur $N^k/_{N^{k+1}}$.

Posons aussi $\delta(x) = \sup_{\rho\in K} \delta(\rho x\rho^{-1})$ et observons que δ est encore une jauge sur N qui se prolonge à G en une jauge principale par

$$\mathring{\delta}(x\rho) = \mathring{\delta}(x).$$

Comme l'inégalité $\mathring{\delta}(x) \leq A\,\delta(x)+B$ conduit à :

$$p^n{*}\mathring{\delta} \leq A\ p^n{*}\delta+B$$

il suffit de vérifier que $\dfrac{p^n{*}\delta}{\sqrt{n}}$ est bornée. Or on a, en posant pour abréger $\delta_k(x) = \|x^k\|$:

$$(p^n{*}\delta)(0) \leq \sum_{k\leq r} (p^n{*}\delta_k)(0) \leq \sum_{k\leq r} (p^n{*}\delta_k^{2k})^{1/2k}(0)$$

$$(p^n{*}\delta_k^{2k})(0) \leq \text{Cte } n^k$$

car δ_k^{2k} est un polynôme de degré $2k$ d'où, enfin $(p^n{*}\delta)(0) \leq \text{Cte}\sqrt{n}$

<u>Preuve du théorème 1</u> : On considère la nouvelle probabilité $q = \frac{1}{2}(p+\delta_e)$ qui est centrée comme p et dont la projection $\bar{q}$ sur K est strictement apériodique :

sinon il existerait un sous-groupe distingué H de K tel que la projection de $\bar{q}$ sur K/H soit concentrée en un point distinct de l'élément neutre ; ceci est impossible puisque $q(e) = \frac{1}{2}$.

Or

$$q^n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k p^k$$

et un raisonnement classique montre que $\lim_n \frac{q^n(\delta)}{n} = \lim_k \frac{p^k(\delta)}{k}$.

D'où la conclusion puisque $\lim_n \frac{q^n(\delta)}{n} = 0$.

<u>Preuve du théorème 2</u> : On peut, d'après le théorème 2 de l'introduction, supposer G simplement connexe.

On a montré en A) l'existence d'un groupe de Lie connexe L contenant G, comme sous-groupe uniforme qui est produit semi-direct d'un sous-groupe nilpotent N et d'un groupe compact K et tel que $\overline{GN} = L$. Alors le théorème 1 s'applique à L et p puisque le support de la projection de p sur K engendre K et que la restriction d'un homomorphisme de L dans R à G est encore un homomorphisme : si δ est une jauge principale sur L, on a

$$\lim_n \frac{p^n(\delta)}{n} = 0$$

On en déduit le résultat voulu puisque la restriction de δ à G est une jauge principale.

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce paragraphe.

<u>*Théorème 3*</u> : *Soit G un groupe de Lie connexe et moyennable, p une probabilité apériodique sur G admettant des moments de tous ordres et centrée, V un voisinage compact de e dans G, alors on a*

$$\lim_n \frac{\delta_V(g_1 \cdots g_n)}{n} = 0 \quad p^N\text{-presque partout sur } G^N.$$

<u>Preuve</u> : Considérons le sous-groupe instable B de G et un sous-groupe A de type R qui opère de manière dilatante sur N et vérifie $G = BA$, l'existence de A étant démontrée dans la première partie.

Considérons le produit semi-direct $\tilde{G} = B.A$ et l'application canonique de $\tilde{G}$ sur G qui à (b,a) associe le produit $b.a$ dans G. Soit q une probabilité sur G ayant une infinité de moments, centrée et d'image p.

Si α et β désignent respectivement une jauge principale sur A et une jauge A-principale sur B, on a puisque q est centrée, presque partout :

$$\lim_n \frac{\alpha[a(g_1\ldots g_n)]}{n} = 0$$

$$\lim_n \frac{\operatorname{Log}[1+\beta[b(g_1\ldots g_n)]]}{n} = 0$$

d'après le théorème 2 et la proposition 1, en posant pour $g \in \widetilde{G}$ $g = b(g).a(g)$. Comme $\alpha[(g)]+\operatorname{Log}[1+\beta[b(g)]]$ est équivalente à une jauge principale sur $\widetilde{G}$, on a bien, si $\widetilde{V}$ est un voisinage compact de e engendrant $\widetilde{L}$ et d'image V dans G

$$\lim_n \frac{\delta_{\widetilde{V}}(g_1\ldots g_n)}{n} = 0$$

et puisque $\delta_V(ba) \leqslant \delta_{\widetilde{V}}(b,a)$ si $b \in B$, $a \in A$ on a bien en prenant les images dans G, le résultat annoncé.

C - Le cas des groupes non moyennables

On étudie dans ce paragraphe une notion de croissance relative à la mesure de probabilité p et on déduit des conséquences relatives au comportement asymptotique du produit $s_n(\omega) = x_1\ldots x_n$, dans le cas d'un groupe non moyennable.

On relie aussi l'étude de la moyennabilité des espaces homogènes et le théorème de densité de Borel.

Soit E un G-espace topologique localement compact séparable muni d'une mesure de Radon invariante qui ne s'annule pas sur les ouverts ; la mesure d'un ensemble A sera notée par $|A|$ dans la suite. Supposons donnée sur $E\times E$ une fonction continue δ vérifiant l'inégalité triangulaire : $\forall x,y,z \in E$ $\delta(x,z) \leqslant \delta(x,y) + \delta(y,z)$ et $\forall g \in G$ $\sup_{x\in E}\delta(gx,x) < +\infty$. On peut alors poser la

Définition 1.- On appelle croissance de E relative à δ le nombre positif ou nul, éventuellement infini $c(\delta)$ défini par

$$c(\delta) = \overline{\lim_n}\ \frac{1}{n} \operatorname{Log}|B_n^*|$$

où $B_n^* = \{y \in E\ ;\ \delta(x,y) \leqslant n\}$ $n \geqslant 0$.
L'inégalité triangulaire vérifiée par δ assure que ce nombre est indépendant de x.

Exemple : Si E est un espace homogène du groupe G supposé engendré par le voisinage compact V de l'identité, on peut définir une fonction δ_V^E du type précédent en posant : $\delta_V^E(x,y) = \operatorname{Inf}\{n \geqslant 0\ ;\ y \in V^n x\}$.

Si E possède une mesure G-invariante, la croissance de E relative à δ_V^E est un nombre fini c_V dont la nullité est indépendante de V, comme dans le cas des groupes [17]. On dira aussi que E est à croissance exponentielle ou non, suivant que $c_V > 0$ ou $c_V = 0$.

Définition 2.- Pour une probabilité p sur les boréliens de G, on appellera croissance de p dans E, la borne inférieure des réels $\alpha > 0$ tels que, pour toute fonction ϕ continue à support compact, il existe une suite croissante exhaustive de boréliens A_n telle que

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log}|A_n| \leqslant \alpha \quad et \quad \lim_n \int_{A_n} p^n * \phi(x)\,dx = \int_E \phi(x)\,dx.$$

Afin de relier les deux croissances précédentes, posons $\bar{\delta}(x) = \operatorname{Sup}_x(x,gx)$ $\underline{\delta}(g) = \operatorname{Sup}_x \delta(gx,x) = \bar{\delta}(g^{-1})$ et supposons que p vérifie la condition de moment $\int \operatorname{Sup}_x |\delta(g),\underline{\delta}(g)|\,dp(g) < +\infty$.

Considérons alors le produit partiel gauche $t_n(\omega) = x_n \dots x_1$ où $\omega = (x_1,\dots,x_n,\dots) \in \Omega = G^N$, et la suite de fonctions $\bar{\delta}[t_n(\omega)]$ qui, à cause de la sous-additivité de $\bar{\delta}$ et de la condition de moment, satisfait les hypothèses du théorème ergodique sous-additif [14] : on a, presque sûrement :

$$\lim_n \frac{1}{n} \bar{\delta}(x_n \dots x_1) = \lim_n \frac{p^n(\bar{\delta})}{n} = \gamma(\delta).$$

Proposition 1.- Avec les notations et hypothèses précédentes, la croissance c de p dans E vérifie l'inégalité $c \leqslant \gamma^+(\delta).c(\delta)$ où $\gamma^+(\delta) = \operatorname{Sup}[\gamma(\delta),0]$.

Soit $\alpha > \gamma^+(\delta)$ et considérons la suite de boréliens

$$A_n = B_{n\alpha}^y = \{z \; ; \; \delta(y,z) \leqslant n\alpha\}$$

Alors on a par définition de $c(\delta)$: $\overline{\lim} \frac{\operatorname{Log}|A_n|}{n} \leqslant \alpha c(\delta)$ et de plus :

$$\int_{A_n} (p^n * \phi)(x)\,dx = \int_{A_n} dx \int_\Omega \phi(t_n^{-1} x)\,dp^N(\omega)$$

$$\int_{A_n} p^n * \phi(x)\,dx = \int_\Omega dp^N(\omega) \int_E 1_{A_n}(t_n y)\phi(y)\,dy$$

Or, par définition de $\gamma(\delta)$, on a presque sûrement, pour y fixé :

$$\lim_n 1_{A_n}(t_n y) = 1$$

Comme ϕ est à support compact, on en déduit :

$$\lim_n \int_{A_n} p^n * \phi(x)\,dx = \int_E \phi(x)\,dx$$

Corollaire : Si E est un espace homogène de G à croissance non exponentielle la croissance dans E d'une probabilité sur G est nulle.

Si $E = G$ et si p admet une densité continue à support compact V la croissance de p est reliée à l'entropie h de p au sens de [2] qui est définie par

$$h = \overline{\lim}\, h_n = \overline{\lim_n} - \frac{1}{n} \int_G p^n(g) \operatorname{Log} p^n(g)\,dg$$

On a en particulier la

Proposition 2.- Avec les notations et hypothèses précédentes on a $h \leqslant c$.

Preuve : Soit A_n une suite croissante de compacts et posons $A'_n = V^n - A_n$.
Alors :

$$nh_n = \int_{A_n} \operatorname{Log} \frac{1}{p^n(g)}\, dp^n(g) + \int_{A'_n} \operatorname{Log} \frac{1}{p^n(g)}\, dp^n(g)$$

$$nh_n \leqslant p^n(A_n) \operatorname{Log} \frac{|A_n|}{p^n(A_n)} + p^n(A'_n) \operatorname{Log} \frac{|A'_n|}{p^n(A'_n)}$$

on en déduit

$$nh_n \leqslant \operatorname{Log}|A_n| + [1 - p^n(A_n)] \operatorname{Log}|V^n| - \operatorname{Log} p^n(A_n) - p^n(A'_n) \operatorname{Log} p_n(A'_n)$$

Si $|A_n| \leqslant \alpha^n$ et $\lim_n p^n(A_n) = 1$ on a $\lim p^n(A'_n) \operatorname{Log} p_n(A'_n) = 0$

et $\overline{\lim_n}\, h_n \leqslant \overline{\lim}\, \frac{\log|A_n|}{n} \leqslant \alpha$.

Donc $h \leqslant c$.

Corollaire : Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et p une probabilité centrée ayant une densité continue à support compact sur G. Alors elle est d'entropie nulle et, en particulier n'admet pas d'autres fonctions harmoniques bornées que les constantes.

Preuve : On a vu en B que les hypothèses faites sur p impliquent que, si V est un voisinage compact de l'identité, $\gamma(\delta_V) = 0$. Or d'après les deux propositions précédentes $h \leqslant c \leqslant c(\delta_V)\gamma^+(\delta_V)$. Comme $c(\delta_V) < +\infty$, on a bien $c = h = 0$.

La dernière assertion découle de la nullité de h, [2]. Elle est également prouvée en [3], par d'autres techniques.

La croissance de p dans E est reliée au rayon spectral σ de l'opérateur de convolution associé à p dans $L^2(E)$ par la

Proposition 3.- Avec les notations précédentes on a l'inégalité

$$c \geqslant -2 \operatorname{Log} \sigma$$

Preuve : D'après l'inégalité de Schwarz, on a, si ϕ est une fonction continue à support compact et A_n une suite croissante de boréliens

$$\left|\int_{A_n} p^n * \phi(x)\,dx\right| < \|p^n * \phi\|_2 |A_n|^{1/2} \quad \text{et si}$$

$$\lim_n \int_{A_n} p^n * \phi(x)\,dx = \int_E \phi(x)\,dx$$

$$\left|\int_E \phi(x)\,dx\right| \leqslant (\sigma+\varepsilon)^n \|\phi\|_2 |A_n|^{1/2}$$

pour n assez grand et $\varepsilon > 0$ arbitraire.

En particulier, si $\phi \geqslant 0$ on obtient :

$$2(\sigma+\varepsilon) + \overline{\lim_n} |A_n|^{1/n} \geqslant 1$$

d'où $$c \geqslant -2 \operatorname{Log} \sigma$$

Définition [11] : *On dira que le G espace E est moyennable s'il existe une forme linéaire G-invariante positive m sur $CB(E)$ telle que $m(1) = 1$.*

Il découle de [4] et [10] que si la probabilité apériodique p admet sur $L^2(E)$ un rayon spectral égal à un, E est moyennable. On en déduit le

Corollaire : Supposons p apériodique et E non moyennable. Alors la croissance de p dans E est strictement positive. En particulier si δ sur $E \times E$ est à croissance finie et si $\bar{\delta}(g) = \operatorname{Sup}_{x \in E} \delta(x, gx)$, on a presque sûrement $\lim_n \frac{1}{n} \bar{\delta}(g_n \cdots g_1) = \gamma(\delta) > 0$. On suppose ici que $\int_G \operatorname{Sup}|\bar{\delta}(g), \bar{\delta}(g^{-1})|\,dp(g) < +\infty$.

Preuve : Puisque $r < 1$, on a

$$c \geqslant -2 \operatorname{Log} \sigma > 0$$

De plus : $\quad 0 < c \leqslant \gamma^{+}(\delta).c(\delta)$

D'où, puisque $c(\delta) < +\infty$: $\gamma^{+}(\delta) > 0$

$$\gamma(\delta) > 0$$

En particulier, on a le

Corollaire : Soit E *un espace homogène de* G *non moyennable possèdant une mesure invariante,* p *une probabilité apériodique sur* $G = \bigcup_{n\geqslant 0} V^{n}$ *et*
$\bar{\delta}_{V}^{E}(g) = \operatorname{Inf}\{n \geqslant 0 \ ; \ \forall x \in E \quad gx \in V^{n}x\}$
Alors on a presque sûrement

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \bar{\delta}_{V}^{E}(g_{n}\ldots g_{1}) = \gamma_{V}^{E} > 0$$

En particulier, d'après le corollaire de la proposition 1, si E est à croissance non exponentielle il est moyennable. On peut noter aussi que si $E = G$, ce corollaire montre que la circonstance $\gamma(\delta_{V}) = 0$ ne peut se présenter que si G est moyennable ; une autre condition nécessaire, évidente, est que p soit centrée. Ce corollaire s'applique en particulier si G est semi-simple, sans facteurs compacts ou du type $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$, aux espaces homogènes de mesure invariante infinie car G possède alors la propriété de Kajdan [18] et les espaces homogènes moyennables de G sont de mesure invariante finie. Mais si G est de la forme $SO(n,1)$ il possède des sous-groupes discrets Γ tels que G/Γ soit moyennable et ne soit pas de mesure finie [26]. Le premier corollaire permet aussi de retrouver en les améliorant, certains résultats de H. Furstenberg [19] qui concernent le cas où $E = R^{n}-\{0\}$ et $G \subset Sl(n,R)$.

On va d'abord étudier la moyennabilité d'un tel G-espace en reprenant un argument dû à H. Furstenberg [18].

Proposition 4.- Soit V *un espace vectoriel réel de dimension finie et* G *un groupe contenu dans le groupe linéaire de* V. *Alors le G-espace* $V-\{0\}$ *est moyennable si et seulement si* G *possède un sous-groupe d'indice fini* G' *et* V *un sous-espace* V' G'*-invariant tel que l'image de* G' *dans le groupe projectif de* V' *soit relativement compacte.*

Cette proposition découlera de deux lemmes. Disons qu'une mesure de probabilité sur l'espace projectif est propre si elle n'est pas portée par une réunion finie de sous-espaces projectifs propres.

Lemme 1 : Soit ν une mesure de probabilité propre sur l'espace projectif qui est G-invariante. Alors l'image de G dans le groupe projectif est relativement compacte.

Ce lemme est en fait prouvé en [12] et [14] (cf aussi [17]).

Lemme 2 : Le G-espace $V-\{0\}$ est moyennable si et seulement si G laisse invariant une mesure de probabilité sur l'espace projectif $P(V)$ associé à V.

Preuve : Soit π l'application canonique de $V-\{0\}$ sur $P(V)$. Si alors m est une moyenne G-invariante sur $V-\{0\}$ on peut définir une probabilité sur $P(V)$ G-invariante par la formule

$$\pi(m)[\varphi] = m[\varphi\circ\pi]$$

L'invariance de m implique celle de $\pi(m)$. Inversement, soit ν sur $P(V)$ qui est G-invariante et considérons la plus petite réunion de sous-espaces projectifs portant ν ainsi que sous-groupe $G' \subset G$ qui fixe chacun de ces sous-espaces : les restrictions de ν à ces sous-espaces sont irréductibles et donc d'après le lemme 1, les images de G' dans les groupes projectifs correspondants sont relativement compactes. L'image de G' dans le groupe linéaire de la somme W des sous-espaces vectoriels associés est donc moyennable. Il en est de même de l'image de G puisque G' est d'indice fini dans G et $W-\{0\}$ possède donc une moyenne G-invariante.

Preuve de la proposition 4 : Si $V-\{0\}$ est moyennable, on applique la première partie du lemme 2 et, comme à la fin de la démonstration de ce lemme, on considère la plus petite réunion de sous-espaces projectifs qui porte la mesure G-invariante. Par restriction à l'un de ces sous-espaces, on obtient la conclusion voulue.

Réciproquement, le sous-espace V' et le sous-groupe G' de la proposition sont tels que $V'-\{0\}$ possède une moyenne m' qui est G'-invariante. La moyenne m définie par

$$[G/_{G'}]m = \sum_{\bar{g}\in G/_{G'}} gm' \qquad \text{est alors G-invariante.}$$

De cette proposition et du premier corollaire de la proposition 3 découle le résultat suivant énoncé sous une forme légèrement différente en [13] :

Corollaire : *Soit G un sous-groupe de $Sl(n,R)$ ne laissant pas de mesure invariante sur l'espace projectif P^{n-1}. Soit p une mesure de probabilité apériodique sur G telle que l'intégrale*

$$\int_G \mathrm{Sup}(\mathrm{Log}\|g\|, \mathrm{Log}\|g^{-1}\|)\,dp(g)$$ *soit finie. Alors on a, presque sûrement*

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathrm{Log}\| g_n \cdots g_1 \| = \gamma > 0$$

où γ est une constante.

Preuve : La condition imposée à G implique, d'après la proposition précédente, la non-moyennabilité de $R^n - \{0\}$ considéré comme G-espace.

Prenant $\bar{\delta}(x,y) = \mathrm{Log} \frac{\|y\|}{\|x\|}$, on a bien

$$\delta(g) = \sup_{x \in R^n} \delta(x,gx) = \|g\| < +\infty$$ et la croissance $\gamma(\delta)$ de δ vaut

$$\gamma(\delta) = \overline{\lim_k} \frac{1}{k} \mathrm{Log}(\|x\| e^k)^n = n < +\infty.$$

D'où l'existence et la positivité de la limite cherchée :

Avant d'appliquer la proposition 4 à une propriété de densité analogue au théorème classique de Borel, énoncons la proposition très simple, suivante :

Proposition 5.- Soit G un groupe localement compact, ρ une représentation irréductible de G dans un espace vectoriel réel V de dimension finie, H un sous-groupe fermé de G tel que G/H soit moyennable. Alors si $\rho(G)$ ne laisse pas de mesure invariante sur les espaces projectifs associés aux puissances extérieures de V, la restriction de ρ à H est irréductible.

Preuve : Puisque G/H est moyennable, $\rho(H)$ ne peut laisser de mesure invariante sur les espaces projectifs considérés car $\rho(G)$ possèderait alors la même propriété. En particulier, si $\rho(H)$ laissait un sous-espace de V invariant, supposé de dimension $k < \dim V$, $\rho(H)$ laisserait un point invariant, donc une mesure de Dirac invariante, sur l'espace projectif de $\Lambda^k V$ ce qui est exclu d'après l'observation précédente.

La proposition 4 montre que la condition portant sur $\rho(G)$ qui figure dans la proposition précédente est vérifiée dès que G n'admet que des représentations unitaires de dimension finie triviales. Disons alors, en étendant la définition de [14], que (G,H) est une paire de Borel si G vérifie la condition précédente et si G/H est moyennable. Les résultats sur les paires de Borel énoncés en [14] s'étendent alors à la situation envisagée ici. En particulier on a le théorème de "densité".

Théorème 1.- Soit (G,H) une paire de Borel, ρ une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel de dimension finie V. Alors tout sous-espace de V $\rho(H)$-invariant est aussi $\rho(G)$-invariant.

Preuve : Soit $W \subset V$ avec $\rho(H) \subset W$. On peut supposer, en utilisant une puissance extérieure de V que $\dim W = 1$. Dans ce cas, on raisonne par récurrence sur $\dim V$. Puisque H fixe le point w associé à W de l'espace projectif, et que G/H est moyennable, G laisse invariante une mesure de probabilité r sur cet espace projectif. D'après la condition imposée à G et le lemme 1 utilisé dans la proposition 4, G opère trivialement sur la plus petite réunion de sous-espaces projectifs portant v. Cette même condition imposée à G implique aussi que l'action de G dans les sous-espaces vectoriels correspondants est triviale. Si W est contenu dans la somme U de ces sous-espaces, on a donc le résultat voulu. Sinon, on applique l'hypothèse de récurrence à l'action de G dans V/U : la droite W est invariante par $\rho(G)$ modulo U. On obtient donc un homomorphisme de G dans le groupe nilpotent des automorphismes de $W+U$ qui laisse U les vecteurs de U et $W+U/U$ invariants. La condition imposée à G implique la trivialité de cet homomorphisme et on obtient donc la conclusion voulue. On a donc le

Corollaire : Soit (G,H) une paire de Borel, G étant un groupe de Lie connexe. Si L est un sous-groupe fermé de G possédant un nombre fini de composantes connexes et contenant H, alors $L = G$. En particulier, si G est algébrique, H est algébriquement dense dans G.

Preuve : L'algèbre de Lie de L est invariante par les automorphismes définis par les éléments de H ; c'est donc un idéal, d'après le théorème et la composante neutre L_o de L est distinguée dans G. Enfin G/L est moyennable comme image équivariante de G/H ; il en est de même de G/L_o qui est un revêtement fini de G/L. Comme G/L_o est un groupe de Lie connexe moyennable, $L_o = G$, d'après la condition imposée à G.

Remarques : On voit aisément que la classe des groupes de Lie connexes dont les représentations unitaires de dimension finie sont triviales coïncide avec celle des groupes de Lie sans partie semi-simple compacte et qui sont égaux à leur groupe dérivé.

- Si l'algèbre de Lie de L est simple et non compacte, si ${}^{G}/_{H}$ est moyennable, H est discret d'après le corollaire. Par exemple, l'espace homogène $\frac{Sl(2,\mathbb{C})}{Sl(2,\mathbb{R})}$ considéré en [11] est non moyennable ; d'ailleurs si l'on considère la représentation naturelle de $Sl(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^2$ identifié à $\mathbb{R}^4$ et l'action de $Sl(2,\mathbb{C})$ sur la grasmannienne des 2-plans de $\mathbb{R}^4$, il ne peut y avoir sur cette grasmannienne de mesure invariante pour $Sl(2,\mathbb{C})$ puisque $Sl(2,\mathbb{R})$ laisse invariant le point correspondant à $\mathbb{R}^2$.

- Si ${}^{G}/_{H}$ possède une mesure invariante et si p est une mesure de probabilité apériodique sur G telle que, pour les fonctions continues à support compact sur ${}^{G}/_{H}$ on ait $\sum_{n=o}^{\infty} p^n * \phi(x) = \infty$ pour tout x de ${}^{G}/_{H}$, l'espace homogène ${}^{G}/_{H}$ est moyennable d'après [4] et [10]. D'après [20], si $G = Sl(2,\mathbb{R})$ et si H est le deuxième dérivé de $Sl(2,\mathbb{Z})$, ${}^{G}/_{H}$ n'est pas de mesure invariante finie et, la situation envisagée ici est réalisée.

D - Etude d'un rayon spectral

On va maintenant étudier la quantité $\overline{\lim_n} |p^n(V)|^{1/n}$

Définition 1.- Si p est une probabilité sur G on appellera rayon spectral de p le nombre positif ρ inverse du rayon de convergence au sens vague de la série de mesures

$$\sum_{n\geq 0} z^n p^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Définition 2.- On dira que p est irréductible si le support de la mesure potentiel de p, $\sum_{n\geq 0} p^n$ est égal à G tout entier.

On note σ la norme spectrale de l'opérateur de convolution par p sur l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Haar à gauche sur G. Pour une fonction borélienne positive f sur G, on note $\hat{p}(f)$ le nombre $\lim_n \sup[p^n(f)]^{1/n}$. On note S l'ensemble des réels k tels qu'il existe une mesure de Radon positive μ vérifiant la relation

$$p*\mu \leqslant k\mu$$

Enfin on désigne par Ω l'ensemble des fonctions boréliennes positives ω sur G vérifiant la relation

$$\forall x,y \in G \quad \omega(xy) \geqslant \omega(x)\omega(y).$$

On a alors le théorème

<u>*Théorème 1*</u>*.- Soit* φ *une fonction continue à support compact sur* G*. On a alors :*

$$\hat{p}(\varphi) = \rho = \operatorname{Inf} S = \operatorname{Inf}_{\omega\in\Omega} \hat{p}(\omega) \leqslant \sigma$$

si p *est irréductible.*

La démonstration de ce théorème résultera des trois lemmes.

<u>*Lemme 1*</u>*.- Soient* φ *et* ψ *deux fonctions continues à support compact sur* G*. Alors on a la relation* $\hat{p}(\varphi) = \hat{p}(\psi)$.

<u>Preuve</u> : L'hypothèse d'irréductibilité entraîne que le support de la probabilité $q = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} p^n$ est égal à G. Puisque ψ est continue à support compact et que $\check{q}*\varphi$ est continue et ne s'annulle pas on a $\psi \leqslant C\, \check{q}*\varphi$ où C est une constante.

Or $p^k[\check{q}*\varphi] = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} p^{n+k}(\varphi)$ avec pour k assez grand :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p^{n+k}(\varphi) \leqslant [\hat{p}(\varphi)+\varepsilon]^{n+k}$$

où ε est positif arbitrairement petit. D'où, puisque $\hat{p}(\varphi) \leqslant 1$:

$$p^k(\psi) \leqslant \mathrm{Cte}[\hat{p}(\varphi)+\varepsilon]^k$$

Soit $\hat{p}(\psi) \leqslant \hat{p}(\varphi)$. Le lemme en résulte en échangeant les rôles de φ et ψ.

<u>*Lemme 2*</u>*.- Soient* φ *et* ψ *deux fonctions positives continue à supports compacts sur* G*,* μ *une mesure de Radon positive vérifiant une relation* $p*\mu \leqslant k\mu$ $(k \geqslant 0)$*. Alors le rapport* $\frac{\mu(\varphi^x)}{\mu(\psi^x)}$ *est borné.*

<u>Preuve</u> : On note que $\mu(\varphi^x) = (\check{\mu}*\varphi)(x)$ $\mu(\psi^x) = \check{\mu}*\psi(x)$ et que, comme dans le lemme 1 : $\psi \leqslant C\, \check{q}*\varphi$ on en déduit :

$$\mu*\psi \leqslant C\check{\mu}*\check{q}*\varphi \leqslant C\, k\check{\mu}*\varphi$$

D'où la conclusion.

Note : La notation φ^x désigne la translatée à droite de φ c'est-à-dire la fonction définie par

$$\varphi^x(y) = \varphi(yx)$$

Lemme 3.- Reprenons les notations du lemme précédent. Il existe une fonction borélienne positive π sur G vérifiant

$$\pi(xy) \leqslant \pi(x)\pi(y)$$

et telle que : $\forall x,y \in G$ $\quad \mu(\varphi^{yx}) \leqslant \pi(x)\mu(\varphi^y)$.

Preuve : On définit π par $\pi(x) = \operatorname*{Sup}_{y\in G} \dfrac{\mu(\varphi^{yx})}{\mu(\varphi^y)}$. Le nombre $\pi(x)$ est fini car, d'après le lemme précédent où l'on pose $\psi = \varphi^x$, on sait que $\dfrac{\mu(\varphi^{yx})}{\mu(\varphi^y)} = \dfrac{\mu(\psi^y)}{\mu(\varphi^y)}$ est borné. De plus, par définition de π on a

$$\pi(xx') \leqslant \pi(x)\pi(x').$$

Comme $\dfrac{\mu(\varphi^{yx})}{\mu(\varphi^y)}$ dépend continuement de y lorsque x est fixé, $\pi(x)$ est aussi la borne supérieure d'une sous-famille de ces fonctions indexée par les points d'une partie dénombrable dense et donc $\pi(x)$ est borélienne. On peut remarquer que $\pi(x)$ est aussi, par construction, semi-continue inférieurement et par conséquent localement bornée inférieurement.

Note : Une fonction π vérifiant $\pi(xy) \leqslant \pi(x)\pi(y)$ sera appelée dans la suite fonction-poids.

Preuve du théorème : Par définition ρ est la borne inférieure des nombres $\hat{p}(\varphi)$ lorsque φ décrit les fonctions continues positives et à support compact. D'où, d'après le lemme 1 $\rho = \hat{p}(\varphi)$. L'inégalité $p(\varphi) \leqslant \sigma$ est claire car

$$p^n(\psi * \check{\psi}) = \langle p^n * \psi, \psi\rangle \leqslant [\sigma+\varepsilon]^n \|\psi\|_2^2$$

où ε est arbitrairement petit.

Pour montrer la relation $\rho = \operatorname{Inf} S$, posons

$$k = \rho+\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

et notons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{k^n} p^n$ est alors convergente et définit une mesure μ vérifiant

$$p*\mu = k(\mu-\delta e) \leqslant k\mu.$$

Considérons d'autre part une fonction φ continue à support compact et la relation

$$p*\mu*\varphi \leqslant k\mu*\varphi \quad (k \in S).$$

Comme $\mu*\varphi$ est continue [et ne s'annule pas], elle domine une fonction continue à support compact ψ et l'on a

$$p^n(\check{\psi}) = p^n*\psi(e) \leqslant p^n*\mu*\varphi(e) \leqslant k^n\mu*\varphi(e).$$

D'où $\limsup_n p^n(\check{\psi}) \leqslant k$, et finalement $\rho = \operatorname{Inf} S$.

Montrons maintenant que pour tout ω de Ω et toute fonction continue à support compact on a $\hat{p}(\omega) \geqslant p(\varphi)$. La fonction $-\operatorname{Log}\omega$ est borélienne et sous-additive et d'après la première partie elle est donc localement bornée. Il en résulte que ω domine un multiple de φ. D'où :

$$p^n(\omega) \geqslant \text{Cte } p^n(\varphi)$$

$$\hat{p}(\omega) \geqslant \hat{p}(\varphi).$$

Montrons enfin que, pour k supérieur à ρ il existe une fonction ω de Ω vérifiant $\hat{p}(\omega) \leqslant k$. Considérons la mesure $\mu = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{k^n} p^n$ qui vérifie :

$$p*\mu = \mu*p \leqslant k\mu.$$

Si φ est continue positive et à support compact, le lemme 3 fournit une fonction π vérifiant

$$\pi(xy) \leqslant \pi(x)\pi(y)$$

et $$\check{\mu}*\varphi(x) = \mu(\varphi^x) \geqslant \frac{\mu(\varphi)}{\pi(x^{-1})} = \mu(\varphi)\omega(x)$$

avec $$\omega(x)\pi(x^{-1}) = 1.$$

On en déduit

$$\check{p}^n*\omega \leqslant \text{Cte } \check{p}^n*\check{\mu}*\varphi \leqslant \text{Cte } k^n\check{\mu}*\varphi$$

$$p^n(\omega) \leqslant \text{Cte } k^n, \quad \hat{p}(\omega) \leqslant k.$$

<u>Remarques</u> :

a) Les bornes inférieures $\operatorname{Inf} S$ et $\operatorname{Inf}_{\omega\in\Omega} \hat{p}(\omega)$ sont atteintes. Il suffit pour le voir de montrer l'existence d'une mesure μ vérifiant :

$$p*\mu = \mu*p \leq \rho\mu$$

Posons, pour abréger $r = \frac{1}{\rho}$ et notons que la conclusion est immédiate lorsque la série $\sum_{n\geq 0} r^n p^n$ converge. Sinon, construisons une mesure μ vérifiant $p*\mu = \mu*p = \rho\mu$. On sait que, d'après l'irréductibilité de p, le cône des mesures μ vérifiant

$$p*\mu \leq k\mu \quad \text{et} \quad \mu*p \leq k\mu$$

admet une base compacte définie par $\mu(\varphi) = 1$ où φ est continue positive et à support compact [8]. Comme ces cônes sont non nuls pour $k > \rho$, leur intersection est aussi non nulle et contient donc une mesure μ non nulle vérifiant

$$p*\mu \leq \rho\mu \qquad \mu*p \leq \rho\mu$$

Comme de plus la série $\sum_{n\geq 0} r^n p^n$ ne converge pas, toute fonction positive vérifiant $p*f \leq \rho\mu$ vérifie aussi $p*f = \rho\mu$. Il en résulte que $p*\mu = \mu*p = \rho\mu$.

b) Le cas où la série $\sum_{n\geq 0} r^n p^n$ ne converge pas est en fait très particulier comme le montre le raisonnement suivant : les mesures μ vérifiant $p*\mu = \rho\mu$ sont alors les multiples de l'une d'entre elles et en particulier, pour tout g de G, $\mu*\delta g$ est colinéaire à μ. Ceci implique que μ est de la forme $\text{Cte}\ \lambda(g)dg$ où λ est une exponentielle sur G. En relativisant par rapport à λ on obtient alors une probabilité récurrente sur G. En particulier G est moyennable et unimodulaire [6].

c) On a donc pour une probabilité irréductible $\rho = \overline{\lim} |p^n(V)|^{1/n}$. On peut montrer que la limite de la suite $[p^n(V)]^{1/n}$ existe lorsque l'élément identité appartient au support de p. Ceci découle de la relation $\alpha p^{m+n+k}(V) \geq p^m(V)p^n(V)$ où k et α sont des constantes positives et m et n des entiers quelconques. Pour établir cette relation, on note d'abord que $p^{m+n}(V^2) \geq p^m(V)p^n(V)$ puis on observe que, l'identité de G appartenant au support de p on a la relation

$$1_V \leq \beta \check{p}*1_V$$

donc $$\check{p}^r*1_V \leq \beta\check{p}^{r+1}*1_V$$

Comme $\sum_{r\geqslant 0} \frac{1}{2^r} \overset{\vee}{p}{}^{r} * 1_V$ est positive sur G, on a donc, pour certains k et α

$$1_{V^2} \leqslant \alpha \overset{\vee}{p}{}^{k} * 1_V$$

$$p^{m+n}(V^2) \leqslant \alpha p^{m+n+k}(V)$$

D'où la relation voulue et l'existence de la limite cherchée par un raisonnement classique [ ].

Ce théorème admet le corollaire suivant :

Corollaire : *Soit p une probabilité irréductible sur le groupe localement compact à génération compacte G, δ une jauge principale sur G. Si p admet un moment d'ordre un et si ρ est strictement inférieur à un, on a :*

$$\lim_n \frac{p^n(\delta)}{n} > 0$$

Preuve : On considère un élément ω de Ω vérifiant $\hat{p}(\omega) < 1$ et on pose $\delta' = -\mathrm{Log}\ \omega$.

Alors $p^n(\delta') = -p^n(\mathrm{Log}\ \omega) \geqslant -\mathrm{Log}\ \hat{p}(\omega)$ et

$$\frac{p^n(\delta')}{n} \geqslant -\mathrm{Log}|p^n(\omega)|^{1/n} \geqslant -\mathrm{Log}\ \hat{p}(\omega) > 0$$

Inégalité à fortiori valable pour δ qui est principale.

Remarque : Si G est un groupe de Lie connexe moyennable et si p est centrée on a, d'après le paragraphe B

$$\lim_n \frac{p^n(\delta)}{n} = 0 \quad \text{et donc}$$

$$\rho = \overline{\lim_n}[p^n(V)]^{1/n} = 1.$$

Cette condition est donc automatiquement réalisée pour les groupes de déplacements. En fait, ce calcul de ρ peut s'étendre à une classe de groupe de Lie non nécessairement connexes.

On suppose maintenant G moyennable et à génération compacte. On dira que G est régulier s'il possède un sous-groupe résoluble distingué fermé R tel que son groupe dérivé R' soit nilpotent et à génération compacte et que de plus G/R soit compact. Pour une probabilité p sur G et une exponentielle λ sur G on posera $\hat{p}(\lambda) = \int \lambda(g)dp(g)$. Cette fonction est définie sur une partie convexe de l'espace vectoriel réel $G^* = (G/_{G'})^*$ des exponentielles sur G et est logarithmiquement convexe. Cette fonction s'identifie à la transformée de Laplace de l'image de p dans le quotient de $G/_{G'}$, par son sous-groupe compact maximum.

L'intérêt de cette fonction est justifié par le

Théorème 2.- Soit p une probabilité irréductible sur G. Alors le rayon spectral de p est égale à la borne inférieure de la fonction $\hat{p}(\lambda)$.

Avant de prouver ce théorème on va préciser quelques notations : soit T un sous-groupe distingué à génération compacte de G et désignons par $\hat{T}$ le sous-espace de T^* formé des exponentielles dont l'orbite sous G opérant par automorphismes intérieurs est relativement compacte. Considérons le cône C_λ^k des mesures de Radon positives vérifiant les relations $p*\mu \leqslant k\mu$, $\mu*\delta_t = \lambda(t)\mu$ pour une exponentielle λ sur T. Observons d'abord que le cône des mesures r vérifiant $p*r \leqslant kr$ étant à base compacte et stable par translation à droite l'orbite d'une exponentielle λ du type précédent est nécessairement relativement compacte. On désigne alors par $\hat{p}_T(\lambda)$ la borne inférieure des k tels que C_λ^k ne soit pas nul et on observe que, par compacité, cette borne est atteinte. On a alors le lemme

Lemme : La fonction $\mathrm{Log}\ \hat{p}_T(\lambda)$ est convexe et atteint son minimum sur le sous-espace de $\hat{T}$ formé des éléments G-invariants.

Preuve : Du fait que le cône C_λ^k ne contient pas nécessairement de fonctions, nous sommes conduits à introduire des cônes plus généraux associés à des fonctions poids θ sur T : on note C_θ^k le cône fermé en topologie vague des mesures μ positives qui vérifient $p*\mu \leqslant k\mu$, $\mu*\delta_t \leqslant \theta(t)\mu$. Ces cônes sont à base compacte comme le cône des μ vérifiant $p*\mu \leqslant k\mu$ dans lequel ils sont contenus. Il en résulte que si θ_n est une suite de fonctions-poids convergeant vers l'exponentielle λ en décroissant C_λ^k, qui est l'intersection des $C_{\theta_n}^k$, n'est pas réduit à zéro dès que les $C_{\theta_n}^k$ ne sont pas nuls. Posons alors pour abréger

$$\hat{p}_T(\lambda) = k \qquad \hat{p}_T(\lambda') = k'$$

et considérons μ et μ' éléments de C_λ^k, $C_{\lambda'}^{k'}$, α et α' deux réels positifs de somme 1 et soit ε_n une identité approchée de G formée de fonctions continues à supports compacts. On a alors

$$p*\mu*\varepsilon_n \leqslant k\mu*\varepsilon_n$$

$$\mu*\varepsilon_n*\delta_t = \int_G \mu*\delta_g*\delta_t*\delta_{g^{-1}}*\delta_g\varepsilon_n(g)dg$$

$$\mu*\varepsilon_n*\delta_t = \int_G \lambda^g(t)\mu*\delta_g\varepsilon_n(g)dg \leq \theta_n(t)\mu*\varepsilon_n$$

en désignant par $\theta_n(t)$ la borne supérieure des $\lambda^g(t)$, lorsque g décrit le support de ε_n. Il est clair que $\theta_n(t)$ est une fonction-poids finie car l'orbite sous G de l'exponentielle λ est relativement compacte. Posons aussi pour abréger $f_n(x) = \mu*\varepsilon_n(x)$ $f'_n(x) = \mu'*\varepsilon_n(x)$ et considérons la fonction $h(x) = f_n^\alpha(x)$ $f'^{\alpha'}_n(x)$. D'après l'inégalité de Hölder on a

$$p*h \leq k^\alpha k'^{\alpha'}h.$$

D'autre part

$$h*\delta_t = (f_n^\alpha*\delta_t)(f'^{\alpha'}_n*\delta_t) \leq \theta_n(t)\theta'^{\alpha'}_n(t)h$$

en définissant θ'_n de manière analogue à θ_n. Ces deux relations prouvent que le cône correspondant à la constante $k^\alpha k'^{\alpha'}$ et à la fonction poids $\theta_n^\alpha\theta'^{\alpha'}_n$ n'est pas réduit à zéro. Comme les fonctions $\theta_n^\alpha\theta'^{\alpha'}_n$ tendent en décroissant vers $\lambda^\alpha\lambda'^{\alpha'}$ la remarque initiale entraîne la relation

$$\hat{p}_T(\lambda^\alpha\lambda'^{\alpha'}) \leq [\hat{p}_T(\lambda)]^\alpha[\hat{p}_T(\lambda')]^{\alpha'}$$

ce qui prouve la convexité logarithmique de $\hat{p}_T(\lambda)$. Il est clair que $\hat{p}_T(\lambda)$ est invariante sous G car si μ appartient à C^k_λ, $\mu*\delta_g$ appartient à $C^k_{\lambda g}$. De plus si λ appartient au domaine de définition de $\hat{p}_T$, il en est de même par compacité de l'orbite fermée de λ sous G et les valeurs de $\hat{p}_T$ y sont majorées par $\hat{p}_T(\lambda)$. Puisque G est moyennable cette orbite fermée porte une mesure G-invariante et le barycentre λ_o de cette mesure vérifiera, par convexité de $\hat{p}_T$:

$$\hat{p}_T(\lambda_o) \leq \hat{p}_T(\lambda).$$

Comme λ_o est un élément de $\hat{T}$ qui est G-invariant le minimum de $\hat{p}_T$ sera atteint sur l'ensemble des éléments G-invariants.

Pour démontrer le théorème prenons d'abord $T = R'$ et notons que, puisque R' est nilpotent, le cone des mesures μ vérifiant $p*\mu \leq \rho\mu$ contient un cône $C^\rho_{\lambda_o}$ non trivial pour un certain λ_o de $\hat{R}'$ [8]. Observant de plus que ρ est inférieur aux valeurs de $\hat{P}_{R'}(\lambda)$ pour λ dans $\hat{R}'$, on obtient que

$$\rho = \operatorname*{Inf}_{\lambda\in\hat{R}'} \hat{p}_T(\lambda) = \hat{p}_T(\lambda_o)$$

D'après le lemme, on peut choisir λ_o vérifiant encore cette relation et de plus G-invariant. Alors le cône $C^{\rho}_{\lambda_o}$ est lui-même G-invariant et R agit sur lui comme un groupe nilpotent de classe deux car les éléments de R' sont représentés par des homothéties ; une nouvelle application de la propriété de droite fixe fournit alors, une exponentielle λ_1 de $\hat{R}$ tel que le cône $C^{\rho}_{\lambda_1}$ soit contenu dans $C^{\rho}_{\lambda_o}$ et non nul. Le lemme permet de supposer λ_1 G-invariant en prenant T = R. Ceci implique que $C^{\rho}_{\lambda_1}$ est G-invariant et le groupe G opère sur lui comme un groupe dont le quotient par le centre est compact. Un tel groupe a un groupe dérivé compact et possède la propriété de droite fixe [8]. On obtient donc finalement une exponentielle λ_2 sur G telle que

$$\hat{p}(\lambda_2) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in G^*} \hat{p}(\lambda) = \rho$$

Avant d'établir un théorème analogue au théorème 2, pour les groupes semi-simples, à centre fini, montrons quelques résultats préliminaires.

Soit G = KAN une décomposition d'Iwasawa de G et fixons un ordre sur les racines de A dans G, de façon que l'algèbre de Lie de N soit somme directe des sous-espaces propres correspondant aux racines positives. Notons par M et M' le centralisateur et le normalisateur de A dans K et soit W = M'/M le groupe de Weyl de G. Pour une forme linéaire réelle λ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ de A notons h_λ la mesure relativement invariante sur AN qui s'écrit $h_\lambda = h.e^{\lambda-\varepsilon}$ où h est une mesure de Haar à droite fixée de AN et ε est la semi-somme des racines positives comptées avec leur multiplicités. Notons que $h_\lambda * \delta_t = e^{-\lambda+\varepsilon}(t) h_\lambda$ pour $t \in AN$.

Pour un élément ω de w et un élément λ de $\mathcal{A}^*$ posons $\omega\lambda = \lambda \circ Ad\omega^{-1}$.

Soit $\mathcal{G}_\lambda$ le sous-espace propre de $\mathcal{G}$ correspondant à λ. Ecrivons alors

$$\mathcal{N}_\omega = \bigoplus_{\substack{\alpha > \mathcal{G} \\ \omega^{-1}\alpha < 0}} \alpha .$$

et soit N_ω le sous-groupe correspondant de N, n_ω une mesure de Haar de N_ω. Notons aussi N^- le sous-groupe opposé à N et observons que $\omega(n_{\omega^{-1}}) = \omega N_\omega^{-1} \cap N^-$. Posons enfin, pour $n^- \in N^-$

$$n^- = k(n^-)a(n^-)n(n^-)$$

avec $k(n^-)$, $a(n^-)$, $n(n^-)$ dans K,A,N.

Le calcul donne alors la formule

$$h_\lambda * \delta_\omega^{-1} * \eta_\omega = \omega^\lambda * h_{\omega\lambda}$$

où ω^λ est la mesure concentrée sur K donnée par

$\omega^\lambda = \int_{\omega(N)\cap N^-} e^{-\omega\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]\delta_{\omega k(n^-)}d\bar{n}$ où $d\bar{n}$ est la mesure $\omega(\eta_{\omega-1})$, c'est-à-dire l'image par $n^- \to \omega k(n^-)$ de la mesure sur $\omega(N)\cap N^-$ ayant pour densité $e^{-\omega\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]$ par rapport à la mesure de Haar $\omega(\eta_{\omega-1})$ de $\omega(N)\cap N^-$.

La masse de cette mesure est donc égale à

$$\int_{\omega(N)\cap N^-} e^{-\omega\lambda-\varepsilon}[a(n^-)]dn^-$$

D'après [38] une intégrale de la forme $\int_{\omega(N)\cap N^-} e^{-\mu-\varepsilon}[a(n^-)]dn^-$ est finie pourvu que le produit scalaire de Killing $<\mu,\alpha>$ soit positif pour les racines α vérifiant $\alpha > 0$ et $\omega^{-1}\alpha > 0$.

En particulier, ω^λ est une mesure de Radon dès que $<-\lambda,\alpha> > 0$ si $\alpha > 0$, c'est-à-dire si $-\lambda$ appartient au sous-ensemble de $\mathfrak{A}^*$ noté $\mathcal{C}_o$ en [42].

Pour résumer la discussion précédente, notons $\sigma_\lambda(g,k)$ $(g \in G,\ k \in K)$ le cocycle défini par

$$\sigma_\lambda(g,k) = e^{-\lambda-\varepsilon}[a(gk)]$$

et ρ_λ la représentation de G dans l'espace des mesures de Radon sur K définie par

$$\sigma_\lambda(g)[\delta_k] = \sigma_\lambda(g,k)\delta gk$$

représentation qui correspond à l'action par translation à gauche de G sur les mesures de la forme $\nu * h_\lambda$ où ν une mesure portée par K. On a alors la

<u>*Proposition*</u> : *Pour $\lambda \in \mathcal{C}_o$, la représentation ρ_λ et la mesure $\omega^\lambda (\omega \in W)$ satisfont la relation d'entrelacement suivante*

$$\rho_\lambda(g)[\nu]*\omega^\lambda = \rho_{\omega\lambda}(g)[\nu*\omega^\lambda]$$

<u>Remarque</u> : Prenant $g = t \in AN$, $\nu = \delta_e$ on a

$$\rho_\lambda(t)[\delta_e] = e^{-\lambda-\varepsilon}(t)\delta_e$$

et donc la relation de "droite fixe" suivante se trouve vérifiée par ω^λ

$$e^{-\lambda-\varepsilon}(t)\omega^\lambda = \rho_{\omega\lambda}(t)[\omega^\lambda]$$

Cette relation détermine la densité $\bar{\omega}^\lambda$ de $\omega^\lambda (\omega \neq e)$ par rapport à la mesure de Haar de K :

$\bar{\omega}^{\lambda}(t.k) = \bar{\omega}^{\lambda}(k)e^{\omega\lambda-\varepsilon}[a(t.k)]e^{-\lambda-\varepsilon}(t)$ où $t.k \in K$ est transformée de $k \in G/_{AN} = K$ par l'action de t.

Disons que la probabilité p est à décroissance exponentielle si pour une fonction de la forme δ_V et pour toute constante $c > 0$ on a $\int_G e^{c\delta_V(g)}dp(g)<+\infty$. Ceci est réalisé pour les probabilités d'un semi-groupe associé à un opérateur elliptique invariant à droite sur G d'après [22]. Si de plus p a une densité continue positive en e, les opérateurs $\rho_\lambda(p)$ sur K peuvent être définis à l'aide d'un noyau continu $P(k,k') > 0$ et il existe, pour λ donné, une unique mesure de probabilité ν_λ et un unique scalaire positif noté $\hat{p}(\lambda)$ tel que

$$\rho_\lambda(p)[\nu_\lambda] = \hat{p}(\lambda)\nu_\lambda$$

Dans ces conditions, il est clair que

$$\hat{p}(\omega\lambda) = \hat{p}(\lambda),$$

$$\omega^{\lambda}(K).\nu_{\omega\lambda} = \nu_\lambda * \omega^{\lambda} \qquad (\lambda \in \mathscr{C}_o)$$

d'après la relation d'entrelacement. On va en déduire le

Théorème 3.- Si la probabilité p admet une densité continue, positive en e à décroissance exponentielle, la fonction $\hat{p}(\lambda)$ est strictement convexe sur $\mathscr{A}^*$, vérifie $\omega \in W$ $\hat{p}(\omega\lambda) = \hat{p}(\lambda)$, atteint son minimum pour $\lambda = 0$. Ce nombre $\hat{p}(0)$ est égal au rayon spectral de la probabilité p et au rayon spectral de l'opérateur de convolution par p sur $L^2(G)$.

Preuve : La stricte convexité de $\hat{p}$ est analogue à celle rencontrée dans la démonstration du théorème 2 et la relation $\hat{p}(\omega\lambda) = \hat{p}(\lambda)$ a été justifiée lorsque λ appartient à $\mathscr{C}_o$. Par continuité, elle reste vraie sur $\bar{\mathscr{C}}_o$ et comme $w(\bar{\mathscr{C}}_o) = \mathscr{A}^*$, elle est vraie pour tout λ. Comme dans la démonstration du théorème 2, on a donc, par convexité, $\hat{p}(0) \leqslant \hat{p}(\lambda)$. D'après le principe de majoration de Herz [6], le rayon spectral de p dans $L^2(G)$ est égal au rayon spectral de l'opérateur associé à p dans la représentation quasi-régulière de G dans $G/_{MAN}$ donc de G dans $G/_{AN} = K$.

Cet opérateur n'est autre que $\rho_o(p)$ et en raison de la continuité de son noyau, il est compact et son rayon spectral est égal à la valeur propre $\hat{p}(0)$.

Les théorèmes 2 et 3 admettent une généralisation au cas d'un groupe de Lie quelconque. Pour une exponentielle λ sur G notons α_λ, la mesure de densité par rapport à la mesure $\alpha(\alpha_\lambda = \alpha.\lambda)$ et observons que

$$\alpha_\lambda * \beta_\lambda = (\alpha*\beta)_\lambda$$

Il découle de ceci que si μ vérifie $p*\mu \leqslant k\mu$, μ_λ vérifie $p_\lambda*\mu \leqslant k\mu_\lambda$ et l'ensemble des nombres k ainsi obtenus ne dépend donc pas de λ.

Notons σ_λ le rayon spectral de l'opérateur de convolution défini par p_λ sur l'espace $L^2(G)$. On a alors le

Théorème 4.- Soit G un groupe de Lie connexe et p une probabilité sur G admettant une densité continue à décroissance exponentielle. Alors le rayon spectral de p est égal à la borne inférieure des nombres σ_λ lorsque λ parcourt l'ensemble des exponentielles sur G.

Du principe de majoration déjà utilisé à la fin de la preuve du théorème 3 découle le lemme suivant :

Lemme : Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe moyennable et q une mesure positive bornée sur G. Alors les normes des opérateurs de convolution associés à q dans les représentations régulières de G dans $L^2(G)$ et $L^2(G/H)$ sont égales.

Preuve : Notons t et t' les deux représentations étudiées et observons que, en raison de la moyennabilité de H, t' est faibkement contenue dans t. Il en découle que x' et y' étant donnés, vecteurs unitaires de $L^2(G/H)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, deux vecteurs unitaires x et y de $L^2(G)$ tels que $|\langle t'(q)x',y'\rangle - \langle t(q)x,y\rangle| \leqslant \varepsilon$ et donc $\|t'(q)\| < \varepsilon + \|t(q)\|$ ce qui fournit l'inégalité $\|t'(q)\| \leqslant \|t(q)\|$. L'autre inégalité est indépendante de la moyennabilité de H et découle du principe de majoration de Herz. La représentation de G dans $L^2(G)$ étant induite par la représentation régulière de H dans $L^2(H)$ on majore en remplaçant cette dernière par l'identité, ce qui conduit à la représentation de G dans $L^2(G/H)$: pour deux éléments x et y de $L^2(G)$ unitaires on peut trouver deux éléments unitaires x' et y' de $L^2(G/H)$ tels que $|\langle t(g)x,y\rangle| \leqslant \langle t'(g)x',y'\rangle$ $(g \in G)$. Ceci donne

$$|\langle t(q)x,y\rangle| \leqslant \langle t'(q)x',y'\rangle \leqslant \|t'(q)\| \quad \text{et donc} \quad \|t(q)\| < \|t'(q)\|.$$

Preuve du théorème : Soit μ mesure positive et k un réel minimum vérifiant la relation $p*\mu \leqslant k\mu$. La preuve du théorème 2 montre que l'on peut supposer que μ vérifie

$$\mu*\delta_t = \lambda(t)\mu$$

pour une exponentielle λ sur le radical R de G qui est G-invariant par automorphismes intérieurs. Cette exponentielle et la fonction modulaire δ de R se prolongent en des exponentielles sur G, notées encore λ et δ et l'on peut donc considérer la mesure $\mu' = \mu_{\lambda.\delta}$ qui vérifie

$$\mu' * \delta_t = \delta(t)\mu'$$

On aura alors, $p_{\lambda\delta} * \mu' \leqslant k\mu'$

équation qui se réduit à une équation analogue sur G/R en raison de la relation

$$\mu' * \delta_t = \delta(t)\mu'$$

Notant $\overline{p_{\lambda\delta}}$ la projection de p sur G/R et $\overline{\mu'}$ la mesure sur G/R correspondant à μ' on a $\overline{p_{\lambda\delta}} * \overline{\mu'} < k\overline{\mu'}$ où k est encore le plus petit réel vérifiant une telle relation pour $\overline{p_{\lambda\delta}}$.

D'après le théorème 3, k est égal au rayon spectral de $\overline{p_{\lambda\delta}}$ sur $L^2(G/R)$, donc à celui de $p_{\lambda\delta}$ sur $L^2(G)$ d'après le lemme. On a donc, puisque $\rho = \overline{\lim_n}[p^n(v)]^{1/n} = \overline{\lim_n}[p_\lambda^n(v)]^{1/n}$, c'est-à-dire $\rho \leqslant \sigma_\lambda$, la relation $\rho = \operatorname{Inf}_{\lambda \in G^*} \sigma_\lambda$

E - <u>Mouvements browniens</u>

On particularise ici au cas des mouvements browniens quelques résultats obtenus précédemment. En fait, dans ce cas, à cause des propriétés de symétrie, certains résultats deviennent évidents.

Considérons une métrique riemannienne invariante à droite sur G et désignons par $\delta(g)$ la fonction modulaire de G définie par $\delta_g * \mu = \delta(g)\mu$ où μ est une mesure invariante à droite, par exemple la mesure riemannienne. On obtient alors [22] le laplacien Δ sous la forme

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i\delta)(e)x_i$$

où les x_i sont des champs de vecteurs invariants à droite, formant en e une base orthonormée de l'espace tangent. Le semi-groupe associé à Δ est alors un semi-groupe de convolution à gauche par des mesures de probabilité p^t. Notons s_t le mouvement brownien correspondant et d la distance riemannienne à e que l'on sait être une jauge principale [28]. Précisons le comportement asymptotique de $d(s_t)$ et $p^t(v)$ pour un voisinage compact v de e ainsi que la croissance de p^t par rapport à la mesure riemannienne suivant les propriétés de G et celles de la métrique choisie.

Notons d'abord le

<u>Lemme</u> : *Lorsque t tend vers l'infini, la limite de $\frac{d(s_t)}{t}$ existe p.p.*

<u>Preuve</u> : Montrons que $\sup\limits_{0<t\leqslant 1} d(s_t)$ est intégrable et pour cela considérons une fonction r, indéfiniment dérivable, majorant d et égale à d en dehors d'une boule de centre e. Ecrivons $r(s_t)$ à l'aide d'une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien unidimensionnel $b_\theta(\omega)$ [11] :

$$r(s_t) = \int_0^t \|\operatorname{grad} r(s_\theta)\| db_\theta + \int_0^t \Delta r[s_\theta]d\theta$$

Le premier terme au second membre, noté α_t, se majore à l'aide d'une inégalité classique de surmartingale exponentielle [33], puisque $\|\operatorname{grad} r\|$ est borné : $\sup\limits_{0<t\leqslant 1} \alpha_t$ est intégrable.

Pour majorer le second terme, notons que Δd est bornée à l'infini ; ceci découle de la comparaison [35] avec les espaces à courbure constante, où la propriété est vraie, puisque la courbure sectionnelle est bornée sur le groupe G. Il en résulte, puisque r est C^∞ sur la boule où il diffère de d, que Δr est bornée sur G. Alors $\int_0^t \Delta r(s_\theta)d\theta$ est bornée et $d(s_t)$ est intégrable comme $r(s_t)$, puisque $d(s_t) \leqslant r(s_t)$. Pour achever la démonstration du lemme, écrivons, pour $n \leqslant t < n+1$ $(n \in N)$ $d(s_t) \leqslant d(s_n)+d(s_{t-n}\circ\theta^n)$ et posons $F = \sup\limits_{0<\theta\leqslant 1} s_\theta$. Alors : $d(s_t) \leqslant d(s_n)+F\circ\theta^n$

$$\frac{d(s_t)}{t} \leqslant \frac{d(s_n)}{n} + \frac{F\circ\theta^n}{n}$$

Puisque $\frac{d(s_n)}{n}$ converge vers γ et que $\frac{F\circ\theta^n}{n}$ converge vers zéro, F étant intégrable, on a $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{d(s_t)}{t} \leqslant \gamma$.

On a de même l'inégalité contraire. Examinons maintenant à quelles conditions $p = p^1$ est centrée.

<u>Lemme</u> : *Notons ε l'exponentielle égale à $\delta^{-1/2}$ et $p_\varepsilon = p.\varepsilon$. Alors la mesure p_ε est symétrique.*

<u>Preuve</u> : Considérons l'opérateur de convolution à gauche par p sur l'espace $L^2(G)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure riemannienne, opérateur que l'on sait être symétrique. On obtient une isométrie de $L^2(G)$ sur l'espace $L^2(G)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Haar à gauche $\delta.\mu$ en posant pour $f \in L^2(G)$:

$$f' = f.\delta^{-1/2}.$$

En effet, on a $\int|f'|^2(\delta.d\mu) = \int|f|^2 d\mu$ et en vertu de la relation

$$p_\varepsilon * f_\varepsilon = (p*f)_\varepsilon$$

l'opérateur associé à p sur $L^2(G)$ correspond à l'opérateur associé à p_ε sur $L^2(G)'$. Cet opérateur est donc symétrique et ceci implique la symétrie de la mesure p_ε.

Il découle en particulier de ce lemme que la probabilité $\frac{1}{\hat{p}(\varepsilon)} p_\varepsilon$ est centrée et donc, puisque ces propriétés ne dépendant que de la projection de p sur le plus grand quotient abélien de G, le minimum de $\hat{p}(\lambda) = \int\lambda(g)dp(g)$ est atteint pour $\lambda = \varepsilon$. En particulier, si G n'est pas unimodulaire, $\hat{p}(\varepsilon) < 1$ et p n'est pas centrée. On a aussi, dans ce cas, par convexité :

$$\int \mathrm{Log}\ \varepsilon(g)dp(g) < \mathrm{Log}\ \hat{p}(\varepsilon) < 1 \quad \text{et} \quad \int \mathrm{Log}\ \delta(g)dp(g) > 0$$

relation qui avait déjà été obtenue en [27]. Au contraire, si G est unimodulaire, p est centrée. Donc si G est moyennable et unimodulaire, les théorèmes du chapitre II impliquent

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d(s_t)}{t} = 0$$

La sumétrie de p implique aussi, dans ce cas, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\ p^t(v)}{t} = 0$.

Sinon ces deux limites sont non nulles. Il est possible de préciser la valeur de la deuxième limite à partir de la structure de G et de la donnée de Δ. Puisque cette quantité ne change pas lorsqu'on remplace p par p_ε et que p_ε est symétrique on a

$$\lim_{t\to\infty}[p^t(v)]^{1/t} = \sigma_\varepsilon$$

où σ_ε est le rayon spectral de p_ε dans $L^2(G)'$. Si G est moyennable ce rayon spectral n'est autre que la masse de p_ε, c'est-à-dire $\hat{p}(\varepsilon)$. Ceci fournit, en détaillant le calcul, l'expression du rayon spectral pour le laplacien canonique sur un espace symétrique de type non compact, puisque un tel espace s'identifie à un groupe de Lie résoluble.

La relation $\int \mathrm{Log}\ \delta(g)dp(g) > 0$ implique d'après [26] et [39], l'existence de fonctions harmoniques bornées non constantes solutions de

$$\int f(y\ x)dp(y) = f(x)$$

Par suite, d'après la démonstration de [3], la croissance de p^t par rapport à la mesure de Haar à droite de G doit être strictement positive. Si G est non moyennable la même conclusion vaut tandis que si G est moyennable et unimodulaire, la relation $\lim_{t\to\infty} \frac{d(s_t)}{t} = 0$ montre que la croissance de p^t est nulle. La trivialité des limites étudiées se trouve donc réalisée simultanément et seulement dans le cas où G est moyennable et unimodulaire. On peut se demander dans quelle mesure ceci s'étend aux variétés riémaniennes complètes. Le cas de la courbure sectionnelle négative majorée par une constante négative a été étudié par divers auteurs ([5], [33], [37], [41]) ainsi que celui de la courbure de Ricci positive [11]. Observons que, d'après [6] un groupe de Lie à courbure négative non nulle, [11] est résoluble non unimodulaire et les quantités étudiées ont donc des valeurs non triviales. Les hypothèses de courbure sont donc susceptibles d'être affaiblies.

RÉFÉRENCES

[1] L. AUSLANDER et L.W. GREEN : G-Induced flows Amer. J. Math. t.88, (1966), p. 43-60.

[2] A. AVEZ : Théorème de Choquet Deny pour les groupes à croissance non exponentielle - CRAS Paris , t. 279 (1974), p. 25-28.

[3] A. AVEZ : Harmonic functions ou groups - Diff geom and Relativity Math Physics and Applied Maths p. 27-32. Dordrecht Holland.

[4] R. AZENCOTT : Espaces de Poisson des groupes localement compacts - Lecture Notes Springer (1970).

[5] R. AZENCOTT : Behaviour of diffusion semi-group at infinity Bull S.M.F. 102 (1974) p. 193-240.

[6] R. AZENCOTT et WILSON : Homogeneous manifolds with negative curvature I. T.A.M.S. vol. 215 (1976), p. 323- 362.

[7] C. BERG et J.P.R. CHRISTENSEN : On the relation between amenability of locally compact groups and the norms of convolution operators - Math. Ann. 208, 149-153 (1974).

[8] L. BIRGE et A. RAUGI : Fonctions harmoniques sur les groupes moyennables CRAS t. 278 (1974) p. 1287-1289.

[9] A. BOREL : Linear Algebraic groups - Benjamin Inc (1969).

[10] A. BRUNEL, P. CREPEL, Y. GUIVARC'H et M. KEANE : Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts - CRAS Paris, t. 275, (1972) p. 1359-1361.

[11] S.Y. CHENG et S.T. YAU : Differential Equation ou riemannian manifolds - Comm. Pure and Applied Math vol. 28 (1975) p. 333-354.

[12] J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H : Remarques sur la distalité dans les espaces vectoriels - CRAS Paris t. 278, p. 1083-1086.

[13] J.P. CONZE et Y. GUIVARC'H : Propriétés de droite fixe et fonctions harmoniques, théorie du potentiel et analyse harmonique - Lecture Notes Springer (1974).

[14] Y. DERRIENNIC : Sur le théorème ergodique sous-additif - CRAS Paris t. 281, (1975), p. 985-988.

[15] Y. DERRIENNIC et Y. GUIVARC'H : Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables - CRAS Paris, t. 277, p. 613-615.

[16] P. EYMARD : Moyennes invariantes et représentations unitaires - Lecture Notes Springer (1972).

[17] P. EYMARD et N. LOHOUE : Sur les racines carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques - Annales de l'E.N.S. t. 8 n° 2 (1975) p. 179-188.

[18] H. FURSTENBERG : A Poisson formula for semi-simple Lie groups - Annals of Math., série 2, t. 77, (1963), p. 335-386.

[19] H. FURSTENBERG : Non commuting random products - T.A.M.S. 108, (1963), p. 377-428.

[20] H. FURSTENBERG : A note on Borel's density theorem - Proc. A.M.S. vol. 55, (1976).

[21] H. FURSTENBERG : Translation invariant cones of functions on semi-simple Lie groups Bull Amer. Math. Soc. 71 (1965) p. 271-326.

[22] L. GARDING : Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie Bull. S.M.F. 88 (1960) p. 73-93.

[23] R.W. GOODMAN : Nilpotent Lie groups - Lecture Notes Springer (1976).

[24] F. GREENLEAF : Invariant means on topological groups - New York (1969).

[25] U. GRENANDER : Probabilities on algebraic structures - New York Wiley, (1963).

[26] Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques - Bulletin SMF 101, (1973), p. 333-379.

[27] H. HENNION : Sur la récurrence et la transience dans les espaces homogènes - Séminaires de l'Université de Rennes (1976).

[28] A. HULANICKI : Subalgebra of $L^1(G)$ associated with a Laplacian on a Lie group. Colloquium Math. to appear.

[29] J.W. JENKINS : Growth of connected locally compact groups. J. Funct. An. 12 (1973) p. 113-127.

[30] D.A. KAZDAN : On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups - Funct. Anal. and Appl. 1 (1967), p. 63-65.

[31] J.F.C. KINGMAN, J. ROY : Stat. Soc. B. 30, (1968), p. 499-510.

[32] H.P. MAC KEAN : Stochastic Integrals Academic Press, (1969).

[33] H.P. MAC KEAN : An upper bound to the spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. J. Diff Geom (1970) p. 359-366.

[34] A.I. MALCEV : On a class of homogegeous spaces, A.M.S. Translations (1962) ser. 1, vol. 9, (1962).

[35] P. MALLIAVIN : Diffusions et géométrie différentielle globale Centro Internationale Mathematico Estivo - Varenna (1975).

[36] G.D. MOSTOW : Fully reducible subgroup of algebraic groups Amer. J. Math. 68, (1956), p. 200-221.

[37] JJ. PRAT : Etude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative CRAS 280 (1975) p. 1539-1542.

[38] G. SCHIFFMANN : Integrales d'entrelacement CRAS t. 266 (1968) p. 47-49.

[39] A. RAUGI : Fonctions harmoniques sur les groupes localement compact à base dénombrable - à paraître au Bulletin de la SMF (1977) Mém. n° 54.

[40] V.N. TUTUBALIN : Some theorems of the type of the law of large numbers. Theory of Proba., (1969), p. 313-319.

[41] VAUTHIER : Diffusion sur une variété riemanienne complète à courbure négative CRAS 275 (1972) p. 925-926.

[42] W. VEECH : the Tail of a positivity preserving semi-group vol. 18 n° 2 (1974) p. 167-206.

[43] E.B. VINBERG : Some examples of cristallographic groups of Lobatchevski spaces Math Sbornik 7 (1969), p. 633-639.