PHILIPPE BOUGEROL

# Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique

*Astérisque*, tome 74 (1980), p. 29-45
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__29_0>

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PUISSANCES DE CONVOLUTION D'UNE PROBABILITÉ SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE

Par : Philippe BOUGEROL.

Considérons un espace symétrique $G/K$ où $G$ est un groupe de Lie semi-simple connexe non compact de centre fini et $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$. Si $P$ est le noyau de transition d'une chaîne de Markov sur $G/K$ invariante sous l'action de $G$ [(17) p. 27] il existe une probabilité $\mu$ sur $G$, invariante à gauche par $K$ telle que, si $\pi: G \to G/K$ est la surjection canonique, $f$ une fonction continue à support compact sur $G/K$,

$$\forall x \in G \quad , \; Pf \; [\pi(x)] = \int_G (f o \pi)\,(xg)\; d\mu(g) \quad .$$

Dans cet article nous déterminons le comportement asymptotique de la suite des itérés $P^n$ de $P$ orsque $n$ tend vers l'infini et du noyau potentiel $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,.)$ quand $x$ tend vers l'infini dans $G$. En fait on "remonte" ce problème à $G$ en étudiant les probabilités adaptées $\mu$ sur $G$ invariantes à gauche par $K$.

Nous montrons d'abord (théorème 1) que $\mu$ satisfait à un théorème central limite local, c'est à dire qu'il existe une suite de réels $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ telle que la suite $\alpha_n \mu^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle. Un théorème de ce type a été établi pour les groupes compacts dans (14), pour $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{R}^d$ dans (10), (19) pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ dans (1), pour le groupe libre à deux générateurs dans (18) et (9). Tous ces auteurs, sauf le dernier, utilisent la même méthode basée sur la transformation de Fourier. C'est aussi celle-ci que nous employons. Les résultats de cette partie ont été annoncés dans (4) avec l'hypothèse restrictive inutile que $\mu$ possède un moment d'ordre deux.

Remarquons que si $\gamma$ est la mesure potentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$ et si $\Gamma$ est le noyau potentiel de la marche droite de loi $\mu$ sur $G$, (i.e. $\Gamma(x,.) = (\varepsilon_x * \gamma)(.)$ ) on a, pour $f \in \mathscr{C}_c(G/K)$, $x \in G$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n f(\pi(x)) = \int_G (f o \pi)\,(g)\; \Gamma(x, dg) \quad .$$

Nous étudions le comportement asymptotique de $\Gamma f(x)$, $f \in \mathscr{C}_c(G)$, $x \in G$. On sait que cette fonction tend vers zéro à l'infini car un groupe semi-simple non compact n'est pas moyennable (5). Après avoir remarqué (Proposition 4) que cette fonction décroît exponentiellement vite vers zéro, et afin de préciser ce résultat on établit un analogue du théorème du renouvellement classique. En effet si $G = K\,A\,N$ est une décomposition d'Iwasawa de $G$ et si $f$ est biinvariante par $K$,

$\Gamma f$ est déterminé par ses valeurs sur A. On montre à peu près (voir le théorème 2 pour l'énoncé exact) que, si x tend vers l'infini dans A, $e^{2\rho(x)}\ \Gamma f(x)$ converge et que la limite est non nulle, lorsque $\int_G f(g)\,dg \neq 0$, si et seulement si la dimension de A est un et $\mu$ possède un moment d'ordre un. La démonstration est basée sur un changement de variable dans la formule de Plancherel qui nous ramène au théorème classique du renouvellement sur A.

1.- Notations.

Sauf indication contraire, dans la suite G désigne un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, non compact, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{A}$ une sous algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{A}^+$ une chambre de Weyl. On pose $A^+ = \mathrm{Exp}\,\mathfrak{A}^+$ et $\overline{A}^+$ est l'adhérence de $A^+$.

Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ le système des racines (restreintes) positives de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}^+)$. On peut supposer qu'il existe un entier p pour lequel $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ soit l'ensemble des racines indivisibles positives $\big[$c'est à dire si $i \in \{1,\ldots, p\}$ $2^{-1}\lambda_i$ n'est pas une racine alors que si $j \in \{p+1,\ldots,r\}$, $\lambda_j = 2\,\lambda_{j-p}\big]$.

Soit $m_{\lambda_i}$ la multiplicité de la racine $\lambda_i$ et $\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i}\ \lambda_i$.

On écrit $G = K\,A\,N$ [resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} + \mathfrak{A} + \mathfrak{N}$] la décomposition d'Iwasawa de G [resp. de $\mathfrak{g}$] associée à $\mathfrak{A}^+$. Pour tout élément g de G on note H(g) l'unique élément de $\mathfrak{A}$ tel que g appartienne à K {Exp H(g)} N.

Soit $\mathfrak{A}^*$ le dual (réel) de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_c^* = \mathfrak{A}^* + i\mathfrak{A}^*$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbb{C}$. Si $m_k$ est la mesure de Haar normalisée sur K, pour $\nu \in \mathfrak{A}^*$ la fonction sphérique $\phi_\nu$ est définie par :

$$\forall x \in G \qquad \phi_\nu(x) = \int_K \exp\Big[\,(i\nu - \rho\,)\,H(xk)\Big]\,d.m_k(k) \quad .$$

Si T est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{A}_c^*$ dont la partie imaginaire appartient à l'enveloppe convexe des points $w\rho$, w parcourant le groupe de Weyl W, $\nu \longrightarrow \phi_\nu(g)$ est une fonction analytique bornée par 1 sur T, {(21) th. 9.2.1.2.} alors que si $\nu \in \mathfrak{A}^*$, $g \longrightarrow \phi_\nu(g)$ est une fonction de type positif.

On munit $\mathfrak{A}$ du produit scalaire induit par la forme de Killing et on choisit comme mesure de Haar sur G la mesure notée dg vérifiant, si f est une fonction continue sur G biinvariante par K et d la dimension de

$$\int_G f(g)dg = \int_{\mathfrak{A}^+} f(\mathrm{Exp}\ H) \prod_{i=1}^{r} \Big[2\ \mathrm{sh}\ \lambda_i(H)\Big]^{m_{\lambda_i}} \frac{dH}{(2\pi)^{d/2}} \quad .$$

Etant donnée une probabilité $\mu$ sur G on définit sa transformée de Fourier (sphérique) $\mu$ sur T par, si $\nu \in T$, $\mathfrak{F}\mu\ (\nu) = \int_G \phi_\nu(g)\ d\mu(g)$. De même si f est dans $L^1(G)$

on pose $\mathfrak{F} f(\nu) = \int \phi_\nu(g)\, f(g)\, dg$ . La fonction $\mathfrak{F}\mu$ est continue sur T, analytique sur son intérieur, donc en particulier dérivable.

Rappelons que $\mu$ est adaptée si son support engendre un sous-groupe dense de G et que $\mu$ est invariante à gauche par K si $m_K * \mu$ est égal à $\mu$ . Enfin nous noterons $\mathcal{C}_c(G)$, [resp. $\mathcal{C}_c^\infty(G)$] les fonctions continues, [resp $\mathcal{C}^\infty$], à support compact sur G.

2.- Propriétés de la transformée de Fourier sphérique d'une probabilité.

On sait que $G = K\bar{A}^+K$ et que, pour tout g de G, il existe un unique élément a de $\bar{A}^+$ tel que g soit dans KaK, notons $\pi(g)$ cet élément. Nous avons alors :

Lemme 1 :

Si $\mu$ est une probabilité adaptée sur G, biinvariante par K, pour un entier n assez grand, $\mu^n \{g \in G \ / \ \pi(g) \in A^+\}$ est non nul.

Démonstration :

Supposons que pour tout n, $\mu^n [g \in G \ / \ \pi(g) \in A^+]$ est nul. Alors le semi-groupe $[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathrm{Supp}\ \mu^n)] \cap A$ est contenu dans la réunion finie d'hyperplans $\mathrm{Exp}\ [\bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ \lambda_i]$ ce qui n'est possible que s'il est contenu dans un de ces hyperplans.

Le sous-espace vectoriel E de $\mathfrak{a}$ engendré par $[H \in \mathfrak{a} \ / \ \mathrm{Exp}\ H \in \mathrm{Supp}\ \mu\ ]$ est donc un sous-espace propre. Le groupe de Weyl opère sur A (et donc sur $\mathfrak{a}$) par conjugaison par certains éléments de K et $\mu$ est biinvariante par K, donc E est stable par W.

Si $\lambda$ est une racine positive, la symétrie $w_\lambda$ dans $\mathfrak{a}$ par rapport à Ker $\lambda$ agit sur $\mathfrak{a}$ comme un élément de W donc, ou bien (E), ou bien $\lambda(E^\perp)$ est nul ($E^\perp$ étant l'orthogonal de E dans $\mathfrak{a}$).
Considérons alors, si ${}_\lambda$ est le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ associé à $\lambda$ , la sous-algèbre $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ engendrée par les sous-espaces $\mathfrak{g}_\lambda$ et $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ , $\lambda$ parcourant les racines positives telle que $\lambda(E^\perp)$ est nul. Si G' est le sous-groupe de G correspondant à $\mathfrak{g}'$ , on vérifie facilement que G' est distingué et que le sous-groupe K G'K est égal à K(Log E) K [(21) lemme 1.2.3.15.]. Puis que le support de $\mu$ est égal à K(supp $\mu \cap A$)K ceci contredit le fait que $\mu$ est adaptée.

Proposition 1 :

Si $\mu$ est une probabilité adaptée sur G et $\nu_2$ un élément de $\mathfrak{a}^*$ tel que $i\nu_2$ est dans T on a :

1) $0 < \mathfrak{F}\mu(0) < 1$

2) $\forall \nu_1 \in \mathfrak{a}^*$, $\nu_1 \neq 0$, $|\mathfrak{F}\mu(\nu_1 + i\nu_2)| < \mathfrak{F}\mu(i\nu_2)$

3) $\limsup_{\nu_1 \in \mathfrak{a}^*,\ \nu_1 \to \infty} |\mathfrak{F}\mu(\nu_1 + i\nu_2)| < \mathfrak{F}\mu(i\nu_2)$

Démonstration :

Le 1) est clair puisque $\{g \in G \ / \ \phi_o(g) = 1\}$ est égal à K. (2) .

Afin de montrer le 2) montrons d'abord que si $a \in A^+$, et si $|\phi_{\nu_1+i\nu_2}(a)| = \phi_{i\nu_2}(a)$, alors $\nu_1$ est nul. Cette égalité s'écrivant

$$\left| \int_K \exp \{(i\nu_1-\nu_2-\rho) H(a\, k)\}\ dm_K(k) \right| = \int_K |\exp \{(i\nu_1-\nu_2-\rho)H(a\, k)\}|\ dm_K(k)$$

elle n'est possible que si $\exp [i\nu_1 H(a\, k)]$ est indépendant de k, soit encore, K étant connexe, si $\nu_1[H(a\, k)]$ est indépendant de k.
En particulier, pour tout w de W, $\nu_1[H(a)]$ est égal à $\nu_1[w(H(a))]$.
L'élément a étant dans une chambre de Weyl, ceci entraîne que $\nu_1$ est nul.

Puisque $\mu$ et $m_K * \mu * m_K$ ont même transformée de Fourier on peut supposer que $\mu$ est biinvariante. Alors $\mathfrak{F}(\mu^n) = \mathfrak{F}(\mu)^n$ et il suffit de montrer qu'une des puissances de convolution vérifie la proposition. Notons B l'ensemble $\{g \in G \ / \ \pi(g) \in A^+\}$ . On a

$$|\mathfrak{F}\mu^n(\nu_1 + i\nu_2)| \leqq \int_B |\phi_{\nu_1+i\nu_2}(g)|\ d\mu^n(g) + \int_{\complement B} \phi_{i\nu_2}(g)\ d\mu^n(g)$$

et le deuxième membre n'est égal à $\mathfrak{F}\mu(i\nu_2)$ que si, pour $\mu^n$ presque tout g de B, $|\phi_{\nu_1+i\nu_2}(g)| = \phi_{i\nu_2}(g)$ . Or d'après le lemme 1 on peut choisir n de telle sorte que $\mu^n$ charge B.
Puisque $\phi_\nu(g) = \phi_\nu[\pi(g)]$ nous obtenons, par ce qui précède que $\nu_1$ doit être nul, ce qui montre le 2). Le 3) se montre de la même façon en utilisant le fait que, si $g \in B$, $\phi_{\nu_1+i\nu_2}(g)$ tend vers zéro quand $\nu_1$ tend vers l'infini [(7) remarque 5].

Proposition 2 :

Si $\mu$ est une probabilité adaptée sur G, l'application linéaire $\mathfrak{F}\mu'(0)$, dérivée de $\mathfrak{F}\mu$ en zéro, est nulle et la forme bilinéaire $-\mathfrak{F}\mu''(0)$ est non dégénérée positive.

Démonstration :

On a déjà remarqué que $\mu$ était, près de zéro, analytique, donc ces dérivées existent. Si on fait opérer W sur $\mathfrak{a}_c^*$ par dualité on sait que $\mathfrak{F}\mu(\nu) = \mathfrak{F}\mu(w\nu)$, $w \in W$, $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$[(13)p. 426] .

Donc $\mathcal{F}\mu'(0) = \mathcal{F}\mu'(0)_o w$ , $\forall w \in W$ , ce qui entraîne que $\mathcal{F}\mu'(0)$ est nulle.

Afin d'étudier $\mathcal{F}\mu''(0)$ choisissons une base $\{e_i, 1 \leqq i \leqq d\}$ de $\mathcal{A}^*$ et notons $\nu_i$ la i-ème composante de $\nu \in \mathcal{A}^*$ dans cette base.

Pour tout g de G la fonction analytique $\nu \mapsto \phi_\nu(g)$ est bornée par 1 sur T, ensemble contenant 0 dans son intérieur. Il existe donc une constante M telle que $\dfrac{\partial^2 \phi_\nu(g)}{\partial\nu_i\ \partial\nu_i} /\nu = 0$ est borné par M, uniformément en $g \in G$ . C'est à dire :

$$\int_K e_i \{H(gh)\}^2 \exp - \rho \{H(gk)\} dm_K(k) \leqq M$$

ce qui nous permet d'écrire

$$- \frac{\partial^2 \mathcal{F}\mu(\nu)}{\partial\nu_i\ \partial\nu_j} /\nu=0 = \int_{K \times G} e_i\ [H(gk)]\ e_j\ [H(gk)]\ e^{-\rho H(gk)} d\mu(g) dm_K(k)$$

La forme $-\mathcal{F}\mu''(0)$ ne peut être dégénérée que s'il existe $\nu \in \mathcal{A}^*$, $\nu \neq 0$ , tel que $\nu\ \{H(gk)\} = 0$, $dm_K \otimes d\mu$ presque surement, mais alors, par exemple, $\mathcal{F}\mu(\nu) = \mathcal{F}\mu(0)$ ce qui contredit la proposition 2.

## 3.- Théorème central limite local.

Rappelons la formule de Plancherel sur les groupes semi-simples due à Harish Chandra [(21) Th. 9.2.2.13] . Si B est la fonction Béta et $\nu \in \mathcal{A}_c^*$ soit $I(\nu) = \prod_{\ell=1}^{r} B\left[\dfrac{m_{\lambda_e}}{2} , \dfrac{m_{\lambda_\ell}}{4} + \dfrac{<\nu\ \ \lambda_\ell>}{<\lambda_\ell\ \ \lambda_\ell>}\right]$ et $c(\nu) = \dfrac{I\ (i\nu)}{I(\rho)}$ - Alors si f est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ biinvariante par K telle que $f \in \mathcal{L}^1[\mathcal{A}^*, |c(\nu)|^{-2} d\nu]$ et [w] l'ordre du groupe de Weyl,

$$f(e) = [w]^{-1} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathcal{A}^*} \mathcal{F}f(\nu)\ |\ c(\nu)|^{-2} d\nu \quad .$$

Montrons d'abord deux lemmes simples.

<u>Lemme 2</u> :

Soient $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p]$ les racines positives indivisibles de $(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^+)$- Au voisinage de zéro $|c(\nu)|^{-2}$ est équivalent à $c_G \prod_{i=1}^{p} < \nu\ \lambda_i >^2$ où

$$c_G = |I(\rho)|^2 \prod_{=1}^{p} < \lambda_\ell\ \ \lambda_\ell >^{-2} \prod_{j=1}^{r-p} \left|B\left[\frac{m_{2\lambda^j}}{2} , \frac{m_{\lambda j}}{4}\right]\right|^2$$

Démonstration :

On a $I(i\nu) = \prod_{\ell=1}^{p} B\left[\frac{m_{\lambda_\ell}}{2} \; ; i\frac{<\nu\ \lambda_\ell>}{<\lambda_\ell\ \lambda_\ell>}\right] \prod_{j=1}^{r-p} B\left[\frac{m_{2\lambda_j}}{2}, \frac{m_{\lambda_j}}{4} + i\frac{<\nu, 2\lambda_j>}{<2\lambda_j, 2\lambda_j>}\right]$

Il suffit d'utiliser le fait que les singularités de la fonction $\Gamma$ sont 0, -1, -2,.. et qu'au voisinage de zéro $\Gamma(z)$ est équivalent à $z^{-1}$ .

Lemme 3 :

Si $\mu$ est une probabilité sur G et f un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$, $\mathfrak{F}(\mu*f)$ appartient à $\mathcal{L}^1[\mathfrak{a}^*, |c(\nu)|^{-2} d\nu]$ .

Démonstration :

Si $\nu \in \mathfrak{a}^*$ , $\phi_\nu$ est une fonction de type positif et [(13)p. 417] il existe une représentation unitaire $\pi$ de G dans un espace de Hilbert H, un vecteur unitaire e de H, tels que $\phi_\nu(g) = < e, \pi(g)e >$ . Alors

$$\mathfrak{F}(\mu*f)(\nu) = \int \phi_\nu(g)\ d(\mu*f)(g) = < e,\pi(\mu*\bar{f})e > = < \pi(\mu)*e,\pi(\bar{f})e > .$$

La représentation étant unitaire et $\mu$ une probabilité,

$$|\mathfrak{F}(\mu*f)(\nu)| \leq \|\pi(\bar{f})e\| = < \pi(\bar{f})e, \pi(\bar{f})e >^{1/2} = \sqrt{\mathfrak{F}(\check{\bar{f}}*\bar{f})(\nu)} ,$$

si $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ . D'après le théorème de Paley Wiener la fonction $\mathfrak{F}(\check{f}*f)$ est à décroissance rapide sur $\mathfrak{a}^*$, donc de racine $|c(\nu)|^{-2} d\nu$ intégrable.

Avant d'énoncer le théorème posons $c'_G = c_G \{[w]\ (2\pi)^{d/2}\}^{-1}$ ($c_G$ est donné au lemme 2) et si $\mu$ est une probabilité sur G, M la matrice associée à la forme bilinéaire $-\mathfrak{F}\mu''(0)$ ,

$$k_\mu = \int_{\mathfrak{a}^*} \prod_{i=1}^{p} < \nu, \lambda_i >^2 \exp\{-\frac{1}{2}[\mathfrak{F}\mu(0)]^{-1} < M\nu , \nu >\}\ d\nu .$$

$$f_\mu(g) = \int_G \phi_o(g\, h^{-1})\ [\mathfrak{F}\mu(0)]^{-1}\ d\mu(h) \quad , g \in G$$

Théorème 1 (Théorème central limite local).

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, non compact et $\mu$ une probabilité adaptée sur G, invariante à gauche par un sous-groupe compact maximal K de G.

Soit $\mathfrak{a}^+$ est une chambre de Weyl de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, soit d la dimension de $\mathfrak{a}$ et p le nombre de racines positives indivisibles de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+)$

Soit $m_\mu$ la mesure de Radon sur G de densité $f_\mu$ par rapport à la mesure de Haar dg.

Alors $\mathfrak{F}\mu(0)$ est strictement inférieur à un, $k_\mu$ est fini et :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G), \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2p+d}{2}}}{\mathfrak{F}\mu(0)^n} \int_G f(g)\ d\mu^n(g) = c'_G\ k_\mu \int_G f(g) dm_\mu(g) .$$

Démonstration :

Toute fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ ayant leur support dans un compact fixe. Il suffit donc de montrer le théorème quand f est $\mathcal{C}^\infty$ .

La probabilité est invariante à gauche par K donc, si $\check{f}$ est la fonction symétrique de f $[\check{f}(x) = f(x^{-1})]$ ,

$$\int_G f(g)\, d\mu^n(g) = \int_G (m_K * f)\, d\mu^n = (\mu^n * \check{f} * m_K)(e)$$

et la fonction $\mu^n * \check{f} * m_K$ étant biinvariante par K, le lemme 3 permet d'appliquer la formule de Plancherel :

$$\int_G f\, d\mu^n = \frac{1}{[w]\ (2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} (\mu^n * \check{f} * m_K)\ (\nu)\ \ |c(\nu)|^{-2}\, d\nu \quad .$$

On sait que si m et m' sont deux mesures bornées sur G , si m est invariante à gauche par K, $\mathfrak{F}(m' * m)$ est égal à $\mathfrak{F}(m')\,\mathfrak{F}(m)$.

Ceci entraîne que $\mathfrak{F}(\mu^n * \check{f} * m_K) = \mathfrak{F}(\mu)^{n-1}\, \mathfrak{F}(\mu * \check{f})\, \mathfrak{F}(m_K) = \mathfrak{F}(\mu)^{n-1}\, \mathfrak{F}(\mu * \check{f})$ ,

d'où

$$\int_G f\, d\mu^n = \frac{1}{[w]\ (2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \left\{ \{\mu(\nu)\}^{n-1}\ \ (\mu * \check{f})(\nu)\ \ |c(\nu)|^{-2}\, d\nu \right. \tag{1}$$

En utilisant la formule de Taylor appliquée à $\mathfrak{F}\mu$ au voisinage de zéro et grâce à la proposition 3 on voit que pour $\eta$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\ \nu \in \mathfrak{a}^* \quad , \ \|\nu\| \leqq \eta \ , \ \left| \frac{\mathfrak{F}\mu(\nu)}{\mathfrak{F}\mu(0)} \right| \leqslant \exp \ \{ -\alpha\ \|\nu\|^2 \} \tag{2}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left[ \mathfrak{F}\mu[\frac{\nu}{\sqrt{n}}]\ \ \{\mathfrak{F}\mu(0)\}^{-1} \right]^n = \exp\left[ -\frac{1}{2\,\mathfrak{F}\mu(0)} < M\nu\ ,\ \nu > \right] \tag{3}$$

D'après le lemme 4 on peut choisir $\eta$ de telle sorte que l'on ait aussi pour un $\beta > 0$ ,

$$\forall\ \nu \in \mathfrak{a}^* \quad , \ \|\nu\| \leqq \eta \quad , \ |c(\nu)|^{-1} \leqq \beta\ \|\nu\|^{2p} \tag{4}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left|c[\frac{\nu}{\sqrt{n}}]\right|^{-2} n^p = c_G \prod_{i=1}^{p} < \nu\ ,\ \lambda_i >^2 \tag{5}$$

Appliquant la proposition 2 à $\nu_2$ nul, il existe $a < 1$ tel que, pour tout $\nu$ de $\mathfrak{a}^*$ de norme supérieure à $\eta$ , $|\mathfrak{F}\mu(\nu)|\ \{\mathfrak{F}\mu(0)\}^{-1}|$ est borné par a, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+\frac{d}{2}}}{\mathfrak{F}\mu(0)^{n-1}} \int_{[\nu\ ,\|\nu\|>\eta]} \mathfrak{F}\mu(\nu)^{n-1}\ \ \mathfrak{F}(\mu * \check{f})(\nu)\ \ |c(\nu)|^{-2}\, d\nu = 0$$

d'où, d'après (1), après un changement de variable,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+\frac{d}{2}}}{\mu(0)^{n-1}} \int_G f\,d\mu^n =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{[w](2\pi)^{d/2}} \int_{[\nu\ \|\nu\|\leq\sqrt{n}]} \left\{\frac{\mathfrak{F}\mu\left[\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right]}{\mu(0)}\right\}^{n-1} \left|c\left[\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right]\right|^{-2} n^p\, \mathfrak{F}(\mu*\check{f})\left[\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right] d\nu \quad .$$

On applique le théorème de Lebesgue grâce aux majorations (2) et (4) pour passer à la limite. A cause de (3) et (5) on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+\frac{d}{2}}}{\mathfrak{F}\mu(0)^{n-1}} \int f\,d\mu^n = c'_G\, \mathfrak{F}(\mu*\check{f})(0) \int \prod_{i=1}^{p} <\nu,\lambda_i>^2 \exp\left\{\frac{1}{2\mathfrak{F}\mu(0)} < M\nu,\nu>\right\} d\nu$$

ce qui donne le théorème.

Remarque 1 :

En utilisant la relation $\int \check{f}d\mu = \int f\,d\check{\mu}$ , ($\check{\mu}$ est l'image de $\mu$ par $x \to x^{-1}$) on obtient un théorème analogue pour les probabilités sur G invariantes à droite par K.

Remarque 2 :

Le nombre $\mathfrak{F}\mu(0)$ est le rayon spectral de l'opérateur associé à $\mu$ dans la représentation régulière gauche T de G sur $L^2(G)$.
En effet si $\nu$ est la mesure $\mu*m_K$ biinvariante par K on a

$$\nu^n = \mu^n*m_K \quad \text{et} \quad \mu^n = \nu^{n-1}*\mu \quad \text{d'où} \quad \|T^n_\nu\| \leqq \|T^n_\mu\| \leqq \|T^{n-1}_\nu\| \quad .$$

Les opérateurs $T_\nu$ et $T_\mu$ ont donc le même rayon spectral, or le rayon spectral de $T_\nu$ est $\mathfrak{F}\mu(0)$ [(2) Th. 3.1] .

Remarque 3 :

Le théorème admet évidemment le corollaire suivant :

$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}_c(G)\ ,\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\int f\,d\mu^n}{\int g\,d\mu^n} = \frac{\int f\,dm_\mu}{\int g\,dm_\mu}$$

Ce résultat a été démontré dans un cadre beaucoup plus général avec des hypothèses de régularité sur $\mu$ dans (12). Dans cet article apparaît clairement la raison pour laquelle c'est cette mesure $m_\mu$ qui intervient.

Remarque 4 :

Comme il est noté dans (20), mais pour des raisons différentes, nous voyons

qu'il n'est en général pas possible de trouver, une probabilité $\mu$ étant donnée, une mesure gaussienne $\nu$ sur $G$, telle que $\mu$ et $\nu$ aient un comportement équivalent, au sens où les suites $\mu^n(f)$ et $\nu^n(f)$ sont équivalentes (pour tout f de $\mathcal{C}_c(G)$) quand n tend vers l'infini.
Ceci n'est en effet possible que si $\mathfrak{F}\mu(0) = \mathfrak{F}\nu(0)$ et $\mathfrak{F}\mu''(0) = \mathfrak{F}\nu''(0)$ d'après le théorème 1. Or par exemple si $G = S\,1(2, \mathbb{C})$, si $\nu$ est une mesure gaussienne , $\mathfrak{F}\nu''(0) = 3 \log \mathfrak{F}\nu(0)$ , (20), alors qu'il existe des probabilités $\mu$ ne vérifiant pas cette relation.

Remarque 5 :

Dans le cas où le groupe G possède une structure complexe, toute racine est indivisible et de multiplicité 2, donc l'entier n+2p apparaissant dans le théorème n'est autre que la dimension de l'espace symétrique G/K. Par contre pour tous les groupes rang un, cet entier est égal à trois, donc est indépendant de dim G/K.

Terminons ce paragraphe en étudiant la fonction de concentration associée à la probabilité $\mu$ (3). Fixons un compact C d'intérieur non vide de G, on a alors $F_\mu(n) = \sup_{x,y\in G} \mu^n(x\,C\,y)$. Un gourpe semi simple étant non moyennable on sait que $F_\mu$ décroît exponentiellement vite vers zéro. Dans ce cas il est intéressant de comparer $F_\mu(n)$ à $r^n$ où $r = \overline{\lim}\,[\mu^n(V)]^{1/n}$ , V étant un voisinage compact quelconque de e, c'est à dire lorsque $\mu$ est invariante à gauche à $\mathfrak{F}\mu(0)$. On a alors :

Proposition 3 :

Sous les hypothèses du théorème, si C est un compact de G d'intérieur non vide, il existe une constante a vérifiant

$$F_\mu(n) = \sup_{x,\,y\in G} \mu^n(x\,C\,y) \leq a \frac{\mathfrak{F}\mu(0)^n}{n^{\frac{2p+d}{2}}}$$

Démonstration :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ majorant la fonction indicatrice de C. Alors $1_{xCy} \leq \varepsilon_x * f * \varepsilon_y$ et d'après la formule de Plancherel,

$$\mu^n(xCy) \leq [w]^{-1}(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathfrak{a}^*} \mathfrak{F}(\mu^n * \varepsilon_{y^{-1}} * \check{f} * \varepsilon_{x^{-1}})(\nu) \quad |c(\nu)|^{-2}\, d\nu$$

mais $\mathfrak{F}(\mu^n * \varepsilon_{y^{-1}} * \check{f} * \varepsilon_{x^{-1}}) = (\mathfrak{F}\mu)^{n-1}\,\mathfrak{F}(\mu * \varepsilon_{y^{-1}})\,\mathfrak{F}(\varepsilon_{x^{-1}})$ a un module majoré par $|(\mathfrak{F}\mu)^{n-1}\,\mathfrak{F}(\check{f})|$ donc

$$F_\mu(n) \leq [w]^{-1}\,(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathfrak{a}^*} |\mathfrak{F}\mu(\nu)|^{n-1}\,|\mathfrak{F}\check{f}(\nu)| \quad |c(\nu)|^{-2} d\nu$$

La démonstration du théorème 1 nous donne alors immédiatement la majoration voulue.

## 4.- Estimation du noyau potentiel à l'infini.

Soit $\mu$ une probabilité sur G invariante à gauche par K, $\gamma$ la mesure de Radon $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$ et $\Gamma$ le noyau potentiel de la marche aléatoire droite de loi $\mu$ sur G. Si f est un élément de $\mathscr{C}_c(G)$ on a, $\Gamma f(g) = \int_G f(gx)\, d\gamma(x)$, pour x dans G. Nous voulons étudier le comportement de $\Gamma f(g)$ quand g tend vers l'infini.

Si $\pi : G \to \bar{A}^+$ désigne l'application introduite au lemme 1, considérons la fonction positive $\sigma : G \to R$ définie par, si $g \in G$, $\sigma(g) = \|\log \pi(g)\|$ [(21) proposition 8.1.2.1.]. Ce n'est autre que la fonction sous additive associée à la distance riemannienne sur G/K. On a alors la proposition simple suivante :

**Proposition 4** :

Il existe un entier $\alpha > 0$ tel que, pour toute probabilité $\mu$ adaptée sur G, invariante à gauche par K, pour toute fonction f de $\mathscr{C}_c(G)$, $e^{\alpha\sigma(g)}\, \Gamma f(g)$ tend vers zéro quand g tend vers l'infini.

**Démonstration** :

Il suffit de considérer le cas où f est une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(G)$, biinvariante par K, grâce à la proposition 2 et à la formule de Plancherel on peut écrire, pour $x \in G$,

$$\Gamma f(x) = (\Gamma * \check{f} * \varepsilon_x)(e) = \frac{1}{[w](2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}\check{f}(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)}\, \phi_\nu(x)\, |c(\nu)|^{-2} d\nu \quad ,$$

d'où $\quad |\Gamma f(x)| \leqq \sup_{\nu \in \mathfrak{a}^*} |\phi_\nu(x)| \dfrac{1}{[w]\ (2\pi)^{d/2}} \displaystyle\int \left|\frac{\mathfrak{F}\check{f}(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)}\right| |c(\nu)|^{-2} d\nu$ .

mais , d'après le théorème 8.3.7.4. de (21), il existe a > 0 tel que

$$\sup_{\nu \in \mathfrak{a}^*} |\phi_\nu(x)| = \phi_0(x) \leqq e^{-a\sigma(x)}$$ , d'où la proposition.

Comme on va le voir ensuite le comportement à l'infini de $\Gamma f$ dépend du premier moment de $\mu$ . Le lemme suivant va nous permettre d'introduire cette notion et de retrouver simplement, dans notre cas particulier, les résultats de (8) et (16).

**Lemme 4** :

1) Pour une constante a > 0 et pour tout x de G,

$$a\sigma(x) \leqq \left\| \int_K H(xk)\, dm_K(k) \right\| \leqq \sigma(x)$$

2) Pour tout x de $A^+$ , si $\lambda$ est une racine positive de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+)$, $\int_K \lambda(H(xk))dm_L$ est strictement positif.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de montrer 1) pour x appartenant à A. L'inégalité de droite vient du fait qu'alors $\sup_{k \in K} \|H(xk)\| = \|H(x)\| = \sigma(x)$ (<u>15</u>).

D'autre part, par l'inégalité de Jensen,

$$\int_K - \rho \left\{H(xk)\right\} dm_K(k) \leqq \log \int_K \exp\left\{- \rho(H(xk))\right\} dm_K(k) = \log \phi_o(x)$$

d'où $\|\rho\| \left\|\int_K H(xk)dm_K(k)\right\| \geqq \rho\left\{\int H(xk)dm_K(k)\right\} \geq -\log\phi_o(x) \geqq a\sigma(x)$

par l'inégalité déjà utilisée dans la proposition 4.

Pour montrer le 2) il suffit de considérer le cas où $\lambda$ est une racine positive simple. Si cette racine est par exemple $\lambda_1$ , et $w_1$ l'élément du groupe de Weyl associé, $w_1$ envoie $\lambda_1$ et $2\lambda_1$ sur $-\lambda_1$ et $-2\lambda_1$ et permute les autres racines positives [(<u>21</u>)Prop.1.1.2.5.] d'où $w_1\rho - \rho = -\lambda_1 \, (m_{\lambda_1} + 2\, m_{2\lambda_1})$ et

$$\int_K \exp\left\{ -\lambda_1(m_{\lambda_1} + 2m_{2\lambda_1})(H(xk))\right\} dm_K(k) = \phi_{-iw_1\rho}(x) = \phi_{-i\rho}(x) = 1$$

Par l'inégalité de Jensen, $\int_K \lambda_1 \, [H(xk)]dm_K \geqq 0$ , l'égalité n'étant possible que si $\lambda_1 \, [H(xk)]$ est nul pour tout k de K, ce qui est impossible si $x \in A^+$ comme on l'a déjà vu.

On dit qu'une probabilité $\mu$ sur G a un moment d'ordre un si $\int \sigma(g)\, d\mu(g)$ est fini (<u>11</u>), c'est à dire, d'après le lemme si $\int_{G \times K} \|H(gk)\| \, d\mu(g) \, dm_K(k)$ est fini.

Si $\mu$ est l'image de $\mu * m_K$ par l'application $H : G \to \mathfrak{a}$ cette condition signifie que $\mu_{\mathfrak{a}}$ a un moment d'ordre un (en tant que probabilité sur $R^d \approx \mathfrak{a}$). On définit alors le premier moment de $\mu$ comme le vecteur $m(\mu)$ de $\mathfrak{a}$ , égal au premier moment de $\mu_{\mathfrak{a}}$ c'est à dire $\int H(xk)\, d\mu(g)\, dm_K(k)$.

(La probabilité étant invariante à gauche adaptée, $m(\mu)$ a été introduit dans (<u>8</u>) comme étant la limite p.s de $\dfrac{H[\prod_{i=1}^{n} X_i]}{n}$ où $x_i$, $i \in \mathbb{N}$ , sont des variables aléatoires sur G indépendantes de loi $\mu$). D'après les lemmes 1 et 4 , pour toute racine $\lambda$ positive, $\lambda(m(\mu))$ est strictement positif dès que $\mu$ est adaptée (cf. <u>16</u>). En particulier si $\mathfrak{a}$ est de dimension 1 et si on identifie $\mathfrak{a}^+$ à $R_+^*$ ,

$\int_G \{ \int_H H(xk)\, dm_K(k)\} \; d\mu(x)$ a toujours un sens, est strictement positif et est fini (égal à $m(\mu)$) si et seulement si $\mu$ a un premier moment.

Afin d'énoncer le théorème notons, pour $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{a}_\varepsilon$ le sous-cône de $\mathfrak{a}^+$ formé des éléments H qui vérifient $\lambda(H) \geq \varepsilon^2 \|H\|$, pour toute racine positive $\lambda$. La raison pour laquelle on introduit $\mathfrak{a}_\varepsilon$ est technique : on veut éviter l'étude des fonctions sphériques près des chambres de Weyl.

<u>Théorème 2</u> :

<u>Soit $\mu$ une probabilité adaptée invariante à gauche par K sur le groupe semi simple G, $\Gamma$ le noyau potentiel de la marche aléatoire droite de loi $\mu$ . Alors</u>

<u>Si dim $\mathfrak{a} = 1$, $\forall$ f $\in \mathcal{C}_c(G)$ biinvariante par K</u>

$$\lim_{h \to \infty} \{\exp 2\rho\, [\log \pi(h)]\} \quad \Gamma f(h) = (2\pi)^{d/2} \; \frac{\int_G f(g)dg}{m(\mu)}$$

<u>la limite étant nulle si $\mu$ n'a pas de premier moment.</u>

<u>Si dim $\mathfrak{a} > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, si h $\in$ G tend vers l'infini de telle sorte que log $\pi(g)$ reste dans $\mathfrak{a}_\varepsilon$, si f $\in \mathcal{C}_c(G)$,</u>

$$\lim_{h \to \infty} \{ \exp 2\rho \; [\log \pi(h)]\} \quad \Gamma f(h) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

Rappelons d'abord rapidement les estimations de Harish Chandra [(<u>21</u>) Th9.1.4.1. et Th9.1.5.1.] . Soit L l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'un système fondamental $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ de racines positives de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+)$ et R= $[\nu_1 + i\nu_2 \; ; \; \nu_1 \in \mathfrak{a}^*, \nu_2 \in \mathfrak{a}^*, \nu_2 \in \mathfrak{a}^+]$. Il existe une famille de fonctions $[\Gamma_\lambda, \lambda \in L]$, $\Gamma_o \equiv 1$ définies sur $\mathfrak{a}_c^*$ telles que $\nu \to \Gamma_\lambda(i\nu - \rho)$ soient analytiques sur $\widetilde{R}$ et si

$$\Phi(\nu, h) = \sum_{\lambda \in L} \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)\, e^{i\nu(H)} e^{-\lambda(H)} \quad , \; H = \log h \in \mathfrak{a}^+$$

alors $e^{\rho(H)} \quad \phi_\nu(h) = \sum_{w \in W} \Phi(w\nu, h)\, c(w\nu)$.

De plus [(<u>21</u>) tome II p. 334] , si $\lambda = \sum_{i=1}^t n_{\lambda_i} \lambda_i$, $m_\lambda = \sum_{i=1}^t n_{\lambda_i}$ ,

il existe deux constantes positives $\delta$ et D telles que, pour tout $\nu$ de $\widetilde{R}$ et $\lambda$ de L, $|\Gamma_\lambda \; (i\nu-\rho)| \leqq D\, m_\lambda^\delta$ .

Afin de montrer le théorème on peut supposer que f est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G)$, biinvariant par K . La fonction $\Gamma f$ est alors biinvariante et il suffit de considérer le cas où h tend vers l'infini en restant dans Exp $\mathfrak{a}_\varepsilon$ (quand $\mathfrak{a}$ est de dimension un, tout élément de $\mathfrak{a}^+$ tendant vers l'infini est rapidement dans $\mathfrak{a}_\varepsilon$). Sous ces hypothèses, en notant H = log h , on a, en étudiant $\Gamma\check{f}$ pour simplifier les notations :

$$e^{2\rho(H)}\Gamma\check{f}(h) = \frac{1}{[w]\ (2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad \phi_\nu(h) \quad |c(\nu)|^{-2}\ e^{2\rho(H)}\ d\nu$$

$$= \frac{1}{[w]\ (2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad \sum_{w\in W} \quad e^{\rho(H)}\ \phi(w\nu,\ h)\ c(w\nu)\ |c(\nu)|^{-2}\ d\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad e^{\rho(H)}\ \phi(\nu,\ h) \quad c(-\nu)^{-1}\ d\nu$$

d'où $e^{2\rho(H)}\ \Gamma\check{f}(h) =$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad \sum_{\lambda\in L} \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)e^{i\nu(H)}e^{(\rho-\lambda)(H)}c(-\nu)^{-1}\ d\nu$$

La démonstration s'effectue alors en quatre étapes. Utilisant l'égalité précédente pour étudier la limite de $e^{2\rho(H)}\Gamma\check{f}(h)$ on montre en a) que seul un nombre fini de termes en $\lambda$ pose problème. Pour chacun de ceux ci, en b). On fait apparaître par un changement de variable la transformée de Fourier euclidienne de la mesure potentielle associée à la probabilité sur $\mathfrak{a}$, $\mu_{\mathfrak{a}}$, introduite plus haut, multipliée par une certaine fonction. En c) on montre que seul le comportement au voisinage de zéro de cette fonction intervient. Ce qui nous permet, au d), d'utiliser le théorème du renouvellement appliqué à $\mu_{\mathfrak{a}}$ pour déterminer la limite.

a) Soit $L' = \left[\lambda \in L \text{ t.q. } \nu(H) \leqq \rho\ (H),\quad \forall H \in \mathfrak{a}_\varepsilon\right]$. Vue la définition de $\mathfrak{a}_\varepsilon$, L' est fini et par la majoration rappelée au-dessus :

$$\lim_{h\to\infty} \left| \int \frac{f(\nu)}{1-\ \mu(\nu)} \quad \sum_{\lambda\in L\setminus L'} \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)e^{i\nu(H)}e^{(\rho-\lambda)(H)}c(-\nu)^{-1}d\nu \right|$$

$$\leqq \lim_{h\to\infty} \alpha \sum_{\lambda\in L\setminus L'} \quad \sup_{\nu\in R} \quad |\Gamma_\lambda(i\nu-\rho)| \quad e^{(\rho-\lambda)\ (H)}$$

$$\leqq \lim_{h\to\infty} (\alpha\ D) \sum_{\lambda\in L\setminus L'} \quad m_\lambda^\delta \quad e^{(\rho-\lambda)\ (H)} = 0 \quad \text{puisque } H \in \mathfrak{a}_\varepsilon$$

b) On est donc amené à étudier un nombre fini de termes du type

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)e^{i\nu(H)}\ e^{(\rho-\nu)(H)}\ c(-\nu)^{-1}\ d\nu$$

soit encore

$$\lim_{r\nearrow 1} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu)} \quad \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)\ e^{i\nu(H)}e^{(\rho-\nu)(H)}c(-\nu)^{-1}d\nu$$

La fonction $\nu \to \mathfrak{F}f(\nu)\ \left[1-r\ \mathfrak{F}\mu(\nu)\right]^{-1}$ est analytique sur l'intérieur de T, continue sur T et $\nu \to \Gamma_\lambda(i\nu-\rho)\ e^{i\nu(H)}\ c(-\nu)^{-1}$ est analytique sur R. On peut donc, comme dans la démonstration du théorème de Palev Wiener sur G de Helgason [(21) lemme 9.2.3.3] puisque [ $\nu_1+iu\rho$ . $\nu_1 \in \mathfrak{a}^*$ , $u \in [0, 1]$ $\subset$ R $\cap$ T, appliquer le théorème de Cauchy pour montrer que chaque terme précédent est égal à

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\mathfrak{F}f(\nu+i\rho)}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho)} e^{i\nu(H)} e^{-\lambda(H)} \Gamma_\lambda(i\nu-2\rho)\, c(-\nu-i\rho)^{-1}\, d\nu$$

Remarquons que si $w_o$ est l'élément du groupe de Weyl envoyant $\rho$ sur $-\rho$ et si $\widehat{\mu_{\mathfrak{a}}}$ est la transformée de Fourier euclienne de $\mu_{\mathfrak{a}}$ on a

$$\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho) = \mathfrak{F}\mu(w_o\nu-i\rho) = \int e^{iw_o\nu\ H(xk)}\, d\mu(x)dm_K(k) = \widehat{\mu_{\mathfrak{a}}}(w_o\nu) \quad .$$

c) Considérons d'abord, pour $\eta$ fixé non nul

$$\lim_{h\to\infty} \lim_{r\uparrow 1} \int_{\{\nu/\|\nu\|\geq\eta\}} \frac{\mathfrak{F}f(\nu+i\rho)}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho)} e^{i\nu(H)} e^{-\lambda(H)} \Gamma_\lambda(i\nu-2\rho) c(-\nu-i\rho)^{-1}\, d\nu$$

Appliquant la proposition 2 à $\nu_2 = \rho$ , on voit que $1-r\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho)^{-1}$ est, sur $\nu$ , $\|\nu\| \geq \eta$ , borné uniformément en r. Le théorème de convergence dominée et le lemme de Riemann-Lebesgue montrent alors que, pour tout $\lambda$ de L', cette limite est nulle.

Puisque (proposition 2), $|\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho)| = |\widehat{\mu}_{\mathfrak{a}}(w_o\nu)|$ est strictement inférieur à un si $\nu$ n'est pas nulle, la probabilité $\mu_{\mathfrak{a}}$ est adaptée sur $\mathfrak{a}$ ; en particulier, pour $\eta$ assez petit, il existe une constante $\beta > 0$ vérifiant :

$$\forall\ \nu \in \mathfrak{a}^*, \|\nu\| \leqq \eta\ , \quad |1-r\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho)| \geqq r \quad 1-\mathfrak{F}\mu(\nu+i\rho) \geqq$$
$$r\ \mathrm{Re} \quad 1-\widehat{\mu}_{\mathfrak{a}}(w_o\nu) \geqq r\beta\|\nu\|^2$$

soit alors $g_\lambda(\nu) = \mathfrak{F}f(\nu+i\rho)\ \Gamma_\lambda(i\nu-2\rho)\ c(-\nu-i\rho)^{-1}$ , c'est une fonction analytique sur $\mathfrak{a}^*$ donc il existe une fonction $M : \mathfrak{a}^* \to \mathbb{C}$ , bornée sur $\nu/\|\nu\| \leqq \eta$ telle que si $\nu \in \mathfrak{a}^*$ ,

$$g_\lambda(\nu) = g_\lambda(0) + dg_\lambda(\nu) + \|\nu\|^2\, M(\nu)$$

La majoration précédente permet d'appliquer le théorème de Lebesgue pour montrer que

$$\lim_{h\to\infty} \lim_{r\to 1} \int_{\|\nu\|\leqq\eta} \left[ \frac{1}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu+ie)} e^{-\lambda(H)} e^{i\nu(H)} \|\nu\|^2 M(\nu)\right] d\nu$$
$$= \lim_{h\to x} \int_{\{\|\nu\|\leqq\eta\}} \left[-\frac{\|\nu\|^2}{1-\mu(\nu+ie)} e^{-\lambda(H)} e^{i\nu(H)} M(\nu)\right] d\nu$$

limite qui est nulle par le lemme de Riemann-Lebesgue.

d) Alors, si $h_\lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathfrak{a}$ dont la transformée usuelle $\widehat{h}_\lambda$ vérifie au voisinage de zéro,

$$\widehat{h}_\lambda(w_o\nu) = g_\lambda(0) + dg_\lambda(\nu) + O(\|\nu\|) \quad ;$$

$$\lim_{h\to 1}\ \lim_{r\uparrow 1} \int_{\|\nu\|\leq\eta} \frac{\mathfrak{F}f(\nu)}{1-r\mathfrak{F}\mu(\nu)}\ \Gamma_\lambda(i\nu-2\rho)\ c(-\nu-i\rho)^{-1} e^{i\nu(H)}\ \frac{e^{-\lambda(H)}d\nu}{(2\pi)^{d/2}} =$$

$$\lim_{h\to\infty}\ \lim_{r\ 1} \int_{\|\nu\|\leq\eta} \frac{\hat{h}_\lambda(w_o\nu)}{1-r\hat{\mu}_{\mathfrak{a}}(w_o\nu)}\ e^{i\nu(H)} e^{-\lambda(H)}\ \frac{d\nu}{(2\pi)^{d/2}}$$

$$= \lim_{H\to\infty}\ \lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\hat{h}_\lambda(\nu)}{1-r\hat{\mu}_{\mathfrak{a}}(\nu)}\ e^{iw_o^{-1}\nu(H)}\ e^{-\lambda(H)}\ \frac{d\nu}{(2\pi)^{d/2}}$$

Or, si U est le noyau potentiel de la marche aléatoire sur $\mathfrak{a}\simeq\mathbb{R}^d$ de loi $\mu_{\mathfrak{a}}$ (i.e $Uf(x) = \sum_{n\geq 0} \int f(x+y)\, d\mu^n_{\mathfrak{a}}(y)$, si $f\in\mathcal{C}_c(\mathfrak{a})$, $x\in A$) et $\check{h}_\lambda$ est fonction définie par $\check{h}_\lambda(x) = h_\lambda(-x)$, $x\in A$,

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathfrak{a}^*} \frac{\hat{h}_\lambda(\nu)}{1-r\hat{\mu}_{\mathfrak{a}}(\nu)}\ e^{iw_o^{-1}\nu(H)}\ \frac{d\nu}{(2\pi)^{d/2}} = (2\pi)^{d/2}\ U\check{h}_\lambda(w_o^{-1}H)$$

Donc, $\mu_{\mathfrak{a}}$ étant adaptée transitoire, par le théorème du renouvellement sur $\mathfrak{a}$ (17),

. si $d>1$. $U\check{h}_\lambda(w_o^{-1}H)$ tend vers zéro quand H tend vers l'infini et $h^{2\rho}\ \Gamma f(h)$ tend vers zéro.

. si $d=1$, si $\mu$ (et donc $\mu_{\mathfrak{a}}$) n'a pas de premier moment la limite est aussi nulle, alors que si $\mu$ a un premier moment égal à $m(\mu)$, si par exemple on a choisi comme chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+ = R^+_*$ , $w_o$ étant la symtérie dans $\mathbb{R}$ , et $m(\mu)$ strictement positif,

$$\lim_{H\to\infty,\ H\in\mathfrak{a}^*} U\check{h}_\lambda\ (w_o^{-1}H) = \lim_{H\to+\infty} Uh_\lambda\ (-H) = \frac{\int_{\mathfrak{a}} h_\lambda(x)dx}{m(\mu)}$$

$$\text{et}\quad \lim_{h\to\infty} e^{2\rho(H)}\Gamma f(h) = \sum_{\lambda\in L'}\ \lim_{H\to\infty} e^{-\lambda(H)}\ (2\pi)^{d/2}\ U\check{h}_\lambda(w_o^{-1}H)$$

$$= \lim_{H\to\infty}\ (2\pi)^{d/2}\ U\check{h}_o\ (w_o^{-1}H) = (2\pi)^{d/2}\ \frac{\int_{\mathfrak{a}} h_o(x)dx}{m(\mu)}$$

$$\text{Puisque}\quad \int_{\mathfrak{a}} \check{h}_o(x)dx = \hat{h}_o(0) = g_o(0) = f(0)\ \Gamma_o(-2\rho)\ c(-i\rho)^{-1}$$

$$= \mathfrak{F}f(0) = \int_G f(g)dg = \int_G \check{f}(g)dg$$

(On a utilisé le fait que $\Gamma_o \equiv 1$ et $c(-i\ ) = \dfrac{I(i(-i\rho))}{I(\rho)} = 1$)

Le théorème est démontré.

<u>Remarque</u> :

Les estimations du noyau potentiel associé à une loi gaussienne sur Sl $(3,\mathbb{C})$ de (6) montrent que lorsque d est supérieur à un il est possible que lorsque h tend vers l'infini dans certaines directions de $\mathfrak{a}_\varepsilon$, $h^{2\rho}\Gamma f(h)$ ne tende vers zéro que polynomialement vite.

Références :


(1) Baldi P., Bougerol P., Crepel P. - "Théorème central limite local sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$" Ann. I.H.P. Sect. B vol XIV n°1, p.99-112(1978).

(2) Berg C., Faraut J. - "Semi groupes de Feller invariants sur les espaces homogènes non moyennable" Math. Z. 136 p. 279-290 (1974).

(3) Bougerol P. - "Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts". Wahrscheinlichkeits theorie 45, p. 135-157 (1978).

(4) Bougerol P. - "Un théorème central limite local sur les groupes de Lie semi-simples" A paraître aux C.R.A.S.

(5) Derriennic Y., Guivarc'h Y. - "Théorème du renouvellement pour les groupes non moyennables" C.R.A.S. (A) 277 p. 613-615 (1973).

(6) Dynkin E.B.- "Brownian motion in certain symmetric spaces and non negatives eigen fonctions of the Laplace Beltromi operator" A.M.S. Trans. vol 72 , p. 203-228 (1961).

(7) Flensted-Jensen M.,Ragozin D.L. - "Spherical functions are Fourier transforms of $L_1$ functions" Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t.6, p.457-458 (1973).

(8) Fürstenberg H. - "Non commuting random products" T.A.M.S. 108 p. 377-428 (1963).

(9) Gerl P. - "Ein Gleichverteilungssatz auf $F_2$" Probability measures on groups. Lecture notes n° 706, Springer Verlag p. 126-129 (1979).

(10) Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N. - "Limit distributions for sums of independant random variables" Addison Wesley, Reading Mars (1954).

(11) Guivarc'h Y. - "Loi des grands nombres sur les groupes de Lie" A paraître au Bull. Soc. Math. France.

(12) Guivarc'h Y. - "Théorèmes quotients pour les marches aléatoires" A paraître.

(13) Helgason S. - "Differential geometry and symmetric spaces" Academic Press, New York (1962).

(14) Kawada Y., Ito.K.- "On the probability distribution on a compact group" Proc. Phys. Math. Soc. Japan 22 p. 977-999 (1940).

(15) Kostant B. - "On convecity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition" Ann. scient. Ec. Norm. Sup 4ème série, t.6, p. 413-455 (1973).

(16) Raugi A. - "Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 54, p. 127 (1977).

(17) Revuz D. -"Markov Chains" North Holland Publ. co, Amsterdam Oxford (1975).

(18) Sawyer S. - "Isotropie random walks in a tree". Wahrscheinlichkeitstheorie 42, p. 279-292 (1978).

(19) Stone C.J. - "A local limit theorem for multidimensional distribution functions Ann. Math. Stat. 36 p. 546-551 (1965).

(20) Tutubalin V.N. - "On the limit behavior of compositions of measures in the plane and space of Lobachevsky" Theor. Probability Appl. 7 p. 189-196 (1962).

(21) Warner G. - "Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups" t. I et II, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York (1972).



Adresse actuelle : Faculté des Sciences et techniques
Monastir , TUNISIE.

Adresse habituelle : Université Paris VII
UER Mathématiques 2 Place Jussieu
F-75221 Paris Cedex 05
FRANCE.