JEAN-MARC FONTAINE

Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate

Astérisque, tome 65 (1979), p. 3-80

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__3_0>

MODULES GALOISIENS, MODULES FILTRÉS
ET ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE

par

Jean-Marc FONTAINE

(Grenoble)

\- o -

notations

Dans tout ce travail, K est un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique 0 , à corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$; on note K_o le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ le Frobenius absolu opérant sur k , $W(k)$ et K_o . On note e le degré de l'extension finie totalement ramifiée K/K_o . On note $\bar{K}$ une clôture algébrique fixée de K et on pose $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

introduction

0.1. - Appelons <u>module galoisien</u> (sous-entendu, de dimension finie) la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G .

Appelons <u>module filtré</u> (sous-entendu, de dimension finie) la donnée d'un F-iso-cristal D (i.e. d'un K_o-espace vectoriel D de dimension finie muni d'une bijection $F : D \to D$, σ-semi-linéaire) muni d'une filtration de $D_K = K \otimes_{K_o} D$ par des sous-K-espaces vectoriels $(D_K^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée.

Les modules galoisiens d'une part et les modules filtrés d'autre part forment, de manière évidente, une catégorie additive, et la première d'entre elles est abélienne.

0.2. - Soit alors G un groupe p-divisible (ou de Barsotti-Tate) sur l'anneau A des entiers de K . Il lui correspond, d'une part un module galoisien $\underline{V}_p(G)$ et d'autre part un module filtré $\underline{D}_K(G)$:

- on a $\underline{V}_p(G) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}_p(G)$, où $\underline{T}_p(G)$ est le module de Tate de G ; la correspondance $G \mapsto \underline{V}_p(G)$ est un foncteur additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p-divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules galoisiens ;

- le F-iso-cristal D sous-jacent à $\underline{D}_K(G)$ est $K_o \otimes_{W(k)} M$, où M est le module de Dieudonné de la fibre spéciale ; le K-espace vectoriel L des points de l'espace cotangent de G à valeurs dans K s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $D_K = K \otimes_{K_o} D$ (cf. [7] , [13] et [6]) et on a

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{si } i \le 0 , \\ L & \text{si } i = 1 , \\ 0 & \text{si } i \ge 2 ; \end{cases}$$

la correspondance $G \mapsto \underline{D}_K(G)$ est un foncteur contravariant additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p-divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules filtrés.

0.3. - Ce qui précède implique l'existence d'une équivalence entre une certaine catégorie de modules galoisiens (ceux qui sont isomorphes au contragrédient d'un module galoisien provenant d'un groupe p-divisible sur A) et une catégorie "ad hoc" de modules filtrés (nous avons d'ailleurs montré dans [6] comment, étant donné un groupe p-divisible G sur A, on pouvait construire $\underline{V}_p(G)$ à partir de la seule connaissance de $\underline{D}_K(G)$, et annoncé que la construction inverse était également possible).

On aimerait pouvoir étendre cette équivalence à une catégorie de modules galoisiens d'un type plus général. En particulier, on aimerait que cette catégorie soit stable par produit tensoriel, de façon à pouvoir utiliser la théorie des $\otimes$-catégories développée par Saavedra dans sa thèse ([16]). C'est essentiellement ce que nous faisons ici.

0.4. - Dans le § 1, on définit les objets avec lesquels on va travailler : les modules galoisiens et les modules filtrés. On introduit la notion de produit tensoriel de deux modules filtrés et on étudie les propriétés "formelles" des catégories de modules galoisiens et de modules filtrés.

0.5. - Dans le § 2, on introduit la notion d'"anneau de Barsotti-Tate" : un tel anneau est une K_o-algèbre associative commutative et unitaire, munie à la fois d'une structure de module galoisien et de module filtré (pas nécessairement de dimension finie), assujettie à vérifier des propriétés convenables.

(Si nous les appelons ainsi, c'est, outre le fait que ceux qui nous intéressent permettent de classifier les groupes de Barsotti-Tate, parce que, d'une part, la seule façon d'en construire que nous connaissions utilise la notion de "bivecteurs de Witt" introduite par Barsotti, et d'autre part leurs bonnes propriétés sont liées à la décomposition de Hodge-Tate des modules galoisiens).

0.6. - Dans le § 3, on montre qu'à tout anneau de Barsotti-Tate B, on peut associer une sous-catégorie pleine $\underline{Rep}_B(G)$ (resp. $\underline{MF}_{K,B}$) de la catégorie des modules galoisiens (resp. filtrés) de dimension finie, qui est abélienne, stable par somme directe, produit tensoriel, contragrédient (la première est également stable par sous-objet et quotient). On définit une équivalence entre ces deux catégories, compatible avec le produit tensoriel, et on donne quelques propriétés des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$. La propriété essentielle est que, si k est algébriquement clos et si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, l'enveloppe algébrique de l'image de G dans la représentation définie par V est un groupe connexe.

0.7. - Dans le §4, on introduit une sous-catégorie pleine, notée $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$ de la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K$ des modules filtrés de dimension finie et on donne diverses caractérisations des objets de $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$ (l'une d'entre elles utilise la notion de polygone de Newton et de polygone de Hodge associés aux modules filtrés). On montre que

i) la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$ est abélienne ;

ii) si B est un anneau de Barsotti-Tate, $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$;

iii) si B est un anneau de Barsotti-Tate et si D est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$, pour qu'un sous-objet D' de D dans $\underline{\mathrm{MF}}_K$ soit un sous-objet de D dans $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$, il faut et il suffit que ce soit un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$.

L'intérêt de cette dernière propriété est qu'elle permet, au moins théoriquement, étant donné un objet D de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$, de construire la sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ engendrée par D , même si l'on ne connaît pas de description de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$.

0.8. - Dans le §5 , on dit qu'un anneau de Barsotti-Tate B est "adapté aux groupes p-divisibles" si la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ contient les modules galoisiens provenant des groupes p-divisibles (ou leurs contragrédients, cela revient au même) et si l'équivalence de catégories construite au §3 prolonge celle dont on a parlé au n° 0.3.

L'intérêt de ce travail repose sur l'existence d'un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles. Nous publierons ailleurs la démonstration de cette existence.

Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles. Si $e = 1$ (i.e., si $K = K_o$), on déduit d'un résultat de Laffaille ([10]) que

a) un module galoisien V provient d'un groupe p-divisible sur A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) c'est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$,

ii) il est de Hodge-Tate de poids 0 et 1 ;

b) un module filtré D provient d'un groupe p-divisible sur A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) c'est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$,

ii) on a $D_K^o = D$ et $D_K^2 = 0$.

Il me semble raisonnable de conjecturer que ces résultats restent vrais sans restriction sur e.

0.9. - Dans le § 6, on suppose k algébriquement clos, on se donne un anneau de Barsotti-Tate B et un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ et on note D le module filtré associé à V par l'équivalence de catégories du § 3. Si $\mathbb{H}_V$ désigne le groupe algébrique, sur $\mathbb{Q}_p$, qui est l'enveloppe algébrique de l'image de G dans la représentation définie par V, on aimerait pouvoir décrire $\mathbb{H}_V$ et sa représentation naturelle dans V en termes du module filtré D sans utiliser B.

Nous n'y parvenons pas totalement. Toutefois nous construisons un groupe algébrique $\mathbb{H}_{D,L}$ défini sur une extension finie non ramifiée L de $\mathbb{Q}_p$ et une représentation de $\mathbb{H}_{D,L}$ dans un espace vectoriel D_L de dimension finie sur L qui sont tels que, après extension des scalaires à B, le groupe $\mathbb{H}_V$ muni de sa représentation V s'identifie au groupe

$\mathbb{H}_{D,L}$ muni de sa représentation D_L . En fait $\mathbb{H}_{D,L}$ est une L-forme intérieure de $\mathbb{H}_V \times L$; on peut donner une description explicite du torseur correspondant mais celle-ci fait intervenir l'anneau B . En vertu de résultats classiques, il existe une extension finie non ramifiée L' de L telle que les groupes $\mathbb{H}_V \times L'$ et $\mathbb{H}_{D,L} \times L'$ sont isomorphes (ainsi que les représentations $L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $L' \otimes_L D_L$).

0.10. - Supposons, pour simplifier, k algébriquement clos. Dans le § 7, on appelle $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate la donnée d'un anneau commutatif B muni, pour chaque extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$, d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate relativement à K' , avec des relations de compatibilité évidentes. Un tel anneau existe et on peut même le choisir de façon que, pour toute extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$, la structure d'anneau de Barsotti-Tate de B relative à K' soit adaptée aux groupes p-divisibles définis sur l'anneau des entiers de K' .

Un tel anneau B étant fixé, nous disons qu'un modules galoisien V est <u>potentiellement admissible</u> s'il existe un sous-groupe ouvert G' de G tel que le $\mathbb{Q}_p[G']$-module sous-jacent à V soit un objet de $\underline{Rep}_B(G')$. On construit une équivalence entre la catégorie des modules galoisiens potentiellement admissibles et une certaine catégorie de <u>modules</u> "<u>potentiellement filtrés</u>" (ce sont des F-iso-cristaux munis d'une part d'un homomorphisme, à noyau ouvert, de G dans le groupe des automorphismes du F-iso-cristal D et d'autre part d'une filtration de $D_{\bar{K}} = \bar{K} \otimes_{K_0} D$ par des sous-$\bar{K}$-espaces vectoriels avec des propriétés convenables).

Soit enfin $\mathfrak{A}$ une variété abélienne sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mathfrak{A})$. Alors V est potentiellement admissible et, si D est le F-iso-cristal sous-jacent au module potentiellement filtré associé à V , pour tout nombre premier $\ell \neq p$, la représentation de G sur D est "la même" que celle de G sur $T_\ell(\mathfrak{A})$ (i.e., les noyaux de ces deux représentations coïncident, leurs caractères sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et sont égaux).

0.11. - Outre quelques compléments (notamment le § 7), le texte que l'on trouvera ici diffère des exposés oraux par l'introduction de la notion d'anneau de Barsotti-Tate. Celle-ci nous a permis de donner des démonstrations complètes, modulo le théorème d'existence d'anneaux de Barsotti-Tate adaptés aux groupes p-divisibles.

Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié de conversations constantes avec Jean-Pierre Serre. Je voudrais le remercier ici.

Je voudrais également remercier Madame Guttin-Lombard qui a assuré la frappe de ce texte avec sa compétence et sa gentillesse habituelles.

§1 - modules galoisiens et modules filtrés

1.1. - MODULES GALOISIENS.

1.1.1. - Nous appellerons module galoisien tout espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, muni d'une action linéaire de G, i.e. d'un homomorphisme ρ de G dans le groupe des $\mathbb{Q}_p$-automorphismes de V (l'application ρ sera, le plus souvent, sous-entendue).

La catégorie des modules galoisiens possède des produits tensoriels et des "hom internes" : si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens, on sait ce que c'est que le module galoisien $V_1 \otimes V_2$ $(= V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$ et le module galoisien $\underline{\mathrm{Hom}}(V_1, V_2)$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des applications linéaires de V_1 dans V_2, muni de l'action évidente de G.

Le module galoisien $\mathbb{Q}_p$ (muni de l'action triviale de G) est un "objet-unité", i.e., pour tout module galoisien V, on a des isomorphismes canoniques (et fonctoriels en V) $\mathbb{Q}_p \otimes V \simeq V \otimes \mathbb{Q}_p \simeq V$.

Enfin, pour tout module galoisien V, on appelle dual ou contragrédient le module galoisien $V^* = \underline{\mathrm{Hom}}(V, \mathbb{Q}_p)$.

1.1.2. - On note T le module galoisien $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mu_{p^\infty})$ (où $T_p(\mu_{p^\infty}) = \varprojlim \mu_{p^n}$) et χ le caractère de Tate, i.e. le caractère de G à valeurs dans $\mathbb{Q}_p^*$ qui donne l'action de G sur T.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$T^i = \begin{cases} \overset{i}{\otimes} T & \text{si } i \geq 0 , \\ (\overset{-i}{\otimes} T)^* & \text{si } i < 0 . \end{cases}$$

Pour tout module galoisien V, et tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $V\{i\}$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des $v \in V$ tels que $gv = \chi^i(g)v$, pour tout $g \in G$. On voit que $V\{i\}$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(T^i,V)$, et que $V\{0\}$ s'identifie à V^G .

1.1.3. - On note <u>Rep</u>(G) la catégorie des modules galoisiens qui sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, avec action de Galois continue. C'est une catégorie abélienne, et c'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules galoisiens, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, hom interne, contragrédient, qui contient les T^i .

1.2. - <u>MODULES FILTRÉS</u>.

1.2.1. - Nous appellerons <u>module filtré</u> la donnée d'un espace vectoriel D sur K_o muni

- d'une part, d'une application $F : D \to D$, bijective, σ-semi-linéaire (i.e. additive et telle que $F(\lambda d) = \sigma\lambda \cdot Fd$, pour tout $\lambda \in K_o$, tout $d \in D$; lorsque D est de dimension finie sur K_o , on a donc ce que l'on appelle "un F-iso-cristal" ([8] p.145, [16] p. 334 ou [1] p. 315) ;
- d'autre part, d'une filtration $(D_K^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $D_K = K \otimes_{K_o} D$ par des sous-K-espaces vectoriels, décroissante (i.e. $D_K^{i+1} \subset D_K^i$), exhaustive (i.e. $\bigcup D_K^i = D_K$) et séparée (i.e. $\bigcap D_K^i = 0$).

Par abus de langage, on parlera du module filtré D , l'application F et la filtration étant sous-entendues.

1.2.2. - Les modules filtrés forment une catégorie : un morphisme est une application K_o-linéaire, qui commute à l'action de F et qui, après extension des scalaires à K , respecte les filtrations.

On appelle <u>dimension</u> d'un module filtré D la dimension de D comme espace vectoriel sur K_o et on note $\underline{MF}_K$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des modules filtrés dont les objets sont ceux qui sont de dimension finie.

La catégorie des modules filtrés et la catégorie $\underline{MF}_K$ sont additives, admettent des noyaux et conoyaux mais ne sont pas abéliennes.

Si D est un module filtré,

- un <u>sous-objet</u> D' de D est un sous-K_o-espace vectoriel, stable par F, muni de la filtration induite ;
- un <u>objet-quotient</u> D'' de D est le quotient de D par un sous-K_o-espace vectoriel de D, stable par F ; l'action de F sur D'' se déduit de l'action de F sur D par passage au quotient, et la filtration aussi.

1.2.3. - On dit qu'une suite

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

de modules filtrés est exacte si D' s'identifie à un sous-objet de D et D'' au quotient de D par D'. Cela revient à dire que la suite

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est exacte en tant que suite de $K_o[F]$-modules à gauche (ou de K_o-espaces vectoriels) et que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite de K-espaces vectoriels

$$0 \to (D')^i_K \to D^i_K \to (D'')^i_K \to 0$$

est exacte.

1.2.4. - Si D_1 et D_2 sont des modules filtrés, on définit un module filtré $D_1 \otimes D_2$ de la manière suivante :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_o, $D_1 \otimes D_2 = D_1 \otimes_{K_o} D_2$; l'action de F est définie par $F(d_1 \otimes d_2) = Fd_1 \otimes Fd_2$;
- la filtration de

$$(D_1 \otimes D_2)_K = K \otimes_{K_o} (D_1 \otimes D_2) = (K \otimes_{K_o} D_1) \otimes_K (K \otimes_{K_o} D_2) = D_{1K} \otimes_K D_{2K}$$

est définie par $(D_1 \otimes D_2)^i_K = \sum_{i'+i''=i} D^{i'}_{1K} \otimes D^{i''}_{2K}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

1.2.5. - La catégorie des modules filtrés possède un objet-unité ; comme espace vectoriel sur K_o, c'est K_o lui-même, on a $F = \sigma$, et la filtration de $K\otimes_{K_o} K_o \simeq K$ est définie par

$$K^i = \begin{cases} K & \text{si } i \leq 0 \ , \\ 0 & \text{si } i > 0 \ . \end{cases}$$

Il est clair que, pour tout module filtré D , $K_o \otimes D \simeq D \otimes K_o \simeq D$.

1.2.6. - Si D_1 et D_2 sont des modules filtrés, on définit un module filtré $\underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$ de la façon suivante :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_o , $D = \underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$ est l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{K_o}(D_1, D_2)$ des applications K_o-linéaires de D_1 dans D_2 ;
- l'action de F est définie par $(F\varphi)(d) = F\cdot\varphi(F^{-1}\cdot d)$;
- la filtration de $D_K = K\otimes_{K_o} \mathrm{Hom}_{K_o}(D_1, D_2) = \mathrm{Hom}_K(D_{1K}, D_{2K})$ est définie par

  $$D_K^i = \left\{\varphi \in D_K \mid \varphi(D_{1K}^j) \subset D_{2K}^{i+j} \text{ , pour tout } j \in \mathbb{Z}\right\} ,$$

  pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

1.2.7. - Enfin, si D est un module filtré, on pose $D^* = \underline{\mathrm{Hom}}(D, K_o)$. Les opérations $\otimes$, $\underline{\mathrm{Hom}}$, $*$ vérifient toutes les "bonnes" propriétés que l'on est en droit d'attendre de la notion de produit tensoriel, hom interne, contragrédient ou dual (attention toutefois que la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K$ n'est pas abélienne).

1.2.8. - Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note S^i l'objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K$ défini ainsi :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_o , on a $S^i = K_o$;
- l'action de F est définie par $F\lambda = p^i\cdot\sigma\lambda$, si $\lambda \in K_o$;
- la filtration sur $(S^i)_K \simeq K$ est définie par

  $$(S^i)_K^j = \begin{cases} K & \text{si } j \leq i \ , \\ 0 & \text{si } j > i \ . \end{cases}$$

Le module filtré S^o s'identifie à l'objet-unité K_o et, si l'on pose

$S^1 = S$, S^i s'identifie à $\overset{i}{\otimes} S$ si $i \geq 0$ et à $(\overset{-i}{\otimes} S)^*$ si $i < 0$.

Pour tout module filtré D , et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $D[i]$ le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de D formé des d vérifiant $Fd = p^i d$ et $d \in D_K^i$ (en identifiant D à un sous K_o-espace vectoriel de $D_K = K \otimes_{K_o} D$). On voit que $D[i]$ s'identifie canoniquement au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes (dans la catégorie des modules filtrés) de S^i dans D .

§2 - anneaux de Barsotti-Tate

2.1. - MODULES GALOISIENS FILTRÉS.

2.1.1. - Nous appellerons module galoisien filtré la donnée d'un module filtré D muni d'une action de G compatible avec la structure de module filtré, i.e. d'un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de D .

2.1.2. - Les modules galoisiens filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive. Celle-ci possède des produits tensoriels : si D_1 et D_2 sont deux modules galoisiens filtrés, $D_1 \otimes D_2$ est, en tant que module filtré, le produit tensoriel des modules filtrés sous-jacents ; on le munit de l'action de Galois évidente.

2.1.3. - Tout module filtré peut être considéré comme un module galoisien filtré, avec action triviale de G . On obtient ainsi une équivalence, compatible avec le produit tensoriel, entre la catégorie des modules filtrés et la sous-catégorie pleine de la catégorie des modules galoisiens filtrés dont les objets sont ceux sur lesquels l'action de G est triviale.

2.1.4. - De même, à tout module galoisien V , on peut associer un module galoisien filtré V_{K_o} : en tant que $K_o[G]$-module, on a

$V_{K_o} = K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; l'action de F est définie par $F(\lambda \otimes v) = \sigma\lambda \otimes v$, pour tout $\lambda \in K_o$, $v \in V$; et la filtration est définie par

$$V_K^i = \begin{cases} V_K = K \otimes_{K_o} V_{K_o} \simeq K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V & \text{si } i \leq 0 , \\ 0 & \text{si } i > 0 . \end{cases}$$

On obtient ainsi une équivalence entre la catégorie des modules galoisiens et la sous-catégorie pleine de celle des modules galoisiens filtrés dont les objets sont ceux qui sont "triviaux en tant que modules filtrés" (i.e. isomorphes à une somme-directe de copies de K_o). Un foncteur quasi-inverse s'obtient en associant à tout module galoisien filtré D , trivial en tant que module filtré, le module galoisien $V = \{ v \in D \mid Fv = v \}$.

Il est clair que cette équivalence est compatible avec le produit tensoriel.

2.1.5. - Si D est un module galoisien filtré et si $i \in \mathbb{Z}$, $D\{i\}$ est un module filtré et $D[i]$ est un module galoisien. Si de plus D est de dimension finie sur K_o , $D\{i\}$ (resp. $D[i]$) est un module filtré (resp. galoisien) de dimension finie.

2.2. - ANNEAUX GALOISIENS FILTRÉS.

2.2.1. - On appelle <u>anneau galoisien filtré</u> la donnée d'une K_o-algèbre associative, commutative et unitaire B , munie d'une structure de module galoisien filtré, compatible avec la structure d'algèbre, i.e. telle que l'application de $B \otimes_{K_o} B$ dans B induite par la multiplication définisse un morphisme de modules galoisiens filtrés. Cela implique, en particulier, que, si $i,j \in \mathbb{Z}$, $B_K^i B_K^j \subset B_K^{i+j}$ et que B_K^o est une sous-algèbre unitaire de B_K .

2.2.2. - <u>Exemple</u>. - Soit $\bar{k}$ le corps résiduel de $\bar{K}$; c'est une clôture algébrique de k et on note $\hat{K}_o^{nr}$ le corps des fractions de $W(\bar{k})$. On pose $\hat{K}^{nr} = K \otimes_{K_o} \hat{K}_o^{nr}$; c'est un corps local qui s'identifie canoniquement au complété de l'extension maximale non ramifiée K^{nr} de K contenue dans $\overline{K}$.

On note $\hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$ l'algèbre déduite de $\hat{K}_o^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_p} T$ en rendant inversible un élément non nul quelconque de T . Autrement dit, si t est un élément non nul de T , tout élément de $\hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i t^i$, avec les $\lambda_i \in \hat{K}_o^{nr}$, presque tous nuls.

On fait de $\hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$ un anneau galoisien filtré, en posant, pour tout $\sum \lambda_i t^i \in \hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$,

$$g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g\lambda_i \cdot t^i \ , \text{ pour tout } g \in G \ ,$$

$$F(\sum \lambda_i t^i) = \sum p^i \cdot \sigma\lambda_i \cdot t^i \ ,$$

la filtration de $K \otimes_{K_o} \hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}] = \hat{K}^{nr}[T,T^{-1}]$ étant définie par

$$\hat{K}^{nr}[T,T^{-1}]^i = T^i \hat{K}^{nr}[T] = \{ \sum_{j \geq i} \lambda_j t^j \} \ , \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z} \ .$$

2.2.3. - On désigne par C le complété de $\overline{K}$. Le groupe G opère par continuité sur C et on sait ([25] , th.1, p.176) que, si I désigne le sous-groupe d'inertie de G , $\hat{K}^{nr}$ s'identifie à C^I . On pose

$$C[T,T^{-1}] = C \otimes_{\hat{K}_o^{nr}} \hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}] = C \otimes_{\hat{K}^{nr}} \hat{K}^{nr}[T,T^{-1}] = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p[T,T^{-1}] \ :$$

tout élément de $C[T,T^{-1}]$ s'écrit donc, de manière unique, sous la forme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i t^i$, avec les $\lambda_i \in C$, presque tous nuls.

L'anneau $C[T,T^{-1}]$ est une algèbre graduée (pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la composante homogène de degré i est $CT^i = \{\lambda t^i \mid \lambda \in C\}$) sur laquelle G opère par

$$g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g\lambda_i \cdot t^i \ .$$

Comme $(CT^i)^I = 0$, pour $i \neq 0$ ([25] , th.2, p.176), $\hat{K}^{nr}$ (resp. K) s'identifie à $(C[T,T^{-1}])^I$ (resp. $(C[T,T^{-1}])^G$) .

2.2.4. - Nous appellerons <u>anneau de Barsotti-Tate</u> la donnée d'un anneau galoisien filtré B (avec action de G continue sur tout sous-K_o-espace vectoriel de dimension finie stable par G), contenant $\hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(<u>Gal</u>) on a $B\{0\} = K_o$,

(<u>Fil</u>) on a $B[0] = \mathbb{Q}_p$,

(<u>Tate</u>) il existe un monomorphisme $\theta : gr(B_K) \longrightarrow C[T,T^{-1}]$ qui, lorsqu'on le restreint à $\hat{K}^{nr}[T,T^{-1}] = K \otimes_{K_o} \hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$ est l'isomorphisme évident de $gr(\hat{K}^{nr}[T,T^{-1}])$ sur $\hat{K}^{nr}[T,T^{-1}]$ considéré comme sous-algèbre graduée de $C[T,T^{-1}]$.

2.2.5. - Explicitons un peu ces trois propriétés :

■ Rappelons que $B\{0\} = B^G$ est le sous-anneau de B formé des éléments invariants par Galois.

■ Rappelons que $B[0] = B_o \cap B_K^o$, où $B_o = \{b \in B \mid Fb = b\}$; il est clair que B_o et B_K^o s'identifient tous deux à des sous-anneaux de B_K .

■ Se donner θ revient à se donner, pour tout entier i , une application $K[G]$-linéaire $\theta_i : B_K^i \longrightarrow CT^i$; on demande que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

i) pour tout i , le noyau de θ_i est B_K^{i+1} ,

ii) pour tout i , on a $\theta_i(\lambda t^i) = \lambda t^i$, si $\lambda \in \hat{K}^{nr}$ et $t \in T$,

iii) pour tout i et tout j , on a $\theta_{i+j}(bb') = \theta_i(b)\,\theta_j(b')$ si $b \in B_K^i$ et $b' \in B_K^j$.

2.3. - <u>QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE</u>.

2.3.1. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> B <u>un anneau de Barsotti-Tate</u>. <u>Pour tout</u> $b \in B_K$, <u>posons</u>

$$d^\circ(b) = \begin{cases} i & \underline{\text{si}} \quad b \in B_K^i \quad \underline{\text{et}} \quad b \notin B_K^{i+1} , \\ +\infty & \underline{\text{si}} \quad b = 0 . \end{cases}$$

<u>Alors l'application</u> d° <u>est une valuation de</u> B_K ; <u>en particulier</u>, <u>les anneaux</u> B_K <u>et</u> B <u>sont intègres</u>.

En effet, il est clair que, si b , $b' \in B_K$, on a $d^{\circ}(b+b') \geq \min\{d^{\circ}(b), d^{\circ}(b')\}$. Si ce sont des éléments non nuls de B_K et si $d^{\circ}(b) = i$, $d^{\circ}(b') = j$, on voit que $\theta_i(b) \neq 0$ et $\theta_j(b') \neq 0$; on en déduit que $\theta_{i+j}(bb') \neq 0$, donc que $bb' \in B_K^{i+j} - B_K^{i+j+1}$, ou encore que $d^{\circ}(bb') = d^{\circ}(b) + d^{\circ}(b')$.

2.3.2. - <u>Remarque</u>. - Soit B un anneau de Barsotti-Tate. Tout élément non nul t de T est une uniformisante pour la valuation d° et tout élément non nul de B_K s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme bt^i , avec $i \in \mathbb{Z}$ et $b \in B_K^o - B_K^1$.

On prendra garde que les anneaux B et B_K ne sont pas, en général, complets pour la valuation d° . L'anneau B_K^o qui est le sous-anneau de B_K formé des éléments entiers pour la valuation n'est pas, en général, un anneau de valuation (il n'est pas intégralement clos dans son corps des fractions).

2.3.3. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> B <u>un anneau de Barsotti-Tate</u>.

i) <u>Pour tout sous-groupe ouvert</u> I' <u>du groupe d'inertie</u> I <u>de</u> G , <u>on a</u> $B^{I'} = \hat{K}_o^{nr}$;

ii) <u>Pour tout sous-groupe ouvert</u> G' <u>de</u> G , <u>on a</u> $B^{G'} = (\hat{K}_o^{nr})^{G'} =$ <u>l'extension maximale non ramifiée de</u> K_o <u>contenue dans</u> $\overline{K}^{G'}$.

2.3.4. - <u>Démonstration</u>. - L'assertion (ii) résulte trivialement de (i) . Montrons (i) : posons $E = B^{I'}$. Soit b un élément non nul de E et soit i son degré (cf. prop. 2.3.1). Alors $\theta^i(b) \in (CT^i)^{I'}$. Comme $(CT^i)^{I'} = 0$, pour $i \neq 0$ (cf. [25] , th.2, p.176), on a $i = 0$. On a donc $E \subset B_K^o$ et $E \cap B_K^1 = 0$. On en déduit que la restriction de θ^o à E est une application injective de E dans $C^{I'}$.

Comme I' est ouvert dans I , $C^{I'}$ est une extension finie de $C^I = \hat{K}^{nr}$; comme l'extension $\hat{K}^{nr}/\hat{K}_o^{nr}$ est finie, $C^{I'}$ est aussi une extension finie de $\hat{K}_o^{nr}$.

En particulier, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\hat{K}_o^{nr}$. Comme F commute à l'action de G , E est stable par F . Comme $\hat{K}_o^{nr} = \mathrm{Frac}(W(\bar{k}))$, avec $\bar{k}$ algébriquement clos, E , en tant que F-isocristal, est somme-directe de ses composantes isotypiques, autrement dit, on peut écrire (cf., par exemple, [12] th.2.2, p.33 ou [1], p.316)

$$E = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_{\alpha, \hat{K}_o^{nr}} ,$$

où les $E_{\alpha,\hat{K}_o^{nr}}$ sont des $\hat{K}_o^{nr}[F]$-modules, presque tous nuls, chaque $E_{\alpha,\hat{K}_o^{nr}}$ étant engendré, comme vectoriel sur $\hat{K}_o^{nr}$, par le sous-ensemble E_α formé des $b \in E$ tels que $F^s b = p^r b$, si $\alpha = r/s$, avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux.

Montrons que $E_{o,\hat{K}_o^{nr}} = \hat{K}_o^{nr}$: en effet, si $b \in E_o$, on a $Fb = b$; comme $E_o \subset E \subset B_K^o$, on a $b \in B[0] = \mathbb{Q}_p$ et $E_{o,\hat{K}_o^{nr}} = \hat{K}_o^{nr}$.

Pour achever la démonstration, il suffit alors de vérifier que, si $\alpha = r/s$ est $\neq 0$, i.e. si $r \neq 0$, alors $E_\alpha = 0$. Soit b un élément non nul de E_α et soit P son polynôme minimal sur $\hat{K}_o^{nr}$. On a $P(b) = 0$ et, en appliquant F^s , on en déduit que ${}^{\sigma^s}P(F^s b) = 0$, ou encore que ${}^{\sigma^s}P(p^r b) = 0$, ce qui est absurde car il est clair que les zéros de ${}^{\sigma^s}P(X)$ ont même valuation que ceux de $P(X)$.

Remarque. - Cette démonstration prouve, en outre, que les conditions (Fil) et Tate du n° 2.2.4 impliquent (Gal).

§3 - modules admissibles

Dans ce paragraphe, B est un anneau de Barsotti-Tate fixé. On se fixe aussi un monomorphisme $\theta : \mathrm{gr}(B_K) \longrightarrow C[T,T^{-1}]$ vérifiant (Tate) (cf. n°2.2.4). On note C_B l'image de $\theta_o : B_K^o \longrightarrow C$. C'est une sous-K-algèbre de C , stable par G , et l'image de θ est $C_B[T,T^{-1}]$.

3.1. - LES FONCTEURS D_B ET V_B .

3.1.1. - Pour tout module galoisien V , on note $B \otimes V$ le module galoisien filtré $B \otimes V_{K_o}$ (produit tensoriel, dans la catégorie des modules galoisiens filtrés, de B par le module galoisien filtré $V_{K_o} = K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, trivial en tant que module filtré, défini au n° 2.1.4).

En d'autres termes, $B \otimes V$ s'identifie, en tant que $K_o[G]$-module à $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; l'action de F est définie par

$$F(b \otimes v) = Fb \otimes v \text{ , pour } b \in B \text{ , } v \in V \text{ ,}$$

et la filtration de $(B \otimes V)_K$ $(= K \otimes_{K_o} (B \otimes V)$ qui s'identifie à $B_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ est définie par

$$(B \otimes V)_K^i = B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \text{ , pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ .}$$

3.1.2. - Pour tout module galoisien V , on note $\underline{D}_B(V)$ le module filtré $(B \otimes V)\{0\}$. Si $D = \underline{D}_B(V)$, on a donc $D = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ en tant que $K_o[F]$-module, $D_K = K \otimes_{K_o} D$ s'identifie à $(B_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_K^i = (B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$.

Il est clair que $\underline{D}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie des modules galoisiens dans celle des modules filtrés.

3.1.3. - De même, pour tout module filtré D , on note $B \otimes D$ le module galoisien filtré produit tensoriel (dans la catégorie des modules galoisiens filtrés) de B par le module galoisien filtré D , trivial en tant que module galoisien (cf. n° 2.1.3).

En d'autres termes, $B \otimes D$ s'identifie, en tant que module filtré, au produit tensoriel des modules filtrés B et D et l'action de G est définie par

$$g(b \otimes d) = gb \otimes d \text{ , pour } g \in G \text{ , } b \in B \text{ , } d \in D \text{ .}$$

3.1.4. - Pour tout module filtré D , on note $\underline{V}_B(D)$ le module galoisien $(B \otimes D)[0]$. Si $V = \underline{V}_B(D)$, on voit donc que V est le sous-$\mathbb{Q}_p[G]$-module de $B \otimes_{K_o} D$ formé des v qui vérifient

$$\begin{cases} Fv = v \ , \\ v \in (B \otimes D)^o_K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B^{-i}_K \otimes D^i_K \ . \end{cases}$$

Il est clair que $\underline{V}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie des modules filtrés dans celle des modules galoisiens.

3.1.5. - Soit V un module galoisien. L'application de $B \otimes (B \otimes V)$ dans $B \otimes V$, qui à $b \otimes (b' \otimes v)$ associe $bb' \otimes v$, est un morphisme de modules galoisiens filtrés et elle induit, par restriction, un morphisme de modules galoisiens filtrés

$$\xi_V : B \otimes \underline{D}_B(V) \longrightarrow B \otimes V \ .$$

De même, si D est un module filtré, l'application de $B \otimes (B \otimes D)$ dans $B \otimes D$, qui à $b \otimes (b' \otimes d)$ associe $bb' \otimes d$, est un morphisme de modules galoisiens filtrés et elle induit, par restriction, un morphisme de modules galoisiens filtrés

$$\eta_D : B \otimes \underline{V}_B(D) \longrightarrow B \otimes D \ .$$

3.2. - <u>MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES</u>.

3.2.1. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> V <u>un module galoisien et soit</u> $D = \underline{D}_B(V)$. <u>Alors</u> ,

i) <u>pour tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, D^i_K/D^{i+1}_K <u>s'identifie canoniquement</u> (<u>et fonctoriellement en</u> V) <u>à un sous</u>-K-<u>espace vectoriel de</u> $(C_B T^i \otimes V)^G$ $(\subset (CT^i \otimes V)^G)$;

ii) <u>l'application</u> $\xi_V : B \otimes D \longrightarrow B \otimes V$ <u>identifie</u> $B \otimes D$ <u>à un sous-objet de</u> $B \otimes V$ (i.e. <u>elle est injective et</u>, <u>si</u> $\xi_{V,K} : (B \otimes D)_K \longrightarrow B_K \otimes V$ <u>est l'application déduite par extension des scalaires</u>, <u>on a</u>

$\xi_{V,K}((B \otimes D)^i_K) = (B^i_K \otimes V) \cap \xi_{V,K}((B \otimes D)_K)$, <u>pour tout</u> $i \in \mathbb{Z}$);

iii) <u>si</u> $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ <u>est finie, il en est de même de</u> $\dim_{K_o} D$ <u>et l'on a</u> $\dim_{K_o} D \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

3.2.2. - <u>Démonstration</u>. - On voit immédiatement que, pour tout i , l'application θ_i identifie B_K^i/B_K^{i+1} à $C_B T^i$ et

$$D_K^i/D_K^{i+1} = (B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G / (B_K^{i+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$$

est un sous-K-espace vectoriel de $\left((B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) / (B_K^{i+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\right)^G \simeq (C_B T^i \otimes V)^G \subset (CT^i \otimes V)^G$, d'où l'assertion (i) .

Il est clair que démontrer la deuxième assertion revient à vérifier que l'application K-linéaire

$$\mathrm{gr}(\xi_{V,K}) \; : \; \mathrm{gr}((B \otimes D)_K \longrightarrow \mathrm{gr}(B_K \otimes V)$$

induite par $\xi_{V,K}$ sur les gradués associés est injective.

On sait, grâce à Tate (voir Serre [20] , § 2, prop.4) que l'application canonique évidente de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}\right)$ dans $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est injective. Si l'on pose $X(-i) = C_B \otimes_K (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}$, on voit qu'il en est, a fortiori, de même de l'application canonique de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(-i)$ dans $C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

Il est immédiat que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^j((B \otimes D)_K) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left((B_K^{-i+j} / B_K^{-i+j+1}) \otimes_K (D_K^i/D_K^{i+1})\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (D_K^i/D_K^{i+1})\right) \end{aligned}$$

et que

$$\mathrm{gr}^j(B_K \otimes V) = (B_K^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) / (B_K^{j+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq C_B T^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \; .$$

On voit facilement que $\mathrm{gr}^j(\xi_{V,K})$ s'identifie au composé des applications évidentes, toutes injectives,

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (D_K^i/D_K^{i+1})\right) \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (C_B T^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G\right)$$
$$\simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C_B T^j \otimes_K (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}\right) \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C_B T^j \otimes_{C_B} X(-i)\right)$$
$$\simeq C_B T^j \otimes_{C_B} (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X(-i)) \hookrightarrow C_B T^j \otimes_{C_B} (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq C_B T^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \ ,$$

ce qui prouve (ii) .

Soit B' le corps des fractions de l'anneau intègre B . Il est clair que l'application injective ξ_V se prolonge, par linéarité, en une application encore injective, $\xi'_V : B' \otimes_{K_o} D \longrightarrow B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $B' \otimes_{K_o} D$ s'identifie donc à un sous-B'-espace vectoriel, de dimension celle de D sur K_o , de $B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est un B'-espace vectoriel de dimension celle de V sur $\mathbb{Q}_p$. L'assertion (iii) en résulte.

3.2.3. - Remarques. -

i) L'injectivité de $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}\right) \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ n'est énoncée dans [20] que lorsque V est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ mais la démonstration reste la même dans le cas général.

ii) Rappelons que l'on dit qu'un module galoisien V , de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, est de Hodge-Tate si l'application $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}\right) \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est un isomorphisme. Cela équivaut visiblement à $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

3.2.4. - De la proposition 3.2.1., on déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE. - Soit V un module galoisien de dimension finie et soit $D = \underline{D}_B(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) on a $\dim_{K_o} D = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;

ii) le module V est de Hodge-Tate et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\dim_K (D_K^i/D_K^{i+1}) = \dim_K (CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$.

En effet, on a

$$\dim_{K_0} D = \dim_K D_K = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K(D_K^i/D_K^{i+1}) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_K(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V .$$

On a donc $\dim_{K_0} D = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ si et seulement si les deux inégalités qui précèdent sont des égalités : pour la première, cela revient à dire que $\dim_K(D_K^i/D_K^{i+1}) = \dim_K(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ pour tout i, et pour la seconde que V est de Hodge-Tate.

3.2.5. - DÉFINITION. - On dit qu'un module galoisien V est <u>B-admissible</u> (ou, s'il n'y a pas de confusion possible sur B, <u>admissible</u>) s'il est de dimension finie et s'il satisfait aux conditions équivalentes du corollaire 3.2.4.

On note $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les modules galoisiens admissibles.

3.3. - <u>EXEMPLES DE MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES</u>.

3.3.1. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> V <u>un module galoisien de dimension finie tel que l'image du groupe d'inertie</u> I (<u>dans le groupe des</u> $\mathbb{Q}_p$-<u>automorphismes de</u> V) <u>est un groupe fini</u>. <u>Pour que</u> V <u>soit admissible</u>, <u>il faut et il suffit que</u> V <u>soit non ramifiée</u> (i.e. <u>que l'image de l'inertie soit réduite à l'élément-neutre</u>).

3.3.2. - La démonstration de cette proposition utilise le résultat suivant (qui est un cas particulier du th.1, p.III.31 de [21]) :

LEMME. - <u>Soit</u> X <u>un espace vectoriel de dimension finie sur</u> $\hat{K}_0^{nr}$ <u>sur lequel</u> $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = G/I$ <u>opère continûment et semi-linéairement</u> (i.e., <u>on a</u> $g(\lambda x) = g\lambda \cdot gx$, <u>si</u> $g \in G/I$, $\lambda \in \hat{K}_0^{nr}$, $x \in X$). <u>L'application canonique</u> $\hat{K}_0^{nr} \otimes_{K_0} X^{G/I} \longrightarrow X$ <u>est un isomorphisme</u>.

3.3.3. - Démontrons alors la proposition : posons $X = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I$. On a $\underline{D}_B(V) = X^{G/I}$ et il résulte du lemme précédent que $\dim_{K_0} \underline{D}_B(V) = \dim_{\hat{K}_0^{nr}} X$. Tout revient donc à montrer que l'on a

$\dim_{\hat{K}_o^{nr}} X = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ si et seulement si l'image de l'inertie est réduite à l'élément-neutre.

Soit I' un sous-groupe invariant ouvert de I dont l'image est triviale et soit $J = I/I'$. On a $X = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = \left((B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}\right)^J = (B^{I'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^J$; d'après la proposition 2.3.3, on a $B^{I'} = \hat{K}_o^{nr}$, donc $X = (\hat{K}_o^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^J = \hat{K}_o^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^J$ et la dimension de X sur $\hat{K}_o^{nr}$ est égale à celle de V^J sur $\mathbb{Q}_p$; elle n'est égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ que si et seulement si $V^J = V$, ce qui équivaut à l'image de l'inertie triviale.

3.3.4. - Remarque. - L'hypothèse que V est un module galoisien de dimension finie tel que l'image du groupe d'inertie est fini est équivalente (Sen, [17], p.167, cor.1) à l'hypothèse que V est de Hodge-Tate, avec $(CT^{-i} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \simeq (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$ si $i \neq 0$.

3.3.5. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$. Pour que V soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un entier i tel que $V \otimes T^{-i}$ soit non ramifié.

3.3.6. - Démonstration. - Soit $\rho : G \to \mathbb{Q}_p^*$ le caractère définissant l'action de G sur V. Si V est admissible, V est de Hodge-Tate. Soit i l'unique entier tel que $(CT^{-i} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \neq 0$. On voit (soit en appliquant la remarque 3.3.4, soit directement) qu'il existe un sous-groupe ouvert invariant I' de I tel que la restriction de la représentation à I' est isomorphe à T^i, i.e. tel que $\rho(g) = \chi^i(g)$ pour tout $g \in I'$. En utilisant le fait que B contient $K_o[T,T^{-1}]$, on voit facilement que V est admissible si et seulement si $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} T^{-i}$ l'est et il suffit d'appliquer la proposition 3.3.1. à $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} T^{-i}$.

3.3.7. - Remarque. - Soit V un module galoisien de dimension finie. Si, lorsque l'on se restreint à I, V devient isomorphe à une somme directe de copies de certains des T^i, V est B-admissible. Si B est le plus petit possible, i.e. si $B = \hat{K}_o^{nr}[T,T^{-1}]$, il est facile de voir que l'on obtient ainsi tous les modules galoisiens B-admissibles.

3.4. - LA CATÉGORIE $\mathrm{Rep}_B(G)$ DES MODULES GALOISIENS B-ADMISSIBLES.

3.4.1. - PROPOSITION. - *La catégorie $\mathrm{Rep}_B(G)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(G)$ stable par somme directe, sous-objet, quotient (en particulier, c'est une catégorie abélienne), et la restriction du foncteur $\underline{D}_B$ à cette catégorie est exacte et fidèle.*

3.4.2. - *Démonstration*. - La stabilité par somme directe est triviale, puisque le foncteur $\underline{D}_B$ est additif. Soit

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte de modules galoisiens de dimension finie. Elle induit une suite exacte

$$0 \to B\otimes_{\mathbb{Q}_p} V' \to B\otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to B\otimes_{\mathbb{Q}_p} V'' \to 0 ,$$

donc une suite exacte de K_o-espaces vectoriels

$$0 \to \underline{D}_B(V') \to \underline{D}_B(V) \to \underline{D}_B(V'') .$$

Soit h (resp. h', h'') la dimension de V (resp. V', V'') sur $\mathbb{Q}_p$. Si V est admissible, on a $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V) = h$, et on sait (prop. 3.2.1) que $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V') \leq h'$ et $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V'') \leq h''$. Comme $h = h'+h''$, la seule possibilité est que $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V') = h'$ et $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V'') = h''$. Ceci implique que V' et V'' sont admissibles et que la suite de K_o-espaces vectoriels

$$0 \to \underline{D}_B(V') \to \underline{D}_B(V) \to \underline{D}_B(V'') \to 0$$

est exacte. Il reste à vérifier que cette suite est exacte, *en tant que suite de modules filtrés*, autrement dit (cf. n° 1.2.3) que, si l'on pose $D' = \underline{D}_B(V')$, $D = \underline{D}_B(V)$ et $D'' = \underline{D}_B(V'')$, pour tout i, la suite de K-espaces vectoriels

$$0 \to D'^i_K \to D^i_K \to D''^i_K \to 0$$

est exacte, ce qui résulte facilement de considérations sur les dimensions de ces espaces vectoriels.

Enfin, la fidélité de $\underline{D}_B$, restreint à $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, est immédiate.

3.4.3. - PROPOSITION.

i) <u>Si</u> V_1 <u>et</u> V_2 <u>sont des modules galoisiens admissibles</u>, <u>il en est de même de</u> $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ <u>et les modules filtrés</u> $\underline{D}_B(V_1) \otimes \underline{D}_B(V_2)$ <u>et</u> $\underline{D}_B(V_1 \otimes V_2)$ <u>sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes</u>.

ii) <u>Si</u> V <u>est un module galoisien admissible</u>, <u>il en est de même de</u> V^* <u>et les modules filtrés</u> $\underline{D}_B(V^*)$ <u>et</u> $(\underline{D}_B(V))^*$ <u>sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes</u>.

3.4.4. - Démonstration. - Posons $V_3 = V_1 \otimes V_2$ et, pour $i = 1,2,3$, $D_i = \underline{D}_B(V_i)$. L'application de $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1) \otimes_{K_0} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$ dans $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3$, qui à $(b_1 \otimes v_1) \otimes (b_2 \otimes v_2)$ associe $b_1 b_2 \otimes (v_1 \otimes v_2)$, induit un homomorphisme canonique (et fonctoriel en V_1 et V_2) de $D_1 \otimes D_2$ dans D_3 . Elle induit une application K-linéaire de $D_{1K} \otimes D_{2K}$ dans D_{3K} , compatible avec les filtrations, donc une application K-linéaire φ des gradués associés.

On voit que la composante homogène du premier gradué est $\bigoplus_{i'+i''=i} \left((D_{1K}^{i'}/D_{1K}^{i'+1}) \otimes_K (D_{2K}^{i''}/D_{2K}^{i''+1})\right)$ qui s'identifie à $\bigoplus_{i'+i''=i} \left((CT^{i'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^G \otimes_K (CT^{i''} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)^G\right)$, puisque V_1 et V_2 sont admissibles (n° 3.2.4).

On voit que, si l'on identifie D_{3K}^{i}/D_{3K}^{i+1} à un sous-K-espace vectoriel de $(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)$, l'application φ , en degré i , n'est autre que l'application évidente

$$\bigoplus_{i'+i''=i} (CT^{i'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^G \otimes_K (CT^{i''} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)^G \longrightarrow (CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)^G$$

dont on vérifie facilement que c'est un isomorphisme.

On en déduit que l'application canonique de D^i_{3K}/D^{i+1}_{3K} dans $(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)^G$ est un isomorphisme pour tout i, donc (comme V_3 est évidemment de Hodge-Tate) que V_3 est admissible.

Comme D_1, D_2 et D_3 sont de dimension finie, le fait que l'application canonique de $D_1 \otimes D_2$ dans D_3 soit un isomorphisme de modules filtrés résulte trivialement de ce que c'est un isomorphisme sur les gradués associés, et l'assertion (i) de la proposition est démontrée.

Si V est admissible et si $h = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, $\det V = \overset{h}{\Lambda} V$ est un facteur direct de $\overset{h}{\otimes} V$ et est donc admissible ; comme $\det V$ est de dimension 1, il existe, d'après la proposition 3.3.5, un entier i tel que, quitte à se restreindre à I, $\det V$ devienne isomorphe à T^i ; donc $\det^{-1} V = (\det V)^*$, restreint à I, est isomorphe à T^{-i} et, d'après la même proposition, c'est un module galoisien admissible. De même, $\overset{h-1}{\Lambda} V$ est un facteur direct de $\overset{h-1}{\otimes} V$ et est donc admissible ; il en est alors de même de $V^* \simeq \overset{h-1}{\Lambda} V \otimes \det^{-1} V$.

L'homomorphisme canonique $\mu_V : V \otimes V^* \to \mathbb{Q}_p$ (défini par $\mu_V(v \otimes v') = v'(v)$) induit un morphisme $\underline{D}_B(\mu_V) : \underline{D}_B(V \otimes V^*) \to \underline{D}_B(\mathbb{Q}_p)$. On voit que $\underline{D}_B(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie canoniquement à K_o et on sait que $\underline{D}_B(V \otimes V^*)$ s'identifie à $\underline{D}_B(V) \otimes \underline{D}_B(V^*)$, puisque V et V^* sont admissibles. On en déduit un morphisme canonique de $\underline{D}_B(V) \otimes \underline{D}_B(V^*)$ dans K_o et on vérifie facilement que celui-ci induit un isomorphisme (évidemment fonctoriel en V) de $\underline{D}_B(V^*)$ sur $(\underline{D}_B(V))^*$.

3.4.5. - Remarques.

i) Il résulte immédiatement de la proposition précédente et des propriétés du foncteur Hom que, si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens admissibles, $\underline{\mathrm{Hom}}(V_1, V_2)$ l'est aussi et $\underline{D}_B(\underline{\mathrm{Hom}}(V_1, V_2))$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}\big(\underline{D}_B(V_1), \underline{D}_B(V_2)\big)$.

ii) Si V est un module galoisien admissible, la proposition montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $\overset{n}{\otimes} V$ est admissible et $\underline{D}_B(\overset{n}{\otimes} V)$ s'identifie canoniquement (et fonctoriellement) à $\overset{n}{\otimes}\ \underline{D}_B(V)$. Il est facile de voir que, dans cette identification, on a $\underline{D}_B(\mathrm{Sym}^n V) = \mathrm{Sym}^n(\underline{D}_B(V))$ et $\underline{D}_B(\overset{n}{\Lambda} V) = \overset{n}{\Lambda}\ \underline{D}_B(V)$.

iii) Modulo quelques vérifications faciles, les propositions 3.4.1 et 3.4.3 signifient, dans la terminologie de Saavedra ([16] , chap.I, § 5 et chap.III, § 3) que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ est une sous-catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire tannakienne de la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (elle-même $\mathbb{Q}_p$-linéaire tannakienne) et que la restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ est un $\otimes$-foncteur rigide exact et fidèle de cette catégorie dans la $\otimes$-catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire rigide $\underline{\mathrm{MF}}_K$.

3.5. - <u>L'APPLICATION</u> ξ_V <u>POUR LES MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES</u>.

3.5.1. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> V <u>un module galoisien de dimension finie et soit</u> $D = \underline{D}_B(V)$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>le module</u> V <u>est admissible</u> ;

ii) <u>l'application</u> $\xi_V : B \otimes_{K_0} D \to B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ <u>est surjective</u> ;

iii) <u>l'application</u> ξ_V <u>est un isomorphisme de modules galoisiens filtrés</u>.

3.5.2. - <u>Démonstration</u>. - Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii) . On sait (prop. 3.2.1) que ξ_V identifie $B \otimes D$ à un sous-objet de $B \otimes V$ et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) en résulte trivialement.

On sait (prop. 2.3.1) que B est intègre. Soit B' son corps des fractions. D'après la proposition 3.2.1, ξ_V est injective et on en déduit qu'il en est de même de l'application $\xi'_V : B' \otimes_{K_0} D \to B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ induite par extension des scalaires. On voit donc que V est admissible si et seulement si l'application ξ'_V est surjective. En particulier (ii) $\Rightarrow$ (i) et, pour montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii) , il suffit de vérifier que si $v_1, v_2, \dots, v_h$ (resp. $d_1, d_2, \dots, d_h$) est une base de V sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. de D sur K_0) , alors le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des d_j sur la base du B-module libre $B \otimes V$ formée par les $1 \otimes v_i$ est inversible dans B .

Quitte à remplacer V par $\overset{h}{\wedge} V$ et D par $\overset{h}{\wedge} D$ (canoniquement isomorphe à $\underline{D}_B(\overset{h}{\wedge} V)$, cf. remarque (ii) du n° 3.4.5), on voit que l'on peut supposer $h = 1$. Mais alors (prop. 3.3.5), il existe un entier i tel que $T^{-i} \otimes V$ est non ramifié. On voit alors que, si v est un générateur de V et t un générateur de T , $t^{-i} \otimes v$ est un générateur du $\hat{K}_o^{nr}$-espace vectoriel, de dimension 1 , $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_o}$; on en déduit que l'on peut trouver un élément non nul $\lambda \in \hat{K}_o^{nr}$ tel que $\lambda t^{-i} \otimes v$ est un générateur de D ; l'assertion résulte de ce que λt^{-i} est inversible dans $\hat{K}_o^{nr}[T, T^{-1}]$, donc, a fortiori, dans B .

3.6. - MODULES FILTRÉS ADMISSIBLES.

3.6.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un module galoisien admissible V et un isomorphisme de D sur $\underline{D}_B(V)$;

ii) l'application canonique $\eta_D : B \otimes \underline{V}_B(D) \to B \otimes D$ est un isomorphisme de modules galoisiens filtrés.

3.6.2. - Démonstration. -

■ Si (ii) est satisfaite, posons $V = \underline{V}_B(D)$. L'isomorphisme η_D induit un isomorphisme du module filtré $\underline{D}_B(V) = (B \otimes \underline{V}_B(D))^G$ sur $(B \otimes D)^G = B^G \otimes D = K_o \otimes D \simeq D$. Comme il est clair que $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_o} D$, on en déduit que V est admissible et (ii) $\Rightarrow$ (i) .

■ Si (i) est satisfaite, et si l'on identifie D et $\underline{D}_B(V)$, il résulte de la proposition 3.5.1 que $\xi_V : B \otimes D \to B \otimes V$ est un isomorphisme. On voit que $\underline{V}_B(D) = (B \otimes D)[0]$ s'identifie à $(B \otimes V)[0] = B[0] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \mathbb{Q}_p \otimes V \simeq V$ et on vérifie immédiatement que $\eta_D = \xi_V^{-1}$. C'est donc bien un isomorphisme.

3.6.3. - Remarque. - On prendra garde que, étant donné un module filtré D, l'application η_D n'est pas, en général, injective (en général, $\underline{V}_B(D)$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, même si D est de dimension finie sur K_o).

3.6.4. - DÉFINITION. - On dit qu'un module filtré D est B-admissible (ou admissible, s'il n'y a pas de risque de confusion sur B) s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 3.6.1.

On note $\underline{MF}_{K,B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K$ dont les objets sont les modules filtrés admissibles.

3.6.5. - THÉORÈME. - *Si V (resp. D) est un module galoisien (resp. filtré) admissible, alors $\underline{D}_B(V)$ (resp. $\underline{V}_B(D)$) est un module filtré (resp. galoisien) admissible. Par restriction $\underline{D}_B$ induit une équivalence de $\underline{Rep}_B(G)$ sur $\underline{MF}_{K,B}$ et la restriction de $\underline{V}_B$ est un quasi-inverse.*

3.6.6. - *Démonstration*. - Si V est un module galoisien admissible, $\underline{D}_B(V)$ est admissible par définition. Comme $\xi_V : B\otimes\underline{D}_B(V) \to B\otimes V$ est un isomorphisme (prop. 3.5.1), on voit que $\underline{V}_B(\underline{D}_B(V)) = (B\otimes\underline{D}_B(V))[0]$ s'identifie à $(B\otimes V)[0] = B[0]\otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \mathbb{Q}_p\otimes V \simeq V$, donc que $\underline{V}_B(\underline{D}_B(V))$ est canoniquement (et fonctoriellement) isomorphe à V.

Si D est un module filtré admissible, on a vu dans la démonstration de la proposition 3.6.1 que $\underline{V}_B(D)$ est admissible et que $\underline{D}_B(\underline{V}_B(D))$ et D sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes. Le théorème en résulte.

3.6.7. - *Remarque*. - Le théorème implique, en particulier, que la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ est abélienne.

Si D est un objet de $\underline{MF}_{K,B}$, on voit facilement que les sous-objets de D dans $\underline{MF}_{K,B}$ sont les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K$ qui sont des objets de $\underline{MF}_{K,B}$.

Plus généralement, si φ est un morphisme de modules filtrés admissibles, le noyau (resp. le conoyau, la coimage, l'image) de φ dans $\underline{MF}_K$ coïncide avec le noyau (resp. le conoyau, la coimage, l'image) de φ dans $\underline{MF}_{K,B}$. En particulier, le morphisme canonique de $\mathrm{Coim}\,\varphi$ dans $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un isomorphisme.

Dans la terminologie de Saavedra ([16], chap. I, § 4), les propositions 3.4.1 et 3.4.3 impliquent que l'équivalence de catégories du théorème est une $\otimes$-équivalence de $\otimes$-catégories $\mathbb{Q}_p$-linéaires ; en particulier, la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ est tannakienne et si D_1, D_2 et D sont trois modules filtrés admissibles, il en est de même de $D_1 \otimes D_2$ et D^* et on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels de $\underline{V}_B(D_1 \otimes D_2)$ sur $\underline{V}_B(D_1) \otimes \underline{V}_B(D_2)$ et de $\underline{V}_B(D^*)$ sur $(\underline{V}_B(D))^*$.

3.7. - <u>INVARIANTS ET</u> "<u>COVARIANTS</u>".

Le théorème 3.6.5 et la proposition 3.4.3 permettent de décrire les applications multilinéaires invariantes ou covariantes sur les modules galoisiens admissibles en terme des modules filtrés qui leur sont associés. Par exemple, on a le résultat suivant :

3.7.1. - PROPOSITION. - <u>Soient</u> $V_1, V_2, \ldots, V_n$ <u>des modules galoisiens admissibles et soit</u>, <u>pour</u> $m = 1, 2, \ldots, n$, $D_m = \underline{D}_B(V_m)$. <u>Soit</u> $i \in \mathbb{Z}$. <u>Le</u> $\mathbb{Q}_p$<u>-espace vectoriel des formes</u> $\mathbb{Q}_p$<u>-multilinéaires</u> $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{Q}_p$ <u>covariantes de poids</u> χ^i (i.e. <u>vérifiant</u> $f(gv_1, gv_2, \ldots, gv_n) = \chi^i(g) \cdot f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ <u>si</u> $v_m \in V_m$, $g \in G$) <u>est isomorphe à celui des applications</u> K_o<u>-multilinéaires</u> $\varphi : D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \to K_o$ <u>vérifiant</u>

i) $\varphi(Fd_1, Fd_2, \ldots, Fd_n) = p^{-i}\sigma(\varphi(d_1, d_2, \ldots, d_n))$ si $d_m \in D_m$,

ii) <u>si</u> $i_1, i_2, \ldots, i_n$ <u>sont des entiers vérifiant</u> $i + \sum i_m > 0$, <u>on a</u> $\varphi_K(d_1, d_2, \ldots, d_n) = 0$ <u>si</u> $d_m \in D_{mK}^{i_m}$ <u>pour tout</u> m (<u>on a noté</u> $\varphi_K : D_{1K} \times D_{2K} \times \ldots \times D_{nK} \to K$ <u>l'application</u> K-<u>multilinéaire déduite de</u> φ <u>par extension des scalaires</u>).

3.7.2. - Démonstration. - Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ des formes $\mathbb{Q}_p$-multilinéaires de poids χ^i s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes du module galoisien $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n$ dans $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ (où l'on a noté $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ le module galoisien qui, comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, est $\mathbb{Q}_p$-lui-même, l'action de G se faisant à travers le caractère χ^i). Comme $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ est isomorphe (non canoniquement, si $i \neq 0$) à T^i, $\mathcal{F}$ est isomorphe à
$\mathcal{F}' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n, T^i)$.

On sait que T^i est admissible et on voit que $\underline{D}_B(T^i)$ s'identifie, canoniquement, à S^{-i}. D'après le théorème 3.6.5, $\mathcal{F}'$ s'identifie donc au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes du module filtré $\underline{D}_B(V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n)$ dans S^{-i}, ou encore, grâce à la proposition 3.4.3, de $D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_n$ dans S^{-i}.

La proposition résulte alors facilement de la définition du produit tensoriel des modules filtrés.

3.7.3. - Remarques.

i) Supposons que, dans le proposition précédente, $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$. Il résulte de la remarque (ii) du n°3.4.5 que φ est alternée (resp. symétrique) si et seulement si f l'est. Si $n = 2$, φ est non dégénérée si et seulement si f l'est.

ii) Soit V un module galoisien admissible et supposons que $D = \underline{D}_B(V)$ vérifie $D_K^o = D_K$ et $D_K^2 = 0$ (nous verrons au § 5 que c'est le cas si V est le dual du module galoisien associé à un groupe p-divisible sur l'anneau des entiers de K). Il résulte de ce qui précède que le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques (resp. alternées) sur V, covariantes de poids χ^{-1}, s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des formes K_o-bilinéaires symétriques (resp. alternées) $\varphi : D \times D \to K_o$ vérifiant

(i) $\varphi(Fd_1, Fd_2) = p\sigma(\varphi(d_1, d_2))$ si $d_1, d_2 \in D$,

(ii) D_k^1 est totalement isotrope pour φ_K.

Si k est algébriquement clos et si V n'a ni sous-objet isomorphe à $\mathbb{Q}_p$, ni quotient isomorphe à $\mathbb{Q}_p(\chi^{-1})$, on montre facilement que toute forme bilinéaire covariante non nulle sur V est nécessairement de poids χ^{-1}.

3.8. - DEUX PROPRIÉTÉS DES MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES.

3.8.1. - PROPOSITION. - *Soit* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{Q}_p$ *et soient* ρ *et* ρ' *deux homomorphismes continus de* G *dans le groupe des* $\mathbb{Q}_p$*-automorphismes de* V . *On suppose que* (V,ρ) *est admissible et que* ρ *et* ρ' *coïncident sur un sous-groupe ouvert* I' *du groupe d'inertie* I . *Pour que* (V,ρ') *soit admissible, il faut et il suffit que* ρ *et* ρ' *coïncident sur* I .

3.8.2. - *Démonstration*. - Il est clair que l'on peut supposer I' invariant dans G . Posons $V = (V,\rho)$ et $V' = (V,\rho')$. Si V et V' sont admissibles, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}(V,V') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,V')$ (cf. remarque (i) du n°3.4.5), donc aussi du sous-$\mathbb{Q}_p[G]$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[I']}(V,V')$; comme l'image de l'inertie dans cette représentation est finie, elle doit être triviale (prop. 3.3.1) et tout $\mathbb{Q}_p[I']$-homomorphisme de V dans V' est un $\mathbb{Q}_p[I]$-homomorphisme, ce qui montre que la condition est nécessaire.

D'après le lemme 3.3.2, on a

$$\dim_{\hat{K}_o^{nr}}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = \dim_{K_o}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G = \dim_{K_o} \underline{D}_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

et

$$\dim_{K_o} \underline{D}_B(V') = \dim_{K_o}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^G = \dim_{\hat{K}_o^{nr}}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^I .$$

Si ρ et ρ' coïncident sur I , on a donc $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^I$ et $\dim_{K_o} \underline{D}_B(V') = \dim_{\hat{K}_o^{nr}}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = \dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$ et la condition est suffisante.

3.8.3. - Notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les modules galoisiens de Hodge-Tate. Il est clair que $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$. Comme la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$, $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$) est stable par sous-objet, quotient, $\oplus$, $\otimes$, $*$, on peut parler du groupe pro-algébrique $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{H}^{HT}$, $\mathbb{H}^{B}$) enveloppe de l'image de Galois (cf. Serre, [22] , § 1) ; dans la terminologie de Saavedra ([16] , chap.II), c'est le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre qui, à tout objet V de la catégorie, associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent . Il est clair que $\mathbb{H}^{HT}$ s'identifie à un quotient de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^{B}$ à un quotient de $\mathbb{H}^{HT}$.

3.8.4. - PROPOSITION. - <u>Si</u> k <u>est algébriquement clos</u>, <u>le groupe</u> $\mathbb{H}^{B}$ <u>est connexe</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il est clair que cela revient à démontrer que, pour tout module galoisien admissible V , le groupe $\mathbb{H}_V$, enveloppe algébrique de l'image de Galois dans la représentation, est connexe. S'il ne l'était pas, il existerait une représentation de ce groupe dont l'image serait finie et non triviale. On sait (cf. par exemple, [16] , chap.II, n° 4.3.2) qu'elle se réaliserait comme un quotient V' d'un sous-espace d'une somme directe de puissances tensorielles de V et V^* ; on voit facilement que V' serait alors un module galoisien admissible pour lequel l'image de $G = I$, serait finie et non triviale, ce qui est impossible, d'après la proposition 3.3.1.

§ 4 - modules faiblement admissibles

Dans tout ce paragraphe, on suppose le corps k algébriquement clos. On a donc $K_o = \hat{K}_o^{nr}$ et $K = \hat{K}^{nr}$.

4.1. - <u>DÉFINITIONS</u>.

4.1.1. - Pour tout entier $s \geq 1$, on note $\mathbb{Q}_{p^s}$ l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré s contenue dans K_o .

Pour tout module filtré D et tout nombre rationnel $\alpha = r/s$, avec

$r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux, on pose

$$D_\alpha = \{ d \in D \mid F^s d = p^r d \} .$$

On voit que c'est un sous-$\mathbb{Q}_{p^s}$-espace vectoriel de D . On pose $D_{\alpha,K_o} = K_o \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} D_\alpha$.

Si D est de dimension finie sur K_o , on sait (cf. par exemple, [1] , p.316) que les D_α sont presque tous nuls et tous de dimension finie, et que l'homomorphisme évident

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_{\alpha,K_o} \longrightarrow D$$

est un isomorphisme de $K_o[F]$-modules (les D_{α,K_o} sont les composantes isotypiques du F-iso-cristal sous-jacent à D).

4.1.2. - Pour tout module filtré D de dimension finie, on pose

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \alpha \cdot \dim_{K_o} D_{\alpha,K_o}$$

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K (D_K^i / D_K^{i+1}) .$$

On voit facilement que t_N et t_H sont additives ; autrement dit, pour toute suite exacte de modules filtrés (cf. n° 1.2.3)

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0 ,$$

on a $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$ et $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'')$.

4.1.3. - PROPOSITION. Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) On a $t_H(D) = t_N(D)$ et, pour tout sous-objet D' de D , $t_H(D') \leq t_N(D')$;

ii) On a $t_H(D) = t_N(D)$ et, pour tout quotient D'' de D , $t_H(D'') \geq t_N(D'')$.

Démonstration. - Cela résulte immédiatement de ce que t_H et t_N sont additives.

4.1.4. - DÉFINITION. - On dit qu'un module filtré D est faiblement admissible s'il est de dimension finie et vérifie les conditions équivalentes de la proposition 4.1.3.

On note $\underline{MF}_K^f$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K$ dont les objets sont les modules filtrés faiblement admissibles.

4.2. - LA CATÉGORIE $\underline{MF}_K^f$.

4.2.1. - PROPOSITION. - *La catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est abélienne et le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme φ dans cette catégorie coïncide avec le noyau (resp. le conoyau) de φ dans la catégorie des modules filtrés. En outre*

i) *le dual* D^* *d'un module filtré faiblement admissible* D *est faiblement admissible* ;

ii) *pour qu'un sous-objet* D' (*resp. un quotient* D''), *dans* $\underline{MF}_K$, *d'un module filtré faiblement admissible soit faiblement admissible, il faut et il suffit que* $t_H(D') = t_N(D')$ (*resp.* $t_H(D'') = t_N(D'')$) ;

iii) *si*

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de modules filtrés, et si deux d'entre eux sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième.

4.2.2. - *Démonstration*. - On voit facilement que $t_H(D^*) = -t_H(D)$ et $t_N(D^*) = -t_N(D)$, et l'assertion (i) résulte immédiatement de la proposition 4.1.3. L'assertion (ii) est également immédiate. Compte-tenu de la proposition 4.1.3, il est immédiat que, si

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de modules filtrés, et si D et l'un des deux autres sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième. Montrons que, si D' et D'' sont faiblement admissibles, il en est de même de D :

on a $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'') = t_N(D') + t_N(D'') = t_N(D)$, et il suffit de vérifier que, si E est un sous-objet de D , on a $t_H(E) \leq t_N(E)$. Si l'on identifie D' à un sous-objet de D et si l'on note φ la restriction à E de la projection de D sur D'' , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 ,$$

où $E' = \operatorname{Ker}\varphi = E \cap D'$ est un sous-objet de D' et où $E'' = \operatorname{Coim}\varphi$ est le quotient de E par E' . En particulier, on a

$$t_H(E) = t_H(E') + t_H(E'') \quad \text{et} \quad t_N(E) = t_N(E') + t_N(E'') .$$

Soit maintenant φE l'image de φ . Alors E'' s'identifie à φE en tant que $K_o[F]$-module à gauche et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(E'')^i_K$ est un sous-K-espace vectoriel de $(\varphi E)^i_K$. On en déduit facilement que $t_N(E'') = t_N(\varphi E)$ et $t_H(E'') \leq t_H(\varphi E)$.

On a donc $t_H(E) = t_H(E') + t_H(E'') \leq t_H(E') + t_H(\varphi E)$. Comme E' (resp. φE) s'identifie à un sous-objet de D' (resp. D'') qui est faiblement admissible, on a $t_H(E') \leq t_N(E')$ et $t_H(\varphi E) \leq t_N(\varphi E) = t_N(E'')$, d'où $t_H(E) \leq t_N(E') + t_N(E'') = t_N(E)$ et D est faiblement admissible, d'où l'assertion (iii) .

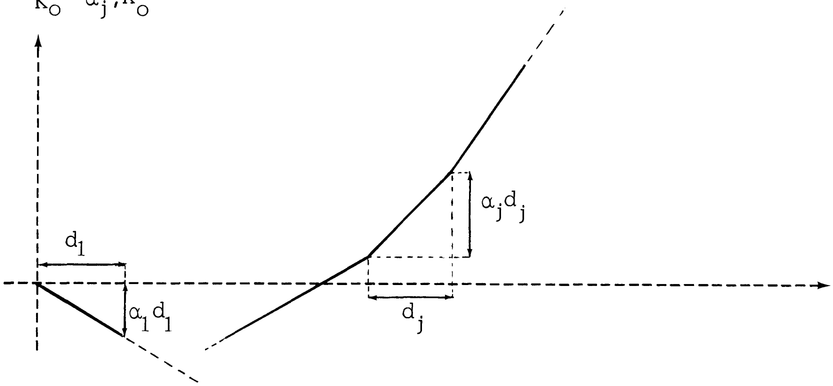
Compte-tenu de ce qui précède, pour achever la démonstration de la proposition, il suffit de vérifier que, si $\varphi : D \to E$ est un morphisme de modules filtrés faiblement admissibles, l'image $\operatorname{Im}\varphi$ de φ (dans la catégorie des modules filtrés) est faiblement admissible et le morphisme canonique $\bar{\varphi} : \operatorname{Coim}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ est un isomorphisme.

Comme $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme des $K_o[F]$-modules sous-jacents on a $t_N(\operatorname{Coim}\varphi) = t_N(\operatorname{Im}\varphi)$ et $t_H(\operatorname{Coim}\varphi) \leq t_H(\operatorname{Im}\varphi)$, avec égalité si et seulement si $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme ; comme $\operatorname{Coim}\varphi$ est un quotient de D , qui est faiblement admissible, on a $t_H(\operatorname{Coim}\varphi) \geq t_N(\operatorname{Coim}\varphi)$; de même, comme $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-objet de E qui est faiblement admissible, on a $t_H(\operatorname{Im}\varphi) \leq t_N(\operatorname{Im}\varphi)$. On en déduit que $t_H(\operatorname{Coim}\varphi) = t_H(\operatorname{Im}\varphi)$, donc que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, et que $t_H(\operatorname{Im}\varphi) = t_N(\operatorname{Im}\varphi)$, donc, d'après l'assertion (ii) , que $\operatorname{Im}\varphi$ (qui est un sous-objet de E) est faiblement admissible.

4.3. - <u>POLYGONES DE NEWTON ET DE HODGE</u>.

Nous nous proposons de donner une caractérisation des modules filtrés faiblement admissibles. Pour cela, nous allons introduire deux définitions :

4.3.1. - Soit D un module filtré de dimension finie. On appelle (cf. par exemple, [1] p. 317) <u>polygone de Newton</u> de D le polygone de Newton du F-iso-cristal sous-jacent, i.e. le polygone des pentes : de façon précise, si $\alpha_1 < \alpha_2 <\ldots< \alpha_\ell$ sont les pentes de D (i.e. les nombres rationnels α tels que $D_{\alpha,K_o} \neq 0$, cf. n°4.1.1), le polygone de Newton $P_N(D)$ est le polygone convexe d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les α_j , la longueur de la projection du segment de pente α_j sur l'axe horizontal étant $d_j = \dim_{K_o} D_{\alpha_j,K_o}$.



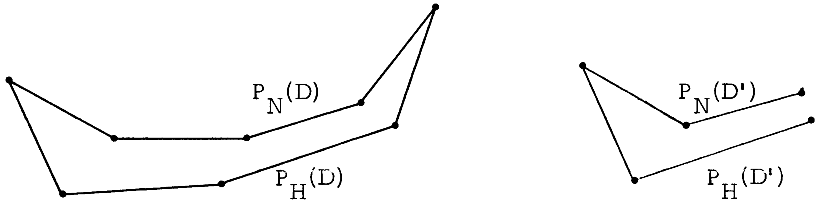
On sait (cf., par exemple, [1] , <u>loc. cit.</u>) que chaque d_j est un multiple du dénominateur de α_j et les sommets de ce polygone sont des points à coordonnées entières.

4.3.2. - De même, si D est un module filtré de dimension finie, on appelle polygone de Hodge de D le polygone associé à la filtration de D_K : de façon précise, si $i_1 < i_2 <\ldots< i_m$ sont les entiers i tels que $D_K^i/D_K^{i+1} \neq 0$, le polygone de Hodge $P_H(D)$ de D est le polygone convexe d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les i_j , la longueur de la projection du segment de pente i_j sur l'axe horizontal étant $h_j = \dim_K D_K^{i_j}/D_K^{i_j+1}$.

4.3.3. - PROPOSITION. - *Soit* D *un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *le module* D *est faiblement admissible* ;

ii) *pour tout sous-objet* D' *de* D, $P_H(D')$ *est en dessous de* $P_N(D')$ *et* $P_H(D)$ *et* $P_N(D)$ *ont mêmes extrémités*.



4.3.4. - *Démonstration*. - On voit immédiatement que, pour tout sous-objet D' de D le point le plus à droite du polygone de Hodge (resp. de Newton) de D' est le point de coordonnées $(\dim_{K_0} D', t_H(D'))$ (resp. $(\dim_{K_0} D', t_N(D'))$). On a donc $t_H(D) = t_N(D)$ si et seulement si $P_H(D)$ et $P_N(D)$ ont mêmes extrémités et, pour achever la démonstration, il suffit d'établir le lemme suivant :

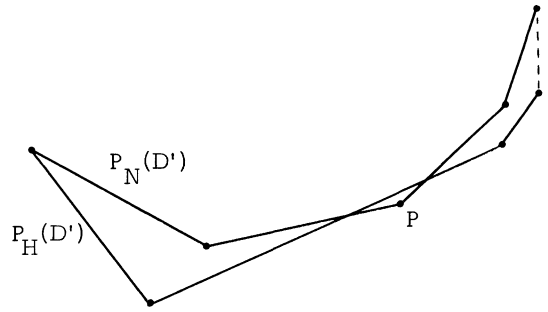
4.3.5. - LEMME. - *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *pour tout sous-objet non nul* D' *de* D, *l'extrémité de* $P_H(D')$ *est en dessous de celle de* $P_N(D')$;

ii) *pour tout sous-objet non nul* D' *de* D, $P_H(D')$ *est en dessous de* $P_N(D')$.

4.3.6. - *Démonstration du lemme*. - Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Soit D' un sous-objet de D. Supposons que $P_H(D')$ ne soit pas en dessous de $P_N(D')$. Il existe alors un sommet P de coordonnées (x_0, y_0) de $P_N(D')$ situé strictement au-dessous de $P_H(D')$. Soit $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \ldots < \alpha'_r$ les pentes de la partie de $P_N(D')$ comprise entre $(0,0)$ et P et soit D'' le sous-objet de D' défini par $D'' = \bigoplus_{j=1}^{r} D'_{\alpha'_j, K_0}$.



On voit que $P_H(D'')$ est un polygone "extrait" de $P_H(D')$ (i.e. on enlève certains segments de $P_H(D')$ et on met bout à bout ceux qui restent, dans l'ordre où on les trouve) et on en déduit que $P_H(D'')$ est situé au-dessus de la partie de $P_H(D')$ comprise entre le point $(0,0)$ et l'intersection (x_o, y'_o) de ce polygone avec la droite $x = x_o$. En particulier, l'extrémité de $P_H(D'')$ est un point de coordonnées (x_o, y''_o), avec $y''_o \geq y'_o \geq y_o$. Comme l'extrémité de $P_N(D'')$ est le point de coordonnées (x_o, y_o), on en déduit que (i) $\Rightarrow$ (ii).

4.4. - MODULES FILTRÉS ADMISSIBLES ET FAIBLEMENT ADMISSIBLES.

Dans toute la fin de ce paragraphe, B est un anneau de Barsotti-Tate fixé.

4.4.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension 1. Pour que D soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un entier i tel que $D \simeq S^i$.

(le module filtré S^i a été défini au n° 1.2.8).

4.4.2. - Démonstration. - Pour que D soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un module galoisien admissible V, de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$, tel que $D \simeq \underline{D}_B(V)$. Comme k est algébriquement clos, c'est équivalent (prop. 3.3.5) à dire qu'il existe un entier j tel que $D \simeq \underline{D}_B(T^j)$, et on vérifie immédiatement que $\underline{D}_B(T^j)$ est isomorphe à S^{-j}.

4.4.3. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension finie. Si D est admissible, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_i \cap D_K^{i+1} = 0$ (rappelons que $D_i = \{d \in D \mid Fd = p^i d\}$).

4.4.4.-Démonstration. - Soit c un élément non nul de S^i tel que $Fc = p^i c$ et soit $d \in D_i \cap D_K^{i+1}$. L'application K_o-linéaire $\varphi : S^i \to D$, telle que $\varphi(c) = d$, est un morphisme de modules filtrés. Posons $D' = \mathrm{Coim}\,\varphi$ et $D'' = \mathrm{Im}\,\varphi$; comme S^i et D sont admissibles, le morphisme canonique $\bar{\varphi} : D' \to D''$ doit être un isomorphisme. On voit que D' et D'', en tant que $K_o[F]$-modules, s'identifient tous deux à $K_o d$, donc que D'_K et D''_K s'identifient tous deux à Kd ; on a $D'^{i+1}_K = 0$, tandis que $D''^{i+1}_K = Kd$; on doit donc avoir $d = 0$.

4.4.5. - PROPOSITION. - Tout module filtré B-admissible est faiblement admissible.

4.4.6. - Démonstration. - On va montrer que D vérifie la condition (i) de la proposition 4.1.3.

On voit facilement que, si D' est un module filtré de dimension r sur K_o, on a $t_H(\overset{r}{\Lambda} D') = t_H(D')$ et $t_N(\overset{r}{\Lambda} D') = t_N(D')$.

Comme toute puissance extérieure d'un module admissible doit être admissible, on voit, en appliquant ce qui précède à $D' = D$, qu'il suffit de prouver l'égalité $t_H(D) = t_N(D)$ lorsque D est de dimension 1. S'il en est ainsi, il résulte de la proposition 4.4.1 qu'il existe un entier i tel que $D \simeq S^i$ et alors $t_H(S^i) = t_N(S^i) = i$.

Soit D' un sous-objet non nul de D et soit $r = \dim_{K_o} D'$. Alors $\overset{r}{\Lambda} D'$ est un sous-objet de dimension 1 de $\overset{r}{\Lambda} D$ et $\overset{r}{\Lambda} D$ est admissible. Si $t_N(D') = t_N(\overset{r}{\Lambda} D') = i$, il existe un élément non nul d de $\overset{r}{\Lambda} D'$ tel que $Fd = p^i d$. Si $t_H(D') = t_H(\overset{r}{\Lambda} D') > i$, on a $d \in (\overset{r}{\Lambda} D)_K^{i+1}$; c'est impossible, d'après la proposition 4.4.3, et on a donc bien $t_H(D') \leq t_N(D')$.

4.5. - DÉTERMINATION DES SOUS-OBJETS ADMISSIBLES.

4.5.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré admissible et soit D' un sous-objet de D (dans la catégorie $\underline{MF}_K$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) <u>le module filtré</u> D' <u>est admissible</u> ;

ii) <u>le module filtré</u> D' <u>est faiblement admissible</u>.

iii) <u>on a</u> $t_H(D') = t_N(D')$.

4.5.2. - <u>Démonstration</u>. - L'équivalence de (ii) et (iii) a déjà été démontrée (prop. 4.2.1) et il est clair que (i) $\Rightarrow$ (iii) .

Il reste à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i) . Quitte à tensoriser D par S^i , pour un entier i convenable, on peut supposer $t_H(D') = t_N(D') = 0$.

Commençons par énoncer un lemme :

4.5.3. - LEMME. - <u>Soit</u> E <u>un corps commutatif et soit</u> R <u>une</u> E-<u>algèbre associative commutative et unitaire</u>. <u>Soit</u> V <u>un espace vectoriel sur</u> E <u>et soit</u> $X = R \otimes_E V$. <u>Soit</u> X' <u>un sous</u>-R-<u>module</u>, <u>libre de rang fini</u> r , <u>de</u> X . <u>Pour que</u> X' <u>soit rationnel sur</u> E (i.e. <u>pour qu'il existe un sous</u>-E-<u>espace vectoriel</u> V' <u>de</u> V <u>tel que</u> $X' = R \otimes_E V'$), <u>il faut et il suffit que</u> $\overset{r}{\Lambda}_R X'$, <u>identifié à un sous</u>-R-<u>module</u>, <u>libre de rang</u> 1 , <u>de</u> $\overset{r}{\Lambda}_R X$, <u>soit rationnel sur</u> E .

(Cette identification est possible car l'application canonique de $\overset{r}{\Lambda}_R X'$ dans $\overset{r}{\Lambda}_R X$ est injective, cf. [3] , A III 88, cor. à la prop. 12).

4.5.4. - Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce lemme élémentaire. Montrons comment on en déduit que si D est admissible et si D' est un sous-objet de D tel que $t_H(D') = t_N(D') = 0$, alors D' est admissible :

Posons $V = \underline{V}_B(D)$ et utilisons les applications ξ_V et η_D pour identifier $X = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ à $B \otimes_{K_0} D$. Soit $r = \dim_{K_0} D'$. Alors $X' = B \otimes_{K_0} D'$ est un sous-B-module, libre de rang r , de X et $\overset{r}{\Lambda}_B X'$ s'identifie à $B \otimes_{K_0} (\overset{r}{\Lambda}_{K_0} D')$. De l'égalité $t_H(\overset{r}{\Lambda} D') = t_N(\overset{r}{\Lambda} D') = 0$, on déduit facilement l'existence d'un générateur d de $\overset{r}{\Lambda} D'$, comme espace vectoriel sur K_0 , vérifiant $Fd = d$ et $d \in (\overset{r}{\Lambda} D)_K^0$; il en résulte que $d \in \overset{r}{\Lambda}_{\mathbb{Q}_p} V$, donc que

$\Lambda_B^r X'$ est rationnel sur $\mathbb{Q}_p$. D'après le lemme 4.5.3, il existe donc un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V' de V tel que $B \otimes_{K_o} D' = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'$. On vérifie facilement que V' est stable par G et que D' s'identifie à $\underline{D}_B(V')$; comme V' est un sous-module galoisien de V, il est admissible et $D' = \underline{D}_B(V')$ l'est aussi.

§ 5 - modules admissibles et groupes p-divisibles

5.1. - LES FONCTEURS $\underline{D}_K$ ET $\underline{V}_p$.

5.1.1. - Soit A l'anneau des entiers de K. On sait depuis Grothendieck et Messing (cf. [7], [8], [13], voir aussi [6]) associer à tout groupe p-divisible Γ sur A un couple $\underline{LM}_K(\Gamma)$ formé d'un F-isocristal $\underline{M}_{K_o}(\Gamma)$ et d'un sous-K-espace vectoriel $\underline{L}(\Gamma)$ de $K \otimes_{K_o} \underline{M}_{K_o}(\Gamma)$. Rappelons brièvement la construction de $\underline{LM}_K(\Gamma)$ telle qu'elle est décrite dans [6] (p. 221) :

- on a $\underline{M}_{K_o}(\Gamma) = K_o \otimes_{W(k)} \underline{M}(\Gamma_k)$ où $\underline{M}(\Gamma_k) = \mathrm{Hom}(\Gamma_k, CW_k)$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de Γ ;
- on construit une application K-linéaire injective de l'espace cotangent $t^*_\Gamma(K)$ de Γ à valeurs dans K dans $\underline{M}_K(\Gamma) = K \otimes_{K_o} \underline{M}_{K_o}(\Gamma)$ et $\underline{L}(\Gamma)$ est l'image de $t^*_\Gamma(K)$ par cette application.

5.1.2. - On peut alors associer à tout groupe p-divisible Γ sur A un module filtré $\underline{D}_K(\Gamma) = D$:

- en tant que $K_o[F]$-module à gauche, $D = \underline{M}_{K_o}(\Gamma)$;
- la filtration est définie par

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leq 0 , \\ \underline{L}_K(\Gamma) & \text{si } i = 1 , \\ 0 & \text{si } i \geq 2 . \end{cases}$$

La correspondance $\Gamma \mapsto \underline{D}_K(\Gamma)$ définit en fait un foncteur contravariant additif de la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénie près, sur A dans celle des modules filtrés et la proposition 5.2 du chapitre IV de [6] dit que ce foncteur est pleinement fidèle.

5.1.3. - Si Γ est un groupe p-divisible sur A , notons $\underline{T}_p(\Gamma)$ son module de Tate (on a donc $\underline{T}_p(\Gamma) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma(\bar{A}))$, si $\bar{A}$ est l'anneau des entiers de $\bar{K}$) et posons $\underline{V}_p(\Gamma) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}_p(\Gamma)$.

Il est clair que la correspondance $\Gamma \mapsto \underline{V}_p(\Gamma)$ définit, en fait, un foncteur additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p-divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules galoisiens.

5.1.4. - DÉFINITION. Soit B un anneau de Barsotti-Tate. On dit que B <u>est adapté aux groupes</u> p-<u>divisibles</u> s'il vérifie les deux conditions suivantes :

i) pour tout groupe p-divisible Γ sur A , $\underline{V}_p(\Gamma)$ est un module galoisien B-admissible ;

ii) les foncteurs $\Gamma \mapsto \underline{D}_K(\Gamma)$ et $\Gamma \mapsto (\underline{D}_B(\underline{V}_p(\Gamma)))^*$ sont isomorphes.

5.1.5. - THÉORÈME. - <u>Il existe un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes</u> p-<u>divisibles</u>.

La démonstration de ce résultat, i.e. la construction d'un tel anneau, sera faite ailleurs.

5.1.6. - <u>Remarques</u>. - Supposons k algébriquement clos et soit Γ un groupe p-divisible sur A . Posons $V = \underline{V}_p(\Gamma)$. D'après le théorème précédent, il existe un anneau de Barsotti-Tate B tel que V est B-admissible :

i) il résulte donc de la proposition 3.8.4 que l'enveloppe algébrique $\mathbb{H}_V$ de l'image de Galois est connexe ;

ii) soit h la hauteur et soit d la dimension de Γ ; il résulte de la proposition 3.3.5 que l'action de Galois sur $\overset{h}{\Lambda} V$ est donnée par le caractère χ^d ; on retrouve ainsi un résultat de Raynaud ([15], th.4.2.1).

5.2. - CARACTÉRISATION (PARTIELLE) DES MODULES (GALOISIENS ET FILTRÉS) PROVENANT DES GROUPES p-DIVISIBLES.

5.2.1. - Lorsque $e = 1$, i.e. lorsque $K = K_o$, on sait, depuis Messing ([13], chap. V, th.1.6), caractériser l'image essentielle du foncteur $\underline{D}_K$. Le résultat peut s'énoncer ainsi :

PROPOSITION. - Supposons $e = 1$ et soit D un module filtré de dimension finie. Pour qu'il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que $D \simeq \underline{D}_K(\Gamma)$, il faut et il suffit que D satisfasse aux conditions suivantes :

i) on a $D_K^o = D_K$ et $D_K^2 = 0$;

ii) il existe un réseau M de D (i.e. un sous-A-module tel que $K \otimes_A M$ s'identifie à $D = D_K$) tel que

- d'une part $pM \subset FM \subset M$,
- d'autre part, si $L = M \cap D_K^1$, l'application évidente de L/pL dans M/FM est un isomorphisme (de k-espaces vectoriels).

Si $p \neq 2$ (resp. si $p = 2$ et D n'a que des pentes > 0), c'est une conséquence immédiate de la prop. 1.6 du chapitre IV de [6] qui donne une classification, à isomorphisme près, des groupes p-divisibles (resp. des groupes 2-divisibles connexes). Le cas des groupes 2-divisibles non nécessairement connexes s'en déduit facilement (et n'est pas utilisé dans la suite).

Remarque. - L'existence d'un réseau M de D tel que $pM \subset FM \subset M$ est équivalente au fait que D a toutes ses pentes comprises entre 0 et 1 .

5.2.2. - Laffaille a utilisé les résultats de [6] pour démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION ([10]). - *Supposons* k *algébriquement clos et* $e = 1$. *Soit* D *un module filtré faiblement admissible vérifiant* $D_K = D_K^o$ *et* $D_K^2 = 0$. *Alors il existe un groupe* p-*divisible* Γ *sur* A *tel que* $D_K(\Gamma) \simeq D$.

5.2.3. - COROLLAIRE. - *Supposons* k *algébriquement clos et* $e = 1$. *Soit* B *un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes* p-*divisibles*. *Soit* D *un module filtré de dimension finie*. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *il existe un groupe* p-*divisible* Γ *sur* A *tel que* $D \simeq \underline{D}_K(\Gamma)$;

ii) *on a* $D_K^o = D_K$, $D_K^2 = 0$ *et* D *est* B-*admissible* ;

iii) *on a* $D_K^o = D_K$, $D_K^2 = 0$ *et* D *est faiblement admissible*.

En effet, il est clair que (i) ⇒ (ii) ; on sait (prop. 4.4.5) que (ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (i) d'après la proposition 5.2.2.

5.2.4. - COROLLAIRE. - *Supposons* k *algébriquement clos et* $e = 1$. *Soit* B *un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes* p-*divisibles*. *Soit* V *un module galoisien de dimension finie*. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *le module* V *est* B-*admissible et vérifie* $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$ *si* $i \neq 0,1$;

ii) *il existe un groupe* p-*divisible* Γ *sur* A *tel que* $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$.

5.2.5. - Il me semble raisonnable de conjecturer que la proposition 5.2.2 (et par conséquent aussi ses deux corollaires) reste vraie si l'on supprime l'hypothèse $e=1$. Laffaille a obtenu des résultats partiels dans cette direction :

PROPOSITION ([9]). - Supposons k algébriquement clos. Soit D un module filtré faiblement admissible vérifiant $D_K = D_K^o$ et $D_K^2 = 0$. Si $\dim_K D_K^1 \leq 1$ ou si $\dim_{K_o} D \leq 4$, il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que $\underline{D}_K(\Gamma) \simeq D$.

On en déduit immédiatement les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. - Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles. Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un groupe p-divisible Γ sur A de dimension 1 (resp. de hauteur ≤ 4) tel que $D \simeq \underline{D}_K(\Gamma)$;

ii) on a $D_K^o = D_K$, $D_K^2 = 0$ et $\dim_K D_K^1 = 1$ (resp. $\dim_{K_o} D \leq 4$) et D est B-admissible ;

iii) on a $D_K^o = D_K$, $D_K^2 = 0$ et $\dim_K D_K^1 = 1$ (resp. $\dim_{K_o} D \leq 4$) et D est faiblement admissible.

COROLLAIRE 2. - Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles. Soit V un module galoisien de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un groupe p-divisible Γ sur A, de dimension 1 (resp. de hauteur ≤ 4), tel que $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$;

ii) le module V est B-admissible, vérifie $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$ si $i \neq 0,1$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p} (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{1\} = 1$ (resp. $\dim_{\mathbb{Q}_p} V \leq 4$).

5.2.6. - Il semble naturel de se poser quelques questions :

Question 1. - Si k est algébriquement clos, existe-t-il un anneau de Barsotti-Tate B tel que tout module filtré faiblement admissible soit B-admissible ?

L'exemple le plus simple de module filtré faiblement admissible D

dont je ne sais pas s'il est B-admissible, pour un anneau de Barsotti-Tate B convenable, est le suivant :

▪ en tant que F-iso-cristal, D est isotypique de pente 0 et de dimension 2 sur K_o ; autrement dit, il existe une base (d_1,d_2) de D sur K_o telle que $Fd_j = d_j$, pour $j = 1,2$;

▪ il existe un entier $i_o \geq 1$ et un $\lambda \in K$, λ non quadratique sur $\mathbb{Q}_p$, tel que

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{pour } i \leq -i_o \\ K(d_1+\lambda d_2) & \text{pour } -i_o < i \leq i_o \ , \\ 0 & \text{pour } i > i_o \ . \end{cases}$$

Si un tel D est B-admissible, on voit que $V = \underline{V}_B(D)$ est un module galoisien, de dimension 2 sur $\mathbb{Q}_p$, du type Hodge-Tate, avec

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq -i_o, i_o \\ 1 & \text{si } i = -i_o, i_o \ ; \end{cases}$$

et on peut montrer que l'enveloppe algébrique de l'image du groupe d'inertie dans cette représentation est isomorphe à $\mathbb{SL}_2$.

<u>Question 2</u>. - <u>Si</u> k <u>est algébriquement clos</u>, <u>la catégorie des modules faiblement admissibles est-elle stable par produit tensoriel</u> ?

Si la réponse à la question 1 est oui, il en est évidemment de même de la question 2. Si la réponse à la question 2 est oui, cela entraîne que la catégorie $\underline{MF}_K^f$ est tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$ ([16], chap.III, n°3.2.1). Si on note $\mathbb{Q}_p^{nr}$ l'extension algébrique maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_o, il est facile d'en déduire (<u>op.cit.</u>, chap.III, n°3.3) que la catégorie $\mathbb{Q}_p^{nr}$-linéaire déduite de $\underline{MF}_K^f$ par extension des scalaires s'identifie à la catégorie des représentations, de dimension finie, d'un groupe proalgébrique sur $\mathbb{Q}_p^{nr}$.

Il semble que Laffaille vienne de démontrer que la réponse à la question 2 est oui lorsque $e = 1$ (voir [10]).

Question 3. - Existe-t-il un anneau de Barsotti-Tate B et un module galoisien B-admissible qui n'est pas isomorphe à un objet de la $\otimes$-catégorie engendrée par les modules galoisiens de la forme $\underline{V}_p(\Gamma)$, avec Γ groupe p-divisible sur A ?

La réponse à cette question est probablement oui, mais je ne sais pas comment en construire. Si la réponse à la question 1 est oui, alors la réponse à la question 3 est aussi oui : l'exemple donné après la question 1 le prouve car Serre a montré ([22] , § 3) que si Γ est un groupe p-divisible sur A , l'enveloppe algébrique de l'image du groupe d'inertie dans la représentation $\underline{V}_p(\Gamma)$ n'a pas de quotient simple simplement connexe.

§6 - l'enveloppe algébrique de l'image de Galois

Dans tout ce paragraphe, pour tout anneau commutatif R , les R-algèbres considérées sont supposées associatives, commutatives et unitaires.

Si R est un anneau commutatif, si $\mathbb{J}$ est un groupe algébrique sur R (ou, si l'on préfère, un schéma en groupes algébrique sur $\operatorname{Spec} R$) et si R' est une R-algèbre, on note $\mathbb{J} \otimes_R R'$ ou $\mathbb{J} \otimes R'$ le R'-groupe algébrique déduit de $\mathbb{J}$ par extension des scalaires.

Si U est un espace vectoriel sur un corps R , on note $\mathbb{GL}_U$ le R-groupe algébrique des automorphismes de U : pour toute R-algèbre R' , le groupe $\mathbb{GL}_U(R')$ des points de $\mathbb{GL}_U$ à valeurs dans R' est donc le groupe des R'-automorphismes de $R' \otimes_R U$.

Dans tout ce paragraphe, k est algébriquement clos et B est un anneau de Barsotti-Tate fixé.

Dans les n° 6.1 à 6.4, V est un module galoisien B-admissible et $D = \underline{D}_B(V)$. On utilise les applications ξ_V et η_D introduites au n° 3.1.5

pour identifier $B\otimes D$ et $B\otimes V$. Alors V (resp. D) s'identifie à un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. sur K_o) de $B\otimes V = B\otimes D$ et on a $V = \underline{V}_B(D)$.

6.1. - LE GROUPE $\mathbb{H}_V$.

6.1.1. - On note $\mathbb{H}_V$ l'enveloppe algébrique de l'image de $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ dans la représentation définie par V. Rappelons (cf. [20], p.119) que, si $\rho : G \to \mathbb{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ est l'homomorphisme définissant l'action de G sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V, $\mathbb{H}_V$ est le plus petit sous-$\mathbb{Q}_p$-groupe algébrique de $\mathbb{GL}_V$ tel que $\mathrm{Im}\,\rho \subset \mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$.

Comme V est B-admissible, V est de Hodge-Tate et (cf. [17], th.2, p.167 ou [22], § 1) $\mathrm{Im}\,\rho$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$, pour la topologie de groupe de Lie p-adique (rappelons que $\mathrm{Im}\,\rho$ et $\mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$ sont des sous-groupes fermés du groupe de Lie p-adique $\mathbb{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ et peuvent donc être considérés comme des groupes de Lie p-adique, (cf. [19], LG 5.42, cor. au th.1).

6.1.2. - Rappelons brièvement trois manières de décrire le groupe $\mathbb{H}_V$ (la première ne sera pas utilisée dans la suite) :

6.1.2. - A) "à la Mumford-Tate" (cf. Sen[17], p.164, th.1, ou Serre [22], § 1) : soit $C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_C(i)$ la décomposition de Hodge-Tate de $C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (rappelons que $V_C(i) = C\otimes_K((C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\})$ et que l'on utilise l'isomorphisme canonique de $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_C(i)$ sur $C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ pour les identifier).

Pour tout $\lambda \in C^*$, notons $\varphi(\lambda)$ l'automorphisme de $C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est l'homothétie de rapport λ^i sur $V_C(i)$; on définit ainsi un homomorphisme $\varphi : C^* \to \mathbb{GL}_V(C)$ et on pose $\Phi = \mathrm{Im}\,\varphi$. Alors $\mathbb{H}_V$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathbb{GL}_V$, défini sur $\mathbb{Q}_p$, dont le groupe des points à valeurs dans C contient Φ.

6.1.4. - B) "<u>à la Saavedra</u>" (cf. [16], chap.II) : soit $\underline{\mathrm{Rep}}_V$ la $\otimes$-catégorie engendrée par V et V^* (i.e. la plus petite sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, ou, ce qui revient au même, de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ qui contient V et V^* et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, contragrédiente).

On définit un foncteur fibre $\underline{\omega}_V$ sur $\underline{\mathrm{Rep}}_V$ à valeurs sur Spec $\mathbb{Q}_p$ en associant, à tout objet U de $\underline{\mathrm{Rep}}_V$, le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à U. Alors $\mathbb{H}_V = \mathbf{Aut}^{\otimes}(\underline{\omega}_V)$, groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur $\underline{\omega}_V$.

6.1.5. - C) "<u>à la Chevalley</u>" : il résulte facilement d'un théorème de Chevalley (cf. par exemple, [2], th.5.1) et de ce que, pour tout module galoisien admissible de dimension 1, le caractère qui donne l'action de G est une puissance entière de χ, que le groupe $\mathbb{H}_V$ peut se caractériser ainsi : pour toute $\mathbb{Q}_p$-algèbre R, $\mathbb{H}_V(R)$ est le sous-groupe de $\mathbb{GL}_V(R)$ formé des s qui vérifient

(C_V) <u>il existe une</u> $\mathbb{Q}_p$-<u>algèbre</u> R' <u>contenant</u> R <u>et</u> $\lambda \in R'$, <u>tels que</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $x \in (\overset{n}{\otimes} V)\{i\}$, <u>on a</u> $sx = \lambda^i x$.

En appliquant ceci à la $\mathbb{Q}_p$-algèbre des nombres duaux, on en déduit que $\mathrm{Lie}(\mathbb{H}_V)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathbf{gl}_V$ formée des s qui vérifient

($\mathrm{Lie}(C_V)$) <u>il existe</u> $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $n \geq 0$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $x \in (\overset{n}{\otimes} V)\{i\}$, <u>on a</u> $sx = i\lambda x$.

6.2. - <u>LE GROUPE</u> $\mathbb{H}_D$.

Nous nous proposons maintenant de construire, de deux manières différentes, un groupe algébrique $\mathbb{H}_D$, défini sur une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, qui, après une extension finie non ramifiée des scalaires convenable, devient isomorphe à $\mathbb{H}_V$; ces constructions n'utilisent pas l'anneau B mais seulement les propriétés de la catégorie des modules filtrés. La première consiste à utiliser les résultats de Saavedra. La deuxième consiste à retrouver directement les résultats de Saavedra dans ce cas particulier en utilisant la description de $\mathbb{H}_V$ "à la Chevalley".

A) "à la Saavedra" :

6.2.1. - Soit $\underline{MF}_{K,D}$ la $\otimes$-catégorie des modules filtrés B-admissibles engendrée par D et D^* , i.e. la plus petite sous-catégorie de $\underline{MF}_{K,B}$ qui contient D et D^* et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel. D'après la proposition 4.5.1, c'est aussi la plus petite sous-catégorie de $\underline{MF}_K^f$ ayant ces propriétés, ce qui permet, au moins théoriquement, de construire cette catégorie, même si l'on ne connaît pas $\underline{MF}_{K,B}$.

Soit $\underline{\omega}_{D,K_0}$ le foncteur, de la catégorie $\underline{MF}_{K,D}$ dans celle des espaces vectoriels de dimension finie sur K_0 , qui à E associe le K_0-espace vectoriel sous-jacent à E . On vérifie immédiatement que c'est, dans la terminologie de Saavedra ([16] , chap.II, § 4), un foncteur fibre sur $\underline{MF}_{K,D}$ à valeurs dans $\operatorname{Spec} K_0$.

Il est clair que le foncteur $\underline{V}_B$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\underline{MF}_{K,D}$ et la catégorie $\underline{Rep}_V$. Il résulte alors de Saavedra (loc. cit.) que le K_0-groupe algébrique $\mathbb{H}^S_{D,K_0} = \mathbf{Aut}^{\otimes}(\underline{\omega}_{D,K_0})$ des $\otimes$-automorphismes de $\underline{\omega}_{D,K_0}$ est isomorphe à une K_0-forme intérieure de $H_V \otimes K_0$, ou, ce qui revient au même, que la variété $\mathbf{Isom}^{\otimes}(\underline{\omega}_V \otimes K_0, \underline{\omega}_{D,K_0})$, munie de l'action à droite naturelle de $\mathbf{Aut}^{\otimes}(\underline{\omega}_V \otimes K_0) = \mathbb{H}_V \otimes K_0$, est un $(\mathbb{H}_V \otimes K_0)$-torseur à droite défini sur K_0 .

On déduit facilement (démonstration analogue à la prop. 6.3.3 ci-dessous) de résultats bien connus que ce torseur est trivial, donc que les groupes $\mathbb{H}_V \otimes K_0$ et $\mathbb{H}^S_{D,K_0}$ sont isomorphes (non canoniquement en général).

6.2.2. - La théorie de Saavedra permet, en fait, d'aller plus loin : elle dit ([16], scholie p. 204, l'énoncé de Saavedra est un peu moins fort, mais c'est ce qu'il démontre) qu'il existe une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_o et un foncteur fibre $\underline{\omega}_{D,L}$ de la catégorie $\underline{\underline{MF}}_{K,D}$ à valeurs dans $\operatorname{Spec} L$ tel que $\underline{\omega}_{D,K_o}$ se déduit de $\underline{\omega}_{D,L}$ par extension des scalaires.

Il est facile, dans le cas considéré ici, d'exhiber une telle extension L et un tel foncteur $\underline{\omega}_{D,L}$: on choisit un entier $h \geq 1$ tel que $h\alpha \in \mathbb{Z}$, pour toute pente α de D (cf. n°4.1.1) ; par exemple, on peut prendre pour h le ppcm des dénominateurs des pentes de D. On sait (cf. [8], p.146) que si E' (resp. E'') est un F-iso-cristal isotypique de pente α' (resp. α''), alors $E' \otimes E''$ est un F-iso-cristal isotypique de pente $\alpha' + \alpha''$; on en déduit que, pour tout objet E de $\underline{\underline{MF}}_{K,D}$ et toute pente α de E, $h\alpha \in \mathbb{Z}$.

On prend pour L l'unique extension de degré h de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_o. Pour tout objet E de $\underline{\underline{MF}}_{K,D}$ et tout $\alpha \in h^{-1}\mathbb{Z}$, on note $E_{\alpha,L}$ l'ensemble des $d \in E$ qui vérifient $F^h d = p^{h\alpha} d$; on voit que c'est un sous-L-espace vectoriel de E et que, si l'on pose $\alpha = r/s$, avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, $(r,s) = 1$, il s'identifie, avec les notations du n°4.1.1, à $L \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} E_\alpha$. Si l'on pose $E_L = \bigoplus_{\alpha \in h^{-1}\mathbb{Z}} E_{\alpha,L}$, on en déduit immédiatement que l'homomorphisme canonique de $K_o \otimes_L E_L$ dans E est un isomorphisme ; il est alors facile de voir que le foncteur $\underline{\omega}_{D,L}$, qui à E associe le L-espace vectoriel sous-jacent à E_L, est un foncteur fibre sur $\underline{\underline{MF}}_{K,D}$ à valeurs dans $\operatorname{Spec} L$.

Il résulte alors de Saavedra que le L-groupe algébrique $\mathbb{H}^S_{D,L}$ des $\otimes$-automorphismes du foncteur $\underline{\omega}_{D,L}$ est isomorphe à une L-forme intérieure de $\mathbb{H}_V \otimes L$ (et il résulte facilement, par une démonstration analogue à celle de la proposition 6.3.3 ci-dessous, de résultats bien connus que les groupes $\mathbb{H}_V \otimes L$ et $\mathbb{H}^S_{D,L}$ deviennent isomorphes sur une extension finie non ramifiée convenable de L). Enfin, il est clair que $\underline{\omega}_{D,L} \otimes K_o$ (resp. $\mathbb{H}^S_{D,L} \otimes K_o$) s'identifie canoniquement à $\underline{\omega}_{D,K_o}$ (resp. $\mathbb{H}^S_{D,K_o}$).

B) "<u>à la Chevalley</u>" :

6.2.3. - Soit h un entier tel que $h\alpha \in \mathbb{Z}$, pour toute pente α de D et soit L l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré h contenue dans K_o. Pour toute pente α de D, soit $D_{\alpha,L}$ le sous-L-espace vectoriel de D formé des d vérifiant $F^h d = p^{h\alpha} d$ et soit D_L la somme directe des $D_{\alpha,L}$, pour α parcourant les pentes de D.

Comme on l'a vu au n° précédent, D s'identifie à $K_o \otimes_L D_L$; ceci nous permet de considérer D_L comme un sous-L-espace vectoriel de D et, bien sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overset{n}{\otimes}_L D_L$ comme un sous-L-espace vectoriel de $\overset{n}{\otimes}_{K_o} D$. On voit immédiatement que, pour tout n et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(\overset{n}{\otimes} D)[i] \subset \overset{n}{\otimes} D_L$ et on pose $(\overset{n}{\otimes} D_L)[i] = (\overset{n}{\otimes} D)[i]$.

Pour toute L-algèbre R, notons $\mathbb{H}_{D,L}(R)$ le sous-groupe de $\mathbb{GL}_{D_L}(R)$ formé des s qui vérifient

$(C_{D,L})$ <u>il existe une</u> L-<u>algèbre</u> R' <u>contenant</u> R <u>et</u> $\mu \in R'$ <u>tels que</u>, <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $d \in (\overset{n}{\otimes} D_L)[i]$, <u>on a</u> $sd = \mu^i d$.

On voit que l'on a ainsi défini un sous-L-groupe algébrique $\mathbb{H}_{D,L}$ de $\mathbb{GL}_{D_L}$.

6.2.4. - <u>Remarque</u>. - En appliquant cette définition à la L-algèbre des nombres duaux, on en déduit que $\mathrm{Lie}(\mathbb{H}_{D,L})$ est formée des $s \in \mathbf{gl}_{D_L}$ qui vérifient

$(\mathrm{Lie}(C_{D,L}))$ <u>il existe</u> $\mu \in L$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $n \geq 0$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $d \in (\overset{n}{\otimes} D_L)[i]$, <u>on a</u> $sd = i\mu d$.

6.2.5. - Rappelons que l'on a identifié $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $B \otimes_{K_o} D$. Comme D s'identifie à $K_o \otimes_L D_L$, $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ s'identifie aussi à $B \otimes_L D_L$ et $\mathbb{GL}_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B = \mathbb{GL}_{D_L} \otimes_L B$. Ceci donne un sens à l'énoncé suivant :

PROPOSITION. - <u>On a</u> $\mathbb{H}_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B = \mathbb{H}_{D,L} \otimes_L B$.

6.2.6. - Démonstration. - En comparant les conditions (C_V) du n° 6.1.5 et $(C_{D,L})$ du n° 6.2.3, on voit qu'il suffit de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\overset{n}{\otimes} V)\{i\} = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\overset{n}{\otimes} D)[-i]$. Identifions $B \otimes (\overset{n}{\otimes} V)$ à $B \otimes (\overset{n}{\otimes} D)$ via l'isomorphisme canonique et, de manière évidente, $\overset{n}{\otimes} V$ (resp. $\overset{n}{\otimes} D$) à un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. sur K_o) de $B \otimes (\overset{n}{\otimes} V) = B \otimes (\overset{n}{\otimes} D)$. Comme tout élément non nul du sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel T de B est inversible dans B , on voit qu'il suffit d'établir le lemme suivant :

6.2.7. - LEMME. - <u>Pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>on a</u> $(\overset{n}{\otimes} V)\{i\} = T^i . (\overset{n}{\otimes} D)[-i]$ <u>(où</u> T^i <u>est le sous-</u>$\mathbb{Q}_p$<u>-espace vectoriel de</u> B <u>engendré par</u> t^i , <u>avec</u> t <u>un élément non nul de</u> T) .

Démonstration. - Comme $\underline{D}_B(\overset{n}{\otimes} V)$ s'identifie à $\overset{n}{\otimes} D$, on voit que l'on peut supposer $n = 1$.

Si $v \in V\{i\}$, on voit que $t^{-i}v \in (B \otimes V)^G = D$; on a $F(t^{-i}v) = (p^{-i}t^{-i}).v = p^{-i}.(t^{-i}v)$ et $t^{-i}v \in (B_K^{-i} \otimes V)^G = D_K^{-i}$, donc $t^{-i}v \in D[-i]$, ou $v \in T^i.D[-i]$ et $V\{i\} \subset T^i.D[-i]$.

Si $d \in D[-i]$, on a $Fd = p^{-i}d$ donc $F(t^i d) = t^i d$; comme $d \in D_K^{-i} = (B_K^{-i} \otimes V)^G \subset B_K^{-i} \otimes V$, $t^i d \in B_K^o \otimes D$; on en déduit que $t^i d \in (B \otimes V)[0] = V$; pour tout $g \in G$, on a $g(t^i d) = gt^i . gd = \chi^i(g) t^i d$; finalement $t^i d \in V\{i\}$ et $T^i.D[-i] \subset V\{i\}$.

6.3. - LE TORSEUR $\mathbf{X}_{V,L}$.

6.3.1. - On conserve les hypothèses et notations qui précèdent et on note $\mathbf{Isom}(V_L, D_L)$ la variété algébrique, définie sur L , des isomorphismes de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur D_L : pour toute L-algèbre R , $\mathbf{Isom}(V_L, D_L)(R)$ est donc l'ensemble des isomorphismes du R-module $R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $R \otimes_L D_L$.

Choisissons un élément non nul t de T ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, soit $\tau_{n,i} : (\overset{n}{\otimes} V)\{i\} \to (\overset{n}{\otimes} D)[-i]$ l'application définie par $v = t^i \tau_{n,i}(v)$ (cf. lemme 6.2.7).

Pour toute L-algèbre R, notons $\mathbf{X}_{V,L}(R)$ le sous-ensemble de $\mathbf{Isom}(V_L, D_L)(R)$ formé des φ qui vérifient

$(C_{\mathbf{X}_{V,L}})$ <u>il existe une</u> L-<u>algèbre</u> R' <u>contenant</u> R <u>et</u> $\lambda \in R'$ <u>tels que</u>, <u>pour tout</u> $n \geq 0$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $v \in (\overset{n}{\otimes} V)\{i\}$, <u>on a</u> $\varphi(v) = \lambda^i \tau_{n,i}(v)$

(où l'on a, bien sûr, identifié $(\overset{n}{\otimes} V)\{i\}$ (resp. $(\overset{n}{\otimes} D)[-i]$) à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\overset{n}{\otimes}_R (R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq R \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\overset{n}{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} V)$ (resp. de $\overset{n}{\otimes}_R (R \otimes_L D_L) \simeq R \otimes_L (\overset{n}{\otimes}_L D_L)$) et noté encore φ l'application de $\overset{n}{\otimes}_R (R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ dans $\overset{n}{\otimes}_R (R \otimes_L D_L)$ déduite de φ par fonctorialité).

On voit facilement que $\mathbf{X}_{V,L}$ est une sous-variété affine de $\mathbf{Isom}(V_L, D_L)$ définie sur L (le fait qu'elle soit définie sur L résulte immédiatement de ce que, si r est le pgcd des entiers i tels qu'il existe n vérifiant $(\overset{n}{\otimes} V)\{i\} \neq 0$, on peut remplacer la condition $(C_{\mathbf{X}_{V,L}})$ par la condition suivante :

$(C'_{\mathbf{X}_{V,L}})$ <u>il existe</u> $\mu \in R$ <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $n \geq 0$, <u>tout</u> $i \in \mathbb{Z}$, <u>tout</u> $v \in (\overset{n}{\otimes} V)\{i\}$, <u>on a</u> $\varphi(v) = \mu^{i/r} \tau_{n,i}(v)$).

Il est également immédiat que $\mathbf{X}_{V,L}$ ne dépend pas du choix de l'élément non nul t de T.

6.3.2. - Pour toute L-algèbre R, si $\varphi \in \mathbf{X}_{V,L}(R)$ et si $s \in \mathbb{H}_V(R) = (\mathbb{H}_V \otimes L)(R)$, alors $\varphi \cdot s \in \mathbf{X}_{V,L}(R)$. On définit ainsi une action à droite de $\mathbb{H}_V \otimes L$ sur $\mathbf{X}_{V,L}$. Muni de cette action, $\mathbf{X}_{V,L}$ est un $(\mathbb{H}_V \otimes L)$-torseur à droite défini sur L et $\mathbb{H}_{D,L}$ s'identifie au groupe algébrique déduit de $\mathbb{H}_V \otimes L$ par torsion au moyen de $\mathbf{X}_{V,L}$.

6.3.3. - PROPOSITION. - Il existe une extension finie non ramifiée de L sur laquelle les groupes $\mathbb{H}_V \otimes L$ et $\mathbb{H}_{D,L}$ deviennent isomorphes.

Démonstration. - Soit $E = \mathbb{Q}_p^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_o. C'est une extension algébrique non ramifiée de L et il suffit de démontrer que le torseur $\mathbb{X}_{V,L} \otimes E$ est trivial. Comme $\mathbb{H}_V$ est connexe (prop. 3.7.4) cela se voit soit en utilisant le théorème de Lang ([11], th. 12, p. 386) qui dit que E est C_1 et un résultat classique de cohomologie galoisienne (Serre, [18], n° 2.3.b, p. III.14), soit en utilisant le résultat bien connu qui dit que K_o est de dimension cohomologique ≤ 1 et le théorème de Steinberg ([24], th. 1.9).

6.3.4. - Remarques. -

1) On peut donner des exemples de modules galoisiens admissibles V pour lesquelles on peut choisir le corps L de manière que le torseur $\mathbb{X}_{V,L}$ ne soit pas trivial.

2) Il est facile de voir que les groupes $\mathbb{H}_{D,L}$ et $\mathbb{H}^S_{D,L}$ s'identifient canoniquement, de même que les torseurs $\mathbb{X}_{V,L}$ et $\mathbf{Isom}^{\otimes}(\underline{\omega}_V \otimes L, \underline{\omega}_{D,L})$.

6.4. - UN SOUS-TORE DE $\mathbb{H}_{D,L}$.

6.4.1. - On conserve les hypothèses et les notations qui précèdent. Soit s le ppcm des pentes de D et soit $\mathbb{G}_{m,L}$ le groupe (algébrique) multiplicatif sur L. Notons

$$\psi_{D,L} : \mathbb{G}_{m,L} \to \mathbb{GL}_{D_L}$$

le morphisme défini par :

(C_ψ) pour toute L-algèbre R, tout $\lambda \in R^*$, tout $\alpha \in s^{-1}\mathbb{Z}$, $\psi_{D,L}(\lambda)$ est l'homothétie de rapport $\lambda^{s\alpha}$ sur $R \otimes D_{\alpha,L}$.

L'image de $\psi_{D,L}$ est soit triviale, soit un tore de dimension 1, suivant que le F-iso-cristal sous-jacent à D est ou n'est pas isotypique de pente 0 .

6.4.2. - PROPOSITION. - <u>L'image de</u> $\psi_{D,L}$ <u>est contenue dans</u> $\mathbb{H}_{D,L}$.

Démonstration. - Soit R une L-algèbre, soit $\lambda \in R^*$ et soit $g = \psi_{D,L}(\lambda)$. Il est clair que, pour tout $n \geq 0$, l'automorphisme de $R \otimes (\overset{n}{\otimes} D_L)$ induit par g est l'homothétie de rapport $\lambda^{s\alpha}$ sur $R \otimes (\overset{n}{\otimes} D)_{\alpha,L}$, pour chaque $\alpha \in s^{-1}\mathbb{Z}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(\overset{n}{\otimes} D_L)[i] \subset (\overset{n}{\otimes} D)_{i,L}$ et g induit donc l'homothétie de rapport λ^{si} sur $R \otimes (\overset{n}{\otimes} D_L)[i]$ et vérifie la condition $(C_{D,L})$ du n° 6.2.3.

6.5. - PASSAGE A LA LIMITE : LE PRO-TORE DES PENTES.

Il est commode, en particulier pour mieux comprendre l'application $\psi_{D,L}$ que l'on vient de définir, de "passer à la limite" sur tous les modules admissibles.

6.5.1. - On a déjà introduit, au n° 3.8.3, le groupe pro-algébrique $\mathbb{H}^B$ défini sur $\mathbb{Q}_p$, enveloppe de l'image de Galois dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ des modules galoisiens admissibles. Rappelons que c'est le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre qui, à tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, associe le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent.

6.5.2. - On peut également passer à la limite dans la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ des modules filtrés admissibles et définir un autre groupe pro-algébrique qui deviendra isomorphe à $\mathbb{H}^B$ sur une extension convenable. Toutefois, comme les dénominateurs des pentes des objets de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ ne sont pas, en général, bornés, il n'est plus possible de travailler avec une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_o .

C'est pourquoi nous introduisons la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dans K_o que nous notons P_o . C'est une extension abélienne de $\mathbb{Q}_p$.

6.5.3. - Soit D un F-iso-cristal sur k. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est de la forme r/s, avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux, on a défini au n°4.1.1 le sous-$\mathbb{Q}_{p^s}$-espace vectoriel $D_\alpha = \{d \in D \mid F^s d = p^r d\}$ et vu que l'application canonique de $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} (K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} D)$ dans D est un isomorphisme. On pose $D_{\alpha,P_0} = P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} D_\alpha$ et $D_{P_0} = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} D_{\alpha,P_0}$; alors D_{P_0} s'identifie à une P_0-forme de D, i.e. $K_0 \otimes_{P_0} D_{P_0}$ s'identifie à D.

6.5.4. - La catégorie des F-iso-cristaux sur k est $\mathbb{Q}_p$-linéaire tannakienne et la correspondance $D \to D_{P_0}$ définit un foncteur fibre $\underline{\omega}^F_{P_0}$ sur cette catégorie à valeurs sur $\operatorname{Spec} P_0$. On note Ψ_{P_0} le groupe pro-algébrique des $\otimes$-automorphismes de ce foncteur fibre.

On vérifie facilement que, pour toute P_0-algèbre R, se donner un élément $g \in \Psi_{P_0}(R)$ revient à se donner une suite $(\lambda_s)_{s\in\mathbb{N}}$ d'éléments de R^* vérifiant $\lambda^r_{rs} = \lambda_s$, si $s, r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$: pour tout F-iso-cristal D, g induit alors l'homothétie de rapport λ^r_s sur $R \otimes D_{r/s,P_0}$.

En d'autres termes, si l'on note $\widetilde{\mathbb{G}}_{m,P_0}$ le groupe pro-algébrique $\mathbb{D}(\mathbb{Q})_{P_0}$, i.e. le groupe $\varprojlim_{s\in\mathbb{N}^*} \mathbb{G}_s$, où, pour tout s, $\mathbb{G}_s$ est le groupe multiplicatif sur P_0, le morphisme de $\mathbb{G}_{rs}$ dans $\mathbb{G}_s$ étant $\lambda \mapsto \lambda^r$, on a un isomorphisme canonique

$$\psi_{P_0} : \widetilde{\mathbb{G}}_{m,P_0} \longrightarrow \Psi_{P_0} .$$

Celui-ci peut se décrire ainsi : si D est un F-iso-cristal sur k et si s est le ppcm des pentes de D, le composé

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{m,P_0} \longrightarrow \Psi_{P_0} \longrightarrow \mathbb{GL}_{D_{P_0}}$$

se factorise à travers $\mathbb{G}_s$ et le morphisme induit de $\mathbb{G}_s = \mathbb{G}_{m,P_0}$ dans $\mathbb{GL}_{D_{P_0}}$ se déduit par extension des scalaires du morphisme $\psi_{D,L}$ défini au n° 6.4.1.

6.5.5. - La correspondance qui, à tout module filtré admissible D associe le P_o-espace vectoriel D_{P_o}, définit un foncteur fibre $\underline{\omega}_{P_o}$ sur la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ à valeurs sur $\operatorname{Spec} P_o$. On note $\mathbb{H}^B_{Dieud}$ le groupe pro-algébrique (défini sur P_o) des $\otimes$-automorphismes de ce foncteur fibre.

Pour chaque module filtré admissible D, notons $s(D)$ le ppcm des pentes de D et L_D l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré $s(D)$ contenue dans K_o (donc aussi dans P_o). Il est clair que $\mathbb{H}^B_{Dieud}$ s'identifie à la limite projective, en un sens évident, des groupes algébriques $\mathbb{H}_{D,L_D} \otimes_{L_D} P_o$, pour D parcourant les modules filtrés admissibles.

Il résulte de la proposition 6.2.5 que les groupes $\mathbb{H}^B \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$ et $\mathbb{H}^B_{Dieud} \otimes_{P_o} B$ s'identifient.

En outre, comme le foncteur $\underline{\omega}_{P_o}$ s'obtient en composant le foncteur qui à D associe le F-iso-cristal sous-jacent avec le foncteur $\underline{\omega}^F_{P_o}$, Ψ_{P_o} est un sous-groupe de $\mathbb{H}^B_{Dieud}$.

§7 - modules potentiellement admissibles

Dans ce paragraphe, on note I le groupe d'inertie de l'extension $\bar{K}/K$. On pose $P_o = \hat{K}_o^{nr}$, corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{K}$ et $P = C^I$. Le corps P est aussi l'adhérence de $\bar{K}^I$ dans C et P/P_o est une extension finie de degré e. On note $\bar{P}$ la fermeture algébrique de P dans C ; c'est un corps algébriquement clos, dense dans C, stable par G, et $\operatorname{Gal}(\bar{P}/P)$ s'identifie à I.

Dans tout ce paragraphe, les lettres K', K'' désignent des corps locaux contenant K et contenus dans C.

Si K' est un tel corps et si k' est son corps résiduel, on note

K'_o le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k' et $\bar{K}'$ la fermeture algébrique de K' dans C . On note $G_{K'}$ (resp. $I_{K'}$) le groupe de Galois (resp. d'inertie) de l'extension $\bar{K}'/K'$. Le groupe $G_{K'}$ s'identifie à un sous-groupe fermé de G et le groupe $I_{K'} = G \cap I_{K'}$ est ouvert dans I . L'application $K' \mapsto G_{K'}$ est une bijection de l'ensemble des corps locaux K' contenant K et contenu dans C sur celui des sous-groupes fermés G' de G tels que $G' \cap I$ est ouvert dans I (la bijection réciproque associe à G' le corps $C^{G'}$).

Si $K' \subset K''$, on dira que l'extension K''/K' est <u>quasi-galoisienne</u> si $G_{K''}$ est invariant dans $G_{K'}$; il revient au même de dire que la fermeture algébrique de K' dans K'' est galoisienne sur K' et, par abus d'écriture, nous poserons alors $\mathrm{Gal}(K''/K') = G_{K'}/G_{K''}$.

Enfin, nous appelons module galoisien (resp. module filtré, module galoisien filtré, anneau de Barsotti-Tate) <u>au-dessus de</u> K' , ce que l'on obtient en remplaçant K par K' dans la définition des modules galoisiens (resp. modules filtrés,...). Nous notons $\underline{\mathrm{Rep}}(G_{K'})$ la catégorie des modules galoisiens au-dessus de K' qui sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, avec action de $G_{K'}$ continue et $\underline{MF}_{K'}$ la catégorie des modules filtrés de dimension finie au-dessus de K' .

7.1. - <u>MODULES POTENTIELLEMENT FILTRES</u>.

7.1.1. - Nous appelons <u>module</u> potentiellement <u>filtré</u> (<u>au-dessus de</u> K s'il y a risque de confusion sur la base) la donnée d'un P_o-espace vectoriel de dimension finie E muni

i) d'une application $F : E \to E$, bijective, σ-semi-linéaire ;

ii) d'une filtration $(E^i_{\bar{P}})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $E_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_o} E$ par des sous-$\bar{P}$-espaces vectoriels, décroissante, exhaustive et séparée ;

iii) d'une action de G semi-linéaire (i.e. additive et telle que $g(\lambda d) = g\lambda \cdot gd$ si $g \in G$, $\lambda \in P_o$, $d \in E$) et continue, telle que l'image de I (dans le groupe des P_o-automorphismes de E) soit un groupe fini, qui commute à l'action de F (i.e. on a $F(gd) = g(Fd)$ si $g \in G$, $d \in E$) et qui est compatible avec la filtration (i.e. si l'on prolonge l'action de G à $E_{\overline{P}}$ par semi-linéarité, on a $g(E^i_{\overline{P}}) = E^i_{\overline{P}}$, si $g \in G$, $i \in \mathbb{Z}$).

7.1.2. - Les modules potentiellement filtrés forment, de manière évidente, une catégorie que nous notons $\underline{MPF}_K$. La catégorie $\underline{MPF}_K$ est additive, admet des noyaux et conoyaux, mais n'est pas abélienne. Toutes les considérations développées au n° 1.2 sur les modules filtrés se transposent, sans difficulté, aux modules potentiellement filtrés. En particulier, on a une notion de produit tensoriel, de hom interne, de contragrédient et $\underline{MPF}_K$ est une $\otimes$-catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire rigide.

7.1.3. - Soit E un module potentiellement filtré. Nous disons que E est défini sur K' si $I_{K'}$ opère trivialement sur E.

Si E est défini sur K' et si $K' \subset K''$, E est aussi défini sur K''.

Pour tout module potentiellement filtré E, il existe une extension <u>finie</u> galoisienne K' de K sur laquelle E est défini.

Pour les modules potentiellement filtrés, la propriété d'être défini sur K' est stable par sous-objet, quotient, produit tensoriel, hom interne, contragrédient.

7.1.4. - Supposons l'extension K'/K quasi-galoisienne et posons $J = \mathrm{Gal}(K'/K)$. Nous appelons <u>module</u> K'-<u>filtré au-dessus de</u> K la donnée d'un module filtré D de dimension finie au-dessus de K' muni d'une action semi-linéaire continue de J (i.e. l'action de J sur le K'_o-espace vectoriel sous-jacent est Galois-semi-linéaire continue, elle commute à l'action de F et, lorsqu'on l'étend à $D_{K'} = K' \otimes_{K'_o} D$ par semi-linéarité, elle respecte la filtration).

Les modules K'-filtrés au-dessus de K forment, de manière évidente, une catégorie additive avec noyaux et conoyaux et c'est, de la même manière que $\underline{\mathrm{MF}}_{K'}$, une $\otimes$-catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire rigide.

7.1.5. - Supposons toujours l'extension K'/K quasi-galoisienne. A tout module K'-filtré D au-dessus de K , on associe un module potentiellement filtré $\underline{E}_{K'/K}(D)$ de la manière suivante :

- le P_o-espace vectoriel sous-jacent à $\underline{E}_{K'/K}(D)$ est $E = P_o \otimes_{K'_o} D$;
- l'action de F est définie par $F(\lambda \otimes d) = \sigma\lambda \otimes Fd$ si $\lambda \in P_o$, $d \in D$;
- la filtration de $E_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_o} E = \bar{P} \otimes_{K'_o} D = \bar{P} \otimes_{K'} D_{K'}$ est définie par $E^i_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{K'} D^i_{K'}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$;
- l'action de G sur E est définie par $g(\lambda \otimes d) = g\lambda \otimes \bar{g}d$, si $g \in G$, $\lambda \in P_o$, $d \in D$ (et où l'on a noté $\bar{g}$ l'image de g dans $\mathrm{Gal}(K'/K)$.

Il est clair que le module potentiellement filtré $\underline{E}_{K'/K}(D)$ est défini sur K' et que la correspondance $D \mapsto \underline{E}_{K'/K}(D)$ est fonctorielle.

7.1.6. - PROPOSITION. - <u>Supposons l'extension</u> K'/K <u>quasi-galoisienne. Le foncteur</u> $\underline{E}_{K'/K}$ <u>induit une $\otimes$-équivalence entre la $\otimes$-catégorie des modules</u> K'-<u>filtrés au-dessus de</u> K <u>et celle des modules potentiellement filtrés au-dessus de</u> K <u>définis sur</u> K' .

7.1.7. - <u>Démonstration</u>. - Posons $G' = G_{K'}$ et $I' = I_{K'}$. A tout module potentiellement filtré E défini sur K' , on associe un module K'-filtré $\underline{\mathrm{Desc}}_{K'}(E)$ au-dessus de K de la manière suivante :

- le K'_o-espace vectoriel D sous-jacent à $\underline{\mathrm{Desc}}_{K'}(E)$ est $E^{G'}$ que l'on munit de l'action de F et de l'action de $\mathrm{Gal}(K'/K) = G/G'$ évidente ;
- la filtration de $D_{K'} = K' \otimes_{K'_o} E^{G'} = (K' \otimes_{K'_o} E)^{G'} = (K'P_o \otimes_{P_o} E)^{G'}$ $= (\bar{P}^{I'} \otimes_{P_o} E)^{G'} = (\bar{P} \otimes_{P_o} E)^{G'} = (E_{\bar{P}})^{G'}$ est définie par $D^i_{K'} = (E^i_{\bar{P}})^{G'}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Le groupe d'inertie I' opère trivialement sur E et on a donc $E^{G'} = E^{G'/I'}$. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie sur P_o sur lequel $G'/I' = \mathrm{Gal}(P'/K') = \mathrm{Gal}(K_o'^{nr}/K_o')$ opère semi-linéairement et continûment, on sait ([21], th.1, p.III-31) que l'application canonique de $P_o \otimes_{K'_o} E^{G'}$ dans E est un isomorphisme.

Le même raisonnement montre que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'application canonique de $K'P_o \otimes_{K'} (E^i_{\bar{P}})^{G'}$ dans $(E^i_{\bar{P}})^{I'}$ est un isomorphisme ; comme $E_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_o} E$, on a $(E_{\bar{P}})^{I'} = \bar{P}^{I'} \otimes_{P_o} E = K'P_o \otimes_{P_o} E$ et $E_{\bar{P}}$ s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'P_o} (E_{\bar{P}})^{I'}$; comme $E^i_{\bar{P}}$ est stable par $I' = \mathrm{Gal}(\bar{P}/K'P_o)$, on en déduit que $E^i_{\bar{P}}$ est rationnel sur $K'P$, i.e. s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'P} (E^i_{\bar{P}})^{I'}$; finalement $E^i_{\bar{P}}$ s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'} (E^i_{\bar{P}})^{G'}$.

Il résulte de ces considérations que, pour tout module potentiellement filtré E défini sur K', $\underline{E}_{K'/K}(\underline{\mathrm{Desc}}_{K'}(E))$ s'identifie à E et la proposition s'en déduit facilement.

7.1.8. - Remarques. -

i) Comme, pour tout module potentiellement filtré, on peut trouver une extension finie galoisienne sur laquelle il est défini, la catégorie $\underline{MPF}_K$ s'identifie à la limite inductive (en un sens évident) des catégories des modules K'-filtrés au-dessus de K, pour K' parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\bar{K}$.

ii) Soit E un module potentiellement filtré défini sur K'. Si l'extension K'/K n'est pas quasi-galoisienne, on peut encore associer à E un module filtré au-dessus de K', $\underline{\mathrm{Desc}}_{K'}(E)$, qui est défini comme dans le cas où K'/K est quasi-galoisienne, à ceci près que, comme $G_{K'}$ n'est pas invariant dans G, on ne peut plus parler de l'action de $G/G_{K'}$.

7.2. - LES $(\bar{K}/K)$-ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE.

7.2.1. - Appelons $(\bar{K}/K)$-anneau galoisien filtré la donnée d'une P_o-

algèbre associative, commutative et unitaire B munie

- d'une application bijective $F : B \to B$, σ-semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau ;
- d'une filtration de $B_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_0} B$ par des sous-$\bar{P}$-espaces vectoriels $(B^i_{\bar{P}})_{i \in \mathbb{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée, compatible avec la structure d'anneau (i.e. telle que $B^i_{\bar{P}} B^j_{\bar{P}} \subset B^{i+j}_{\bar{P}}$, si $i,j \in \mathbb{Z}$);
- d'une action de G, Galois-semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau, qui commute à l'action de F et qui, lorsqu'on l'étend par Galois-semi-linéarité à $B_{\bar{P}}$ respecte la filtration. On suppose en outre que l'action de G est continue sur tout sous-P_0-espace vectoriel de dimension finie stable par G.

7.2.2. - <u>Exemple</u>. - L'anneau $\hat{K}_0^{nr}[T,T^{-1}] = P_0[T,T^{-1}]$ introduit au n° 2.2.2 peut être muni d'une structure de $(\bar{K}/K)$-anneau galoisien filtré :

- pour tout $\sum \lambda_i t^i \in P_0[T,T^{-1}]$, on pose
$$\begin{cases} F(\sum \lambda_i t^i) = \sum p^i \cdot \sigma\lambda_i \cdot t^i, \\ g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g\lambda_i \cdot t^i, \text{ si } g \in G ; \end{cases}$$
- la filtration de $B_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_0} P_0[T,T^{-1}] = \bar{P}[T,T^{-1}]$ étant définie par $(\bar{P}[T,T^{-1}])^i = T^i \bar{P}[T] = \{ \sum_{j \geq i} \lambda_j t^j \}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

7.2.3. - Nous appelons $(\bar{K}/K)$-<u>anneau de Barsotti-Tate</u> la donnée d'un $(\bar{K}/K)$-anneau galoisien filtré B, contenant $P[T,T^{-1}]$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(<u>Gal</u>) on a $B^G = K_0$,

(<u>Fil</u>) si $B_0 = \{ b \in B \mid Fb = b \}$, on a $B_0 \cap B^0_{\bar{P}} = \mathbb{Q}_p$,

(<u>Tate</u>) il existe un monomorphisme $\theta : gr(B_{\bar{P}}) \to C[T,T^{-1}]$ qui, lorsqu'on le restreint à $\bar{P}[T,T^{-1}] = \bar{P} \otimes_{P_0} P_0[T,T^{-1}]$, est l'isomorphisme évident de $gr(\bar{P}[T,T^{-1}])$ sur $\bar{P}[T,T^{-1}]$ considéré comme une sous-algèbre graduée de $C[T,T^{-1}]$.

7.2.4. - Si B est un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate, pour chaque corps local K' contenant K et contenu dans C, B peut être muni d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K' (que nous apellerons la <u>structure canonique</u>) : l'anneau B est déjà une K_o-algèbre munie d'une action de F, l'action de $G' = \mathrm{Gal}(\bar{K}'/K')$ est la restriction de l'action de G et la filtration de $B_{K'} = K' \otimes_{K'_o} B = K'P_o \otimes_{P_o} B \subset \bar{P} \otimes_{P_o} B = B_{\bar{P}}$ est la filtration induite par celle de $B_{\bar{P}}$, i.e. on a $B^i_{K'} = B_{K'} \cap B^i_{\bar{P}}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si $K' \subset K''$, on voit que $B^i_{K'} = B_{K'} \cap B^i_{K''}$. On a $B_{K''} = K''P \otimes_{K'P} B_{K'}$ et $K''P \otimes_{K'P} B^i_{K'} \subset B^i_{K''}$, pour tout i ; on prendra garde que cette inclusion est, en général, stricte.

7.2.5. - Etant donné une K_o-algèbre associative, commutative et unitaire B, se donner sur B une structure de $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate revient à se donner, pour chaque K', une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K' sur B, avec des relations de compatibilité évidentes.

7.2.6. - Nous dirons qu'un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate est <u>adapté aux groupes</u> p-<u>divisibles</u> si, pour chaque corps local K' contenant K et contenu dans C, B, muni de sa structure canonique d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K', est adapté aux groupes p-divisibles définis sur l'anneau des entiers A' de K'.

Nous démontrerons ailleurs qu'un tel anneau existe effectivement.

7.3. - <u>MODULES GALOISIENS POTENTIELLEMENT ADMISSIBLES</u>.

Dans ce n° et dans le suivant, B est un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate fixé.

7.3.1. - Pour tout module galoisien V, de dimension finie, au-dessus de K, notons $\underline{E}_B(V)$ la limite inductive, pour I' parcourant les sous-groupes ouverts de I, de $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$.

Soit d la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout sous-groupe ouvert I' de I, V, muni de l'action de I' définie par restriction, est un module galoisien de dimension d au-dessus de $C^{I'}$; comme B est muni d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de $C^{I'}$, on a $\dim_{P_0}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'} \leq d$ (prop. 3.2.1). On a donc $\dim_{P_0} \underline{E}_B(V) \leq d$ et il existe un sous-groupe ouvert I' de I tel que $\underline{E}_B(V) = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$.

On en déduit que $\underline{E}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$ dans $\underline{\text{MPF}}_K$.

7.3.2. - PROPOSITION. - <u>Soit</u> V <u>un module galoisien de dimension finie sur</u> $\mathbb{Q}_p$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>il existe un sous-groupe ouvert</u> I' <u>de</u> I <u>tel que</u> V, <u>en tant que module galoisien au-dessus de</u> $C^{I'}$, <u>est</u> B-<u>admissible</u> ;

ii) <u>il existe une extension finie</u> K' <u>de</u> K <u>contenue dans</u> C <u>telle que</u> V, <u>en tant que module galoisien au-dessus de</u> K', <u>est</u> B-<u>admissible</u> ;

iii) <u>on a</u> $\dim_{P_0} \underline{E}_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

<u>Démonstration</u>. - L'équivalence de (i) et (iii) est claire. Si K' est une extension finie de K et si $G' = G_{K'}$, $I' = I_{K'}$, l'application canonique de $P_0 \otimes_{K'_0} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$ dans $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$ est un isomorphisme et l'équivalence de (i) et (ii) en résulte.

7.3.3. - Nous dirons qu'un module galoisien, de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, au-dessus de K est <u>potentiellement</u> B-<u>admissible</u> (ou <u>potentiellement admissible</u> s'il n'y a pas de risque de confusion sur B) s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 7.3.2.

Nous notons $\underline{\text{Rep}}_B^{\text{pot}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Rep}}(G)$ dont les objets sont les modules galoisiens potentiellement admissibles.

Si K' est un corps local contenant K et contenu dans C , nous disons qu'un module galoisien potentiellement admissible <u>devient admissible sur</u> K' si V , en tant que module galoisien au-dessus de K' , est B-admissible et nous notons $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{K'\text{-pot}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathrm{pot}}(G)$ dont les objets sont ceux qui deviennent admissibles sur K' .

Il résulte de la définition que $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathrm{pot}}(G)$ s'identifie à la limite inductive des catégories $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{K'\text{-pot}}(G)$, pour K' parcourant les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$.

Il résulte des propositions 3.4.1 et 3.4.3 que les catégories $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{K'\text{-pot}}(G)$ et $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathrm{pot}}(G)$ sont stables par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, hom interne, contragrédient.

7.3.4. - Soit E un module potentiellement filtré, soit I' le noyau de la représentation associée de I dans le P_o-espace vectoriel sous-jacent à E et soit $K' = C^{I'}$. Nous dirons que E est <u>faiblement admissible</u> (resp. B-<u>admissible</u>) si le module filtré au-dessus de K' sous-jacent à $\underline{\mathrm{Desc}}_{K'}(E)$ est faiblement admissible (resp. B-admissible).

Si E est faiblement admissible et si $K' \subset K'' \subset C$, avec K''/K quasi-galoisienne, le module filtré au-dessus de K" sous-jacent à $\underline{\mathrm{Desc}}_{K''}(E)$ est aussi faiblement admissible. Il résulte alors facilement de la proposition 4.3.1 que la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{MPF}}_K^f$ de $\underline{\mathrm{MPF}}_K$, dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles, est abélienne.

Nous notons $\underline{\mathrm{MPF}}_{K,B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MPF}}_K$ dont les objets sont ceux qui sont B-admissibles. D'après la proposition 4.4.5, c'est, en fait, une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{MPF}}_K^f$.

7.3.5. - Il résulte maintenant immédiatement des résultats du §3 et de la proposition 4.5.1 le théorème suivant :

THEOREME. - La catégorie $\underline{MPF}_{K,B}$ est stable par sous-objet et quotient (pris dans la catégorie $\underline{MPF}_K^f$), somme directe, produit tensoriel, contragrédient. Par restriction, le foncteur $\underline{E}_B$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\underline{Rep}_B^{pot}(G)$ et $\underline{MPF}_{K,B}$.

7.3.6. - Remarques. -

i) Soit E un module potentiellement filtré B-admissible et soit V le $\mathbb{Q}_p[G]$-module

$$V = (B\otimes_{P_o} E)_o \cap (B\otimes_{P_o} E)_{\overline{P}}^o \quad ,$$

avec $(B\otimes_{P_o} E)_o = \{d \in B\otimes_{P_o} E \mid Fd = d\}$ et $(B\otimes_{P_o} E)_{\overline{P}}^o = \sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{\overline{P}}^{-i} \otimes_{\overline{P}} E_{\overline{P}}^i$. La correspondance $E \mapsto V$ définit un quasi-inverse du foncteur $\underline{E}_B$.

ii) Soit K' un corps local contenant K et contenu dans C. Si V est un module galoisien potentiellement admissible, V devient admissible sur K' si et seulement si $\underline{E}_B(V)$ est défini sur K'. Lorsque K'/K est quasi-galoisienne, on en déduit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\underline{Rep}_B^{K'\text{-pot}}(G)$ et la catégorie $\underline{MPF}_{K,B}^{K'}$ des modules K'-filtrés au-dessus de K dont le module filtré au-dessus de K' sous-jacent est B-admissible. Elle est induite par le foncteur $V \mapsto \underline{Desc}_{K'}(\underline{E}_B(V))$. Il est clair que $\underline{D}_B^{K'}(V) = (B\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$ (où $G' = G_{K'}$) est, de manière naturelle, un module K'-filtré au-dessus de K. Le foncteur $V \mapsto \underline{Desc}_{K'}(\underline{E}_B(V))$ s'identifie à $\underline{D}_B^{K'}$.

iii) Lorsque k est algébriquement clos, on a $G = I$ et $P_o = K_o$. Si V est un module galoisien potentiellement admissible et si I_V désigne le noyau de la représentation P_o-linéaire de G dans $\underline{E}_B(V)$, V devient admissible sur K' si et seulement si $G_{K'}$ est contenu dans I_V et, s'il en est ainsi, $\underline{D}_B^{K'}(V) = \underline{Desc}_{K'}(\underline{E}_B(V))$ s'identifie à $\underline{E}_B(V)$.

7.4. - UNE MESURE DE LA NON-ADMISSIBILITÉ.

Dans tout ce n°, V est un module galoisien potentiellement admissible de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$ et on pose $E = \underline{E}_B(V)$.

7.4.1. - On note I_V le noyau de l'action de I sur E. Alors E est, en particulier, un espace vectoriel de dimension h sur P_0 sur lequel le groupe fini I/I_V opère linéairement, et on note $\varphi_V : I/I_V \to P_0$ le caractère de cette représentation.

7.4.2. - Remarque. - Notons encore $\varphi_V : I \to P_0$ l'application définie par $\varphi_V(g) = \varphi_V(\bar{g})$, où $\bar{g}$ désigne l'image de g dans I/I_V. Il est immédiat

i) que $\varphi_{V*} = \varphi_V^*$ (i.e. on a $\varphi_{V*}(g) = \varphi_V(g^{-1})$, si $g \in I$) ;

ii) que, si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens potentiellement admissibles, on a $\varphi_{V_1 \oplus V_2} = \varphi_{V_1} + \varphi_{V_2}$ et $\varphi_{V_1 \otimes V_2} = \varphi_{V_1} \cdot \varphi_{V_2}$.

7.4.3. - Soit K' une extension finie galoisienne de K contenue dans C et soit $G' = G_{K'}$. Notons J (resp. J_0) le groupe de Galois (resp. d'inertie) de l'extension K'/K. On a $J = G/G'$ et $J_0 = IG'/G' \simeq I/G' \cap I$.

Supposons que V devienne admissible sur K' ; cela équivaut à dire que $G' \cap I \subset I_V$. Par conséquent, I/I_V s'identifie à un quotient de J_0 et on peut, de manière évidente, considérer φ_V comme un caractère de J_0 à valeurs dans P_0.

D'autre part, $\underline{D}_B^{K'}(V) = E^{G'}$ est, en particulier, un K'_0-espace vectoriel de dimension h sur lequel $G/G' = J$ opère semi-linéairement. On peut donc aussi considérer $\underline{D}_B^{K'}(V)$ comme un vectoriel sur K_0 de dimension $h \cdot (J : J_0)$ sur lequel J opère linéairement et nous notons $\psi_V^{K'} : J \to K_0$ le caractère de cette représentation.

7.4.4. - PROPOSITION. - Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, on a $\psi_V^{K'} = \mathrm{Ind}_{J_o}^{J} \varphi_V$, caractère de la représentation de J induite par une représentation de J_o de caractère φ_V .

Démonstration. - Posons $D = \underline{D}_B^{K'}(V)$. Comme E s'identifie à $P_o \otimes_{K'_o} D$, φ_V est aussi le caractère de la représentation K'_o-linéaire de J_o définie par D . La proposition résulte alors du lemme suivant :

7.4.5. - LEMME. - Soit L' une extension finie galoisienne d'un corps commutatif L de caractéristique 0 et soit $H = \mathrm{Gal}(L'/L)$. Soit J un groupe fini extension de H par un sous-groupe invariant J_o . Soit D un espace vectoriel de dimension finie sur L' sur lequel J opère semi-linéairement (i.e. on a $g(\lambda d) = \bar{g}\lambda \cdot gd$, si g est un élément de J d'image $\bar{g}$ dans H, si $\lambda \in L'$ et si $d \in D$). Soit φ le caractère de la représentation L'-linéaire de J_o définie par D et soit ψ celui de la représentation L-linéaire de J définie par D . Alors $\psi = \mathrm{Ind}_{J_o}^{J} \varphi$.

7.4.6. - Démonstration. - Soit $d_1, d_2, \dots, d_h$ une base de D sur L' . Soit $g \in J_o$ et posons $g(d_j) = \sum \lambda_{ij} d_i$, avec $\lambda_{ij} \in L'$. Soit maintenant $s \in J$; les $s \cdot d_j$, pour $j = 1, 2, \dots, h$, forment une base de D sur L' et on a

$$(sgs^{-1})(sd_j) = s(gd_j) = \sum \bar{s}\lambda_{ij} \cdot sd_i \;;$$

on a donc $\varphi(sgs^{-1}) = \sum \bar{s}\lambda_{ii}$, alors que l'on avait $\varphi(g) = \sum \lambda_{ii}$. D'où

$$(1) \quad \varphi(sgs^{-1}) = \bar{s}(\varphi(g)) .$$

Munissons alors l'anneau $L' \otimes_L L'$ d'une structure de L'-algèbre en posant $\lambda(\mu \otimes \nu) = \lambda\mu \otimes \nu$, si $\lambda, \mu, \nu \in L'$. En tant que L'-algèbre, $L' \otimes_L L'$ est canoniquement isomorphe à $\prod_{\tau \in H} L'_\tau$, avec $L'_\tau = L'$, la projection $\pi_\tau : L' \otimes_L L' \to L'_\tau$ étant définie par $\pi_\tau(\lambda \otimes \mu) = \lambda \cdot \tau\mu$. Pour tout $\tau \in H$, nous notons e_τ l'idempotent correspondant à π_τ (i.e. l'unique idempotent primitif de $L' \otimes_L L'$ tel que $\pi_\tau(e_\tau) = 1$).

Faisons opérer J sur $L'\otimes_L L'$ en posant $g(\lambda\otimes\mu) = \lambda\otimes\bar{g}\mu$, si $g\in J$ et $\lambda,\mu\in L'$. Pour tout $\tau\in H$ et tout $g\in J$, ge_τ est un idempotent ; si $e_\tau = \sum\lambda_i\otimes\mu_i$, on a $ge_\tau = \sum\lambda_i\otimes\bar{g}\mu_i$ et, comme $\sum\lambda_i\tau(\mu_i) = 1$, on a $\sum\lambda_i\cdot(\tau\bar{g}^{-1}\bar{g})(\mu_i) = 1$. On en déduit que $ge_\tau = e_{\tau\bar{g}^{-1}}$.

Soit $D' = L'\otimes_L D$ sur lequel on prolonge l'action de J par linéarité. Le caractère de la représentation L'-linéaire de J ainsi définie est encore ψ. Comme D est un L'-espace vectoriel sur lequel J opère semi-linéairement, D' est un $(L'\otimes_L L')$-module libre sur lequel J opère semi-linéairement. Si, pour tout $\tau\in H$, on pose $D'_\tau = e_\tau D'$, c'est un sous-L'-espace vectoriel de D' et $D' = \bigoplus_{\tau\in H} D'_\tau$.

Soit $g\in J$ et soit $d\in D'_\tau$. On a $gd = g(e_\tau d) = e_{\tau\bar{g}^{-1}}\cdot gd$. En particulier, si $g\notin J_o$, g permute les D'_τ et on a donc $\varphi(g) = 0$.

En revanche, chaque D'_τ est un sous-$L'[J_o]$-module de D'. Nous notons η_τ le caractère de la représentation L'-linéaire de J_o définie par D'_τ. Pour chaque $\tau\in H$, soit $\theta_\tau : D\to D'_\tau$ l'application qui à d associe $e_\tau(1\otimes d)$. Il est immédiat que θ_τ est bijective, additive, commute à l'action de J_o et vérifie $\theta_\tau(\lambda d) = \tau\lambda\cdot\theta_\tau(d)$, si $\lambda\in L'$, $d\in D$. On en déduit que $\eta_\tau(g) = \tau(\varphi(g))$. Si s est un relèvement de τ dans J, on a donc, d'après (1), $\eta_\tau(g) = \varphi(sgs^{-1})$.

Finalement, si S désigne un système de représentants de H dans J, on a

$$\psi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g\notin J_o, \\ \sum_{s\in S}\varphi(sgs^{-1}) & \text{si } g\in J_o, \end{cases}$$

et on a donc bien $\psi = \mathrm{Ind}_{J_o}^{J}\varphi$.

7.4.7. - Si η_1 et η_2 sont les caractères de deux représentations linéaires d'un groupe fini H (sur un corps de caractéristique 0), on note $\langle\eta_1,\eta_2\rangle$ leur produit scalaire ; on a donc

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} \eta_1(g^{-1}) \eta_2(g)$$

et c'est un entier ≥ 0 .

Soit $P_V = C^{I_V}$ et soit $sw_V : I/I_V \to \mathbb{Z}$ (resp. $a_V : I/I_V \to \mathbb{Z}$) le caractère de la représentation de Swan (resp. d'Artin) de l'extension P_V/P (cf. par exemple, [14] , p. 2 et 3 ou [5] , chap.II, n° 6.1). On sait que $a_V = sw_V + u_V$, où

$$u_V(g) = \begin{cases} -1 & \text{si } g \neq 1 , \\ (I/I_V)-1 & \text{si } g = 1 . \end{cases}$$

est le caractère du quotient de la représentation régulière de I/I_V par la représentation unité. On pose

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \langle sw_V, \varphi_V \rangle , \\ \delta'_p(V) = \langle a_V, \varphi_V \rangle , \\ \varepsilon_p(V) = \langle u_V, \varphi_V \rangle ; \end{cases}$$

ce sont des entiers ≥ 0 et on a $\delta'_p(V) = \delta_p(V) + \varepsilon_p(V)$.

7.4.8. - PROPOSITION. -

i) <u>On a</u> $\delta'_p(V) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_p(V) = 0 \Leftrightarrow V$ <u>est admissible</u>.

ii) <u>On a</u> $\delta_p(V) = 0$ <u>si et seulement s'il existe une extension finie modérément ramifiée de</u> K <u>sur laquelle</u> V <u>devient admissible</u>.

iii) <u>Soit</u> $\tilde{V}$ <u>le semi-simplifié du module galoisien</u> V ; <u>on a</u> $\delta_p(\tilde{V}) = \delta_p(V)$, $\delta'_p(\tilde{V}) = \delta'_p(V)$ <u>et</u> $\varepsilon_p(\tilde{V}) = \varepsilon_p(V)$; <u>l'entier</u> $\varepsilon_p(V)$ <u>est inférieur ou égal à la codimension</u>, <u>dans</u> $\tilde{V}$, <u>du plus grand sous-module galoisien admissible de</u> $\tilde{V}$.

7.4.9. - <u>Démonstration</u>. - Si V est admissible, on a $\varepsilon_p(V) = \delta'_p(V) = 0$. Si $\delta'_p(V) = 0$, on a, a fortiori, $\varepsilon_p(V) = 0$. Si $\varepsilon_p(V) = 0$, cela signifie que $E^I = E$, donc que $I_V = I$ et V est admissible, d'où (i) .

L'assertion (ii) résulte trivialement de ce qu'un caractère absolument irréductible de I/I_V intervient dans sw_V avec une multiplicité $\neq 0$ si et seulement si le noyau de la représentation qu'il définit ne contient pas le p-groupe de Sylow de I/I_V.

Comme les représentations $\underline{P}_o$-linéaires, de dimension finie, d'un groupe fini sont semi-simples, $\underline{E}_B(V)$ et $\underline{E}_B(\tilde{V})$ sont isomorphes en tant que $P_o[I]$-modules à gauche et les égalités de l'assertion (iii) en résultent. Enfin, si V est semi-simple, si V' est le plus grand sous-module galoisien admissible de V et si $E' = \underline{E}_B(V')$, on a $E' \subset E^I$. Comme $\dim_{P_o} E = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et $\dim_{P_o} E' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$, on a

$$\varepsilon_p(V) = \dim_{P_o} E - \dim_{P_o} E^I \leq \dim_{P_o} E - \dim_{P_o} E' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_{\mathbb{Q}_p} V' ,$$

d'où la proposition.

7.4.10. - PROPOSITION. - Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle V devient admissible et soit f le degré de l'extension résiduelle. Soit $sw_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$) le caractère de la représentation de Swan (resp. d'Artin) de l'extension K'/K. On a

$$\delta_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \langle sw_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle \quad \underline{\text{et}} \quad \delta'_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \langle a_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle .$$

7.4.11. - Démonstration. - Reprenons les notations du n°7.4.3 ; comme d'après la proposition 7.4.4, $\psi_V^{K'} = \mathrm{Ind}_{J_o}^{J} \varphi_V$, on a, d'après la loi de réciprocité de Frobenius,

$$\langle sw_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = \langle sw_{K'/K}, \mathrm{Ind}_{J_o}^{J} \varphi_V \rangle = \langle \mathrm{Res}_{J_o} sw_{K'/K}, \varphi_V \rangle .$$

Si l'on identifie J_o à $I/G' \cap I$ et si l'on pose $P' = C^{G' \cap I}$, on voit facilement que $\mathrm{Res}_{J_o} sw_{K'/K} = f \cdot sw_{P'/P}$. On a donc $\langle sw_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = f \cdot \langle sw_{P'/P}, \varphi_V \rangle$. Or φ_V est le caractère d'une représentation de $\mathrm{Gal}(P'/P)$ dont le noyau est $I_V/G' \cap I$; si X est une représentation linéaire de $\mathrm{Gal}(P'/P)$ dont le caractère est $sw_{P'/P}$, on sait que le caractère de $X^{I_V/G' \cap I}$ est $sw_{P_V/P} = sw_V$. On a donc bien $\langle sw_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = f \cdot \langle sw_V, \varphi_V \rangle = f \cdot \delta_p(V)$. La deuxième formule se démontre de la même manière.

7.4.13. - Remarques. -

i) Soit X (resp. X') un espace vectoriel de dimension finie sur P_0 sur lequel I/I_V opère linéairement, le caractère de la représentation ainsi définie étant sw_V (resp. a_V). On a $\delta_p(V) = \dim_{P_0}(\mathrm{Hom}_{P_0}(X,E))^I$ et $\delta'_p(V) = \dim_{P_0}(\mathrm{Hom}_{P_0}(X',E))^I$.

ii) Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle V devient admissible et soit Y (resp. Y') un espace vectoriel de dimension finie sur K_0 sur lequel $\mathrm{Gal}(K'/K)$ opère linéairement, le caractère de la représentation ainsi définie étant $sw_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$) (un tel espace existe d'après [5], n°7.5, cor. au th.2). Si f est le degré de l'extension résiduelle, on a

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \frac{1}{f}\cdot \dim_{K_0}(\mathrm{Hom}_{K_0}(Y,\underline{D}_B^{K'}(V)))^G , \\ \delta'_p(V) = \frac{1}{f}\cdot \dim_{K_0}(\mathrm{Hom}_{K_0}(Y',\underline{D}_B^{K'}(V)))^G . \end{cases}$$

iii) Conservons les hypothèses et notations qui précèdent. Il est probable que l'on peut toujours construire un espace vectoriel Z (resp. Z') de dimension finie sur K'_0 sur lequel $\mathrm{Gal}(K'/K)$ opère semi-linéairement, le caractère de la représentation K_0-linéaire ainsi définie étant $sw_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$). On a alors

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \dim_{K_0}(\mathrm{Hom}_{K'_0}(Z,\underline{D}_B^{K'}(V)))^G , \\ \delta'_p(V) = \dim_{K_0}(\mathrm{Hom}_{K'_0}(Z',\underline{D}_B^{K'}(V)))^G . \end{cases}$$

7.5. - APPLICATION AUX VARIETES ABELIENNES.

Dans ce n°, B est un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles (cf. n°7.2.6).

7.5.1. - Si $\mathcal{A}$ est une variété abélienne définie sur K et si ℓ est un nombre premier (y compris, si $\ell = p$), on note $T_\ell(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, \mathcal{A}(\bar{K}))$ le module de Tate de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION. - Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mathcal{A})$. Alors V est potentiellement admissible et le caractère φ_V (cf. n°7.4.1) est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $\ell \neq p$ et si $\varphi_{\mathcal{A}}$ désigne le caractère de la représentation $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire de I dans $T_\ell(\mathcal{A})$, on a $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_V$ (rappelons, cf. [23], th.2, p.496, que $\varphi_{\mathcal{A}}$ est indépendant de ℓ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$).

7.5.2. - Démonstration. - Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle $\mathcal{A}$ acquiert bonne réduction, soient A' l'anneau des entiers de K' et k' le corps résiduel. Soit $\mathcal{A}_{A'}$ le modèle de Néron de $\mathcal{A} \times_K K'$. C'est un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}\, A'$ et $\Gamma = \varinjlim (\mathcal{A}_{A'})_{p^n}$ est un groupe p-divisible sur A'. Comme V s'identifie à $\underline{V}_p(\Gamma)$ (comme module galoisien au-dessus de K'), V est potentiellement admissible.

La fibre spéciale $\mathcal{A}_{k'} = \mathcal{A}_{A'} \times_{A'} k'$ de $\mathcal{A}_{A'}$ est une variété abélienne définie sur k' et la fibre spéciale $\Gamma_{k'}$ de Γ s'identifie à $\varinjlim (\mathcal{A}_{k'})_{p^n}$. Soit $D = \underline{D}_B^{K'}(V)$. On sait (cf. n°5.1) que le F-iso-cristal sous-jacent à D s'identifie au dual de $\underline{M}_{K'_0}(\Gamma_{K'}) = K' \otimes_{W(k')} \underline{M}(\Gamma_{k'})$, où $\underline{M}(\Gamma_{k'})$ est le module de Dieudonné de $\Gamma_{k'}$.

Soit J_0 le groupe d'inertie de l'extension K'/K et soit $s \in J_0$. Par fonctorialité du modèle de Néron, s opère sur $\mathcal{A}_{A'}$ donc aussi sur $\mathcal{A}_{k'}$. Comme J_0 opère trivialement sur k', s définit en fait un endomorphisme de la structure de variété abélienne de $\mathcal{A}_{k'}$; notons P_s son polynôme caractéristique et $\mathrm{tr}(s)$ sa trace :

- on sait (cf. [13 bis], th.4, p.180) que P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur $T_\ell(\mathcal{A}_{k'}) = T_\ell(\mathcal{A}_{A'}) = T_\ell(\mathcal{A})$; en particulier, on a $\varphi_{\mathcal{A}}(s) = \mathrm{tr}(s)$;

- on sait (cf. [4], chap.V, cor. au th. du n°2) que P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur $\underline{M}(\Gamma_{k'})$, donc aussi sur $\underline{M}_{K'_o}(\Gamma_{k'})$; comme P_s est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on a $P_{s^{-1}} = P_s$ et P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur le dual D de $\underline{M}_{K'_o}(\Gamma_{k'})$; comme φ_V est le caractère de la représentation K'_o-linéaire de J_o sur D, on a $\varphi_V(s) = \mathrm{tr}(s)$, d'où la proposition.

7.5.3. - Remarques. -

1. - Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne définie sur K et soit $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mathcal{A})$. Il me semble raisonnable de conjecturer que $\mathcal{A}$ à bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction) si et seulement si V est admissible (resp. potentiellement admissible).

On a des résultats partiels dans ce sens :

i) la proposition 7.5.1 montre que la condition est nécessaire et que, si $\mathcal{A}$ a potentiellement bonne réduction, alors $\mathcal{A}$ a bonne réduction si et seulement si V est admissible (car $\mathcal{A}$ a bonne réduction si et seulement si $\varphi_{\mathcal{A}}$ est le caractère de la représentation triviale de dimension $2g$, avec $g = \dim \mathcal{A}$, tandis que V est admissible si et seulement si φ_V est le caractère de la représentation triviale de dimension $2g$) ;

ii) on peut montrer que la conjecture est vraie si $\mathcal{A}$ est une courbe elliptique, i.e. si $g = 1$;

iii) d'après un théorème de Raynaud (cf. [SGA 7.I], p. 385, cor.5.10) $\mathcal{A}$ a bonne réduction si et seulement s'il existe un groupe p-divisible Γ sur $\mathcal{A}$ tel que $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$; il résulte alors du cor. 5.2.4 que, si $e = 1$, $\mathcal{A}$ a bonne réduction si et seulement si V est admissible ;

iv) de la même manière, on voit que la conjecture est vraie, quel que soit e, si la conjecture du n° 5.2.5 l'est aussi.

2. - Soit $\mathfrak{G}$ une variété abélienne définie sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mathfrak{G})$. Soit $\delta_\ell(\mathfrak{G})$ (resp. $\delta'_\ell(\mathfrak{G})$, $\epsilon_\ell(\mathfrak{G})$) l'invariant noté δ_ℓ (resp. $\delta_\ell+\epsilon$, ϵ) dans [23], p. 500 : avec les notations du n° 7.4.7, on a $\delta_\ell(\mathfrak{G}) = \langle sw_V, \varphi_{\mathfrak{G}} \rangle$, $\delta'_\ell(\mathfrak{G}) = \langle a_V, \varphi_{\mathfrak{G}} \rangle$, $\epsilon_\ell(\mathfrak{G}) = \langle u_V, \varphi_{\mathfrak{G}} \rangle$; comme $\varphi_{\mathfrak{G}} = \varphi_V$, on a $\delta_\ell(\mathfrak{G}) = \delta_p(V)$, $\delta'_\ell(\mathfrak{G}) = \delta'_p(V)$ et $\epsilon_\ell(\mathfrak{G}) = \epsilon_p(V)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTHELOT, Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, in Algebraic Geometry (Arcata 1974), Proc. of Symposia in Pure Maths., vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, pp.315-328.

[2] A. BOREL, Linear Algebraic Groups, Benjamin, New-York, 1969.

[3] N. BOURBAKI, Algèbre I, chap. 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[4] M. DEMAZURE, Lectures on p-Divisible Groups, Lecture Notes in Mathematics, n° 302, Springer, Berlin, 1972.

[5] J.-M. FONTAINE, Groupes de ramification et représentations d'Artin, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t.4 (1971), 337-392.

[6] J.-M. FONTAINE, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque 47-48, Soc. math. de France, 1977.

[7] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes Congrès intern. math. 1970, t.1, 431-436, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[8] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné, Université de Montréal, Montréal, 1974.

[9] G. LAFFAILLE, Construction de groupes p-divisibles. Le cas de dimension 1, dans ce volume.

[10] G. LAFFAILLE, Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, en préparation.

[11] S. LANG, On quasi-algebraic closure, Ann. of Maths, 55 (1952), 373-390.

[12] Y. MANIN, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Russian Math. Surveys, 18 (1963), 1-83.

[13] W. MESSING, The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes, Lecture Notes in Mathematics, n° 264, Springer, Berlin, 1972.

[13 bis] D. MUMFORD, Abelian Varieties, Oxford University Press, London, 1970.

[14] A.P. OGG, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math., 89 (1967), 1-21.

[15] M. RAYNAUD, Schémas en groupes de type (p,...,p), Bull. Soc. Math. France, 102 (1974), 241-280.

[16] N. SAAVEDRA RIVANO, Catégories Tannakiennes, Lecture Notes in Mathematics, n° 265, Springer, Berlin, 1972.

[17] S. SEN, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Maths, 97 (1973), 160-170.

[18] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Mathematics, n° 5, Springer, Berlin, 1965.

[19] J.-P. SERRE, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, New-York, 1965.

[20] J.-P. SERRE, Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, Proceedings of a Conference on Local Fields, Nuffic Summer School at Driebergen, 118-131, Springer, Berlin, 1967.

[21] J.-P. SERRE, Abelian ℓ-Adic Representations and Elliptic Curves, Benjamin, New-York, 1968.

[22] J.-P. SERRE, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate, dans ce volume.

[23] J.-P. SERRE and J. TATE, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Maths, 88 (1968), 492-517.

[24] R. STEINBERG, Regular Elements of Semi-simple Algebraic Groups, Publ. Math. IHES, n° 25 (1965), 49-80.

[25] J. TATE, p-Divisible Groups, Proceedings of a Conference on Local Fields, Nuffic Summer School at Driebergen, 158-183, Springer, Berlin, 1967.

[SGA 7.I] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 67-69, Lecture Notes in Mathematics, n° 288, Springer, Berlin, 1972.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)