LÉONARD GALLARDO
VINCENT RIES

Marches aléatoires sur les espaces homogènes du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$

Astérisque, tome 74 (1980), p. 123-138
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__74__123_0>

MARCHES ALÉATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES DU GROUPE DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^n$

Léonard GALLARDO et Vincent RIES

INTRODUCTION

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, μ une probabilité adaptée sur G, H un sous-groupe fermé de G et $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G et de même loi μ. Pour tout x de l'espace homogène droit ${}_H\backslash G$, on appelle marche aléatoire (droite) de loi μ partant de x la chaîne de Markov $Y_o^x = x, \ldots, Y_n^x = xX_1X_2\ldots X_n, \ldots$ et l'élément x est dit :

- μ-récurrent (ou, plus simplement, récurrent) si, pour tout voisinage V de x, $h_V(x) = P(\sum_n \mathbb{1}_V(Y_n^x) = +\infty) = 1$,
- μ-transitoire s'il existe un voisinage V de x tel que $h_V(x) = 0$.

Dans le cas où G est à croissance polynomiale et où μ est étalée, les éléments de ${}_H\backslash G$ sont soit tous μ-récurrents, soit tous μ-transitoires ([7]).
On peut alors classer les espaces homogènes de G en :
- espaces homogènes récurrents (ceux dont les élements sont tous μ-récurrents pour au moins une probabilité μ étalée et adaptée).
- espaces homogènes transitoires (les autres).

Une condition nécessaire et suffisante pour que ${}_H\backslash G$ soit transitoire est que toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfasse à l'une des deux conditions équivalentes :

(A) $\quad (\exists x \in {}_H\backslash G)(\exists K$, compact de ${}_H\backslash G)(U_\mu(x, K) = \sum_n \varepsilon_x * \mu^{*n}(K) < +\infty)$

(A') $\quad (\forall x \in {}_H\backslash G)(\forall K$, compact de ${}_H\backslash G)(U_\mu(x, K) < +\infty)$.

(cf [7] où il est montré en outre que, dans cette situation, la fonction $U_\mu(\cdot, K)$ est en fait bornée).

La question est bien sûr de trouver un critère portant sur H qui permette de classer l'espace homogène ${}_H\backslash G$.

On obtient ici le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> : *Soit* $G = SO(n) \times_\varphi \mathbb{R}^n$ *le groupe des déplacements de* $\mathbb{R}^n$, *H un sous-groupe fermé connexe de G ,* π_2 *la projection de G sur* $\mathbb{R}^n$ *et d la dimension de l'espace vectoriel engendré par les directions asymptotiques de* $\pi_2(H)$. *Alors* ${}_H\backslash G$ *est transitoire si et seulement si* $n-d \geq 3$.

Nous reprendrons ici le plan en quatre étapes de la démonstration qui figure dans ([4]).

<u>1ère étape</u> : <u>Réduction au cas où H est résoluble</u>.

Soit H = S.R la décomposition de Levi-Malcev où R est le radical résoluble de H et où S est un sous-groupe semi-simple de H .

<u>PROPOSITION 1</u> : ${}_H\backslash G$ est transitoire si et seulement si ${}_R\backslash G$ est transitoire.

<u>Démonstration</u> :

a) G étant à croissance polynomiale, H l'est également ([5]) donc est moyennable. H est donc extension compacte de son radical résoluble ce qui implique que S est compact.

Une conséquence en est que les espaces vectoriels engendrés par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$ et $\pi_2(R)$ ont même dimension d .

b) L'application Γ de ${}_R\backslash G$ dans ${}_H\backslash G$ qui à la classe x = Rg associe la classe y = Hg est équivariante et définit une fibration $({}_R\backslash G, {}_H\backslash G, \Gamma)$ dont les fibres sont difféomorphes à ${}_R\backslash H$ donc à S ([2]). Par la propriété de trivialité locale, il existe, pour tout y de ${}_H\backslash G$, un voisinage compact V de y tel que

$$\Gamma^{-1}(V) = V \times S$$

et $\Gamma^{-1}(V)$ est compact puisque S l'est.

Tout compact K de ${}_H\backslash G$ peut ainsi être recouvert par un nombre fini de tels compacts V_i et on a alors :

$$\Gamma^{-1}(K) \subset \Gamma^{-1}(\bigcup_i V_i) = \bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i) \quad .$$

Γ étant continue, $\Gamma^{-1}(K)$ est fermé dans le compact $\bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i)$ donc est compact.

c) Soit $y \in {}_H\backslash G$, $x \in \Gamma^{-1}(\{y\})$ et W_n^y(resp. Y_n^x) la marche aléatoire de loi μ sur ${}_H\backslash G$ (resp. ${}_R\backslash G$) partant de y (resp. x) . Γ étant équivariante, on a :

$$\Gamma(Y_n^x) = W_n^y \quad ,$$

donc, pour tout compact K de ${}_H\backslash G$:

$$W_n^y \in K \Leftrightarrow Y_n^x \in \Gamma^{-1}(K) \quad \text{(qui est compact).}$$

Ces deux marches passant simultanément dans des compacts, les espaces homogènes ${}_H\backslash G$ et ${}_R\backslash G$ sont donc soit tous deux récurrents soit tous deux transitoires.

Conclusion : Dans la suite H sera supposé résoluble.

2ème étape : Une autre condition nécessaire et suffisante pour que ${}_H\backslash G$ soit transitoire.

Notations :

I est l'élément neutre de $SO(n)$, e celui de G et π_1 est la projection de G sur $SO(n)$. Les éléments de G sont notés $g = (r, \alpha)$ avec $r = \pi_1(g)$ et $\alpha = \pi_2(g)$, l'opération dans G étant alors définie par :

$$(r, \alpha).(r', \alpha') = (rr', \alpha + r\alpha').$$

Le sous-groupe vectoriel $T = \{(I, \alpha) \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ des translations de G est identifié à $\mathbb{R}^n$ et ses sous-groupes vectoriels connexes aux sous-espaces vectoriels correspondants de $\mathbb{R}^n$.

On note $V_o = T \cap H$; W_o est l'espace vectoriel engendré par V_o et W est l'orthogonal de W_o dans $\mathbb{R}^n$.

I.- Structure des sous-groupes connexes fermés résolubles de G .

LEMME 1 : $\pi_1(H)$ est abélien.

Démonstration :

Si on note $\mathcal{G}$, $so(n)$, et $\mathcal{H}$ les algèbres de Lie de G , $SO(n)$ et H et si π_1' est la projection de $\mathcal{G}$ dans $so(n)$, $\pi_1'(\mathcal{H})$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie compacte $so(n)$. Etant donc une sous-algèbre compacte de $so(n)$ elle est somme directe de son centre et d'un idéal semi-simple ([8]) qui est réduit à $\{0\}$ puisque $\pi_1'(\mathcal{H})$ est résoluble. $\pi_1'(\mathcal{H})$ est donc abélienne et par conséquent $\pi_1(H)$ est un groupe abélien.

LEMME 2 : Il existe une application λ de $\pi_1(H)$ dans W telle que tout élément de H s'écrive de façon unique $(r, \lambda_o + \lambda(r))$ où $r \in \pi_1(H)$ et $\lambda_o \in W_o$.

Démonstration :

Fixons (r, α) dans H .

a) V étant distingué dans H , il existe, pour tout $(I, \alpha_o) \in V_o$, un $(I, \alpha_1) \in V_o$ tel que :

$$(r, \alpha)(I, \alpha_o) = (I, \alpha_1)(r, \alpha)$$

c'est-à-dire : $(r, \alpha + r\alpha_o) = (r, \alpha_1 + \alpha)$

d'où : $r\alpha_o = \alpha_1 \in V_o$.

b) L'application de V_o dans V_o qui à α_o associe $r\alpha_o$ est surjective donc :

$$(r, \alpha).V_o = \{(r, \alpha + v)\ ;\ v \in V_o\} \quad \text{qu'on note} \quad (r, \alpha + V_o) \ .$$

c) Pour tout $(r, \alpha') \in H$ on a :

$$(r, \alpha').(r, \alpha)^{-1} = (r, \alpha').(r^{-1}, -r^{-1}\alpha)$$
$$= (I, \alpha' - \alpha) \in V_o$$

Donc $(r, \alpha') \in (r, \alpha).V_o = (r, \alpha + V_o)$

ou $\pi_1^{-1}(\{r\}) = (r, \alpha + V_o)$.

α' et α ont donc même projection sur W . Celle-ci ne dépend donc que de r . On la note $\lambda(r)$.

LEMME 3 : $\lambda(rr') = \lambda(r) + r\lambda(r')$.

Démonstration :

Grâce au lemme 2, le produit de deux éléments de H peut s'écrire de deux façons :

$$(r, \lambda_o + \lambda(r)).(r', \lambda_o' + \lambda(r') = (rr', \lambda_o'' + \lambda(rr'))$$

ou $\qquad = (rr', \lambda_o + r\lambda'_o + \lambda(r) + r\lambda(r'))$.

Mais (point a du lemme précédent) tout $r \in \pi_1(H)$ stabilise V_o donc aussi W_o et W . Il en résulte que $r\lambda'_o \in W_o$ et $r\lambda'(r) \in W$. La formule annoncée en découle par identification.

LEMME 4 : $L = \{(r, \lambda(r))\ ;\ r \in \pi_1(H)\}$ est un sous-groupe abélien fermé de G inclus dans le produit direct d'un groupe compact et d'un sous-groupe de T .

Démonstration :

a) Il est clair, grâce au lemme 3, que L est un groupe isomorphe à $\pi_1(H)$ donc est abélien.

Soit maintenant une suite $(r_n, \lambda(r_n))$ d'éléments de L convergeant vers un élément (r, α) de G et $a_1, a_2, \dots a_p$ des vecteurs linéairement indépendants du groupe vectoriel V_o tels que :

$$V_o = \mathbb{R}a_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}a_q \oplus \mathbb{Z}a_{q+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_p \quad .$$

On peut alors trouver, pour tout n , un $c_n \in C = [0, 1[a_{q+1} \oplus \dots \oplus [0, 1[a_p$ tel que $(r_n, c_n + \lambda(r_n)) \in H$. Puisque C est d'adhérence $\bar{C}$ compacte il existe une sous-suite de la suite c_n , qu'on notera encore c_n , qui converge vers un $c \in \bar{C} \subset W_o$. Enfin, H étant fermé, la suite $(r_n, c_n + \lambda(r_n))$ converge et a pour limite $(r, c + \alpha) \in H$ avec $c \in W_o$ et $\alpha \in W$. Mais comme tout élément de H s'écrit de façon unique $(r, \lambda_o + \lambda(r))$ avec $\lambda_o \in W_o$ et $\lambda(r) \in W$ on a par identification :

$$\lim_n \lambda(r_n) = \lambda(r) \quad .$$

L étant fermé dans G , c'est donc un sous-groupe de Lie de G .

b) $\pi_1(H)$ étant abélien, il est contenu dans un tore maximal de $SO(n)$. Les tores maximaux d'un groupe compact étant conjugués les uns des autres par automorphismes intérieurs ([8]) on supposera dans la suite que tout r de $\pi_1(H)$ peut s'écrire matriciellement :

$$r = \begin{pmatrix} r_1 & & & & 0 \\ & r_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r_m & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $r_1, r_2, \ldots r_m \in SO(2)$ et où le 1 n'existe pas si n est pair.

L est alors un sous-groupe du groupe M constitué des éléments de G dont la projection sur $SO(n)$ a la forme ci-dessus.

Soit $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{G}_2$ les algèbres de Lie de L, M, H et G_2 (= groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$) . $\mathcal{L}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est somme directe de m algèbres de Lie isomorphes à $\mathcal{G}_2$ (et de $\mathbb{R}$ si n est impair) :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_2 \ (\oplus \mathbb{R}) \quad .$$

Soit γ_i la projection de $\mathcal{M}$ sur le $i^{\text{ème}}$ terme de cette somme directe. Alors :

$$\mathcal{L} \subset \bigoplus_i \gamma_i(\mathcal{L})$$

où les $\gamma_i(\mathcal{L})$ sont des sous-algèbres abéliennes de $\mathcal{G}_2$.

c) Si on identifie G_2 au groupe de matrices : $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} r & \alpha \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) . \ r \in SO(2) \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\}$, $\mathcal{G}_2$ s'identifie à l'ensemble de matrices : $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \sigma & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ; \ \sigma = \text{matrice } 2 \times 2 \text{ antisymétriques} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}^2 \right\}$ qui admet pour base :

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} ,$$

le crochet étant défini par : $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = e_2$ et $[e_2, e_3] = -e_1$. $\mathcal{G}_2$ étant mis sous cette forme, on peut montrer facilement que ses seules sous-algèbres non triviales sont le plan $\mathcal{P}$ engendré par $\{e_1, e_2\}$ et les droites de $\mathcal{G}_2$. On a ainsi :

$$\mathcal{L} \subset \bigoplus_i \mathcal{D}_i \bigoplus_j \mathcal{D}'_j \bigoplus_k \mathcal{P}_k \quad ,$$

les $\mathcal{D}_i$ étant des droites d'un $\mathcal{G}_2$ non incluses dans le plan $\mathcal{P}$ de ce $\mathcal{G}_2$, les $\mathcal{D}'_j$ étant des droites incluses dans un plan $\mathcal{P}$, les $\mathcal{P}_k$ étant des plans $\mathcal{P}$.

Les $\mathcal{D}_i$ sont de la forme $\mathbb{R}.A_i$ où $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_i \\ -1 & 0 & b_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a, pour $j \geqslant 1$:

$$A_i^{2j+1} = (-1)^j A_i \quad \text{et} \quad A_i^{2j} = (-1)^{j+1} A_i^2 \quad .$$

A toute droite $\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{G}_2$ correspond ainsi dans G_2 un sous-groupe à un paramètre :

$$t \rightsquigarrow \exp(t\,A_i) = I + (1-\cos t)A_i^2 + \sin t\,A_i$$

dont les éléments s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & a_i \sin t + b_i(1-\cos t) \\ -\sin t & \cos t & a_i(\cos t-1) + b_i \sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou, sous la forme habituelle, $(r_t, (r_t-I)\alpha_i)$

avec $\quad r_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $\alpha_i = \begin{pmatrix} -b_i \\ a_i \end{pmatrix}$.

Ce sous-groupe est compact et à $\mathcal{E} = \bigoplus_i \mathcal{D}_i \subset \mathcal{G}$ correspond donc un sous-groupe compact E de G .

Quant à $\mathfrak{F}_1 = \bigoplus_j \mathcal{D}'_j \bigoplus_k \mathcal{P}_k$, il lui correspond un sous-groupe connexe F_1 de T qui est donc un sous-espace vectoriel de W .

De plus $E \cap F_1 = \{e\}$ puisque, si $(I, \alpha) \in E \cap F_1$, on a $(I, \alpha)^n = (I, n\alpha) \in E$ qui est compact, ce qui impose $\alpha = 0$. D'autre part, de même que $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{F}_1$, E et F_1 commutent. On a donc :

$$L \subset E \times F_1$$

où le produit est direct.

PROPOSITION 2 : Il existe une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale : $\mathbb{R}^n = W_o \oplus W_1 \oplus W_2$ et un compact $K_2 \subset W_2$ tels que tout élément de H s'écrive de manière unique $(r, \lambda_o + \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$ avec $\lambda_o \in W_o$, $\lambda_1(r) \in W_1$ et $\lambda_2(r) \in K_2$.
De plus, tout élément de $\pi_1(H)$ laisse invariant tout élément de W_1 .
Enfin, l'application λ_1 est un homomorphisme surjectif du groupe $\pi_1(H)$ sur le groupe vectoriel W_1 et $W_o \oplus W_1$ est engendré par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$.

Démonstration :

a) On constate d'abord que, puisque E et F_1 commutent, on a, pour $(r, \alpha) \in E$ et $(I, \beta) \in F_1$,

$$(r, \alpha + r\beta) = (r, \alpha).(I, \beta) = (I, \beta)(r, \alpha) = (r, \beta + \alpha)$$

donc

$$r\beta = \beta \quad .$$

Tout $r \in \pi_1(H) (= \pi_1(L) \subset \pi_1(E))$ laisse donc fixe tout $\beta \in F_1$ et, par voie de conséquence, laisse invariant globalement l'orthogonal F_2 de F_1 dans W .

b) Tout élément de L s'écrit de manière unique :

$$(r, \lambda(r)) = (r, \lambda'(r)).(I, \lambda_1''(r))$$

avec $(r, \lambda'(r)) \in E$ et $(I, \lambda_1''(r)) \in F_1$,

c'est à dire :

$$\begin{aligned}(r, \lambda(r)) &= (r, \lambda'(r) + r\lambda_1''(r)) \\ &= (r, \lambda'(r) + \lambda_1''(r)) \quad \text{d'après le point a} \;.\end{aligned}$$

Mais $\lambda'(r)$ se décompose lui-même de manière unique en :

$$\lambda'(r) = \lambda_1'(r) + \lambda_2(r)$$

avec $\lambda_1'(r) \in F_1$ et $\lambda_2(r) \in F_2$.

On a ainsi, en posant $\lambda_1(r) = \lambda_1'(r) + \lambda_1''(r)$, une décomposition unique de tout élément de L :

$$(r, \lambda(r)) = (r, \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$$

avec $\lambda_1(r) \in F_1$ et $\lambda_2(r) \in F_2$.

c) $(r, \lambda'(r))$ restant dans un compact fixe E de G quand r décrit $\pi_1(H)$, $\lambda'(r)$ reste, lui, dans un compact fixe de $\mathbb{R}^n$ et il en est de même de sa composante sur F_2 . $\lambda_2(r)$ reste donc dans un compact fixe K_2 de F_2 quand r décrit $\pi_1(H)$.

d) Suivant le lemme 3, on a, pour r et $r' \in \pi_1(H)$:

$$\lambda_1(rr') + \lambda_2(rr') = (\lambda_1(r) + \lambda_2(r)) + r(\lambda_1 r') + \lambda_2(r'))$$

qui vaut, d'après le point a :

$$= (\lambda_1(r) + \lambda_1(r')) + (\lambda_2(r) + r\lambda_2(r')) \quad .$$

Comme, toujours par le point a , $r\lambda_2(r')$ reste dans F_2 , on obtient par identification :

$$\lambda_1(rr') = \lambda_1(r) + \lambda_1(r')$$

L'ensemble $W_1 = \{\lambda_1(r) \; ; \; r \in \pi_1(H)\}$ est donc un sous-groupe vectoriel de F_1 et il est clair que $W_o \oplus W_1$ est engendré par les directions asymptotiques de $\pi_2(H)$.

e) Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur W . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \pi_1(H) \arrow[d, "\lambda"] \\ \pi_2(H) \arrow[r, "p"] & \lambda(\pi_1(H)) \end{tikzcd}$$

$\lambda(\pi_1(H))$, image par l'application continue $p \circ \pi_2$ du connexe H , est donc connexe ainsi que sa projection orthogonale W_1 sur F_1 . W_1 est donc un sous-espace vectoriel de W . On note W_2 son orthogonal dans W et la proposition est démontrée.

II.- Un critère de transience de ${}_H\backslash G$.

Notations :

Pour tout compact B de W_2 on note $\widetilde{B}$ la partie de G définie par $\widetilde{B} = SO(n)\times(W_o \oplus W_1 \oplus B)$ et π représente la projection canonique de G dans ${}_H\backslash G$.

PROPOSITION 3 :

1) Pour tout compact K de ${}_H\backslash G$, il existe un compact B de W_2 tel que

$$\pi^{-1}(K) \subset \widetilde{B} \quad .$$

2) Pour tout compact B de W_2 , il existe un compact K de ${}_H\backslash G$ tel que

$$\pi(\widetilde{B}) \subset K \quad .$$

Démonstration :

a) Pour tout compact K de ${}_H\backslash G$, il existe un compact K' de G tel que $\pi(K') = K$, donc tel que

$$\pi^{-1}(K) = H.K' = \bigcup_{g\in H} g.K' \quad .$$

Or tout élément g de H s'écrit , avec les notations de la proposition 2

$$g = (r,\ \lambda_o + \lambda_1(r) + \lambda_2(r))$$

avec $\lambda_o \in W_o$, $\lambda_1(r) \in W_1$, $\lambda_2(r) \in K_2$, d'où

$$g.K' = \{(rs,\ \lambda_o + \lambda_1(r) + \lambda_2(r) + r\alpha)\ ;\ (s,\alpha) \in K'\} \quad .$$

Si p_2 est la projection orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur W_2 , on a donc :

$$p_2\circ\pi_2(g.K') = \{\lambda_2(r) + p_2(r\alpha)\ ;\ (s,\alpha)\in K'\}$$

et donc

$$p_2\circ\pi_2(g.K') \subset K_2 + rp_2\circ\pi_2(K')$$

qui reste dans un compact fixe B de W_2 quand r décrit $\pi_1(H)$.

On a ainsi :

$$\pi^{-1}(K) = \bigcup_{g\in H} g.K' \subset \widetilde{B} \quad .$$

b) Soit B un compact de W_2 et $(s, \alpha) \in \widetilde{B}$.

Pour tout $(s', \alpha') \in G$ tel que $\pi(s', \alpha') = \pi(s, \alpha)$, il existe $g \in H$ tel que

$$\begin{aligned}(s', \alpha') &= g.(s, \alpha)\\ &= (r, \lambda_o + \lambda_1(r) + \lambda_2(r)).(s, \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2)\\ &= (rs, \lambda_o + \lambda_1(r) + \lambda_2(r) + r\alpha_o + r\alpha_1 + r\alpha_2)\end{aligned}$$

où $r \in \pi_1(H)$; λ_o , $\alpha_o \in W_o$; $\lambda_1(r)$, $\alpha_1 \in W_1$; $\lambda_2(r) \in K_2$; $\alpha_2 \in B$.

Mais on sait (lemmes 2 et 4) que λ_o et α_o se décomposent eux-mêmes de façon unique en $\lambda_o = v + c$ et $\alpha_o = v' + c'$ avec $u, v' \in V$ et $c, c' \in C$. L'égalité des projections $\pi(s', \alpha') = \pi(s, \alpha)$ n'est possible que si :

$$\alpha' = (v + rv') + (c + rc') + (\lambda_1(r) + \alpha_1) + (\lambda_2(r) + r\alpha_2)$$

Mais λ_1 étant par définition surjective sur W_1 on peut choisir $r \in \pi_1(H)$ tel que $\lambda_1(r) = -\alpha_1$. Il suffit alors de prendre $v = -rv'$ pour que :

$$\alpha' \in C + rC + K_2 + rB \quad .$$

C étant relativement compact, il existe un compact fixe K' de $\mathbb{R}^n$ qui contienne $C + K_2 + r(C + B)$ pour tout $r \in \pi_1(H)$.

Alors :

$$\pi(\widetilde{B}) \subset \{\pi(s', \alpha') \; ; \; s' \in SO(n) \; ; \; \alpha' \in K'\} = \pi(SO(n) \times K')$$

qui est un compact de $_H\backslash G$.

<u>*Corollaire 1*</u> : *Une condition nécessaire et suffisante pour que $_H\backslash G$ soit transitoire est que toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfasse à la condition :*

(A") $\quad (\exists g \in G)\ (\exists B,$ *compact de* $W_2)\ (\widetilde{U}_\mu(g, B) = \sum_n \varepsilon_g * \mu^{*n}(B) < +\infty)$

ou (A"') $\quad (\forall g \in G)\ (\forall B,$ *compact de* $W_2)\ (\widetilde{U}_\mu(g, B) < +\infty)$

<u>Démonstration</u> :

Soit $g \in G$, $x = \pi(g)$, Z_n^g la marche de loi μ sur G partant de g et $Y_n^x = \pi(Z_n^g)$.

Lorsque Y_n^x passe dans un compact de $_H\backslash G$, Z_n^g passe dans un $\widetilde{B}$ et inversement . $\widetilde{U}_\mu(g, B)$ est le potentiel de $\widetilde{B}$ pour la marche Z_n^g d'où le résultat.

<u>*Corollaire 2*</u> : *La condition $n-d \geqslant 3$ du théorème est nécessaire.*

<u>Démonstration</u> :

Si $\dim W_2 = n-d \leqslant 2$, on peut construire explicitement sur ${}_H\backslash G$ une marche aléatoire de loi μ telle que tout élément de ${}_H\backslash G$ soit μ-récurrent ; il suffit pour cela, d'après le corollaire 1, que le potentiel $\widetilde{U}$ en e d'un compact B de W_2 soit infini. C'est le cas si $\mu = \sigma \otimes \nu_1 \otimes \nu_2$ où σ est la mesure de Haar de $SO(n)$ et $\nu_1 \otimes \nu_2$ la mesure gaussienne centrée et réduite sur $\mathbb{R}^n$ avec ν_1 portée par $W_o \oplus W_1$ et ν_2 portée par W_2 . En effet on a alors :

$$\widetilde{U}(e, B) = \sum_n \nu_2^{*n}(B)$$

qui est infini d'après un résultat classique sur la récurrence de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ([9]).

<u>3ème étape</u> :

On conserve les notations précédentes.

<u>PROPOSITION 4</u> : Si $n-d \geqslant 3$, la condition (A) est satisfaite dès que μ admet un moment d'ordre 3 (en fait $2 + \delta$, $\delta > 0$ suffit) .

<u>Démonstration</u> :

C'est une conséquence évidente du corollaire 1 et du lemme suivant :

<u>LEMME 5</u> : Si μ , probabilité adaptée et étalée sur G , possède un moment d'ordre 3 (c'est-à-dire si $\int_G |\pi_2(g)|^3 d\mu(g) < +\infty$) et si $n-d \geqslant 3$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, à tout compact B de W_2 on puisse associer un compact B' de W_2 et une constante $k > 0$ tels que, si $g \notin \widetilde{B}'$, on ait :

$$\widetilde{U}_\mu(g, B) \leqslant \frac{k}{|p_2 \circ \pi_2(g)|^{2\alpha}} \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

Il suffit d'adapter [6] (pages 80-88) où on établit le même résultat pour les compacts de G . On y remplace les compacts K de G par des $\widetilde{B}$ où B est un compact de W_2 et on choisit comme fonction barrière la fonction f_α définie par :

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \frac{1}{(x_1^2+\dots+x_{n-d}^2)^\alpha} .$$

On peut trouver le détail de cette démonstration dans ([3]) .

<u>4ème étape</u> : <u>Fin de la démonstration du théorème</u>.

<u>PROPOSITION 5</u> : Si $n-d \geqslant 3$, toute probabilité μ adaptée et étalée sur G satisfait à (A) .

<u>Notations</u> :

1) $\check{\mu}$ est la probabilité sur G définie par $d\check{\mu}(g) = d\mu(g^{-1})$

2) $c = \int_G e^{-|\pi_2(g)|} d\mu(g)$ (on a : $0 < c < 1$ car μ est adaptée sur G)

3) ν est la probabilité symétrique sur G définie par

$$d\nu(g) = \frac{1}{c} e^{-|\pi_2(g)} d(\frac{\mu+\check{\mu}}{2}) (g) .$$

4) Pour toute probabilité ρ sur G on définit sur ${}_H\backslash G$ le noyau de transition P_ρ et le noyau potentiel U_ρ par :

$$\forall x \in {}_H\backslash G , \forall f \text{ borélienne et bornée sur } {}_H\backslash G , P_\rho f(x) = \int_G f(xg)d\rho(g)$$

$$\forall x \in {}_H\backslash G , \forall K \subset {}_H\backslash G , U_\rho(x, K) = \sum_n P_{\rho^{*n}} 1\!\!1_K(x) .$$

5) Soit m une mesure invariante sur ${}_H\backslash G$ (il en existe puisque G est de type R) ; On note $L^2({}_H\backslash G)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable par rapport à m et par $< f, f'>$ le produit scalaire correspondant. Tout noyau de transition P_ρ se prolonge alors en un opérateur sur $L^2({}_H\backslash G)$ qu'on notera encore P_ρ .

LEMME 6 : $\forall \alpha \in]0, 1[$, la forme bilinéaire $< (I-\alpha P_\nu)\cdot, \cdot >$ est symétrique et positive.

Démonstration : Pour f et $f' \in L^2(_H\backslash G)$ on a :

$$< (I-\alpha P_\nu)f, f' > = < f, f'> - \alpha \int_M \int_G f(xg)f'(x)d\nu(g)dm(x)$$

En posant $h = g^{-1}$ et $x = yh$ on a , ν étant symetrique et m invariante,

$$< (I-\alpha P_\nu)f, f' > = < f', f > - \alpha \int_M \int_G f'(yh)f(y)d\nu(h)dm(y) =$$

$$< (I-\alpha P_\nu)f', f >$$

La forme est positive car, l'opérateur P_ν étant de norme 1 , l'opérateur $(I-\alpha P_\nu)$ est positif.

LEMME 7 :

$$\forall \alpha \in]0, 1[\quad , \forall f \in L^2(_H\backslash G) \ , c < (I-\alpha P_\nu)f, f > \leqslant < (I-\alpha P_\mu)f, f >$$

Démonstration :

La mesure ρ sur G définie par :

$$d\rho(g) = \frac{1-e^{-|\alpha_2(g)|}}{1-c} \; d(\frac{\mu+\check{\mu}}{2})(g)$$

est une probabilité. Par conséquent l'opérateur $I-\alpha P_\rho$ est positif pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

On a d'autre part, pour toute $f \in L^2(_H\backslash G)$,

$$\begin{aligned} < P_{\check{\mu}}f, f > &= \int_M \int_G f(x)f(xg)d\mu(g^{-1})dm(x) \\ &= \int_M \int_G f(yh)f(y)d\mu(h)dm(y) \\ &= < P_\mu f, f > \quad . \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$< P_{\frac{\mu+\check{\mu}}{2}} f, f > = < P_\mu f, f > \quad .$$

On a donc pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $f \in L^2(_H\backslash G)$,

$$\begin{aligned} < (I-\alpha P_\mu)f, f > -c < (I-\alpha P_\nu)f, f > &= < (I-\alpha P_{\frac{\mu+\check{\mu}}{2}})-cI+\alpha c P_\nu)f, f > \\ &= (1-c) < (I-\alpha P_\rho)f, f > \geqslant 0 \quad . \end{aligned}$$

LEMME 8 :

$$\forall \alpha \in]0,1[\ , \ \forall f \in L^2({}_H\backslash G) \ , \ c^{-1} < (I-\alpha P_\nu)^{-1} f, f > \geqslant < (I-\alpha P_\mu) f, f >$$

Démonstration :

Pour toutes φ , $\varphi' \in L^2({}_H\backslash G)$ on a, grâce au lemme 6, l'inégalité de Schwarz :

$$< \varphi , (I-\alpha P_\nu)\varphi' >^2 \leqslant < \varphi , (I-\alpha P_\nu)\varphi > . < \varphi' , (I-\alpha P_\nu)\varphi' > .$$

L'opérateur $I-\alpha P_\nu$ étant positif, on a donc, grâce au lemme 7 :

$$< \varphi , (I-\alpha P_\nu)\varphi' >^2 \leqslant c^{-1} < \varphi , (I-\alpha P_\mu)\varphi > . < \varphi' , (I-\alpha P_\nu)\varphi' .$$

Les opérateurs $I-\alpha P_\mu$ et $I-\alpha P_\nu$ étant inversibles, on a en particulier, en posant $\varphi = (I-\alpha P_\mu)^{-1} f$ et $\varphi' = (I-\alpha P_\nu)^{-1} f$:

$$< (I-\alpha P_\mu)^{-1} f, f >^2 \leqslant c^{-1} < (I-\alpha P_\mu)^{-1} f, f > . < (I-\alpha P_\nu)^{-1} f, f >$$

Le résultat en découle puisque $(I-\alpha P_\mu)^{-1}$ est aussi un opérateur positif.

LEMME 9 :

$$\forall K, \text{ compact de } {}_H\backslash G, < U_\mu(\cdot, K), 1\!\!1_K > \leqslant c^{-1} < U_\nu(\cdot, K), 1\!\!1_K > .$$

Démonstration :

Pour toute $f \in L^2({}_H\backslash G)$ et tout $\alpha \in]0,1[$ on a, grâce au lemme 8,

$$\sum_n \alpha^n < P_{\mu^{*n}} f, f > \leqslant c^{-1} \sum_n \alpha^n < P_{\nu^{*n}} f, f >$$

d'où

$$< \sum_n P_{\mu^{*n}} f, f > \leqslant c^{-1} < \sum_n P_{\nu^{*n}} f, f > .$$

Le résultat en découle en posant $f = 1\!\!1_K$.

Démonstration de la proposition 5 :

ν possède évidemment un moment d'ordre 3 et satisfait donc à (A) d'après le résultat de la 3ème étape. Soit K un compact de ${}_H\backslash G$. $U_\nu(\cdot, K)$ étant bornée, $< U_\nu(\cdot, K), 1\!\!1_K >$ reste fini ainsi que $< U_\mu(\cdot, K), 1\!\!1_K >$ d'après le lemme 9, d'où le résultat puisque $U_\mu(\cdot, K)$ ne peut être qu'infini ou borné.

Remarque : On vient en fait d'établir un nouveau critère de transience dont l'idée provient de [1] :

PROPOSITION 6 : H étant un sous-groupe fermé d'un groupe G tel que ${}_H\backslash G$ possède une mesure invariante, une condition nécessaire et suffisante pour que ${}_H\backslash G$ soit transitoire est que toute marche symétrique sur ${}_H\backslash G$ ayant des moments de tous ordres soit transitoire.

Démonstration :

Elle découle immédiatement du lemme 9 en remplaçant dans la définition de c et ν, $e^{-|\pi_2(g)|}$ par $\psi(g)$ où ψ est une application symétrique de G dans $]0, 1[$.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] P. BALDI, N. LOHOUE, J. PEYRIERE : Sur la classification des groupes récurrents. CRAS, Série A 1977, Page 1103 .

[2] J. DIEUDONNE : Eléments d'analyse en 6 volumes. Gauthier-Villars, Paris 1975

[3] L. GALLARDO : Sur deux classes de marches aléatoires. Thèse de 3ème cycle, Nancy (1977).

[4] L. GALLARDO, V. RIES : Marches aléatoires sur les espaces homogènes du groupe des déplacements. CRAS, Série A, 1977, Page 1093.

[5] Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. math. France, 101 (1973), Pages 333-379.

[6] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Springer-Verlag, Berlin n° 624 (1977).

[7] H. HENNION, B. ROYNETTE : Un théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes. CRAS, Série A, 1977, Page 399.

[8] G. HOCHSCHILD : The structure of Lie Groups. Holden-Day Inc. (1965).

[9] F. SPITZER : Principles of random walks. D. Van Nostrand (1964).

L. G. V. R.

U.E.R. Sciences Mathématiques
Université de Nancy I
Case Officielle 140
54037 NANCY CEDEX