Astérisque

JEAN-PIERRE RESSAYRE

Types remarquables et extensions de modèles dans l’arithmétique de Peano, II

Astérisque, tome 73 (1980), p. 119-154
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__119_0>

EXPOSÉ 6

TYPES REMARQUABLES ET EXTENSIONS DE MODÈLES DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO, II

Jean-Pierre Ressayre

Cet exposé est inséparable du précédent, en particulier il en partage l'introduction; en conséquence nous rappelons seulement que notre but principal ici sera l'étude des modèles de l'arithmétique construits par Abramson Harrington, [A-H]

§I - LE THÉORÈME DE RAMSEY ET L'ÉTUDE DES TYPES

Les quatre paragraphes de l'exposé précédent introduisaient chacun un aspect de notre sujet, le présent §I en introduit un cinquième : le lien entre d'une part le Théorème de Ramsey (et quelques autres résultats combinatoires semblables, introduits plus loin), et d'autre part les types construits et étudiés dans l'exposé précédent.

Moyennant quoi, ce paragraphe complète l'exposé précédent, et en donnera une manière de conclusion. Mais il est de plus la charnière entre les deux exposés, et à ce titre comporte un deuxième volet : il introduit la généralisation du théorème de Ramsey fini sur laquelle sont basées les constructions d'Abramson et Harrington (théorème I.12).

Le fil directeur de ce paragraphe est le suivant : à chaque résultat combinatoire que nous examinons, nous associons un énoncé de théorie des modèles qui lui est équivalent (par exemple au Théorème de Ramsey fini est associé le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski); à cette occasion, nous examinerons les liens entre Combinatoire et Théorie des modèles, en nous préoccupant surtout d'appliquer la Théorie des modèles à la Combinatoire, à l'inverse de ce qui se fait habituellement.

Nous rappelons d'abord le Théorème de Ramsey : μ et ν désignant chacun soit un entier, soit le symbole ∞, on écrit $\mu \to (\nu)^n_k$ si pour tout ensemble X de cardinal μ, et toute partition $f : [X]^n \to k$ en k classes de l'ensemble $[X]^n$, il existe un sous-ensemble Y de X, de cardinal ν, qui est homogène pour f, c'est-à-dire $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe de la partition. Plus généralement, soit M un modèle de $\mathcal{P}$; si $n \in \mathbb{N}$, $k \in M$ et μ, ν désignent soit "∞" soit des "entiers de M", nous dirons que $M \models \mu \to (\nu)^n_k$ si la propriété précédente est vérifiée au sens de M, quand on se restreint à des partitions et ensembles définissables dans M.

Le Théorème fini de Ramsey dit que ($n, k \in \mathbb{N}$ étant fixés) pour tout entier P il existe un entier Q tel que $Q \to (P)^n_k$; et le théorème infini dit que $\infty \to (\infty)^n_k$.

(A) Ramsey et Ehrenfeucht-Mostowski. On peut dire que le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski est le compactifié - au sens imprécis indiqué dans l'exposé précédent, §I - du Théorème fini de Ramsey; en particulier les deux théorèmes se déduisent l'un de l'autre de manière élémentaire

I.1. REMARQUES - Soient n, P, $k \in \mathbb{N}$; (a) Du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski on déduit : $\infty \to (P)^n_k$. En effet soit $f : [\mathbb{N}]^n \to k$ une partition; en vertu du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski, il existe une extension élémentaire N du modèle $(\mathbb{N},f)$, contenant un ensemble $<$-indiscernable infini. Cet ensemble est évidemment homogène pour l'extension de f à N, donc $N \models$ "il existe un ensemble à P éléments qui est homogène pour f". Comme $(\mathbb{N},f) \prec N$, la même propriété est vérifiée dans $\mathbb{N}$.

(b) De $\infty \to (P)^n_k$, on déduit $\exists Q \; Q \to (P)^n_k$, c'est-à-dire le Théorème de Ramsey fini.

En effet soit N une extension élémentaire de $\mathbb{N}$ et soit $\alpha \in N$, non standard; alors $N \models \alpha \to (P)^n_k$. En effet, soit $f : [0,\alpha]^n \to k$ une partition définissable dans N; puisque $[0,\alpha]$ est infini (au sens standard) et $\infty \to (P)^n_k$ est vrai (au sens standard également), $[0,\alpha]$ contient un sous-ensemble à P éléments qui est homogène pour f. Donc $N \models \exists Q \; Q \to (P)^n_k$; et puisque $\mathbb{N} \prec N$, $\mathbb{N} \models \exists Q \; Q \to (P)^n_k$.

(c) Du Théorème de Ramsey fini on déduit le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski c'est la démonstration originale bien connue de ce théorème.

La moralité de I.1, (a)et(b) est que toute démonstration du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski qui n'utilise pas le Théorème de Ramsey - en particulier celle faite dans l'exposé précédent, §IV, à l'aide d'un type définissable - nous donne le théorème fini de Ramsey. Nous verrons à l'alinéa (C) que l'existence de types uniformes nous donne en prime le Théorème infini de Ramsey. Auparavant, nous étudions une généralisation de la propriété $\infty \to (\infty)^n_k$:

(B) Types de Ramsey

La définition de la propriété $\infty \to (\infty)^n_k$ demande que le domaine de la partition donnée, et celui de l'ensemble homogène pour cette partition, soient tous deux infinis. En demandant que ces deux ensembles soient "gros" pour diverses notions de grosseur des ensembles, on obtient diverses généralisations de $\infty \to (\infty)^n_k$, de la forme "gros $\to$ (gros)^n_k". Plusieurs généralisations de cette sorte seront étudiées par la suite. Soit M un modèle de $\mathcal{P}$; dans le présent alinéa, nous étudions le cas où la notion de grosseur des sous-ensembles de M est définie à l'aide d'un filtre ou d'un type sur M :

I.2. NOTATION - Soit t un type non borné sur M; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in M$, on écrit $t \to (t)^n_k$ si pour toute partition $f : [M]^n \to k$ définissable dans M, il existe $X \in t$, homogène pour f.

I.3. PROPOSITION - Soit t un type non borné sur M; alors (a) les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $t \to (t)^n_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) le type $\bigwedge_{i\leq n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ est complet sur M, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) pour tout modèle $M' \succ M$, $t_{M'}$ est $<$- indiscernable sur M

(iv) $t \to (t)^n_k$, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout k dans M

(b) De plus, ces conditions entraînent que $M(^t_c)$ est extension $\prec$- minimale de M.

Démonstration Supposons vérifiée la condition (i), et soit $\phi(v_1 \dots v_n)$ une formule de M : nous allons montrer que $\bigwedge_{i\leq n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$, ce qui est la condition (ii). Sur $[M]^n$ nous considérons la relation $\bar{a} \sim \bar{b} \Longleftrightarrow M \models \phi(\bar{a}) \longleftrightarrow \phi(\bar{b})$; cette relation comporte deux classes, donc puisque $t \longrightarrow (t)^n_2$, il existe $X \in t$ tel que $\forall \bar{a}, \bar{b} \in [X]^n$ $M \models \phi(\bar{a}) \longleftrightarrow \phi(\bar{b})$ - autrement dit, dans M la formule $\bigwedge_{i\leq n} v_i \in X \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$. Alors comme $t(v_i) \vdash v_i \in X$, on a : $\bigwedge_i t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$; nous avons ainsi montré que (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée, et soient $X \in t$, $f : [X]^n \to 2$ un terme de M; par (ii), $\bigwedge_{i\leq n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide les formules $f(v_1 \dots v_n) = 0$ et $f(v_1 \dots v_n) = 1$. Par compacité il existe $Y \in t$, qu'on peut supposer inclus dans X, tel que $\bigwedge_{i\leq n} v_i \in Y \wedge v_1 < \dots < v_n$ fait de même - autrement dit, $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe modulo f, ce qui démontre la condition (i).

Les conditions (ii) et (iii) sont trivialement équivalentes - donc les trois premières le sont. Montrons qu'elles entraînent que $M(^t_c)$ est une extension $\prec$ - minimale de M (c'est-à-dire (b)) : soit $f(v)$ un terme; la formule $(f(v_1) = f(v_2))$ détermine sur $[M]^2$ une partition en deux classes, et puisque $t \longrightarrow (t)^2_2$, on en déduit $X \in t$ tel que $[X]^2$ est dans une de ces classes. Autrement dit, $f \restriction X$ est soit constante, soit injective, ce qui par I de l'exposé précédent entraîne que $M(^t_c)$ est $\prec$ - minimimal au-dessus de M.

Reste à voir que $t \to (t)^n_2$ entraîne $t \to (t)^n_k$. Soient donc $X \in t$, $k \in M$, et $f : [X]^n \to k$ un terme de M. Puisque le type $\bigwedge_{i\leq n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ est complet sur M, il décide toutes les formules $f(v_1 \dots v_n) = j$ $(j < k)$. Comme $M(^t_c)$ est une extension $\prec$- minimale de M, en particulier $M \prec_f M(^t_c)$ (cf. exposé précédent, §I); cela entraîne qu'il existe $j < k$ tel que $\bigwedge_{i\leq n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n \vdash f(v_1 \dots v_n) = j$. Par compacité, il existe $Y \in t$, qu'on peut supposer inclus dans X, tel que $\bigwedge_{i\leq n} v_i \in Y \wedge v_1 < \dots < v_n \vdash f(v_1 \dots v_n) = j$, autrement dit $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe modulo f, ce qui montre $t \to (t)^n_k$.

N.B. (a) On dira que t est un type de Ramsey sur M si t vérifie les conditions équivalentes de la Proposition ci-dessus. Au §IV de l'exposé précédent nous avions construit un ensemble $<$ - indiscernable à l'aide d'un type définissable; si l'on dispose d'un type de Ramsey t on obtient des $<$ - indiscernables encore plus directement puisque $t_{M'}$ est $<$ - indiscernable quel que soit $M' \succ M$. Noter à ce sujet que ceci est réellement plus direct, car un type définissable $t^1(v)$ n'est pas toujours de Ramsey : en effet, si $t^1(v)$ n'est pas uniforme il arrive que t^1 ait deux extensions $t^2 \neq t^3$, non bornées et complètes sur $M\binom{t^1}{c_1}$; alors dans $M' = M\begin{pmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $t^1_{M'}$ n'est pas $<$ - indiscernable sur M, car $c_1 < c_2 < c_3$ sont dans $t^1_{M'}$ et cependant $(c_1, c_2) \not\equiv_M (c_1, c_3)$. Alors bien que définissable, t^1 n'est pas de Ramsey.

(b) On va voir que l'existence de types de Ramsey équivaut au Théorème de Ramsey lui-même - on peut dire que c'est la compactification, au sens vague de l'exposé précédent §I, du théorème infini de Ramsey; et son équivalence avec ce théorème est l'analogue pour le cas infini de la Remarque I.1.; ci-dessous on suppose M et L dénombrables :

I.4. REMARQUE (a) De $M \models \infty \to (\infty)^n_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit l'existence d'un type de Ramsey; en effet, $\phi^n(v_1 \dots v_n)$ étant une énumération des formules, on construit par récurrence sur n une famille décroissante $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles non bornés de M, tels que X_n est homogène pour la partition de $[M]^n$ déterminée par ϕ^n (X_n résulte de l'application de $\infty \to (\infty)^n_2$ à la partition de $[X_{n-1}]^n$ déterminée par ϕ^n). Alors si $t(v) = \{ v \in X_n ; n \in \mathbb{N} \}$ on a $t \to (t)^n_2$ par le choix de la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) De l'existence d'un type de Ramsey sur M on déduit que $M \models \infty \to (\infty)^n_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in M$. En effet soit $f : [M]^n \to k$ une partition définissable; puisqu'on a un type de Ramsey t, tel que $t \to (t)^n_k$, il existe $X \in t$ homogène pour f; de plus $X \in t$ entraîne X définissable et non borné.

(C) Types de Ramsey, types uniformes et minimaux.
Nous examinons les relations entre la notion de type de Ramsey et les notions introduites aux §I et II de l'exposé précédent. La Remarque (a) ci-dessus indiquait qu'un type définissable n'est pas nécessairement de Ramsey, bien qu'il conduise également par itération à des indiscernables. Les relations avec les types minimaux et uniformes, c'est essentiellement l'extension globale et uniforme (au sens de l'exposé précédent) de la Proposition I.3. qui va nous les donner :

I-5 PROPOSITION - Soit $t(v)$ un type non borné sur M; sont équivalentes :
(a) quelque soit $N \succ M$, $t(v) \cup v > N$ est un type de Ramsey
(b) t est minimal (c) t est uniforme et rare.

Démonstration - L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est une conséquence immédiate de la Proposition I.3.b, appliquée à tout $N \succ M$. L'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c) a été montrée au §II de l'exposé précédent; reste à vérifier que (c) $\Rightarrow$ (a). Soit $t(v)$ un type uniforme, et considérons la théorie (où $N \succ M$ et $c_1 \ldots c_n$ sont des symboles de constante nouveaux) :

$t(c_1) \cup \ldots \cup t(c_n) \cup N < c_1 \cup N(c_1) < c_2 \cup \ldots \cup N(c_1 \ldots c_{n-1}) < c_n$ - en convenant que $N(c_1 \ldots c_p) < c_{p+1}$ représente l'ensemble de formules $\{ h(ac_1 \ldots c_p) < c_{p+1} : h(uv_1 \ldots v_p)$ terme pur, $a \in N\}$. Cette théorie caractérise les modèles de la forme $N(c_1 \ldots c_n)$ (cf. exposé précédent, §IV), et comme ces modèles sont tous isomorphes sur $N \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$, il en résulte que cette théorie est complète. D'autre part si t est rare, il est clair qu'elle équivaut à

$t(c_1) \cup \ldots \cup t(c_n) \cup N < c_1 < \ldots < c_n$

Donc, cette dernière théorie est complète, et par I.3.a t est un type de Ramsey sur N.

Ainsi l'existence de types minimaux (cf. §III de l'exposé précédent) entraîne celle de types de Ramsey sur M, laquelle par la Remarque I.4. entraîne $M \models \infty \to (\infty)^n_k$. Comme ceci vaut pour tout modèle M de $\mathcal{P}$, cette démonstration du théorème de Ramsey infini nous donne également le fait que celui-ci est une conséquence de $\mathcal{P}$.

(D) La généralisation colorée des théorèmes de Ramsey et d'Ehreufencht-Mostowski.

Nous allons étudier une généralisation du théorème de Ramsey; dans cette généralisation, le domaine des partitions sera un "ensemble coloré", et les conditions de cardinalité sur les ensembles seront remplacées par des conditions portant sur leur "coloration"; voici la définition de ces notions.

On appelle ensemble coloré tout triplet $(X, <_X, C_X)$, où X est un ensemble, $<_X$ un ordre total sur X, et C_X une application de domaine $[X]^s$ (s fixé $\in \mathbb{N}$); l'image de C_X est appelé ensemble des couleurs, et pour $\bar{x} \in [X]^s$ $C_X(\bar{x})$ est la couleur de $\bar{x}$.

Les conditions sur la coloration des ensembles, qui vont remplacer les conditions de cardinalité, seront exprimées à l'aide de la notion "motif"(*), que voici.

(*) motif est la traduction du terme anglais "pattern".

Un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$ étant fixé, le langage de nos ensembles colorés comporte les symboles $=$, $<$, C (à s arguments), les éléments de $\mathcal{C}$ comme constantes, enfin les variables v_i $(i \in \mathbb{N})$; L étant un entier on appelle motif $P(v_1 \ldots v_L)$ tout ensemble de formules atomiques de ce langage, ayant $v_1 \ldots v_L$ pour variables, et qui détermine complètement un ordre total et une coloration sur les éléments représentés par $v_1 \ldots v_L$.

Exemple - Nous supposons $s = 2$ pour fixer les idées; alors les motifs $P(v_1, v_2)$ sont tous les ensembles du type $\{v_1 = v_2\}$, $\{v_1 < v_2, C(v_1\ v_2) = a\}$, $\{v_2 < v_1, C(v_1, v_2) = a\}$ où a parcourt Φ ; pour $L > 2$, les motifs $P(v_1 \ldots v_L)$ sont tous les ensembles de la forme $\{P^{ij}(v_i, v_j),\ 1 < i \leq j \leq L\}$, où P^{ij} est un motif sur v_i, v_j et $\{P^{ij}\}$ détermine un ordre total sur les éléments représentés par $v_1 \ldots v_L$.

Etant donnés un ensemble X coloré dans $\mathcal{C}$, et $\bar{x} \in \bigcup_n X^n$, on appelle motif de $\bar{x}$ et on note $p(\bar{x})$ l'unique motif $P(\bar{v})$ tel que $(X, \bar{x}) \models P(\bar{v})$; on dira aussi que la suite $\bar{x}$ ou que l'ensemble $\{x_1 \ldots x_n\}$ réalise le motif $P(\bar{v})$.

N.B. Nous avons convenu que si une suite comporte moins de s éléments distincts, son motif ne porte que sur l'ordre. Cette convention ne change rien sur le fond vis à vis de celle qui consiste à fixer une coloration non seulement de $[X]^s$ mais aussi de $\bigcup_{s' < s} [X]^{s'}$.

Nous étudions des généralisations du Théorème de Ramsey de la forme "gros $\rightarrow$ [gros]^n_k" : notre première généralisation, dans (C), était $t \rightarrow (t)^n_k$, où la notion de grosseur était définie par l'appartenance à un filtre t. Dans le présent cas, la notion de grosseur va être la présence de toutes les combinaisons finies possibles de colorations, c'est à dire la notion suivante : un ensemble coloré X est dit général si tout motif $P(v_1 \ldots v_L)$ est réalisé dans X; un sous-ensemble Y est général si la restriction de C_X à Y est générale.

Exemple - $X = \mathbb{N}$ $<_X$ = ordre usuel, $s = 1$, $\mathcal{C} = \{0, 1\}$; il y a donc deux couleurs qui constituent une partition de $\mathbb{N}$, que nous notons C^0, C^1. On voit facilement que cet ensemble coloré est général si et seulement si C^0 et C^1 sont infinis, les sous-ensembles généraux étant de même les Y tels que $Y \cap C^0$ et $Y \cap C^1$ sont infinis. Noter qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui est homogène pour la partition C^0, C^1 doit être inclus soit dans C^0 soit dans C^1, donc n'est pas général; ainsi notre généralisation du Théorème de Ramsey de la forme "général $\rightarrow$ (général)^n_k" est déjà fausse pour $s = 1$, $n = 1$. Toutefois c'est pour une raison triviale, qui suggère une modification de la notion de "homogène"; en voici la définition, dans le cas général :

Soit X un ensemble coloré, $f : [X]^n \to k$ une partition; un sous-ensemble Y de X est dit homogène pour f si pour $\bar{x} \in [Y]^n$ le motif de $\bar{x}$ détermine sa classe (c'est à dire $\forall \bar{x},\bar{y} \in [Y]^n \quad p(\bar{x}) = p(\bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$).

Par la suite, le principal ensemble coloré considéré sera un modèle M de $\mathcal{P}$, muni de l'ordre arithmétique $<_M$ et d'une coloration $C : [M]^s \to M$ définissable dans $M^{(*)}$. Alors les notions qui précèdent (motif, suite qui réalise un motif, ensemble général) peuvent être définies dans M; si M est non standard les motifs $P(v_1 \dots v_L)$ portent alors sur un nombre de variables $L \in M$ qui peut être non standard - ce sera d'ailleurs essentiel. On peut facilement définir C dans M de manière que M soit général :

I.6. DÉFINITION D'UNE COLORATION GÉNÉRALE DANS M. Soit $(P_a)_{a \in M}$ une énumération dans M de tous les motifs, et soit $(S_a)_{a \in M}$ une famille définissable d'ensembles disjoints S_a ayant même cardinal (dans M) que le motif P_a a de variables. On définit alors $C \upharpoonright S_a$ de manière que P_a soit réalisé par des points de S_a; et l'on prolonge de manière arbitraire C ainsi défini à $[M]^s$ tout entier.

Si $M' \succ M$, la coloration C de M s'étend en coloration de M' (à couleurs dans M'); si $\phi(v_1 \dots v_n)$ est une formule de M, et $X \subset M'$, on dit que X décide ϕ si sur $[X]^n$ le motif de $\bar{x}$ détermine la valeur de $\phi(\bar{x})$ (c'est à dire $p(\bar{x}) = p(\bar{y}) \Rightarrow M \models \phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \phi(\bar{y})$). On dit qu'un sous-ensemble X de M'est C-indiscernable sur M si pour $\bar{x} \in \bigcup_n X^n$ le type de $\bar{x}$ sur M ne dépend que du motif de $\bar{x}$. (N.B. Ainsi "X décide ϕ" est une propriété d'homogénéité pour certaines partitions; et "X est C-indiscernable sur M"$\Leftrightarrow$ X décide toutes les formules de M).

Pour clore cette longue suite de définitions, en voici une qui ne sera pas utilisée ensuite, mais qui englobe comme cas particuliers toutes les notions d'homogénéité et d'indiscernabilité qui nous intéressent, et résume ainsi ce qui précède : soient A une réalisation quelconque, Ψ et Φ deux ensembles de formules de son langage. Un sous-ensemble X de A est (Ψ,Φ)-indiscernable si pour toutes suites finies $\bar{x},\bar{y}$ dans X, $\bar{x} \equiv_\Psi \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \equiv_\Phi \bar{y}$; où pour tout ensemble de formules Γ, $\bar{x} \equiv_\Gamma \bar{y}$ signifie que $\bar{x},\bar{y}$ (ont même longueur et) satisfont les mêmes formules de Γ dans A.

Exemples - Si $M \prec N$ et $X \subset N$, X est <-indiscernable sur $M \Leftrightarrow X$ est (Ψ,Φ)-indiscernable, quand Ψ est l'ensemble des formules de la forme $v = v'$, $v < v'$, et Φ est celui de toutes les formules; pour définir "X est C-indiscernable" il suffit d'ajouter les formules $C(v_1 \dots v_s) = u$ à Ψ. Si $X \subset M$ et $f : [M]^n \to k$ est une partition, X est homogène pour f si X est (Ψ,Φ)-indiscernable,

(*) ainsi on confond le symbole C avec son interprétation C_M.

quand $\Phi = \{f(v_1 \dots v_n) = i,\ i < k\}$ et Ψ est comme ci-dessus.

(E) Le cas particulier $s = 1$. Nous considérons un modèle M muni d'une coloration générale $C : M \to M$; les alinéas (A), (B), (C) admettent une "généralisation colorée" dans ce cas. Nous exposons l'essentiel de cette généralisation.

(a) Types de Ramsey avec couleurs. Pour tout a dans M, on notera C^a l'ensemble des points $x \in M$ de couleur $C(x) = a$. On suppose L dénombrable; alors par le §III de l'exposé précédent, il existe un type $t(v)$ sur M, tel que $t(v) \wedge v \in C^a$ est un type minimal, pour tout $a \in M$. Tout comme dans la démonstration de la Proposition I.5, on en déduit : pour toute suite de couleurs $a_1 \dots a_n \in M$, la théorie $t(c_1) \cup \dots \cup t(c_n) \cup\ c_1 < \dots < c_n \wedge c_1 \in C^{a_1} \wedge \dots \wedge c_n \in C^{a_n}$ est consistante et complète.
Nous pouvons reformuler cette propriété en disant que

(1) pour tout motif $P(v_1 \dots v_n)$, la théorie $\bigcup_{i \leq n} t(c_i) \cup P(c_1 \dots c_n)$ est consistante et complète.

(1) est l'analogue coloré de la caractérisation (ii) des types de Ramsey, dans la Proposition I.3.a; et comme dans cette Proposition, on voit que (1) équivaut à :

(2) quelque soit $M' \succ M$, $t_{M'}$ est C-indiscernable sur M; de plus il existe un modèle $M' \succ M$ tel que $t_{M'}$ contienne un ensemble général.

Par compacité il en résulte facilement

I-8 COROLLAIRE (Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré) - Pour tout ordre total $(X, <_X)$ muni d'une coloration C_X à un seul argument (et à valeurs quelconques), il existe $M' \succ M$ contenant un ensemble X' qui est C-indiscernable sur M, et tel que $(X', <_{M'} \upharpoonright X', C_{M'} \upharpoonright X')$ est isomorphe à $(X, <_X, C_X)$.

I-9 COROLLAIRE (Théorème de Ramsey pour les couleurs à un argument) - Pour des colorations finies à un seul argument, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, "général $\to$ (général)$^n_2$": c'est-à-dire si X a une coloration générale, alors quelque soit $f : [X]^n \to 2$, il existe $Y \subset X$, général et homogène pour f.

Démonstration On suppose M muni d'une coloration générale finie $C : M \to r$ ($r \in \mathbb{N}$) et soit $\phi(v_1 \dots v_n)$ une formule de M. Par (1), pour tout motif $P(v_1 \dots v_n)$, la théorie $\bigcup_{i \leq n} t(c_i) \cup \{P(c_1 \dots c_n)\}$ décide la formule $\phi(c_1 \dots c_n)$; par compacité, on en déduit $\psi_p \in t$, telle que la théorie $\psi_p(c_1) \wedge \dots \wedge \psi_p(c_n) \wedge P(c_1 \dots c_n)$ décide la formule $\phi(c_1 \dots c_n)$. Le nombre de motifs à n variables étant fini (c'est ici qu'est utilisée l'hypothèse d'un nombre fini de couleurs), la conjonction des formules ψ_p est une formule ψ ; et par construction de ψ, l'ensemble ψ_M décide la formule $\phi(v_1 \dots v_n)$; de plus $\psi \in t$, ce qui par (1) entraine que $\psi(c_1) \wedge \dots \wedge \psi(c_k) \wedge P(c_1 \dots c_k)$ est consistant pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout motif $P(v_1 \dots v_k)$. Donc ψ_M est général, et on a ainsi démontré que M satisfait "général $\to$ (général)$^n_2$ "; en appliquant k fois cette propriété, on en déduit $M \models$ "général $\to$ (général)$^n_{2^k}$"; comme M est quelconque on a montré que ce résultat est conséquence de $\wp$; donc est vrai en particulier au sens standard.

En résumé de (E) : en uniformisant par rapport à un paramètre la construction d'un type minimal (*) , on construit une famille définissable de types minimaux. Vis à vis des Théorèmes de Ramsey et d'Ehrenfeucht-Mostowski colorés, cette famille joue le même rôle que les types uniformes vis à vis des mêmes théorèmes dans le cas non coloré.

(F) Colorations à plusieurs arguments. Nous supposons donnée une coloration générale définissable $C : [M]^s \to M$ $(s \in N)$. L'énoncé qui généralise aux ensembles colorés le Théorème de Ramsey $\infty \to (\infty)^n_k$, c'est l'énoncé "général $\to$ (général)^n_k" que nous avons démontré (Corollaire I.9) quand $s = 1$; mais dès que $s > 1$, on a au contraire un résultat négatif :

I-10 PROPOSITION Pour $s \geq 2$, "général $\to$ (général)$^2_2$" est faux : pour toute coloration générale à deux couleurs et deux arguments $C : [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$; il existe une partition en deux classes définissables de $[\mathbb{N}]^2$, qui ne possède aucun sous-ensemble général homogène.

Démonstration Pour un exemple concret d'une telle partition voir [A.H]; ici nous résumons une autre démonstration, par "model theoretic non sense". Procédant par l'absurde, nous supposons "général $\to$(général)$^2_2$"; par les méthodes du §III de l'exposé précédent, on en déduit facilement un modèle M (dont la restriction à + et . est le modèle standard $\mathbb{N}$), et sur M un type t(v) qui vérifie :

tout ensemble $X \in t$ est général; pour toute formule $\phi(v_1,v_2)$, il existe $X \in t$ qui décide ϕ ;

t est uniforme.

La première propriété de t entraîne la consistance de la théorie $t(v_1) \cup t(v_2) \cup v_1 < v_2 \wedge C(v_1,v_2) = i$, pour $i = 0$ et pour $i = 1$; ainsi t(v) n'est pas un type de Ramsey car cela contredit la proposition I.3.a, condition (ii). D'un autre côté, vu la 3ème propriété si nous pouvions montrer que t est rare, par la proposition I.5 cela entrainerait que t est de Ramsey, une contradiction. Il nous suffit donc de montrer que $M\binom{t}{c}$ est $\prec$-minimal sur M, car cela entraine la rareté de t (voir le §II de l'exposé précédent). La remarque ci-dessous le montre en vertu de la Proposition I.2 de l'exposé précédent, ce qui achève la démonstration :

I-11 REMARQUE Si X est général et décide la formule $f(v_1) = f(v_2)$, alors $f \restriction X$ est soit injective, soit constante.

(*) laquelle est déjà pour sa part une uniformisation de la construction d'un type complet.

Démonstration Cette remarque est l'analogue coloré de la proposition I.3.b; supposons $f \upharpoonright X$ non injective : il existe $x \neq y$ dans X, tels que $f(x) = f(y)$. Alors soit $z \in X$; X étant général, il existe $x', y', z' \in X$, réalisant un motif tel que (i) $p(x,z) = p(x',z')$, et (ii) $p(x,y) = p(x',y') = p(z',y')$ (*). Puisque X décide $f(v_1) = f(v_2)$ et $f(x) = f(y)$, de (ii) on déduit $f(x') = f(y')$ et $f(z') = f(y')$, donc $f(x') = f(z')$; de cela et de (i) on déduit alors $f(x) = f(z)$. f est donc constante sur X, ce qui montre la Remarque.

Nous passons maintenant à la généralisation colorée du Théorème de Ramsey fini $\forall p\ \exists q\quad q \to (p)^n_k$; cette généralisation sera vraie, au contraire de la précédente. Si l'on compare la définition d'ensemble infini X ("pour tout entier p, X a au moins p éléments") et celle d'ensemble général X (pour tout motif P, P est réalisé dans X), on voit que la généralisation naturelle de $\forall p\ \exists q\quad q \to (p)^n_k$ est l'énoncé suivant : pour tout motif P, il existe un motif Q tel que $Q \to (P)^n_k$; où $Q \to (P)^n_k$ désigne l'énoncé "pour tout ensemble fini X réalisant le motif Q, et toute partition de $[X]^n$ en k classes, il existe un sous-ensemble de X qui réalise P et est homogène pour la partition".

I-12 THÉORÈME [Abramson Harrington]-[Nesetril Rödl] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'énoncé suivant est conséquence de $\mathcal{P}$: $\forall k\quad \forall P\quad \exists Q\quad Q \to (P)^n_k$.

Nous examinons maintenant le lien entre le "Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré" - qui est le Corollaire I-8, étendu aux colorations à nombre s quelconque d'arguments - et le "Théorème de Ramsey coloré" qu'est le Théorème I-12. Ces liens sont l'extension immédiate des liens entre "Ramsey" et "Ehrenfeucht-Mostowski" exposés dans la Remarque I-1 :

I-13 REMARQUE Soient P un motif standard et n,k des entiers standards

(a) Le théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré entraine : général $\to (P)^n_k$, c'est-à-dire que pour tout ensemble coloré général X, et toute partition $f : [X]^n \to k$ il existe un sous-ensemble de X homogène pour f et qui réalise P.

(b) De général $\to (P)^n_k$ se déduit $\exists Q\quad Q \to (P)^n_k$, autrement dit le "Théorème de Ramsey coloré" I-12.

(c) Du Théorème de Ramsey coloré se déduit le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré.

Les démonstrations copient servilement celles de la Remarque I-1; nous donnons celle du (c) : soit $(X, <_X, C_X)$ un ensemble à couleurs dans M; l'existence de $N \succ M$ contenant X et vérifiant la conclusion du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré équivaut à la consistance avec la théorie de M de la théorie suivante (où P(X) désigne le diagramme de l'ensemble coloré $(X, <_X, C_X)$) :

(*) La démonstration du Lemme du support II-4 montrera ceci plus en détail.

$P(X) \cup \{ \phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{y});\ \phi$ formule, $\bar{x},\bar{y} \in [X]^n$, $n \in N$, et $p(\bar{x}) = p(\bar{y})\}$
Il nous suffit donc de montrer que tout sous-ensemble fini F de cette théorie est satisfaisable dans M. Pour F fixé il existe un motif $P(v_1 \ldots v_L)$, des formules $\phi_1 \ldots \phi_k$ et un sous-ensemble $\{x_1 \ldots x_L\}$ de X tel que $F = F(x_1 \ldots x_L) \subset P(x_1 \ldots x_L) \cup H(x_1 \ldots x_L)$, où $H(x_1 \ldots x_L)$ est l'ensemble de formules qui exprime l'homogénéité de $\{x_1, \ldots, x_L\}$ par rapport à $\phi_1 \ldots \phi_k$. Soit alors Q un motif tel que $Q \to (P)^n_{2^k}$, et soit Y un sous-ensemble de M réalisant Q (Y existe puisque la coloration sur M est générale). La restriction à Y de $(\phi_1)_M \ldots (\phi_k)_M$ définit une partition à 2^k éléments de $[Y]^n$, pour laquelle Y contient, par choix de Q, un sous-ensemble $\{y_1 \ldots y_L\}$ homogène et qui réalise P; alors $M \models F(y_1 \ldots y_L)$, C.Q.F.D.

En conclusion de ce paragraphe, nous faisons le bilan des liens entre Combinatoire et Théorie des modèles que nous y avons relevé tout au long.

(a) A chaque énoncé combinatoire considéré nous avons donné pour compagnon un énoncé de Théorie des modèles équivalent; et sauf dans un cas, nous en avons tiré une démonstration de l'énoncé combinatoire par la Théorie des modèles : nous avons ainsi obtenu le Théorème fini de Ramsey à l'aide d'un type définissable; le Théorème infini et son extension général $\to$ $(\text{général})^n_k$ (colorations à un argument), à l'aide de types minimaux; et la fausseté du même résultat dans le cas de colorations à plusieurs arguments, à l'aide de l'absurdité de types à la fois "Ramsey coloré" et minimaux. Mais nous n'avons rien de cette sorte concernant le Théorème I-12, qui est la base des résultats d'Abramson-Harrington exposés plus loin; ceci pose un problème qui nous semble digne d'intérêt, au moins du point de vue de la Théorie des Modèles : trouver une démonstration via la Théorie des Modèles du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré, et par là même du Théorème combinatoire I-12.

(b) Les démonstrations "via la Théorie des Modèles" exposées dans ce paragraphe comportent une certaine surcharge, une redondance vis à vis des résultats combinatoires qu'elles donnent; c'est que ceux-ci sont un sous-produit et non le but direct de la machinerie développée ici et dans l'exposé précédent. Par exemple, en vue de démontrer le Théorème de Ramsey à l'aide d'un type définissable, nous n'avons pas besoin du §III de l'exposé précédent : car le procédé trivial qui consiste à enrichir un modèle donné en lui ajoutant des relations, suffit pour obtenir des types définissables. En particulier l'emploi maximal de ce procédé consiste à considérer un modèle M muni de toutes les relations qui existent sur son domaine; dans ce cas, les types sur M sont tous définissables et coïncident avec les ultrafiltres sur M; et la démonstration du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski dans l'exposé précédent devient la démonstration par ultrapuissance itérée, bien connue.

Et il est facile d'éliminer les autres surcharges de nos démonstrations via la Théorie des Modèles; et l'on parvient ainsi à des démonstrations simples et directes des résultats combinatoires visés. Toutefois ce qu'on obtient ce sont pour l'essentiel des démonstrations combinatoires naturelles et peu originales; ainsi la Théorie des Modèles n'a pas réellement innové sur le plan des démonstrations. En revanche l'innovation est réelle sur le plan des motivations : pour parvenir à ces démonstrations combinatoires, on a uniquement besoin de faire jouer les idées très générales de compactification et d'uniformisation, qui ne sont pas spécialement combinatoires. Pour conclure : d'un côté on est certes fort loin d'une "Combinatoire non standard" - à l'image de l'Analyse non standard, mais avec un rôle plus grand donné aux considérations d'uniformité. Mais d'un autre côté, le genre de fil directeur, de motivation et de perspective qu'on obtient en cherchant systématiquement à inverser les applications de la Combinatoire à la Théorie des Modèles, a sa place dans l'étude des types (dans $\mathcal{P}$, dans les théories stables ou sur $\beta\mathbb{N}$), à côté de la motivation d'en savoir toujours plus sur les types... C'est la raison qui nous a fait insister dessus, bien qu'évidemment les démonstrations considérées ici sont trop simples et connues pour avoir besoin de cette exégèse. Mais trêve de spéculations : la suite de l'exposé nous donnera une nourriture plus substantielle.

§II. LES MODÈLES D'ABRAMSON-HARRINGTON

Ces modèles sont des analogues colorés des modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski : ils sont engendrés par les fonctions de Skolem à partir d'un ensemble C-indiscernable X. Mais ici, X aura de surcroit des propriétés d'indépendance très fortes (Théorèmes II.4. et II.5. bis).

(A) Une redémonstration du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré. Nous pouvons réénoncer ce résultat ainsi : il existe $N \succ M$, contenant un ensemble X tel que

(i) X est général sur M, c'est-à-dire $C_N \upharpoonright X$ réalise tout motif à couleurs dans M.

(ii) X décide chaque formule de M.

La remarque I.13 donnait une démonstration de ce résultat, calquée sur celle d'Ehrenfeucht-Mostowski; en voici une deuxième, qui aura par la suite plus de retombées que la première. L'idée est en gros la suivante : d'abord on montre l'existence dans M d'ensembles finis réalisant des portions finies arbitrairement grandes de (i) et (ii); alors il existera $N \succ M$, contenant un ensemble X qui réalise une portion de (i) et (ii) qui est "finie" au sens de N, mais qui contient en fait la partie standard de (i) et (ii).

Tout d'abord nous définissons ce que nous entendons par "portion finie" de (i) et (ii); soient X une sous-ensemble définissable dans M, et a un entier de M; on dira que le degré de la coloration C dans X est $\geq$ a (*), X réalise tous les motifs possèdant au plus a variables et dont les couleurs sont parmi 0,...,a-1. Cette propriété est l'approximation de (i) qui va nous servir; noter en effet que X est général si et seulement si le degré de C dans X majore tout $a \in M$ - on dira aussi dans ce cas que le degré de C dans X est infini. D'autre part, si $\phi(u\, v_1 \ldots v_n)$ est une formule, on appellera degré de ϕ dans (*) le plus grand entier $a \in M$ tel que X décide $\phi(b\, v_1 \ldots v_n)$ pour tout $b < a$; et on dira que le degré de ϕ dans X est infini s'il majore tout a dans M.

Pour $a \in M$, la condition "c et ϕ sont de degré $\geq$ a dans X" est une portion finie de (i) et (ii) qui est réalisable dans M :
Le lemme qui suit nous permet de réaliser dans M des portions croissantes de (i) et (ii).

II.1. Lemme - Soit $a \rightarrow S_a$ $(a \in M)$ une famille définissable dans M d'ensembles tels que le degré de C dans S_a tend vers l'infini avec a; pour toute formule pure $\phi(u\, v_1 \ldots v_k)$ il existe une famille définissable $a \rightarrow S'_a$ telle que $\forall a\ S'_a \subset S_a$,

(*) nous avons choisi d'appeler degrés ces deux notions parce qu'elles mesurent le "degré" de généralité et d'indiscernabilité de l'ensemble X.

et les degrés de C, ϕ dans S'_a tendent vers l'infini avec a.

<u>Démonstration</u> - Par récurrence dans M, on choisit une famille $a \to S'_a$ $(a \in M)$ telle que pour tout a dans M, $S'_a \subset S_a$ et le degré de C,ϕ dans S'_a est aussi grand que possible. Reste à voir que dans ces conditions, ce degré dans S'_a tend vers l'infini. Soit donc a un entier de M; on choisit un motif P ayant la propriété suivante : pour tout ensemble X qui réalise P, le degré de C dans X est $\geq a$; l'existence de P résulte facilement du fait que dans M, pour tout ensemble fini de variables et de couleurs, il n'y a qu'un nombre fini de motifs prenant leurs variables et leurs couleurs dans cet ensemble. Une fois P choisi, on considère un motif Q tel que $Q \to (P)^n_{2^a}$ (Q existe par le Théorème I.12). Il existe un entier N tel que $\forall b > N$, S_b contient un ensemble X qui réalise Q (sinon le degré de C dans S_a ne tendrait pas vers l'infini comme il est supposé). Puisque $Q \to (P)^n_{2^a}$, X contient un ensemble Y qui réalise P et décide $\phi(b\ v_1 \ldots v_k)$ pour tout $b < a$. Les degrés de C,ϕ dans Y, a fortiori dans S'_b, sont $\geq a$; donc tendent vers l'infini comme requis.

Nous supposons désormais L dénombrable; il existe donc une énumération $k \to \phi^k(u\ v_1 \ldots v_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ des formules pures avec variables libres comme indiqué.

<u>II.2. Proposition (a)</u> - On peut construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une famille disjointe d'ensembles finis $a \to S^k_a$ $(a \in M)$, définissable dans M, de manière que $\forall a$ $S^{k+1}_a \subset S^k$, et les degrés de C, ϕ^k dans S^k_a tendent vers l'infini avec a.

(b) - Si $N \succ M$ et N contient $\alpha > M$, alors dans N S^k_α est général sur M et décide $\phi^i(a\ v_1 \ldots v_i)$ pour tout $a \in M$ et tout $i \leq k$.

<u>Démonstration</u> - Soit $a \to S_a (a \in M)$ une famille disjointe définissable telle que le degré de C dans S_a tende vers l'infini avec a (S_a s'obtient comme dans II.1, mais en choisissant pour tout a le motif P_a de manière que le degré de C dans les ensembles qui réalisent P_a est au moins a).
En appliquant le lemme II.1. quand la formule ϕ est ϕ^o, on obtient une famille $a \to S'_a$ qui a les propriétés requises pour être $a \to S^o_a$. Et on continue par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: en appliquant le lemme II.2. quand $S_a = S^k_a (a \in M)$ et $\phi = \phi^k$, on obtient la famille $a \to S^{k+1}_a$, ce qui prouve (a). Le restant de la proposition est immédiat, puisque les degrés de C et ϕ^i dans S^i sont infinis et $S^k_a \subset S^i$ pour tout $i \leq k$.

Il résulte de la proposition ci-dessus que dans tout modèle $N \succ M$ contenant $\alpha > M$, l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$ est C-indiscernable sur M, et il en résulte de plus, par compacité, l'existence d'un tel modèle N dans lequel $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$ est général sur M.

Nous avons ainsi redémontré le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré; mais celui-ci n'exprime pas tout ce qu'on peut tirer de notre démonstration : d'une part (voir (B) ci-dessous et le théorème II.3.), les familles S^k, $k \in \mathbb{N}$, permettent de construire un type $\sigma(v_1 v_2)$ tel qu'en itèrant la réalisation de σ, on engendre des ensembles C-indiscernables - autrement dit, $\sigma(v_1 v_2)$ sera une <u>généralisation colorée et à deux variables des types de Ramsey</u> (du §I.B); d'autre part les ensembles C-indiscernables ainsi construits ont des "propriétés d'indépendance" remarquables - cf. (C) et les théorèmes II.4, II.5 et II.6.

<u>(B) Types de Ramsey à deux variables</u> - Voici la construction de notre type $\sigma(v_1 v_2)$:
- soit $t(u)$ n'importe quel type non borné complet sur M; on va choisir σ de manière à vérifier la propriété suivante : $(*)$ $\forall N \succ M$ $\forall X \subset N$, $X^2 \subset \sigma_N \iff \exists \alpha$ t.q. $N \models t(\alpha)$ et dans N, $X \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$.
- pour cela nous considérons la fonction de M :
$h(v) = \mu a \mid v \in S^o_a$; comme la famille $a \to S^o_a$ a été choisie disjointe, $h(v)$ est ainsi l'<u>unique</u> a tel que $v \in S^o_a$ - ou est 0 si $v \notin \bigcup_a S^o_a$. Et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $S^k_a \subset S^o_a$, $h(v)$ est de même l'unique a tel que $v \in S^k_a$, si $v \in \bigcup_a S^k_a$.

Nous posons $\sigma(v_1 v_2) = t(h(v_1)) \cup \{v_1 \in S^k_{h(v_1)}$; $k \in \mathbb{N}\} \cup \{h(v_1) = h(v_2)\}$. Il est clair que quelque soient $N \succ M$ et $b_1, b_2 \in N$, $N \models \sigma(b_1 b_2) \iff$ il existe α tel que dans N on a $t(\alpha)$ et $b_1, b_2 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$; et (en remarquant $X^2 \subset \sigma_N \iff \forall b_1, b_2 \in X$ $N \models \sigma(b_1 b_2)$) que σ vérifie la propriété $(*)$ demandée ci-dessus. On notera $\sigma(v_1 \dots v_L)$ le type $\bigwedge_{i,j \leq L} \sigma(v_i v_j)$.

<u>Théorème II.3</u>. - Pour tout motif $P(v_1 \dots v_L)$, $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P$ est un type complet sur M.

<u>Démonstration - Consistance de</u> $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P$: la proposition II.2. entraîne que si $N \succ M$ et $\alpha \in N$ majore M, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $N \models (\exists v_1 \dots v_L \in S^k_\alpha)\ P(v_1 \dots v_L)$ d'où par compacité l'existence de $N \succ M$, contenant α et $b_1 \dots b_L$ tels que $N = t(\alpha) \wedge b_1 \dots b_L \in \bigcap_{k \in N} S^k_\alpha \wedge P(b_1 \dots b_L)$. Alors par $(*)$ $N \models \sigma(b_1 \dots b_L) \wedge P(b_1 \dots b_L)$

<u>Complétude de</u> $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P$: Soit $\phi(v_1 \dots v_L)$ une formule; il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a \in M$ tels que $\phi = \phi^k(a\, v_1 \dots v_k)$, donc S^k_α décide ϕ . En particulier, si $N \succ M$, $N \models t(\alpha)$, il existe $\varepsilon\phi \in \{\phi, \neg\phi\}$ tel que

$$N \models \forall v_1 \dots v_L\, [v_1 \dots v_L \in S^k_\alpha \wedge P(v_1 \dots v_L) \to \varepsilon\phi(v_1 \dots v_L)] \ .$$

La formule $\phi(\alpha)$ qui exprime ceci est conséquence de $t(\alpha)$ puisque $t(\alpha)$ est complet sur M; donc

$$t(\alpha) \cup \{v_1 \dots v_L \in S^k_\alpha\} \vdash P(v_1 \dots v_L) \to \varepsilon\phi\ (v_1 \dots v_L)$$

et comme par $(*)$ $\sigma(v_1 \dots v_L) \vdash \exists \alpha [t(\alpha) \wedge v_1 \dots v_L \in S^k_\alpha]$,

$\sigma(v_1 \ldots v_L) \vdash P(v_1 \ldots v_L) \rightarrow \varepsilon\phi(v_1 \ldots v_L)$;

on a ainsi montré que chaque formule ϕ est décidée par $\sigma(v_1 \ldots v_L) \wedge P$, c.q.f.d.

Noter que le théorème ci-dessus est l'extension aux types à deux variables de la caractérisation (ii) des types de Ramsey, dans la proposition I.3.a.

(C) Les modèles $M(X)$ - Pour tout ensemble $(X, <_X, C_X)$ à couleurs dans M, on définit comme suit un modèle $M(X)$: X étant supposé disjoint de M, on considère un modèle $N \succ M$ contenant X et tel que (i) $<_N \restriction X = <_X$, $C_N \restriction X = C_X$

(ii) $X^2 \subset \sigma_N$ ce qui par (*) équivaut à

(ii)' $\exists\alpha$ t.q. $N \models t(\alpha)$ et $X \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_\alpha^k$

L'existence de N résulte par compacité de la proposition II.2 (si l'on considère (ii)), ou du théorème II.3. (si l'on considère (ii')).

On pose alors $M(X)$ = cloture de Skolem de $M \cup X$ dans N; on a $M \prec M(X) \prec N$, donc les conditions (i), (ii), (ii)' sont vraies quand on remplace N par $M(X)$. De (ii) et le théorème II.3., ou de (ii)' et la proposition II.2., se déduit que X est C-indiscernable sur M dans $M(X)$. De plus de façon semblable on montre :

si f est un isomorphisme de $(X, <_X, C_X)$ dans $(Y, <_Y, C_Y)$ alors f est un morphisme élémentaire vis à vis des modèles $M(X)$ et $M(Y)$ - qui s'étend de manière unique aux clotures de Skolem, c'est-à-dire en isomorphisme de $M(X)$ dans $M(Y)$. Autrement dit $M(X)$ est unique à isomorphisme près, et $(X, <_X, C_X) \rightarrow M(X)$ est un foncteur.

Noter que vu la condition (ii)', le modèle $M(X)$ dépend de notre choix du type $t(v)$ réalisé par α (*), qui jusqu'ici peut être n'importe quel type non borné complet sur M. Nous allons étudier la structure de $M(X)$ - pour le moment sans faire d'hypothèse sur t, mais nous ajouterons plus tard quelques conditions supplémentaires.

Tout d'abord $\alpha \in M(X)$, car $\alpha = h(b)$ $\forall b \in S_\alpha^o$, en particulier $\alpha = h(x)$ $\forall x \in X$. De plus comme X est C-indiscernable au-dessus de M et α est définissable à partir de paramètres de M et n'importe quel point de X, il s'en suit que X est C-indiscernable sur $M(\alpha)$. La partie $M(\alpha)$ du modèle $M(X)$ étant complètement déterminée par le type t de α sur M, nous passons à l'étude de $M(X) \setminus M(\alpha)$; nous en étudions la structure non pas tant par rapport à M que par rapport à $M(\alpha)$, en utilisant α comme un paramètre faisant partie du langage.

$M(X)$ est un modèle engendré par itération du type σ de la même manière qu'étant

(*) $t(v)$ est aussi réalisé par $h(v_1)$, dans le type $\sigma(v_1, v_2)$

donné un type minimal ou uniforme t, $M(^t_X)$ résulte de l'itération de t; les propriétés de $M(X)$ que nous allons établir ci-dessous sont la généralisation de celles qu'a $M(^t_X)$ quand t est un type <u>minimal</u> (cf. §IV de l'exposé précédent) :

(a) <u>Supports</u>. Pour tout ensemble ou suite de points S dans $M(X)$ on note $M(S)$ la cloture de Skolem de $M \cup S$ dans $M(X)$; pour tout point $d \in M(X)$ on dit que S <u>est un support</u> de d si $S \subset X$ et $d \in M(S \cup \{\alpha\})$ (noter que $d \in M(\alpha) \Leftrightarrow \phi$ est un support de d).

II.4. <u>Théorème du support</u>. Tout élément d de $M(X)$ possède un support minimum.

(b) <u>Propriétés d'indépendance de X dans $M(X)$</u>. Appelons <u>motif</u> d'un point $d \in M(X)$ toute paire (P,f) où P est le motif du support minimum $\bar{x}$ de d, et $f(u,\bar{v})$ une fonction telle que $f(\alpha\bar{x}) = d$. De la C-indiscernabilité de X sur $M(\alpha)$ se déduit que dans $M(X)$ le motif de tout point d détermine le type de d sur M (et ceci s'étend aux suites de points). La "propriété d'indépendance" de X en question, c'est la réciproque de ceci :

II.5. <u>Théorème</u>. (a) Quelque soit $d \in M(X)$, le support minimum de d est définissable à partir de α et d.

(b) Quelque soit $d \in M(X)$, le type de d sur $M(\alpha)$ détermine les motifs de d.

(c) Les deux théorèmes précédents sont des propriétés de $M(X)$, mais puisque les modèles $M(X)$ sont déterminés pour σ et la coloration de X, on peut les exprimer sous forme de propriétés de σ dans M, obtenant des résultats analogues à la caractérisation dans M des types d'extension minimale (cf. proposition I.1. de l'exposé précédent):

II.6. <u>Proposition</u>. Pour tout motif $P(\bar{v})$ on note P^k_α l'ensemble $\{\bar{a} \in S^k_\alpha : p(\bar{a}) = P\}$; soient $\bar{z} \in X$, P le motif de $\bar{z}$, $f(\bar{v})$ un terme.

(a) Si $f(\bar{z}) \in M(\alpha)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(\bar{v})$ est constante, égal à $f(\bar{z})$, sur P^k_α .

(b) Si $f(\bar{z}) \in M(X) \setminus M(\alpha)$ et $\bar{z}$ est le support minimum de $f(\bar{z})$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(\bar{v})$ est injective sur P^k_α .

(c) Dans tous les cas il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que sur P^k_α, $f(\bar{v})$ est soit constante, soit injective, soit "superflue", c'est-à-dire il existe $\bar{w} \subsetneq \bar{v}$ et un terme $f'(\bar{w})$ tel que $f(\bar{z}) = f'(\bar{z})$, et plus généralement $f(\bar{a}) = f'(\bar{a})$, $\forall \bar{a} \in P^k_\alpha$.

Nous passons à la démonstration de ces résultats.

Le lemme ci-dessous a essentiellement pour contenu le théorème du support; car dans le cas particulier du lemme où $\bar{x}$, y, z sont dans X et pas seulement dans S^k_α , on en déduit que si un point $d \in M(X)$ a deux supports distincts $\bar{a}$ et $\bar{b}$, alors d possède un support strictement contenu dans $\bar{a}$ et $\bar{b}$, d'où le théorème résulte immédiatement. Mais le lemme étend cela à $\bar{a}$, $\bar{b}$ pris dans S^k_α et pas seulement X.

Noter qu'il est l'extension à deux termes f,g de la Remarque I.11.

II.7. Lemme du support. Soient $f(\bar{u}v)g(\bar{u}v)$ deux termes et k un entier tel que S^k_α décide les formules $f(\bar{u}v) = f(\bar{u}v_1)$ et $f(\bar{u}v) = g(\bar{v}w)$ (k existe par la Proposition II.2.b.); soient $x,y,z \in S^k_\alpha$ tels que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$. Alors $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$, quelque soit $y_1 \in S^k_\alpha$ tel que $p(\bar{x}y_1) = p(\bar{x}y)$; donc il existe un terme $f'(\alpha\ \bar{u})$ telle que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z) = f'(\alpha\ \bar{x})$.

Démonstration. Soit $y_1 \in S^k_\alpha$ tel que $p(\bar{x}y) = p(\bar{x}y_1)$; il nous faut montrer $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$. Posons :

$$P(\bar{u}v) = p(\bar{x}y),\quad P'(\bar{u}vw) = p(\bar{x}yz),\quad P''(\bar{u}vv_1) = p(\bar{x}yy_1).$$

Fait : $P'(\bar{u}vw) \cup P'(\bar{u}v_1w) \cup P''(\bar{u}vv_1)$ est consistant.

Sinon il existerait une formule atomique θ, telle que θ et $\neg\theta$ appartiennent à la réunion de ces trois motifs; nous allons voir que c'est impossible.

Cas 1. θ et $\neg\theta$ dans le même motif : impossible car tout motif est consistant.

Cas 2. $\theta \in P'(\bar{u}vw)$, $\neg\theta \in P'(uv_1w)$; alors comme θ et $\neg\theta$ ont les mêmes variables, celles-ci sont communes aux deux motifs, c'est-à-dire font partie de $\bar{u}w$. Mais la restriction de ces deux motifs à $\bar{u}w$ est le motif $p(\bar{x}z)$, qui contiendrait alors θ et $\neg\theta$, impossible.

Cas 3 $\theta \in P'(\bar{u}v_1w)$, $\neg\theta \in P''(\bar{u}vv_1)$; alors les variables de θ, $\neg\theta$ sont parmi $\bar{u},v_1$. Or la restriction des deux motifs à $\bar{u},v_1$ est le motif $P(\bar{u}v_1)$, qui contiendrait alors θ et $\neg\theta$, impossible.

Les autres cas sont alors impossibles par raison de symétrie (permuter v et v_1, ou θ et $\neg\theta$). D'où le fait.

Comme S^k_α est général sur M (Proposition II.2) il suit du fait ci-dessus l'existence de $\bar{a},b,b_1,c \in S^k_\alpha$ satisfaisant $P'(\bar{a}bc) \cup P'(\bar{a}b_1c) \cup P''(\bar{a}bb_1)$. Alors

- comme S^k_α décide la formule $f(\bar{u}v) = g(\bar{u}w)$, comme $\bar{x},y,y_1,z,\bar{a},b,b_1,c \in S^k_\alpha$ et $p(\bar{x}yz) = P'(\bar{u}vw) = p(\bar{a}bc) = p(\bar{a}b_1c)$, de $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$ se déduit à la fois $f(\bar{a}b) = g(\bar{a}c)$ et $f(\bar{a}b_1) = g(\bar{a}c)$, d'où $f(\bar{a}b) = f(\bar{a}b_1)$.

- de même, comme S^k_α décide la formule $f(\bar{u}v) = f(\bar{u}v_1)$ et comme $p(\bar{x}yy_1) = P''(\bar{u}vv_1) = p(\bar{a}bb_1)$, de $f(\bar{a}b) = f(\bar{a}b_1)$ se déduit $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$ ce qui montre une conclusion du lemme.

Enfin posons $f'(\alpha\, \bar{u}) = \mu v \mid \exists v_1 \in S_\alpha^k\ (P(\bar{u}v_1) \wedge f(\bar{u}v_1) = v)$; il est clair que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z) = f'(\alpha,\bar{x})$, c.q.f.d.

<u>Démonstration du théorème du support II.4</u>. Soit $d \in M(X)$; d a donc un support <u>fini</u> $S \subset C$; soit S_o un support de d de cardinal minimal $(\leq |S|)$, et soit S_1 n'importe quel support de d. Si $S_o \not\subseteq S_1$, il existe $y \in S_o \setminus S_1$, et puisque $|S_o| \leq |S_1|$, il existe $z \in S_1 \setminus S_o$. Soient $\bar{a}$, énumérant $S_o \setminus \{y\}$, $\bar{b}$ énumérant $S_1 \setminus \{z\}$, $\bar{x} = \bar{a}\bar{b}$. Il existe f,g fonctions telles que $f(\bar{a}y) = g(\bar{b}z) = d$, et moyennant des variables fictives on les note $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$, et le lemme du support en déduit $f'(\bar{x})$ égale en fait à $f'(\bar{a})$, telle que $f'(\bar{a}) = d$; comme $\bar{a} \not\supseteq S_o$ cela contredit la minimalité de S_o. Donc S_o est toujours $\subseteq S_1$, c'est-à-dire est support minimum de d.

<u>Démonstration de la proposition II.6. (a)</u>. Soit $d \in M(\alpha)$: il existe une fonction g tel que $d = g(\alpha)$; supposons $f(\bar{z}) = d$. Ceci s'exprime par la formule $\phi(\bar{z}) = [f(\bar{z}) = g(h(z_o))]$. Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que S_α^k décide ϕ : c'est-à-dire pour tout motif Q, $\phi(\bar{v})$ prend une valeur constante sur Q_α^k ; en particulier comme $\phi(\bar{z})$ est vrai et $\bar{z} \in P_\alpha^k$, $\phi(\bar{a})$ est vrai pour toute suite $\bar{a} \in P_\alpha^k$, d'où (a).

Noter que réciproquement, si f est constante sur P_α^k, alors $f(\bar{z}) = \mu v \mid \exists \bar{u} \in P_\alpha^k\ f(\bar{u}) = v$, d'où $f(\bar{z}) \in M(\alpha)$.

(c) Soit $k_o \in \mathbb{N}$ tel que $S_\alpha^{k_o}$ décide $[f(\bar{u}) = f(\bar{v})]$.

<u>Cas 1</u> : il existe $\bar{a} \in P_\alpha^{k_o}$ tel que $\bar{a} \neq \bar{z}$ mais $f(\bar{a}) = f(\bar{z})$. Alors par le lemme du support II.7., il existe $f'(\bar{w})$, avec $\bar{w} \not\subseteq \bar{v}$, tel que $f(\bar{z}) = f'(\bar{z})$. k étant tel que S_α^k décide la formule $f(\bar{v}) = f(\bar{w})$, et celle-ci étant vraie en $\bar{z} \in P_\alpha^k$, on a $f(\bar{a}) = f'(\bar{a})$ pour toute suite $\bar{a} \in P_\alpha^k$, autrement dit f est superflue sur P_α^k .

<u>Cas 2</u> : $\forall \bar{a} \in P_\alpha^{k_o}$, $\bar{a} \neq \bar{z} \Rightarrow f(\bar{a}) \neq f(\bar{z})$. Ceci s'exprime par une formule $\phi(\bar{z})$; k étant tel que S_α^k décide $\phi(\bar{v})$, puisque $\bar{z} \in P_\alpha^k$ et $\phi(\bar{z})$ est vrai, on en déduit $\phi(\bar{b})$ $\forall \bar{b} \in P_\alpha^k$, c'est-à-dire f injective sur P_α^k .

Ceci démontre (c).

(b) Si $\bar{z}$ est le support minimum de $f(\bar{z})$, f ne peut pas être superflue sur P_α^k, donc par le cas 2 du (c), f est injective sur P_α^k.

<u>Démonstration du théorème II.5.a</u>. Nous supposons $d \notin M(\alpha)$ puisque sinon $\emptyset$ est un support de d; alors soit $\bar{z}$ le support minimum de d, et soit $f(\bar{v})$ telle que $f(\bar{z}) = d$. Par la proposition II.6.b il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit injective sur k; alors $\bar{z}$ se définit comme étant $\mu \bar{v} \mid \bar{v} \in P_\alpha^k \wedge f(\bar{v}) = d$.

Soient x un point de X et y un point quelconque de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} S^k_\alpha$; x et y réalisent le même type sur α, à savoir $\{v \in S^k_\alpha;\ k\in\mathbb{N}\}$. D'autre part x est son propre support minimum, et un motif de x est (id,P_o), où id est la fonction identité et P_o le motif (unique) à une seule variable. Dans ce cas, le théorème II.5.b. que nous voulons démontrer nous dit que (id,P_o) est aussi un motif de y - donc y est support de y, donc $y \in X$. Autrement dit la proposition ci-dessous est un cas particulier du théorème II.5.b, que nous démontrons à part :

II.8. Proposition. Dans $M(X)$, $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S^k_\alpha$.

Démonstration. Si $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S^k_\alpha$ et $y \notin X$, y a un support minimum $\bar{x}z \neq y$; alors par le lemme du support VII.7., on en déduit que y a $\bar{x}$ comme support, contradiction. Donc $y \in X$. c.q.f.d.

Démonstration du théorème II.5.B. Soient d et d' réalisant le même type sur $M(\alpha)$; si $d \in M(\alpha)$, alors il existe un terme $g(v)$ tel que dans $M(X)$, $d = g(\alpha)$, donc $d' = g(\alpha) = d$. Reste le cas $d \notin M(\alpha)$ - donc $d' \notin M(\alpha)$, vu le cas précédent. Soit (f,P) un motif de d et $\bar{x}$ son support minimum; donc $P = p(\bar{x})$ et $f(\bar{x}) = d$. Par (a), il existe une suite de fonctions $\bar{g}(\alpha,v)$ telle que $\bar{x} = \bar{g}(\alpha d)$. Alors $\bar{g}(\alpha d) \in S^k$ et $d \equiv_{M(\alpha)} d'$ entraîne pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\bar{g}(\alpha d') \in S^k_\alpha$; de même $f(\bar{g}(\alpha d)) = f(\bar{x}) = d$ entraine $f(\bar{g}(\alpha d')) = d'$. Bref si $\bar{z} = \bar{g}(\alpha d')$, $\bar{z} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S^k_\alpha$ et $f(\bar{z}) = d'$; donc par la proposition II.8., $\bar{z} \in X$, ainsi $\bar{z}$ est support de d'.
De façon semblable, de ce que $\bar{x}$ est le support minimum de d, et P est le motif de $\bar{x}$, on déduit que $\bar{z}$ est le support minimum de d' et P le motif de $\bar{z}$; donc (f,P) est un motif de d'. c.q.f.d.

Pour finir ce paragraphe, on va éliminer le rôle de paramètre joué par α dans le théorème que nous venons de démontrer; mais pour cela un choix approprié du type t, réalisé par α sur M, est nécessaire.

Proposition II.9. On peut choisir t de manière que d'une part il soit minimal sur M et d'autre part, dans les modèles $M(X)$ résultant de ce choix de t, α est définissable à partir de chaque point $d \in M(X) \setminus M$.

Démonstration. Soit $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$; soient $\bar{x}$ le support minimum de d, (f,P) un patron de d : $\bar{x}$ réalise P et $f(\bar{x}) = d$. Noter que pour la proposition II.6.b., il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit injective sur P^k_α . Pour tout $a \in M$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on note F^k_a l'image de P^k_a par f.

Supposons que t contienne une formule Θ telle que, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$\theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash F^p_{v'} \cap F^p_v = \emptyset$. Comme α vérifie θ, et $d \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^k_\alpha$, cela entraîne : $\alpha = \mu v \mid (\theta(v) \wedge d \in F^p_v)$, donc α est définissable à partir de d. Reste à choisir t minimal et contenant une telle formule θ ; le lemme qui suit permet d'employer pour cela les arguments de densité de l'exposé précédent, §III C

Lemme II.10. Pour tout motif $P(\bar v)$ et tout terme $f(\bar v)$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la condition $\mathcal{P}(\theta)$ est dense parmi les formules non bornées dans M :

$$\mathcal{P}(\theta) = [f \text{ injective sur } P^p_{v'}, \text{ et } (\theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v) \vdash F^p_v \cap \bigcup_{b \le v'} F^p_b = \emptyset \quad .$$

Démonstration. Observons d'abord que la condition suivante est dense (parmi les formules non bornées dans M) :

$$\mathcal{P}'(\theta) = [\, \theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash |P^k_v| > \sum_{b \le v'} |P^o_b|]$$

En effet, considérons le terme h' défini par

$$h'(a') = \mu a \mid |P^k_a| > \sum_{b \ge a'} |P^o_b| \quad ;$$

noter qu'un tel élément h'(a') existe, car $|P^k_a|$ tend vers l'infini avec a, puisque le degré de C dans S^k_a tend vers l'infini avec a. Alors $\mathcal{P}'(\theta)$ équivaut à la condition : $\theta(v_1) \wedge \theta(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(v_1) < v_2$; nous dirons que θ est h-rare si elle vérifie cette condition, en effet, cf. §II de l'exposé précédent, on appelle rares les types qui pour tout terme h contiennent une formule θ vérifiant cette condition. La densité de cette condition, qui entraîne la densité de $P'(\theta)$, se vérifie facilement, directement ou à l'aide des méthodes ad hoc du §III, exposé précédent.

Observons ensuite que la condition suivante est dense :

$$\mathcal{P}''(\theta) = \theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash S^k_v \text{ décide } \phi^k(bv_1 \ldots v_k) \text{ pour tout } b \le h(v') \quad .$$

En effet considérons le terme h" défini par

$h''(v') = \mu a \,|S^k_a$ décide $\phi^k(bv_1\ldots v_k)$ pour tout $b \le h(v')$; noter qu'un tel élément h"(a') existe, puisque le degré de ϕ^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a. Alors $\mathcal{P}''(\theta)$ équivaut à la condition dense que θ est h"-rare.

Soient $f^1(u\bar v)$ un terme sans paramètre, et $a_o \in M$ tels que $f(\bar v) = f^1(a_o,\bar v)$; la formule "$f(\bar v) \in F^o_{b_o}$" fait intervenir deux paramètres a_o, b_o, et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^p(\langle a_o,b_o\rangle v_1\ldots v_k) = f(v) \in F^o_{b_o}$, où $\langle a,b\rangle$ est l'élément $2^a.3^b$ qui code le couple (a,b). Dans les conditions $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ ci-dessus, nous fixons désormais k égal à p et la fonction h(v) égale à $2^v.3^v = \langle v,v\rangle$; nous sommes sommes en mesure de démontrer non seulement le lemme, mais une version uniforme p.r. au paramètre a_o qui figure dans $f(\bar v)$ de ce lemme :

II.10. Bis. La condition suivante est dense : $\mathcal{P}^*(\theta)$ = "pour tout a_o, $\mathcal{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$ est vérifié vis à vis du terme $f(\bar v) = f_1(a_o\bar v)$".

En effet $\mathcal{P}^*(\theta)$ est conséquence des deux conditions denses $\mathcal{P}'(\theta)$ et $\mathcal{P}''(\theta)$. Car supposons $\theta(a') \wedge \theta(a) \wedge a_o < a' < a$, et $f(\bar{v}) = f_1(a_o\bar{v})$ injective sur P^p_a : autrement dit a' et a vérifient l'hypothèse de la condition $\mathcal{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$; nous allons voir que $\mathcal{P}'(\theta)$ et $\mathcal{P}''(\theta)$ entraînent alors que a' et a vérifient la conclusion de $\mathcal{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$. Tout d'abord, vu l'injectivité de f, $|F^p_a| = |P^p_a|$; lequel nombre est $> \sum_{b \leq a'} |P^o_b|$, si $\mathcal{P}'(\theta)$ est vérifié. Cela implique $F^p_a \nsubseteq \bigcup_{b \leq a'} F^o_b$, c'est-à-dire il existe $\bar{x} \in P^p_a$ tel que $f(\bar{x}) \in F^o_b$ est faux pour tout $b \leq a'$. Or si $\mathcal{P}^a(\theta)$ est vérifié, S^p_a décide la formule $f(\bar{v}) \in F^o_b$ $= \phi^p(<a_o, b> v_1 \ldots v_k)$ pour tout $b \leq a'$ (vu qu'alors $<a_o, b><h(a') = <a', a>$) ; donc "$f(\bar{x}) \in \bigcup_{b \leq a'} F^o_b$", étant faux pour un $\bar{x} \in P^p_a$, l'est pour tous c'est-à-dire

$F^p_a \cap \bigcup_{b \leq a'} F^o_b = \emptyset$. A fortiori $F^p_a \cap \bigcup_{b \leq a'} F^p_b = \emptyset$, autrement dit a et a' vérifient la conclusion de $\mathcal{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$. Le lemme et son uniformisation sont ainsi démontrés.

Nous revenons alors à la démonstration de la proposition II.9., autrement dit à la construction du type t : pour que t ait les propriétés requises, il suffit que t rencontre les ensembles denses définis par les conditions suivantes :

- celles qui expriment la minimalité de t;
- les conditions $\mathcal{P}^*$ ci-dessus, lorsque $f_1(u\bar{v})$ parcourt les termes purs.

Le langage L étant supposé dénombrable, ces conditions sont en nombre dénombrable, d'où l'existence de t.

Dorénavant on suppose t comme dans la proposition II.9. que nous venons de démontrer.

II.11. Corollaire. Si $d, d' \in M(X)$ ont le même type sur M, ils ont le même type sur $M(\alpha)$.

Démonstration. $M(\alpha)$ est cofinal dans $M(X)$ puisque $M(X)$ est engendré par X et X est borné par $\max(S^o_\alpha)$ qui est un point de $M(\alpha)$; de plus $t(v)$ est un type minimal réalisé par α . Il en résulte par le théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (cf. §IV. de l'exposé précédent) que α est le seul élément de $M(X)$ réalisant t. Alors considérons d et d' réalisant le même type sur M;

1er cas. $d \in M(\alpha)$; alors il existe un terme $f(v)$ tel que $f(\alpha) = d$ et par le lemme ci-dessus, il existe un terme $g(v)$ tel que $g(a) = \alpha$; donc si l'on pose $\alpha' = g(d')$ on a $f(\alpha') = d'$, et α' réalise le même type que α sur M, soit t. Donc $\alpha = \alpha'$, et $f(\alpha') = f(\alpha) = d' = d$; d' et d ont alors le même type sur n'importe quoi !

2ème cas. $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$. Par (a) il existe $g(v)$ telle que $\alpha = g(d)$. Soit $\alpha' = g(d')$; comme d et d' ont même type sur M, α' réalise le même type que α, soit t; alors $\alpha' = \alpha = g(d) = g(d')$. Le type de d sur M détermine le type de d sur $M(g(d)) = M(\alpha)$, et de même pour d' et $g'(d') = \alpha$, d'où le résultat.

<u>Corollaire (Théorème II.5.bis)</u>. Soit $d \in M(X)$; (a) Le support de d est définissable à partir de d.

(b) Le type de d sur M détermine les motifs de d.

<u>Démonstration</u>. Conséquence immédiate du théorème II.5 et du Corollaire précédent.

§III - LE FINALE

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de types sur M, tel que

(*) quels que soit $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau = \tau(v_1 \ldots v_s) \vdash v_1 < \ldots < v_s$, et si $\tau \neq \tau'$, $\tau' \in \mathcal{T}$, alors $\tau \cup \tau'$ est incònsistant. Si $N > M$ et $X \subset N$ on dira que X est coloré dans $\mathcal{T}$ si $\forall \bar{x} \in [X]^s$ il existe un type $\tau \in \mathcal{T}$ tel que $N \models \tau(\bar{x})$; ce type τ sera appelé la couleur de $\bar{x}$ et noté $\mathcal{C}_N(\bar{x})$ ou $\mathcal{C}(\bar{x})$ si N est fixé par le contexte. Et si $P(v_1 \ldots v_L)$ est un $\mathcal{T}$-motif, c'est-à-dire un motif standard à couleurs dans $\mathcal{T}$ (comme défini dans le §I.D), on dit qu'une suite $(y_1, \ldots, y_L)$ de N réalise P si $N \models P^*(y_1 \ldots y_L)$, où $P^*(v_1 \ldots v_L)$ est le type obtenu en remplaçant chaque formule de P de la forme $C(v_{i_1} \ldots v_{i_s}) = \tau$ par le type $\tau(v_{i_1} \ldots v_{i_s})$. Par la suite on confondra $P(v_1 \ldots v_L)$ et $P^*(v_1 \ldots v_L)$; par exemple on écrira $N \models P(x_1 \ldots x_L)$ au lieu de $N \models P^*(x_1 \ldots x_L)$, et on considérera $P(v_1 \ldots v_L)$ comme un type sur M, alors que c'est P^* qui est un type sur M.

L'objet de ce paragraphe est de généraliser le §II, en remplaçant la coloration $C : [M]^s \to M$ par une coloration $\mathcal{C}$ de l'espèce ci-dessus, obtenant :

III.1. Théorème principal - Pour tout modèle M de $\mathcal{P}$ il existe un ensemble $\mathcal{T}$ de types sur M et un type $\sigma(v_1 v_2)$ sur M, tels que

- $\mathcal{T}$ est de cardinal $|M|^{\aleph_0}$ et vérifie la condition (*) ci-dessus
- $\mathcal{T}$ et σ vérifient les propriétés 1 à 3 qui suivent.

1. Pour tout $\mathcal{T}$-motif $P(v_1 \ldots v_L)$, la théorie $\bigwedge_{i,j \leq L} \sigma(v_i v_j) \wedge P(v_1 \ldots v_L)$ est un type complet sur M.

2. Pour tout ensemble $(X, <_X, \mathcal{C}_X)$ à coloration dans $\mathcal{T}$, (avec pour simplifier X disjoint de M) il existe $N \succ M$, contenant X et tel que
   - $<_X$ et $\mathcal{C}_X$ coïncident avec la restriction à X de $<_N$ et $\mathcal{C}_N$ ($\mathcal{C}_N$ étant défini comme ci-dessus)
   - $X^2 \subset \sigma_N$, ce qui entraîne que X est $\mathcal{C}$-indiscernable sur M sur N (c'est-à-dire le $\mathcal{C}$-motif de $\bar{x} \in X$ détermine son type sur M).

Soit alors $M(X)$ la cloture de Skolem de $M \cup X$ dans N; le modèle $M(X)$ déterminé par les conditions ci-dessus est unique, à isomorphisme sur M et $(X, <_X, \mathcal{C}_X)$ près; plus généralement, $X \to M(X)$ est un foncteur de la catégorie des ensembles à couleurs dans $\mathcal{T}$, dans la catégorie des extensions élémentaires de M.

3. - Tout modèle $M(X)$ contient un point α tel qu'on a les propriétés suivantes : α réalise un type minimal sur M; et α est définissable à partir de chaque point $d \in M(X) \setminus M$; pour tout $d \in M(X)$, l'ensemble $X \cap M(d)$ est fini; il est vide si et seulement si $d \in M(\alpha)$. Si $d \in M(X) - M(\alpha)$, l'ensemble $X \cap M(d)$ est appelé le support de d : il est le plus petit sous-ensemble Y de X tel que $d \in M(Y)$.

Soit $d \in M(\alpha)$; alors pour tout $d' \in M(X)$, d' réalise le même type sur M que d si et seulement si $d' = d$.

Soit $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$, et soit $\bar{x}$ le support de d (rangé en suite croissante); il existe donc un terme $f(\bar{v})$ tel que $f(\bar{x}) = d$, et une suite de termes $\bar{g}(v)$ telle que $\bar{g}(d) = \bar{x}$. Si d' réalise le même type que d sur M et $\bar{y}$ est le support de d', alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ ont même $\mathcal{C}$-motif, et pour tout terme $f(\bar{v})$ et suite de termes $\bar{g}(v)$, $f(\bar{x}) = d \Rightarrow f(\bar{y}) = d'$ et $\bar{g}(d) = \bar{x} \Rightarrow \bar{g}(d') = \bar{y}$. Réciproquement, si $\bar{x},\bar{y} \in X$ ont même $\mathcal{C}$-motif, et $f(\bar{v})$ est un terme tel que $f(\bar{x}) = d$, $f(\bar{y}) = d'$, alors d et d' réalisent le même type sur M.

Avant de passer à la démonstration (essentiellement contenue dans §II), nous indiquons trois corollaires

III.2. Corollaire - Soit M' un sous-modèle élémentaire de $M(X)$, contenant M; alors $M' = M$, ou $M' = M(\alpha)$, ou $\exists X' \subset X : M' = M(X')$.

Démonstration - Soit M' tel que $M \precneq M' \prec M(X)$, et soit $X' = X \cap M'$. Par le théorème principal (3), si $X' = \phi$ alors $M' \subseteq M(\alpha)$, et comme $M(\alpha)$ est extension $\prec$-minimale de M et $M \precneq M'$ on a $M' = M(\alpha)$. Et si $X' \neq \phi$, on a $M(\alpha) \subset M(X')$ puisque α est définissable à partir de tout point de $M(X') \setminus M$; alors soit $d \in M'$: si $d \in M(\alpha)$, $d \in M(X')$, et si $d \notin M(\alpha)$, d est définissable à partir de son support $X \cap M(d) \subset X'$, donc $d \in M(X')$. Dans tous les cas on a montré $d \in M'$ $\Rightarrow d \in M(X')$; et réciproquement $M \cup X' \subset M'$ donc $M(X') \subseteq M'$. D'où $M(X') = M'$, c.q.f.d.

N.B. Ainsi le lattice des sous-modèles élémentaires de $M(X)$ contenant M est presque isomorphe, pour l'application : $X' \in \mathcal{P}(X) \to M(X')$, au lattice $\mathcal{P}(X)$: il ne diffère de ce dernier qu'en raison du modèle $M(\alpha)$ le seul qui n'est pas de la forme $M(X')$, $X' \subset X$. On a vu (démonstration du Corollaire II.11) que $M(\alpha)$ est cofinal dans $M(X)$, ce qui entraine que $M(x)$ est cofinal dans $M(X)$, $\forall x \in X$; d'autre part on sait (exposé précédent, §IV) qu'il ne peut exister deux extensions $\prec$-minimales $M(x_1)$ et $M(x_2)$ de M telles que $M(x_1)$ et $M(x_2)$ sont cofinaux l'un dans l'autre. L'"excroissance" constituée par $M(\alpha)$ ne peut donc pas être éliminée.

III.3. Corollaire - Pour tout sous-ensemble Y de $M(X)$ qui est $<$-indiscernable sur M, il existe $Z \subset X$ et un terme $g(v)$, tels que Z est $<$-indiscernable sur M et g envoie bijectivement Y sur Z.

Démonstration - Nous supposons $Y = \{d^1,\ldots d^n\}$ avec $n \geq 2$: la démonstration s'étend trivialement au cas général. Puisque $d^1\ldots d^n$ ont même type sur M et sont distincts, par le théorème principal (3), il s'en déduit que $d^1,\ldots,d^n \notin M(\alpha)$, que les supports $\bar{x}^1,\ldots\bar{x}^n$ de $d^1,\ldots,d^n$ ont même $\mathcal{C}$-motif (en particulier même longueur) et qu'il existe des termes $f(\bar{v})$ et $\bar{g}(v)$ tels que $f(\bar{x}^i) = d^i$ et $\bar{g}(d^i) = \bar{x}^i$, pour tout $i \leq n$. Soit j tel que $x^1_j \neq x^2_j$ (j existe, sinon $\bar{x}^1 = \bar{x}^2$ donc $f(\bar{x}^1) = d^1 = f(\bar{x}^2) = d^2$, qui est faux). Puisque $x^1_j = g_j(d^1)$ et $x^2_j = g_j(d^2)$, on a $g_j(d^1) \neq g_j(d^2)$; par indiscernabilité de $\{d^1,\ldots,d^n\}$ cela entraine que $\{g_j(d^1),\ldots,g_j(d^n)\} = \{x^1_j,\ldots,x^n_j\}$ est un ensemble $<$-indiscernable sur M et de cardinal n, d'où le résultat cherché, en prenant $Z = \{x^1_j,\ldots,x^n_j\}$ et $g = g_j$.

Rappelons qu'un cardinal infini λ est strictement inférieur au <u>nombre de Hanf</u> d'une théorie T si et seulement si il existe un type $p(\bar{v})$ qui est omis dans un modèle de T de cardinal λ mais est réalisé dans tout modèle de cardinal $< \lambda$. On sait (voir [A.H.]) que si T est une "théorie fausse" de l'Arithmétique, c'est-à-dire T contient les axiomes de Péano $\mathcal{P}$, mais n'est pas vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$, alors le nombre de Hanf de T est $\beth_{\omega_1}$. En revanche, J.F. Knight, [K] , a démontré que le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\beth_\omega$.

III.4. <u>Corollaire</u> - Le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\beth_\omega$.

<u>Démonstration</u> - Il nous reste à montrer que ce nombre est plus grand que $\beth_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration utilise deux résultats combinatoires qui figurent en appendice de cet exposé.

III.5. <u>Théorème</u> - (a) $\beth_n \not\to [n+1]^n_{\beth_1}$, autrement dit il existe un ensemble coloré $(X, <_X, C_X)$ tel que $<_X$ est de type $\beth_n$, C_X est une coloration des n-uplets avec $\beth_1$ couleurs, et X contient pas de suite $<$-indiscernable (pour C_X) de cardinal $n+1$.

(b) $\beth_{n+1} \to [n+1]^n_{\beth_1}$.

Lorsque notre modèle fixé M est le modèle standard $\mathbb{N}$ $(=(\mathbb{N},+,\times))$, l'ensemble de types $\mathcal{T}$ du théorème principal est de cardinal $\aleph_0^{\aleph_0} = \beth_1 \geq \aleph_1$; en conséquence on peut supposer que l'ensemble X du théorème III.5.a est à couleurs dans $\mathcal{T}$. Considérons alors le modèle $\mathbb{N}(X)$, tel que $\mathbb{N} < \mathbb{N}(X)$, $X \subset \mathbb{N}(X)$ et sur X, $<_{\mathbb{N}(X)}$ coïncide avec $<_X$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{N}(X)}$ avec C_X. Par le corollaire précédent III.3, pour tout ensemble Y qui est $<$-indiscernable dans $\mathbb{N}(X)$, il existe $Z \subset X$ qui est $<$-indiscernable et de même cardinal; et puisqu' l'ensemble coloré $(X, <_{\mathbb{N}(X)}, \mathcal{C}_{\mathbb{N}(X)})$ ne contient pas $n+1$ points indiscernables, Z donc Y comportent au plus n points. Ainsi le modèle $\mathbb{N}(X)$ ne comporte aucune suite indiscernable de $n+1$ points; autrement dit $\mathbb{N}(X)$ omet le type

$$p(v_0\ldots v_n) = \{(v_0 < \ldots < v_n\} \cup \{\phi(\bar{u}) \leftrightarrow \phi(\bar{w});\ \ \phi(x_1\ldots x_n) \text{ formule}$$

arithmétique, $\bar{u}$ et $\bar{w}$ deux suites de variables $\in \{v_0,\ldots,v_n\}$ avec des indices croissants $\}$; lequel type exprime que $v_0\ldots v_n$ sont $n+1$ points indiscernables. Comme card $\mathbb{N}(X)$ = card $X = \beth_n$, $p(v_0\ldots v_n)$ est omis dans un modèle de la théorie complète de N de cardinal $\beth_n$. En revanche, il résulte du théorème III.5.b que p

est réalisé dans tout modèle N de cardinal $\geq \beth_{n+1}$. En effet soit sur N un bon ordre $<$ de type $\geq \beth_{n+1}$, et soit sur $[N]^n$ la relation d'équivalence $\sim$ définie par $\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x}$ et $\bar{y}$ réalisent le même type dans N. Le langage de N étant dénombrable, $\sim$ possède au plus $\beth_1$ classes, alors par $\beth_{n+1} \to [n+1]^n_{\beth_1}$, il existe $Y \subset N$ de cardinal $n+1$ tel que $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe de $\sim$, autrement dit Y est un ensemble $<$-indiscernable à $n+1$ points, qui réalise $p(v_o \ldots v_n)$ dans N. Pour tout entier n, nous avons ainsi un type qui est omis dans un modèle $\mathbb{N}(X) > \mathbb{N}$ de cardinal $\beth_n$, mais qui est réalisé dans tout modèle de cardinal $\geq \beth_{n+1}$; cela montre que le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\geq \beth_\omega$, c.q.f.d.

Il nous reste à démontrer le théorème principal, et pour commencer, à construire l'ensemble $\mathcal{T}$ et le type $\sigma(v_1 v_2)$. Pour cela nous utiliserons, outre une suite de familles S^k très semblables à celle du §II, une suite de colorations $C^k : [M]^s \to M$ qui vont remplacer la coloration unique C du §II.

Tout d'abord, on fixe une coloration générale définissable $C^o : [M]^s \to M$, on fixe une énumération $k \to \phi^k(u\, v_1 \ldots v_k)$ $(k \in N)$ des formules sans paramètres avec variables libres comme indiqué, et on choisit $a \to S^o_a$ $(a \in M)$ comme au §II.A, dans le cas où $C = C^o$: donc les degrés de C^o et de ϕ^o dans S^o_a tendent vers l'infini avec a. Cela fait, avant de définir une deuxième famille $(S^1_a)_{a \in M}$ comme au §II.A, on fixe une deuxième coloration définissable $C^1 : [M]^s \to M$, vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall a\ \exists b\ \ C^1_a \subset C^o_b$ (où $C_a = \{\bar{x} \in [M]^s : C(\bar{x}) = a\}$)
- $\forall a\ \ \{b \in M : C^1_b \subset C^o_a\}$ est infini
- le degré de cette nouvelle coloration C^1 dans S^o_a tend vers l'infini avec a.

On dira que C^1 <u>raffine</u> C^o si elle vérifie les deux premières conditions, et que C^1 est S^o-générale si elle vérifie la troisième. L'existence d'une telle coloration C^1 se montre aisément :

III.6. <u>Lemme</u> - Pour toute famille (S_a) et toute coloration C qui est S-générale, il existe une coloration C' qui raffine C et est encore S-générale.

<u>Démonstration</u> - Soit $a \to D_a$ $(a \in M)$ une partition définissable de M en ensembles tous infinis - C' va être défini de manière que $D_a = \{b : C'_b \subset C_a\}$.
Pour tout motif P, on note P^o le motif obtenu en remplaçant dans P toute formule de la forme $C(x_1 \ldots x_s) = b$, $b \in D_a$, par $C(x_1 \ldots x_1) = a$. On fixe une énumération définissable $a \to P_a$, telle que $\forall a \in M$, P_a est un motif a-général. Pour tout $b \in M$ on considère le plus grand entier a tel que S_b contienne un ensemble X qui réalise P^o_a; on définit $C' \upharpoonright X$ de manière à réaliser le motif P_a. Et sur le

restant de $[M]^s$, on définit C' en posant $C'(\bar{x}) = b$, où $b \in D_a$, a tel que $C(\bar{x}) = a$.

C^o, S^o C^1 étant maintenant choisis, on construit une famille $a \to S^1_a (a \in M)$ telle que $\forall a$ $S^1_a \subset S^o_a$ et les degrés de C^1 et ϕ^1 (et non pas C^o et ϕ^1) tendent vers l'infini avec a : l'existence de S^1 résulte du lemme II.1. appliqué lorsque $C = C^1$, $S = S^o$.

En répètant cette construction par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on obtient un analogue de la proposition II.2. qui introduisait les familles S^k $(k \in \mathbb{N})$ du §II :

II.2. bis - Proposition - (a) On peut construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une famille $a \to S^k_a$ $(a \in M)$ et une coloration C^k définissables dans M, telles que $\forall k$ C^{k+1} raffine C^k, $\forall a \in M$ $S^{k+1}_a \subset S^k_a$, enfin le degré de C^k et ϕ^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a.

(b) Alors dans tout modèle $N \succ M$ contenant $\alpha > M$, et vis-à-vis de la coloration C^k, l'ensemble S^k_α est général sur M et décide toutes les formules $\phi^i(a\ v_1 \ldots v_i)$ $(a \in M,\ i \leq k)$.

Démonstration - (a) C^k, S^k sont déjà construits pour $k \leq 1$; pour obtenir C^{k+1} on applique le lemme III.6 avec $C = C^k$ et $S = S^k$. Pour obtenir alors S^{k+1}, on applique le lemme II.1. avec $C = C^{k+1}$, $S = S^k$ et $\phi = \phi^{k+1}$.

(b) Puisque dans M le degré de C^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a, on déduit de $\alpha > M$ que le degré de C^k dans S^k_α est infini, par conséquent S^k_α est un ensemble général sur M vis à vis de la coloration C^k. Un argument semblable montre que pour tout $i \leq k$ S^i_α décide les formules $\phi^i(a\ v_1 \ldots v_i)$ $(a \in M)$ vis à vis de la coloration C^i; comme $S^k_\alpha \subset S^i_\alpha$, S^k_α en fait autant, toujours vis à vis de C^i. Et de ce que C^k raffine C^i résulte aisèment qu'on peut substituer C^k à C^i.

Nous avons ainsi une situation analogue à celle du §II, la différence résidant dans le fait qu'à chaque suite croissante $(x_1 \ldots x_s)$ est associée une infinité de couleurs $C^k(\bar{x})$, $k \in \mathbb{N}$. Par moment il sera commode de penser à cette suite infinie comme étant une seule couleur, et nous le ferons de la manière suivante. Pour tout modèle $N \succ M$ et tout $\bar{x} \in [N]^s$, soit $\tau(\bar{v})$ le type sur N : $\tau = \{C^k(v_1 \ldots v_s) = a;\ k \in \mathbb{N},\ N \models C^k(\bar{x}) = a\}$; si τ est un type sur M (c'est à dire $C^k(\bar{x}) \in M$ $\forall k \in \mathbb{N}$), τ sera appelé la couleur de $\bar{x}$ et noté $\mathcal{C}_N(\bar{x})$. Si τ est seulement un type sur N, et non sur M, on convient que $\mathcal{C}_N$ n'est pas défini. Ceci nous amène à l'ensemble de types $\mathcal{C}$ du théorème principal :

III.7. Notations - On pose

$$\mathcal{S} = \{\sigma \in M^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}\ C^o_{\sigma(o)} \cap \ldots \cap C^k_{\sigma(n)} \text{ est non vide}\}$$

et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$,

$\tau_\sigma = \{C^k(v_1 \dots v_s) = \sigma(k) : k \in \mathbb{N}\}$

enfin $\mathcal{C} = \{\tau_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}$

- Remarques - De II.2. bis on déduit facilement :

$\tau \in \mathcal{C} \iff$ il existe un modèle $N > M$ contenant $\bar{x} \in [N]^s$ tel que $\mathcal{C}_N(\bar{x}) = \tau$

$|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = |M|^{\aleph_0}$, et $\tau \neq \tau' \in \mathcal{C} \Rightarrow \tau \cup \tau'$ inconsistant.

Voici maintenant la définition du type $\sigma(v_1, v_2)$ intervenant dans le théorème principal :

III.8. Notations - Comme au §II.B, on choisit un type $t(u)$ non borné sur M et l'on pose

$h(v) = \mu u : v \in S_u^o$

$\sigma(v_1, v_2) = t(h(v_1)) \cup \{v_1, v_2 \in S^k_{h(v_1)} : k \in N\}$.

Nous démontrons maintenant le point (1) du théorème principal : pour tout $\mathcal{C}$-motif $P(v_1 \dots v_L)$, l'ensemble $\bigwedge_{i,j \le L} \sigma(v_i v_j) \wedge P(v_1 \dots v_L)$ est un type complet sur M. On écrit $\sigma(v_1 \dots v_L)$ au lieu de $\bigwedge_{i,j \le L} \sigma(v_i v_j)$, et on appelle C^k-motifs les motifs qui résultant des motifs au sens du §I.D., en remplaçant toute formule de la forme $C(x_1 \dots x_s) = a$ par $C^k(x_1 \dots x_s) = a$. Un $\mathcal{C}$-motif $P(v_1 \dots v_L)$ contient pour tout $k \in \mathbb{N}$ un C^k-motif $P_k(v_1 \dots v_L)$, et $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$. Alors la consistance et complètude de $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P$ résulte par compacité de l'extension suivante du théorème II.3. :

II.3.bis. - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P_k$ est une théorie consistante et décide chaque formule de la forme $\phi^i(a\, v_{e_1} \dots v_{e_i})$, $i \le k$, $a \in M$, $e_1 < \dots < e_i \le L$.

Démonstration II.3.bis résulte de II.2.bis exactement comme II.3. de II.2., moyennant le remplacement de C par C^k.

Toute la partie du §II qui suit le théorème II.3. s'étend à la présente situation, de la même manière que dans le cas de II.2.bis et II.3.bis : chaque fois qu'au §II. on considèrait un ensemble S^k_α, on considère la présente version de S^k_α, et en même temps, la coloration C^k qui permet à S^k_α de décider les mêmes formules qu'au §II. Et il est immédiat que les résultats du §II ainsi étendus entraînent le théorème principal; dans ces conditions, nous laissons au lecteur les détails restant de sa démonstration.

La construction de C^k, S^k et t étant passablement compliquée, il est plus élégant de les obtenir en laissant faire le travail par les arguments de densité, ce qui est la méthode de [A,H] . Nous indiquerons cette alternative à la construction précédente.

Nous construisons plus précisément une suite de triplets $<\psi^{(k)}(u),\ S_u^k,\ C^k(v)>$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $t(u) = \{\psi^k(u) : k \in \mathbb{N}\} \cup M < u$ jouera le rôle du type de α . Soit F = l'ensemble de tous les triplets $<\psi(u),\ S_u,\ C(v)>$ tels que $\psi(u)$ est une formule sans paramètre non bornée dans M, $a \to S_a (a \in M)$ une famille d'ensembles finis et C une coloration sur $[M]^s$, telle que le degré de C dans S_a tend vers l'infini avec a, C et S_u étant définis par des formules pures. Sur F soit $\prec$ la relation :

$$<\psi(u),\ S'_u,\ C'(v)> \prec <\psi(u),\ S_u,\ C(v)> \iff \vdash \psi'(u) \to \psi(u),$$

$\forall a \in M$ $S'_a \subset S_a$, et la partition $(C'_a)_{a \in M}$ est plus fine que la partition $(C'_a)_{a \in M}$. On dira qu'une suite $<\psi^k,\ S^k,\ C^k>$ $k \in \mathbb{N}$ est <u>générique</u> si elle est décroissante pour $\prec$ et si pour toute condition $\mathcal{P}(\psi, S, C)$ dense pour $\prec$ et définie de manière arithmétique (sans paramètres) il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(\psi^k, S^k, C^k)$ est vrai. Il résulte du théorème d'existence d'objets génériques (cf. §III de l'exposé précédent) qu'une telle suite générique existe; et par des arguments de densité, on peut montrer que $t(a)$, S^k, C^k ont les propriétés exigées pour le théorème principal.

BIBLIOGRAPHIE

[A.H] F. Abramson, L. Harrington, Models without indiscernibles, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 572-600.

[E.R] P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., vol 62 (1956), pp. 427-489.

[G] H. Gaifman, Models and types of Peano's arithmetic, Ann. Math. Logic, vol.9 (1976), pp. 223-306.

[K] J. Knight, Omitting types in set theory and arithmetic, Journal Symb. Logic, vol. 41 (1976), pp. 25-32.

[N.R] J. Nešetřil, V. Rödl, Partitions of finite relation and set systems, Journal Combinatorial Theory, Series A, vo. 22 (1976), pp.289-312.

APPENDICE. RÉSULTATS COMBINATOIRES (M.A. Dickmann)

Dans cet appendice K, λ, μ désignent, sauf mention explicite, des cardinaux arbitraires, finis ou infinis. $n, m, j, \ldots$ sont des cardinaux finis. α, β, γ, $\xi, \ldots$ désignent des cardinaux.

Pour un cardinal infini donné K, la fonction "beth" $\alpha \rightarrow \beth_\alpha(K)$ est définie par induction transfinie :

$$\beth_0(K) = K$$

$$\beth_{\alpha+1}(K) = 2^{\beth_\alpha(K)}$$

$$\beth_\delta(K) = \bigcup \{\beth_\gamma(K) \mid \gamma < \delta\} \qquad \text{pour } \delta \text{ limite} > 0.$$

On pose $\beth_\alpha = \beth_\alpha(\aleph_0)$ pour tout ordinal α.

Etant donné un ensemble X et $n \geq 1$, $[X]^n$ désigne la famille des sous-ensembles de X ayant exactement n éléments. Si X est totalement ordonné par $<$ et $\{x_1,\ldots,x_n\} \in [X^n]$, alors $\{x_1,\ldots,x_n\}_<$ désigne l'écriture de l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ quand $x_1 < \ldots < x_n$.

La relation $K \rightarrow (\lambda)^n_\mu$, $n \geq 1$, a été déjà définie au Chapitre V. Nous utiliserons le fait, facilement démontré, que cette relation est croissante en K et décroissante en λ et μ :

A0. Fait : $K \rightarrow (\lambda)^n_{\mu+1} \wedge K' \geq K \wedge \lambda' \leq \lambda \wedge \mu' \leq \mu \Rightarrow K' \rightarrow (\lambda')^n_{\mu'}$.

(A) <u>La relation</u> $\beth_{n+1} \rightarrow (n+1)^n_{\beth_1}$.

Celle-ci est une conséquence facile du très bien connu théorème d'Erdös-Rado:

<u>Théorème</u>. Pour K infini et $n \geq 1$ on a :

$$\beth_{n-1}(K)^+ \rightarrow (K^+)^n_K .$$

Pour la démonstration, voir [E.R] , Théorème 39 et corolaires.

En mettant $K = \beth_1$ et compte-tenu du fait que $\beth_n(\beth_1) = \beth_{n+1}$ on obtient $\beth_n^+ \longrightarrow (\beth_1^+)^n_{\beth_1}$. Or, du fait A0 on obtient immédiatement (A).

(B) <u>La relation</u> $\beth_n \not\rightarrow (n+1)^n_{\beth_1}$.

Le cas $n = 1$ est trivial en considérant la partition de $\beth_1$ constituée par les singletons.

Pour le cas $n = 2$ on démontre, plus généralement

<u>A1. Lemme</u>. $2^K \not\rightarrow (3)^2_K$.

<u>Démonstration</u>. Soit S l'ensemble des suites de 0 et 1 de longueur K ordonné par premières différences : pour $x,y \in S$, $x < y \Longleftrightarrow x_\xi < y_\xi$, où $\xi = i(x,y)$ = le premier α tel que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Soit $f : [S]^2 \rightarrow K$ l'application

$$f(\{x,y\}_<) = i(x,y)$$

Si $x < y < z$, éléments de S, sont tels que

$f(\{x,y\}_<) = f(\{x,z\}_<) = f(\{y,z\}_<) = \alpha,$

alors on a $x_\alpha \neq y_\alpha$, $y_\alpha \neq z_\alpha$, $x_\alpha \neq z_\alpha$, ce qui contredit le fait que $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\} \subseteq \{0,1\}$. Donc, il n'y a pas d'ensemble homogène pour f de cardinalité 3.

Si $n > 2$, la relation (B) résulte, par induction sur n, du théorème suivant, qui vaut pour K, λ, μ finis ou infinis :

<u>A.2. Théorème</u>. $K \nrightarrow (\lambda)^n_\mu \Longrightarrow 2^K \nrightarrow (\lambda+1)^{n+1}_{m+2\mu}$,

où $n \geq 2$, $\lambda \geq n+1$ et $m = n! - 2$.

On commence par démontrer quelques propriétés de l'ensemble S introduit dans le lemme précédent :

<u>A.3. Lemme</u>. Soient $n \geq 1$ et S l'ensemble des suites de 0 et 1 de longueur K ordonné par **premières** différences. Alors

a) $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}_< \in [S]^{n+1} \Longrightarrow$ l'ensemble $\{i(x_1,x_2),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}$ a cardinalité n.

b) Soit $Y \subseteq S$. Si Y a la propriété :

pour tous $x,y,z \in Y$, $x < y < z \Longrightarrow i(x,y) < i(y,z)$, alors

i) $x,y,z \in Y$, $x < y$ et $x < z \Longrightarrow i(x,y) = i(x,z)$,

ii) $x,x',y,y' \in Y$, $x < x'$, $y < y'$ et $i(x,x') = i(y,y') \Longrightarrow x = y$.

c) Si Y a la propriété

pour tous $x,y,z \in Y$, $x < y < z \Longrightarrow i(x,y) > i(y,z)$, alors

i) $x,y,z \in Y$, $x < z$ et $y < z \Longrightarrow i(x,z) = i(y,z)$,

ii) $x,x',y,y' \in Y$, $x < x'$, $y < y'$ et $i(x,x') = i(y,y') \Longrightarrow x' = y'$.

<u>Remarque</u> (b,i) prouve que $x \longmapsto i(x,y)$, avec $x,y \in Y$, $x < y$, définit bien une application de domaine Y', où $Y' = Y$ si Y n'a pas de dernier élément, $Y' = Y - \{$dernier élément de $Y\}$ autrement. (b,ii) prouve que cette application est injective. (c,i) et (c,ii) prouvent des résultats analogues pour l'application $z \longmapsto i(x,z)$, avec $x,z \in Y$, $x < z$.

<u>Démonstration</u>. (a) Induction sur n. Pour $n = 1$ évident. Supposons vrai pour $n-1$. Donc, chacun des ensembles

$\{i(x_1,x_2),\dots,i(x_{n-1},x_n)\}$, $\{i(x_2,x_3),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}$ et

$\{i(x_1,x_2), i(x_2,x_3),\dots,i(x_{n-2},x_n), i(x_n,x_{n+1})\}$

a cardinalité $n-1$. Ceci veut dire que :

$i(x_k,x_{k+1}) \neq i(x_j,x_{j+1})$ pour $1 \leq k \neq j \leq n-1$

$i(x_n,x_{n+1}) \neq i(x_j,x_{j+1})$ pour $2 \leq j \leq n-1$

$i(x_n,x_{n+1}) \neq i(x_1,x_2)$.

On conclut que l'ensemble $\{i(x_1,x_2), i(x_2,x_3),\dots,i(x_{n-2},x_{n-1}), i(x_{n-1},x_n), i(x_n,x_{n+1})\}$ a cardinalité n, ce qui prouve l'énoncé pour n.

(b) et (c) étant symétriques nous faisons la preuve dans le cas (c).

(c,i). Mettons $i(x,z) = \beta$, $i(y,z) = \gamma$. Supposons, par exemple, $x < y$ et soit $\alpha = i(x,y)$; alors on a :

1) $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 1$ et $x_\delta = y_\delta$ pour tout $\delta < \alpha$;
2) $x_\beta = 0$, $z_\beta = 1$ et $x_\delta = z_\delta$ pour tout $\delta < \beta$;
3) $y_\gamma = 0$, $z_\gamma = 1$ et $y_\delta = z_\delta$ pour tout $\delta < \gamma$,

et l'hypothèse sur Y entraine que

4) $\alpha > \gamma$

Par (4) et (2), $x_\gamma = y_\gamma = 0$. Puisque $z_\gamma = 1$, on a $x_\gamma \neq z_\gamma$, ce qui par (2) entraîne $\gamma \nless \beta$, i.e. $\beta \leq \gamma$. Si $\beta < \gamma$, alors (3) implique $y_\beta = z_\beta$; puisque $\alpha > \gamma \geq \beta$, (1) donne $x_\beta = y_\beta$; donc $x_\beta = z_\beta$, ce qui contredit (2).
Donc $\beta = \gamma$.

(c,ii). Supposons $x' \neq y'$, par exemple $x' < y'$. Alors $x < x' < y'$ entraine $i(x,x') > i(x',y')$. Par (c,i), $y < y'$ et $x' < y'$ impliquent $i(x',y') = i(y,y')$. Donc $i(x,x') > i(y,y')$ ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Démonstration du théorème A.2</u>. Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Soient π_o la permutation identique et $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ n & n-1 \ldots 1 \end{pmatrix}$ la permutation "inversion". L'ensemble $S_n - \{\pi_o, \pi_1\}$ a cardinalité m (puisque $\overline{\overline{S_n}} = n!$); soit $\pi'_o, \ldots, \pi'_{m-1}$ une énumération de cet ensemble. Pour $\pi \in S_n$ et $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}_< \in [S]^{n+1}$ donnés, posons : $P_\pi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ ssi pour tous i,j,

$$1 \leq i,j \leq n \quad \text{et} \quad \pi(i) < \pi(j) \Longrightarrow i(x_i,x_{i+1}) < i(x_j,x_{j+1}).$$

Par exemple,

$$P_{\pi_o}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_1,x_2) < i(x_2,x_3) < \ldots < i(x_n,x_{n+1})$$

$$P_{\pi_1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_1,x_2) > i(x_2,x_3) > \ldots > i(x_n,x_{n+1})$$

et si $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n-1, & n \\ 3 & 1 & n & 4 \ldots & n-1, & 2 \end{pmatrix}$,

$$P_\pi(x_1,\ldots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_2x_3) < i(x_n,x_{n+1}) < i(x_1,x_2) < i(x_4,x_5) < \ldots$$
$$\ldots\ldots < i(x_{j-1}x_j) < i(x_jx_{j+1}) < \ldots < i(x_{n-1}x_n) < i(x_3x_4).$$

Notons que pour tout $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}_< \in [S]^n$ il existe un unique $\pi \in S_n$ tel que $P_\pi(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

En utilisant l'hypothèse $K \nrightarrow (\lambda)^n_\mu$, soit $f : [K]^n \to \mu$ une application sans ensemble homogène de cardinalité λ .

Soit $g : [S]^{n+1} \to \mu\cdot 2+m$(*) définie par

$$g(\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}_<) = \begin{cases} f(\{i(x_1,x_2),\ldots,i(x_n,x_{n+1})\}) & \text{si } P_{\pi_o}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \\ \mu+f(\{ i(x_1,x_2),\ldots,i(x_n,x_{n+1})\}) & \text{si } P_{\pi_1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \\ \mu\cdot 2+j & \text{si } P_{\pi'_j}(x_1,\ldots,x_{n+1}), 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

(*) opérations ordinales

Remarquez que $\{i(x_1,x_2),\ldots,i(x_n,x_{n+1})\}\in[K]^n$ en vertu du lemme A.3 (a); donc g est bien définie.

Soit $Y \subseteq S$ un ensemble homogène pour g. Nous démontrons que $\overline{\overline{Y}} < \lambda+1$, ce qui entraîne la conclusion du Théorème A.2. Soit α_o la valeur de g sur l'ensemble $[Y]^{n+1}$.

1) Si $\alpha_o = \mu.2+j$, $0 \leq j \leq m-1$, alors $\overline{\overline{Y}} \leq n+1 \leq \lambda$.
Supposons $\overline{\overline{Y}} \geq n+2$, et soit $\{y_1,\ldots,y_{n+2}\}$ un sous-ensemble de Y de cardinalité $n+2$. Mettons $\pi = \pi_j^!$. Car $\pi \neq \pi_o$ et $\pi \neq \pi_1$ il existe ℓ, $2 \leq \ell \leq n-1$ tel que $\pi(\ell-1)$ et $\pi(\ell+1) < \pi(\ell)$, ou $\pi(\ell-1)$ et $\pi(\ell+1) > \pi(\ell)$.

Par l'homogénéité de Y, la propriété P_π est valable pour toute suite obtenue en enlevant un élément à $\{y_1,\ldots,y_{n+2}\}$. En enlevant y_{n+2} on a $P_\pi(y_1,\ldots,y_{n+1})$, ce qui donne $i(y_\ell,y_{\ell+1}) > i(y_{\ell+1},y_{\ell+2})$ et $> i(y_{\ell-1},y\ )$ dans le premier cas, et $<$ dans le second. En enlevant $y_{\ell-1}$ on a $P_\pi(y_1,\ldots,y_{\ell-2},y_\ell,y_{\ell+1},y_{\ell+2},\ldots,y_n,y_{n+1},y_{n+2})$; donc y_ℓ , $y_{\ell+1},\ldots$ deviennent les $\ell-1,\ell,\ldots$-ièmes termes, ce qui donne : $i(y_{\ell+1}y_{\ell+2}) > i(y_{\ell+2},y_{\ell+3})$ et $> i(y_\ell,y_{\ell+1})$ dans le premier cas, et $<$ dans le second. Ceci aboutit à une contradiction.

2) Soit $\alpha_o < \mu$.
Dans ce cas g est de la première forme et on a
(*) $P_{\pi_o}(y_1,\ldots,y_{n+1})$, i.e. $i(y_1,y_2) < \ldots < i(y_n,y_{n+1})$, pour tout $\{y_1,\ldots,y_{n+1}\}_<\in[Y]^{n+1}$.
Car $n \geq 2$, l'ensemble Y a la propriété requise dans l'hypothèse du Lemme A.3 (b). Donc $y \mapsto i(y,y')$ avec $y,y' \in Y$, $y < y'$ définit une application injective de domaine Y à valeurs ordinaux, où $Y' = Y$ si Y n'a pas de dernier élément et $Y' = Y - \{\text{dernier élément de } Y\}$ s'il y a.

Soit $Z = \{i(y,y') \mid y,y' \in Y \wedge y < y'\}$ l'image de Y' par cette application; donc $\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{Y}}' \geq \overline{\overline{Y}}-1$. Nous démontrons :
(**) Z est homogène pour f .

Un élément de $[Z]^n$ a la forme $\{i(y_1,y_1'),\ldots,i(y_n,y_n')\}$ avec $y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'\in Y$ et $y_j < y_j'$ $(j = 1,\ldots,n)$. A un changement de notation près nous pouvons supposer que $y_1 <\ldots< y_n$. Par (b,i) du Lemme A.3 on a $i(y_j,y_{j+1}) = i(y_j,y_j')$, $j = 1,\ldots,n-1$, d'où, vu la forme de g :

$$f(\{i(y_1,y_1'),\ldots,i(y_n,y_n')\}) = f(\{i(y_1,y_2),\ldots,i(y_{n-1},y_n),i(y_n,y_n')\}) = \\ = g(\{y_1,\ldots,y_n,y_n'\}_<).$$

Puisque g est constante sur Y, il suit que Z est homogène pour f. Donc, par hypothèse, $\overline{\overline{Z}} < \lambda$, d'où $\overline{\overline{Y}}-1 < \lambda$, i.e. $\overline{\overline{Y}} < \lambda+1$.

3) Soit $\mu \leq \alpha_o < \mu.2$.
Dans ce cas y est de la seconde forme, et la preuve se fait comme dans le cas (2), en utilisant le Lemme A.3 (c).