ALBERT FATHI

Appendice : Double décomposition d'une surface en pantalons

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 68-70
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__68_0>

APPENDICE

DOUBLE DÉCOMPOSITION D'UNE SURFACE EN PANTALONS

par Albert FATHI

Dans une première partie, on va donner une démonstration de l'inégalité utilisée pour prouver le théorème 4. Dans la seconde partie, on appliquera cette inégalité pour modifier par un twist une décomposition en pantalons de la surface M .

Première partie

On a un système $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de courbes simples mutuellement disjointes sur M . D'autre part, γ est une courbe simple dont l'intersection avec chaque α_j est minimale (parmi les courbes isotopes à γ) . On se donne des entiers positifs n_j . On construit Γ en faisant opérer sur γ un twist positif de n_j tours le long de α_j , $j = 0, \ldots, k$ (la notion de twist positif ne dépend que d'une orientation de M).

Proposition 1. Pour toute courbe simple β, on a la formule :

$$\left| i([\Gamma],[\beta]) - \sum_j n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])\, i([\alpha_j],[\beta]) \right| \leq i([\gamma],[\beta])$$

où $[\ \ ]$ désigne "classe d'isotopie" .

Démonstration. Tel que Γ a été décrit, Γ coïncide avec γ hors des voisinages tubulaires des α_j . La position de Γ et γ aux extrémités d'un arc commun est donnée sur la figure 1. Donc Γ est approchable par une courbe notée Γ' qui

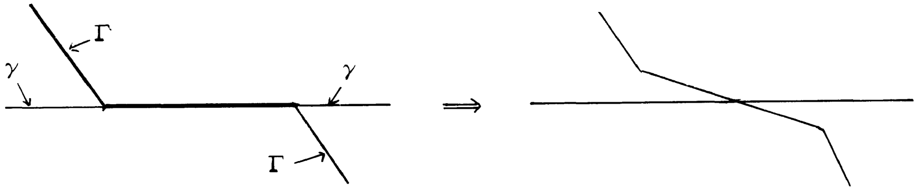

Figure 1

traverse une fois chaque intervalle de $\Gamma \cap \gamma$. Cela est dû au fait que tous les twists sont positifs. En utilisant le critère de la proposition 10 (exposé 3), on vérifie que $\mathrm{card}(\gamma \cap \Gamma') = i([\gamma],[\Gamma])$.

On observe que $\gamma \cup \Gamma'$ est <u>l'image</u> d'une application continue, définie sur $\sum_j n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])$ exemplaires de S^1, $n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])$ exemplaires de S^1 allant dans la classe d'homotopie libre de $[\alpha_j]$. Donc, on a l'inégalité :

$$\mathrm{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) \geq \sum_j n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])\, i([\alpha_j],[\beta]) .$$

Si β ne passe pas par les points d'intersection de γ avec Γ', on a :

$$\mathrm{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) = \mathrm{card}(\beta \cap \gamma) + \mathrm{card}(\beta \cap \Gamma') .$$

Si on prend pour β une géodésique d'une métrique de courbure -1 pour laquelle γ et Γ' sont géodésiques (elle existe d'après la proposition 10 de l'exposé 3), on a :

$$\mathrm{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) = i([\Gamma],[\beta]) + i([\gamma],[\beta]) ,$$

ce qui donne une des inégalités cherchées.

Il reste à prouver :

$$i([\Gamma],[\beta]) \leq \sum_j n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])\, i([\alpha_j],[\beta]) + i([\gamma],[\beta]) .$$

Cette fois-ci, on utilise le représentant Γ au lieu de Γ'. On choisit β en position minimale par rapport aux α_j et ne passant pas par les points d'intersection de γ avec α_j. Chaque fois que β coupe α_j, β traverse le tube correspondant. Il vient donc $n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])$ points d'intersection avec Γ. On a donc :

$$\mathrm{card}(\Gamma \cap \beta) = \mathrm{card}(\beta \cap \gamma) + \sum_j n_j\, i([\gamma],[\alpha_j])\, i([\alpha_j],[\beta]) .$$

Si, en plus, β a une intersection minimale avec γ, on a $\mathrm{card}(\beta \cap \gamma) = i([\gamma],[\beta])$; le membre de gauche est toujours supérieur ou égal à $i([\Gamma],[\beta])$. □

<u>Deuxième partie</u>

Soit M une surface fermée de genre $g > 1$. Soit $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_{3g-3}\}$ un système de courbes simples mutuellement disjointes sur M avec les propriétés suivantes :

1° K_j est à complémentaire connexe dans M ;

2° Si on coupe M le long de ces courbes, on obtient $(2g - 2)$ pantalons (disques à deux trous).

On construit très facilement une courbe simple α coupant chaque K_j de façon essentielle : $i([\alpha],[K_j]) \neq 0$. Soit φ un difféomorphisme de M , égal à l'identité hors d'un voisinage tubulaire de α , et coïncidant avec un twist de Dehn d'un tour dans le tube. On pose :

$$K'_j = \varphi(K_j) \ .$$

Evidemment, le système $\mathcal{K}' = \{K'_1, \ldots, K'_{3g-3}\}$ possède les propriétés 1° et 2° .

Proposition 2. Pour tout j, k, on a :

$$i([K_j],[K'_k]) \neq 0 \ .$$

Démonstration. D'après l'inégalité de la proposition 1 , il vient :

$$\left| i([K'_k],[K_j]) - i([K_k],[\alpha])\, i([\alpha],[K_j]) \right| \leq i([K_k],[K_j]) = 0 \ . \qquad \square$$

Remarque. On peut prendre α avec $i([\alpha],[K_j]) = 2$ pour tout j . On obtient alors $i([K'_k],[K_j]) = 4$ pour tout j, k .