

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate

Astérisque, tome 65 (1979), p. 155-188

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__155_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROUPES ALGÈBRIQUES ASSOCIÉS AUX MODULES DE HODGE-TATE

par

Jean-Pierre SERRE

Soit V un module de Hodge-Tate sur un corps local d'inégale caractéristique. Le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois qui opère sur V est "presque" algébrique : il est ouvert dans un certain sous-groupe algébrique H_V du groupe linéaire GL_V .

Quelle est la structure de la composante neutre H_V^0 de H_V ?

Le but de cet exposé est de donner deux cas où l'on peut répondre, au moins en partie, à cette question :

i) le cas commutatif, où H_V^0 est un tore, quotient de ceux qui interviennent dans les groupes de Lubin-Tate ;

ii) le cas où V n'a pour poids que 0 et 1 (exemple : module de Tate d'une variété abélienne, ou d'un groupe p -divisible) ; les facteurs simples de H_V^0 sont alors de type classique (A_n , B_n , C_n ou D_n), et leurs poids dans V sont des poids minuscules.

Ces résultats font l'objet des §§ 2 et 3 ; le § 1 contient divers préliminaires.

§ 1. La catégorie des modules de Hodge-Tate

1.1. Notations

La lettre K désigne un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète. On note A_K l'anneau des entiers de K , et $k = A_K/p_K$ son corps résiduel. On suppose K de caractéristique zéro, et k algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, de sorte que K est extension du corps p -adique \mathbb{Q}_p .

On note \bar{K} une clôture algébrique de K , et C sa complétion. Le groupe de Galois G_K de \bar{K} sur K opère sur C .

On note $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique de G_K . On a $s(z) = z^{\chi(s)}$ pour tout $s \in G_K$ et pour toute racine de l'unité $z \in \bar{K}$ d'ordre une puissance de p .

Un module galoisien sur K est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel V de dimension finie sur lequel G_K opère continûment. On note ρ_V l'homomorphisme de G_K dans $\text{Aut}(V)$ qui définit l'action de G_K . Le groupe $G_V = \text{Im}(\rho_V)$ est un sous-groupe compact (donc de Lie) du groupe de Lie p -adique $\text{Aut}(V)$. Si $x \in V$ et $s \in G_K$ (ou $s \in G_V$), on note $s(x)$ le transformé de x par s .

1.2. Modules de Hodge-Tate (cf. [5], [6], [9])

Soit V un module galoisien sur K . L'action de G_K sur V se prolonge au C -espace vectoriel $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ par la formule

$$s(\sum c_\alpha \otimes x_\alpha) = \sum s(c_\alpha) \otimes s(x_\alpha) \quad (c_\alpha \in C, x_\alpha \in V).$$

Si $i \in \mathbb{Z}$, on note $V_C\{i\}$ l'ensemble des $x \in V_C$ tels que

$$s(x) = \chi(s)^i x \quad \text{pour tout } s \in G_K.$$

C'est un K -sous-espace vectoriel de V_C . On pose :

$$V_C(i) = C \otimes_K V_C\{i\}.$$

D'après un théorème de Tate ([5], prop. 4) les injections $V_C\{i\} \rightarrow V_C$ se prolongent en une injection C -linéaire

$$e : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_C(i) \rightarrow V_C.$$

Cela permet d'identifier $V_C(i)$ à un C -sous-espace vectoriel de V_C . Si l'on

pose

$$v_i = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}(i) = \dim_K V_{\mathbb{C}}\{i\} ,$$

on a $\sum v_i \leq \dim V$ et $v_i = 0$ pour presque tout i .

L'entier v_i est appelé la multiplicité de i comme poids de V .

On dit que V est un module de Hodge-Tate si ϵ est bijectif, autrement dit si $V_{\mathbb{C}}$ est somme (nécessairement directe) des $V_{\mathbb{C}}(i)$, ou encore si $\sum v_i = \dim V$.

La catégorie des modules de Hodge-Tate est stable par dualité, produit tensoriel, somme directe, passage aux sous-modules et modules quotients. Dans la terminologie de Saavedra ([3], p. 193), c'est une \otimes -catégorie tannakienne sur \mathbb{Q}_p , munie d'un foncteur fibre, à savoir le foncteur qui associe à un module V le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel sous-jacent.

Exemples

Soit \underline{A} un groupe p -divisible sur A_K (resp. une variété abélienne sur K) , et soit $V_p(\underline{A})$ son module de Tate. Alors $V_p(\underline{A})$ est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1 , avec multiplicités $v_0 = \dim \underline{A}'$, $v_1 = \dim \underline{A}$, où \underline{A}' est le dual de \underline{A} .

Dans le cas p -divisible, ce résultat est dû à Tate [9]. Dans le cas des variétés abéliennes, il est dû à Raynaud (non publié) qui l'a déduit du cas p -divisible en utilisant le théorème de "réduction semi-stable" de Grothendieck-Mumford (SGA 7 I).

Ces modules, et ceux de la \otimes -catégorie qu'ils engendrent, sont (essentiellement) les seuls exemples connus de modules de Hodge-Tate. Il serait intéressant d'en construire d'autres ; cela devrait être possible en utilisant la théorie de Fontaine [2].

1.3. L'enveloppe algébrique de G_V

Soit V un module galoisien sur K , de dimension n . Nous noterons GL_V le groupe algébrique des automorphismes de l'espace vectoriel V ; si L est une extension de \mathbb{Q}_p , le groupe $GL_V(L)$ des L -points de GL_V est le groupe

$$\text{Aut}_L(L \otimes V) .$$

On a en particulier :

$$GL_V(\mathbb{Q}_p) = \text{Aut}(V) \quad \text{et} \quad GL_V(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) .$$

Le choix d'une base de V identifie GL_V à GL_n .

Soit G_V le sous-groupe de $GL_V(\mathbb{Q}_p)$ image de G_K , cf. n° 1.1. Nous noterons H_V l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5]), autrement dit le plus petit sous-groupe algébrique H de GL_V tel que $H(\mathbb{Q}_p)$ contienne G_V ; c'est l'adhérence de Zariski de G_V dans GL_V .

La bigèbre Λ_V de H_V s'identifie à la \mathbb{Q}_p -algèbre de fonctions sur G_K engendrée par les coefficients de la représentation ρ_V et de sa duale, mises sous forme matricielle.

On a par construction $G_V \subset H_V(\mathbb{Q}_p)$. Si \mathfrak{g}_V (resp. \mathfrak{h}_V) désigne l'algèbre de Lie du groupe p-adique G_V (resp. du groupe algébrique H_V), on a

$$\mathfrak{g}_V \subset \mathfrak{h}_V \subset \text{End}(V),$$

et \mathfrak{h}_V est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\text{End}(V)$ contenant \mathfrak{g}_V (cf. [1], § 7).

Remarque

Soit Rep_V la \otimes -catégorie de G_K -modules engendrée par V et son dual. On peut caractériser H_V comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre naturel sur Rep_V , au sens de Saavedra [3], II, § 4 ; de plus, Rep_V s'identifie à la catégorie des représentations linéaires du groupe algébrique H_V ([3], loc.cit.).

THÉOREME 1 ([4], [7]) - Si V est un module de Hodge-Tate, G_V est ouvert dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$.

Une formulation équivalente est :

THÉOREME 1' - On a $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{h}_V$, autrement dit \mathfrak{g}_V est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\text{End}(V)$.

La démonstration du th. 1' donnée par Sen ([4], § 6) utilise le th. 2 ci-dessous. On peut également en donner une démonstration directe : on traite d'abord le cas où G_V est abélien, ce qui est facile à partir de résultats de Tate (cf. § 2, ainsi que [6], chap. III) ; le cas général s'en déduit grâce au théorème de Chevalley ([1], § 7, cor. (7.9)) disant que \mathfrak{g}_V contient l'algèbre dérivée $[\mathfrak{h}_V, \mathfrak{h}_V]$ de \mathfrak{h}_V .

1.4. Le groupe à un paramètre h_V

A partir de maintenant, on suppose que V est un module de Hodge-Tate.

La graduation de V_C par les $V_C(i)$ correspond à une action du groupe multiplicatif G_m sur V_C : à tout élément c de $C^* = G_m(C)$, on associe l'automorphisme $h_V(c)$ de V_C défini par la formule

$$h_V(c).x = c^i x \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ et tout } x \in V_C(i).$$

On obtient ainsi un homomorphisme de C-groupes algébriques

$$h_V : G_m/C \rightarrow GL_{V/C},$$

où G_m/C et $GL_{V/C}$ désignent les groupes algébriques déduits de G_m et de GL_V par extension des scalaires à C . Il n'est pas difficile de voir que $\text{Im}(h_V)$ est

contenu dans H_V/C ; cela résulte par exemple de l'interprétation de H_V comme groupe d'automorphismes du foncteur fibre de la \otimes -catégorie Rep_V , cf. 1.3 (noter que, si W est un objet de Rep_V , h_W est le composé de h_V et de l'homomorphisme naturel $H_V/C \rightarrow H_W/C$). Comme G_m est connexe, le groupe $\text{Im}(h_V)$ est contenu dans H_V^0/C , où H_V^0 désigne la composante neutre de H_V .

Le résultat suivant, conjecturé dans [7] et démontré dans [4], joue un rôle essentiel dans toute la suite :

THÉORÈME 2 (Sen) - Le groupe H_V^0 est le plus petit sous-groupe algébrique de GL_V défini sur \mathbb{Q}_p qui, après extension des scalaires à \mathbb{C} , contient $\text{Im}(h_V)$.

Voici quelques conséquences de ce théorème :

COROLLAIRE 1 - Les propriétés suivantes d'un sous-espace vectoriel W de V sont équivalentes :

- a) W est stable par H_V^0 ;
- b) W est stable par un sous-groupe ouvert de G_V ;
- c) $W_{\mathbb{C}}$ est stable par $\text{Im}(h_V)$;
- d) $W_{\mathbb{C}}$ est somme de ses intersections avec les $V_{\mathbb{C}}(i)$.

Les équivalences a) \Leftrightarrow b) et c) \Leftrightarrow d) sont immédiates. L'équivalence de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 2 - Soit $x \in V$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) x est fixé par H_V^0 ;
- b) l'orbite $G_V x$ de x est finie ;
- c) x est fixé par $\text{Im}(h_V)$;
- d) x appartient à $V_{\mathbb{C}}(0)$.

Ici encore, les équivalences a) \Leftrightarrow b) et c) \Leftrightarrow d) sont immédiates ; celle de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 3 - Si 0 est le seul poids de V , i.e. si $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}(0)$, on a $H_V^0 = \{1\}$, et le groupe G_V est un groupe fini.

Cela résulte du cor. 2.

Remarque. Inversement, on peut déduire le th. 2 du cor. 3, appliqué à un module convenable de Rep_V .

Variante du théorème 2

Soit $\Gamma_{\mathbb{C}}$ le groupe des \mathbb{Q}_p -automorphismes (non nécessairement continus) du corps \mathbb{C} . Si $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ et $c \in \mathbb{C}$, notons ${}^{\circ}c$ le conjugué de c par σ ; si $x = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \otimes x_{\alpha}$ est un élément de $V_{\mathbb{C}}$ (avec $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$, $x_{\alpha} \in V$), posons

$${}^{\circ}x = (\sigma \otimes 1)x = \sum_{\alpha} {}^{\circ}c_{\alpha} \otimes x_{\alpha} .$$

Le conjugué de h_V par σ est l'homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de G_m/C dans H_V/C déduit de h_V par le changement de corps de base $\sigma : C \rightarrow C$; il correspond à la décomposition de V_C en somme directe des ${}^\sigma V_C(i)$; on peut le caractériser par la formule

$${}^\sigma h_V(\sigma c)^\sigma x = {}^\sigma (h_V(c)x) \quad \text{pour tout } c \in C^* \text{ et tout } x \in V_C .$$

Un élément c de C appartient à \mathbb{Q}_p si et seulement si l'on a ${}^\sigma c = c$ pour tout $\sigma \in \Gamma_C$: cela résulte de ce que C est algébriquement clos. De là on déduit facilement l'équivalence du th. 2 avec :

THÉOREME 2' - Le groupe $H_{V/C}^0$ est engendré par les conjugués $\text{Im}({}^\sigma h_V)$, $\sigma \in \Gamma_C$, du groupe $\text{Im}(h_V)$.

Voici maintenant une traduction en termes d'algèbres de Lie : notons φ_V la dérivée de h_V en l'élément neutre, autrement dit l'endomorphisme de V_C tel que

$$\varphi_V(x) = ix \quad \text{si } i \in \mathbb{Z}, x \in V_C(i) .$$

En vertu d'un résultat connu ([1], th. 7.6), le th. 2 équivaut à :

THÉOREME 2'' - L'algèbre de Lie \mathfrak{h}_V est la plus petite \mathbb{Q}_p -sous-algèbre de Lie de $\text{End}(V)$ qui, après extension des scalaires à C , contient φ_V .

Ou encore :

THÉOREME 2''' - Les conjugués ${}^\sigma \varphi_V$ de φ_V ($\sigma \in \Gamma_C$) engendrent l'algèbre de Lie $C \otimes \mathfrak{h}_V$.

C'est sous cette forme que le th. 2 est démontré par Sen [4]. Sen prouve même un résultat en apparence plus fort : le sous-espace vectoriel Φ de $\text{End}(V_C)$ engendré par les ${}^\sigma \varphi_V$ est égal à $C \otimes \mathfrak{h}_V$. (Ce résultat peut en fait se déduire du th. 2'''. En effet, le cor. à la prop. 1 du n° 1.5 ci-après entraîne que l'ensemble des ${}^\sigma \varphi_V$, $\sigma \in \Gamma_C$, est stable par $\varphi \mapsto g^{-1} \varphi g$ pour tout $g \in G_V$. Il en est donc de même de Φ , et, par dérivation, cela entraîne $[\Phi, \mathfrak{h}_V] \subset \Phi$. Comme Φ est contenu dans $C \otimes \mathfrak{h}_V$, on en déduit $[\Phi, \Phi] \subset \Phi$, et Φ est une algèbre de Lie ; d'après le th. 2''', cette algèbre de Lie est égale à $C \otimes \mathfrak{h}_V$.)

1.5. Degré de transcendance de h_V

Formules de functorialité

On a vu au n° 1.4 que l'on peut conjuguer h_V par tout élément σ de $\Gamma_C = \text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(C)$, et que l'on obtient ainsi un homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de G_m/C dans $H_{V/C}^0$.

Supposons que $\sigma(K) = K$ et que σ soit continu. Si $s \in G_K$, on a alors $\sigma^{-1} s \sigma \in G_K$. Cela permet de définir une représentation $\rho_{\sigma V}$ de G_K dans $\text{Aut}(V)$

par :

$$\rho_{\sigma V}(s) = \rho_V(\sigma^{-1} s \sigma) \quad \text{pour tout } s \in G_K .$$

L'homomorphisme $h_{\sigma V}$ attaché à $\rho_{\sigma V}$ n'est autre que le conjugué ${}^{\sigma}h_V$ de h_V par σ ; cela se voit par transport de structure.

Supposons maintenant que σ appartienne à G_K , et soit $g = \rho_V(\sigma)$ son image dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$. La représentation $\rho_{\sigma V}$ est alors isomorphe à ρ_V : on a

$$\rho_{\sigma V}(s) = g^{-1} \rho_V(s) g \quad \text{pour tout } s \in G_K .$$

On en déduit par functorialité :

$$h_{\sigma V} = g^{-1} h_V g = \text{Int}(g^{-1}) \circ h_V ,$$

où $\text{Int}(g^{-1})$ désigne l'automorphisme intérieur de H_V défini par g^{-1} .

Utilisant le fait que $h_{\sigma V} = {}^{\sigma}h_V$, on obtient finalement le résultat suivant (que l'on peut aussi vérifier par calcul direct) :

PROPOSITION 1 - Si $\sigma \in G_K$ a pour image g dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$, on a

$${}^{\sigma}h_V = \text{Int}(g^{-1}) \circ h_V .$$

COROLLAIRE - On a ${}^{\sigma}\varphi_V = g^{-1} \varphi_V g$.

Pour $\sigma \in G_K$, les ${}^{\sigma}h_V$ et les ${}^{\sigma}\varphi_V$ sont donc des conjugués de h_V et φ_V à la fois au sens galoisien, et au sens de la conjugaison par les automorphismes intérieurs de H_V .

Corps de définition de h_V

Les groupes algébriques G_m et H_V° sont définis sur \mathbb{Q}_p . On peut donc parler du corps de définition $\mathbb{Q}_p(h_V)$ de l'homomorphisme $h_V : G_m/C \rightarrow H_V^{\circ}/C$: c'est le plus petit sous-corps de C contenant \mathbb{Q}_p sur lequel h_V soit rationnel ; c'est aussi le corps de définition de l'élément φ_V de $C \otimes \text{End}(V)$.

Le corps $K(h_V)$ engendré par K et $\mathbb{Q}_p(h_V)$ est le corps de définition de h_V sur K .

Nous allons déterminer les degrés de transcendance des extensions $\mathbb{Q}_p(h_V)$ et $K(h_V)$:

THÉORÈME 3 - Soit Z_V le commutant de $\text{Im}(h_V)$ dans H_V°/C . On a

$$\text{deg. tr}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(h_V) = \text{deg. tr}_K K(h_V) = \dim H_V - \dim Z_V .$$

Démonstration

Choisissons un tore maximal T de H_V° défini sur \mathbb{Q}_p ; on sait que c'est pos-

sible ([1], th. 18.2) et que tout sous-tore de H_V^0/C est conjugué d'un sous-tore de T/C ([1], cor. 11.3). En appliquant ceci au tore $\text{Im}(h_V)$, on en conclut qu'il existe un homomorphisme

$$h_1 : G_m/C \rightarrow T/C$$

et un élément g de $H_V^0(C)$ tels que $h_V = \text{Int}(g) \circ h_1$. Soit E le corps de définition de h_1 . C'est une extension finie de \mathbb{Q}_p ([1], prop. 8.11). Le commutant Z_1 de $\text{Im}(h_1)$ dans $H_{V/E}^0$ est défini sur E . Soit $X = H_{V/E}^0/Z_1$ l'espace homogène correspondant ; c'est une variété algébrique sur E . On a

$$\dim X = \dim H_V^0 - \dim Z_1 = \dim H_V - \dim Z_V.$$

Soit x l'image de g dans $X(C)$; le point x ne dépend pas du choix de g , car g est déterminé à une multiplication à droite près par un élément de $Z_1(C)$. Si L est une sous-extension de C contenant E , on voit tout de suite que x est rationnel sur L si et seulement si h_V est rationnel sur L . Le corps

$$E(h_V) = E \cdot \mathbb{Q}_p(h_V)$$

est donc égal au corps de définition $E(x)$ du point x de X .

Le th. 3 équivaut à dire que

$$\text{deg. tr}_E E(x) = \text{deg. tr}_{K,E} K.E(x) = \dim X,$$

ou encore que x est un point générique de X sur E et sur $K.E$. Montrons que x est générique sur $K.E$ (l'assertion relative à E en résultera). Soit X' la plus petite sous-variété de X contenant x et définie sur $K.E$; il s'agit de prouver que $X' = X$. Soit G' le sous-groupe ouvert de G_K formé des éléments qui fixent E , et dont l'image dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$ appartient à $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$. Si $\sigma \in G'$, et si g est l'image de σ dans $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$, la prop. 1 montre que $g^{-1}x = \sigma x$, d'où $g^{-1}x \in X'(C)$ puisque la variété X' est définie sur $K.E$. On a donc

$$\rho_V(G') \cdot x \subset X'(C),$$

et comme $\rho_V(G')$ est dense dans H_V^0 pour la topologie de Zariski, ceci entraîne $H_V^0(C) \cdot x \subset X'$, d'où $X' = X$, cqfd.

Exemple. Supposons que V soit un module de Hodge-Tate de dimension 2, avec poids 0 et 1 de multiplicité 1, et que H_V soit égal à GL_V ; c'est le cas lorsque V est le module de Tate d'un groupe formel à un paramètre de hauteur 2 dont l'anneau des endomorphismes est réduit à \mathbb{Z}_p , cf. [5], th. 5. La décomposition de Hodge-Tate de V_C est définie par les deux droites $V_C(0)$ et $V_C(1)$. Soient c_0 et c_1 les pentes de ces droites, prises par rapport à une base de V . Le corps de définition de h_V est le corps $\mathbb{Q}_p(c_0, c_1)$ engendré par c_0 et c_1 . On a

$$\dim H_V = 4 \quad \text{et} \quad \dim Z_V = 2 ;$$

la variété X est de dimension 2 (c'est un produit de deux droites projectives).
D'après le th. 3, on a

$$\text{deg. tr}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(c_0, c_1) = \text{deg. tr}_K K(c_0, c_1) = 2 ;$$

autrement dit, c_0 et c_1 sont algébriquement indépendants sur K .

1.6. Passage à la limite : le groupe proalgébrique H

Domination

Soient V et W deux modules de Hodge-Tate. Nous dirons que W est dominé par V si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- (i) W appartient à la \otimes -catégorie Rep_V engendrée par V et son dual ;
- (ii) la bigèbre Λ_W du groupe H_W (cf. 1.3) est contenue dans la bigèbre Λ_V du groupe H_V ;
- (iii) il existe un morphisme de groupes algébriques (nécessairement unique) $\pi_W^V : H_V \rightarrow H_W$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & H_V(\mathbb{Q}_p) \\ G_K & \twoheadrightarrow & \downarrow \\ & & H_W(\mathbb{Q}_p) \end{array} .$$

(L'équivalence de (ii) et (iii) est immédiate. Celle de (i) et (iii) résulte, par exemple, de [3], II.4.3.2 a), p. 156. L'hypothèse "de Hodge-Tate" n'intervient pas.)

Passage à la limite

La domination est une relation de préordre filtrante sur la catégorie des modules de Hodge-Tate. Cela permet de définir le groupe proalgébrique

$$H = \varprojlim H_V ,$$

limite projective des H_V relativement aux morphismes π_W^V . Ce groupe est un groupe affine sur \mathbb{Q}_p . Sa bigèbre Λ est la réunion des bigèbres Λ_V .

Par passage à la limite, les ρ_V et les h_V définissent des homomorphismes

$$\rho : G_K \rightarrow H(\mathbb{Q}_p) \quad \text{et} \quad h : G_m/C \rightarrow H/C .$$

Toute représentation linéaire (de dimension finie) de H fournit, via ρ , un module galoisien dont la décomposition de Hodge-Tate est donnée par h ; inversement,

tout module de Hodge-Tate s'obtient de cette manière. Ainsi, la \otimes -catégorie des modules de Hodge-Tate s'identifie à celle des représentations linéaires du groupe proalgébrique H (cf. [3], II, § 4).

Si l'on remplace la catégorie des modules de Hodge-Tate par la sous-catégorie des modules admissibles (au sens de Fontaine [2], 3.2.5), on obtient un groupe proalgébrique H_{adm} , qui est quotient de H . De même, si l'on remplace cette catégorie par la \otimes -sous-catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles, on trouve un groupe H_{div} , qui est quotient de H_{adm} , donc aussi de H .

Le groupe H/H^0

Soit $H^0 = \varprojlim_V H_V^0$ la composante neutre de H . Le groupe quotient

$$H/H^0 = \varprojlim_V H_V/H_V^0$$

est un groupe proalgébrique de dimension 0. Nous allons déterminer sa structure.

Remarquons d'abord que, si V est un module de Hodge-Tate, toute classe de $H_V \bmod H_V^0$ contient un élément de G_V ; cela provient de ce que H_V est l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5], dém. de la prop. 2). Comme les éléments de G_V sont rationnels sur \mathbb{Q}_p , il s'ensuit que H_V/H_V^0 est un groupe "constant", i.e. un groupe de dimension 0 dont tous les points sont rationnels. Par passage à la limite, la même propriété est vraie pour H/H^0 : c'est un groupe "constant", et on peut l'identifier au groupe profini de ses points rationnels sur \mathbb{Q}_p . Ce groupe est isomorphe à G_K . Plus précisément :

PROPOSITION 2 - L'homomorphisme composé

$$G_K \rightarrow H(\mathbb{Q}_p) \rightarrow (H/H^0)(\mathbb{Q}_p)$$

est un isomorphisme du groupe profini G_K sur le groupe profini des points rationnels de H/H^0 .

D'après ce qui précède, l'homomorphisme $G_K \rightarrow (H/H^0)(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif. Pour voir qu'il est injectif, il suffit de prouver que, si N est un sous-groupe ouvert normal de G_K , il existe un module de Hodge-Tate V tel que $\rho_V(N)$ soit contenu dans le groupe $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$; or c'est évident: il suffit de prendre pour V n'importe quelle représentation linéaire fidèle du groupe fini G_K/N (on sait en effet qu'une telle représentation donne naissance à un module de Hodge-Tate, cf. [6], III. 32).

Dans toute la suite, nous identifions H/H^0 à G_K .

Remarques

1) Du point de vue des \otimes -catégories [3], la prop. 2 exprime simplement le fait que tout module galoisien à action finie est un module de Hodge-Tate.

2) La situation est très différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} définis

plus haut. En effet, Fontaine a montré que ces groupes sont connexes ([2], 3.7.4).

1.7. Variation de H par extension finie du corps de base

Soit K_1 une extension finie de K contenue dans \bar{K} , et soit $G_{K_1} = \text{Gal}(\bar{K}/K_1)$ le groupe de Galois correspondant ; c'est un sous-groupe ouvert de G_K . Soit H_1 le groupe proalgébrique correspondant à la \otimes -catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1 . Nous allons comparer H_1 au groupe H relatif à K . Tout d'abord :

LEMME 1 - (a) Tout module de Hodge-Tate sur K définit par restriction un module de Hodge-Tate sur K_1 .

(b) Tout module de Hodge-Tate sur K_1 est dominé par un module du type (a).

L'assertion (a) résulte de la définition des modules de Hodge-Tate. Prouvons (b). Soit V_1 un module de Hodge-Tate sur K_1 , et soit V le module induit de V_1 (au sens usuel de l'induction des représentations de groupes). Comme V_1 est contenu dans V , donc dominé par V , il nous suffit de vérifier que V est un module de Hodge-Tate sur K . Choisissons une extension galoisienne finie K' de K , contenue dans \bar{K} , et contenant K_1 . D'après [6], III. 32, il suffit de voir que V est un module de Hodge-Tate sur K' . Mais, sur K' , V est somme directe de modules isomorphes à des conjugués de V_1 , lesquels sont bien des modules de Hodge-Tate. D'où notre assertion.

Ce lemme montre que les modules de Hodge-Tate sur K sont cofinaux (pour la relation de domination) dans la catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1 . On a donc

$$H_1 = \varprojlim_{V} H_{1V} \quad (V \text{ de Hodge-Tate sur } K),$$

où H_{1V} est l'enveloppe algébrique de $G_{1V} = \rho_V(G_{K_1})$ dans GL_V . Comme G_{1V} est d'indice fini dans G_V , H_{1V} est d'indice fini dans H_V ; en particulier les composantes neutres de H_V et H_{1V} coïncident. De plus, l'image de H_{1V} dans le groupe fini H_V/H_V^0 est égale à l'image de G_{1V} dans ce groupe. Par passage à la limite sur V , on en déduit :

PROPOSITION 3 - Le groupe H_1 s'identifie à un sous-groupe de H contenant H^0 ; son image dans $H/H^0 = G_K$ est G_{K_1} .

COROLLAIRE - Les groupes H et H_1 ont même composante neutre.

(Autrement dit, la composante neutre H^0 de H ne change pas par extension finie du corps de base.)

On peut résumer la situation par le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des inclusions :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{1\} & \rightarrow & H_1^0 & \rightarrow & H_1 & \rightarrow & G_{K_1} & \rightarrow & \{1\} \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{1\} & \rightarrow & H^0 & \rightarrow & H & \rightarrow & G_K & \rightarrow & \{1\} .
 \end{array}$$

Remarque

Ici encore, la situation est différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} du n° 1.6. Si l'on remplace K par K_1 , ces groupes sont remplacés par des groupes $H_{1,\text{adm}}$ et $H_{1,\text{div}}$ munis d'homomorphismes

$$H_{1,\text{adm}} \rightarrow H_{\text{adm}} \quad \text{et} \quad H_{1,\text{div}} \rightarrow H_{\text{div}} ;$$

ces homomorphismes sont surjectifs, mais ne sont pas injectifs en général.

§ 2. Le cas commutatif

Le but de ce § est de décrire les modules de Hodge-Tate V dont le groupe de Galois associé G_V est commutatif. Comme on le verra, ces modules se ramènent essentiellement aux modules V_E associés aux groupes formels de Lubin-Tate, cf. 2.1 ci-dessous.

2.1. Les modules V_E et les caractères χ_E

Les modules $V_{E,\pi}$

Soient E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenue dans \bar{K} , et π une uniformisante de E . Soit $\bar{E} = \bar{\mathbb{Q}}_p$ la fermeture algébrique de E dans \bar{K} . Considérons le groupe formel de Lubin-Tate attaché au couple (E, π) , et notons $V_{E,\pi}$ son module de Tate, tensorisé avec \mathbb{Q}_p . On sait (cf. par exemple [6], III. A4) que $V_{E,\pi}$ est un E -espace vectoriel de dimension 1 et que l'action naturelle de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ sur $V_{E,\pi}$ respecte cette structure. Cette action est donnée par un homomorphisme

$$f_{E,\pi} : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow U_E,$$

où U_E est le groupe des unités de E .

Comme U_E est commutatif, on peut, via la théorie du corps de classes, interpréter $f_{E,\pi}$ comme un homomorphisme de E^\times dans U_E ; d'après un théorème de Lubin-Tate, cet homomorphisme est caractérisé par les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} f_{E,\pi}(\pi) &= 1 \\ f_{E,\pi}(u) &= u^{-1} \quad \text{si } u \in U_E. \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre en particulier que la restriction de $f_{E,\pi}$ au groupe d'inertie de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ ne dépend pas du choix de π .

Les modules V_E

Supposons maintenant que E soit contenu dans K . L'action de $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur \bar{E} définit alors un homomorphisme

$$G_K \rightarrow \text{Gal}(\bar{E}/E)$$

qui permet de faire opérer G_K sur $V_{E,\pi}$. Comme G_K est égal à son groupe d'inertie, le module galoisien ainsi obtenu est indépendant du choix de π ; nous le noterons V_E et nous désignerons par χ_E l'homomorphisme correspondant de G_K dans U_E (cf. [6], p. III. 41).

Exemple. Si $E = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$, le groupe de Lubin-Tate est le groupe multiplicatif (formel), V_E est de dimension 1, et χ_E est le caractère cyclotomique χ du n° 1.1.

Décomposition de Hodge-Tate de V_E

Soit Σ_E l'ensemble des plongements $\sigma : E \rightarrow C$ qui sont l'identité sur \mathbb{Q}_p . On a

$$\text{Card}(\Sigma_E) = [E:\mathbb{Q}_p] = \dim V_E .$$

Parmi les éléments de Σ_E figure l'inclusion $\iota : E \rightarrow C$.

Si $\sigma \in \Sigma_E$, notons $V_{E,\sigma}$ le C -espace vectoriel $C \otimes_{\sigma} V_E$ déduit du E -espace vectoriel V_E par le changement de corps de base $\sigma : E \rightarrow C$. On a $\dim_C V_{E,\sigma} = 1$.

Le C -espace vectoriel $V_{E/C} = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_E$ est somme directe des $V_{E,\sigma}$:

$$V_{E/C} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_E} V_{E,\sigma} .$$

Il résulte de [9], cor. 2 au th. 3, que V_E est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1, les sous-espaces correspondants étant :

$$V_{E/C}(0) = \bigoplus_{\sigma \neq \iota} V_{E,\sigma}$$

$$V_{E/C}(1) = V_{E,\iota} = C \otimes_E V_E .$$

Enveloppe algébrique de $\text{Im}(\chi_E)$

L'image de G_K dans $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ est un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$, l'indice en question étant d'ailleurs égal au quotient e_K/e_E des indices de ramification absolus de K et de E . Il en résulte que $\text{Im}(\chi_E)$ est un sous-groupe ouvert de U_E . Son enveloppe algébrique H_{V_E} (au sens du n° 1.3) est donc le tore $T_E = R_{E/\mathbb{Q}_p}(G_m/E)$ déduit de G_m/E par restriction des scalaires de E à \mathbb{Q}_p ([6], II.1.1). [Rappelons que, si A est une extension de \mathbb{Q}_p , le groupe $T_E(A)$ des points de T_E à valeurs dans A est le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_E V_E$; en particulier, on a $T_E(\mathbb{Q}_p) = E^*$: le tore T_E représente le groupe multiplicatif de E .]

Le groupe à un paramètre attaché à T_E

Sur C (et même sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$) le tore T_E se décompose en produit de groupes multi-

plicatifs indexés par les éléments de Σ_E :

$$T_{E/C} = \prod_{\sigma \in \Sigma_E} G_{m,\sigma} \quad \text{où } G_{m,\sigma} = G_{m/C} \text{ pour tout } \sigma .$$

Sur $V_{E/C}$, un élément $t = (t_\sigma)$ de $T_{E/C}$ opère par :

$$t \cdot \sum_{\sigma} x_{\sigma} = \sum_{\sigma} t_{\sigma} x_{\sigma} \quad \text{si } x_{\sigma} \in V_{E,\sigma} .$$

Vu la décomposition de Hodge-Tate de V_E donnée ci-dessus, il en résulte que l'homomorphisme $h_{V_E} : G_{m/C} \rightarrow T_{E/C}$ attaché à V_E (au sens du n° 1.4) est donné par :

$$h_{V_E}(c) = (c_{\sigma}) , \text{ avec } \begin{cases} c_{\sigma} = 1 & \text{si } \sigma \neq \iota \\ c_{\sigma} = c & \text{si } \sigma = \iota . \end{cases}$$

En d'autres termes, h_{V_E} est le plongement de $G_{m/C}$ dans $T_{E/C}$ correspondant au facteur de $T_{E/C}$ d'indice ι .

2.2. Structure de H^{ab}

Si X est un groupe proalgébrique, nous noterons X^{ab} le plus grand groupe proalgébrique quotient de X qui soit commutatif ; de même, si X est un groupe profini, nous noterons X^{ab} le plus grand quotient profini commutatif de X .

Nous nous proposons de déterminer la structure du groupe proalgébrique H^{ab} , où $H = \varprojlim V$, cf. n° 1.6.

Tout d'abord, l'homomorphisme naturel de H sur le groupe G_K (vu comme groupe proalgébrique "constant" de dimension 0, cf. n° 1.6) définit par passage au quotient un homomorphisme

$$\epsilon : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} .$$

D'après la prop. 2, cet homomorphisme est surjectif, et son noyau est la composante neutre $(H^{ab})^{\circ}$ de H^{ab} .

D'autre part, si E est une extension finie de \mathbb{Q}_p contenue dans K , on a défini ci-dessus un module de Hodge-Tate V_E dont le groupe algébrique associé H_{V_E} est le tore T_E défini par E . Comme H est limite projective des H_V , et que T_E est commutatif, on en déduit un homomorphisme $\rho_E : H^{ab} \rightarrow T_E$. Si E' est un sous-corps de E , et si $N_{E/E'} : T_E \rightarrow T_{E'}$ désigne la norme, on a

$$\rho_{E'} = N_{E/E'} \circ \rho_E ;$$

cela résulte de la formule correspondante pour X_E et $X_{E'}$, qui est bien connue (ou, si l'on préfère, de celle pour h_{V_E} et $h_{V_{E'}}$, qui est immédiate). Notons alors $\lim_{E \subset K} T_E$ la limite projective des tores T_E , pour $E \subset K$, relativement aux $N_{E/E'}$; les ρ_E définissent un homomorphisme

$$\rho : H^{ab} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E .$$

La structure de H^{ab} est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 4 - L'homomorphisme

$$(\epsilon, \rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E$$

est un isomorphisme.

Comme ϵ définit un isomorphisme de $H^{ab}/(H^{ab})^\circ$ sur G_K^{ab} , le th. 4 équivaut à :

THÉORÈME 4' - La restriction de ρ à $(H^{ab})^\circ$ est un isomorphisme de $(H^{ab})^\circ$ sur $\lim_{E \subset K} T_E$.

Démonstration

Par construction, l'homomorphisme

$$(\epsilon, \rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E$$

est surjectif. Montrons que c'est un isomorphisme. Pour cela il suffit de prouver que, si $\pi : H^{ab} \rightarrow A$ est un homomorphisme de H^{ab} sur un groupe algébrique linéaire A , l'homomorphisme π peut se factoriser par (ϵ, ρ) . Or, soit

$$h_A : G_m/C \rightarrow A/C$$

le groupe à un paramètre correspondant à A (cf. 1.4), et soit E le corps de définition de h_A . Du fait que A est commutatif, E est une extension finie de \mathbf{Q}_p ([1], prop. 8.11). De plus, la prop. 1 du n° 1.5 montre que ${}^\circ h_A = h_A$ pour tout $\sigma \in G_K$, donc que h_A est rationnel sur K ; le corps E est donc contenu dans K . D'après une propriété universelle bien connue du tore T_E , il existe un unique homomorphisme $f_E : T_E \rightarrow A$ tel que

$$h_A = f_E \circ h_{V_E} ,$$

où h_{V_E} est le groupe à un paramètre canonique de T_E , cf. 2.1.

L'homomorphisme f_E définit un homomorphisme f de $\lim_{E \subset K} T_E$ dans A . Posons

$$\pi' = f \circ \rho = f_E \circ \rho_E ;$$

c'est un homomorphisme de H^{ab} dans A qui a le même effet que π sur le groupe à un paramètre canonique de H^{ab} . D'après le th. 2, il en résulte que π et π' coïncident sur $(H^{ab})^0$; leur quotient $\varphi = \pi \cdot (\pi')^{-1}$ est trivial sur $(H^{ab})^0$, donc s'écrit sous la forme $\varphi = g \circ \epsilon$, où g est un homomorphisme continu (à noyau ouvert) de G_K^{ab} dans $A(\mathbb{Q}_p)$. En multipliant g par f , on obtient un homomorphisme

$$F = g \cdot f : G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E \rightarrow A ,$$

et il est clair que $\pi : H^{ab} \rightarrow A$ est le composé de (ϵ, ρ) et de F . Cela montre bien que π se factorise par (ϵ, ρ) ; le th. 4 en résulte.

Remarque. Le th. 4 est essentiellement une reformulation, dans le langage des groupes proalgébriques, des résultats de Tate exposés dans [6], III, Appendice; l'emploi du th. 2 (théorème de Sen) n'est pas indispensable.

Application : modules de Hodge-Tate à action abélienne

Soit V un module de Hodge-Tate tel que G_V soit commutatif. L'enveloppe algébrique H_V de G_V est alors commutative; elle s'identifie donc à un quotient du groupe H^{ab} étudié ci-dessus. Vu le th. 4, on en déduit :

a) La composante neutre H_V^0 de H_V est un tore, quotient de l'un des T_E . Cela entraîne que H_V est un groupe réductif ([1], 11.21) et que V est un module semi-simple sur H_V (ou sur G_V , cela revient au même).

b) L'homomorphisme $H^{ab} \rightarrow H_V$, restreint au facteur direct G_K^{ab} de H^{ab} , définit un homomorphisme continu

$$\psi_V : G_K^{ab} \rightarrow H_V(\mathbb{Q}_p) ,$$

dont l'image est un sous-groupe fini de $H_V(\mathbb{Q}_p)$. En utilisant ψ_V , on munit ainsi V d'une nouvelle structure de module galoisien, où cette fois l'action de G_K est finie; cela permet, par exemple, de parler du conducteur d'Artin de V , pour cette nouvelle structure. Nous dirons que V est non ramifié si $\psi_V = 1$. Cela revient à dire que la projection $H^{ab} \rightarrow H_V$ peut se factoriser par l'un des $\rho_E = H^{ab} \rightarrow T_E$, ou encore que V est dominé (au sens de 1.6) par l'un des V_E .

Lorsque V est ramifié, on peut seulement affirmer que V est dominé par un $V_E \oplus W$, où W est un module galoisien à action finie et commutative : c'est une

autre façon de formuler le th. 4.

2.3. Structure de $H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ et $H_{\text{div}}^{\text{ab}}$

Rappelons (cf. 1.6) que H_{adm} est le groupe proalgébrique associé à la catégorie des modules admissibles ([2], 3.2.5), et que H_{div} est le groupe proalgébrique associé à la \otimes -catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles. On a des homomorphismes canoniques

$$H \rightarrow H_{\text{adm}} \rightarrow H_{\text{div}},$$

d'où

$$H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}.$$

Ces homomorphismes sont surjectifs. Comme H_{adm} et H_{div} sont connexes ([2], 3.7.4), la restriction de $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ à $(H^{\text{ab}})^{\circ}$ est également surjective.

Du fait que les V_E sont des modules de Tate de groupes p-divisibles, l'homomorphisme $\rho : H^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E$ se factorise en :

$$H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E.$$

THÉOREME 5 (Fontaine) - Les homomorphismes

$$(H^{\text{ab}})^{\circ} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E$$

sont tous des isomorphismes.

En effet ils sont surjectifs et leur composé est un isomorphisme d'après le th. 4'.

COROLLAIRE 1 - Les projections $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ et $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ ont pour noyau le facteur direct G_K^{ab} de H^{ab} .

C'est clair.

COROLLAIRE 2 - Soit V un module de Hodge-Tate à action abélienne. Pour que V soit non ramifié (au sens de 2.2), il faut et il suffit que V soit admissible (au sens de [2], 3.2.5).

Cela résulte du cor. 1.

Exemple : module de Tate d'un groupe p-divisible de type (CM)

Soit \underline{A} un groupe p-divisible sur A_K , de hauteur h et de dimension n . Soit E_1 une extension de \mathbb{Q}_p de degré h et supposons qu'un sous-anneau d'indice fini de l'anneau des entiers de E_1 opère sur \underline{A} (de sorte que \underline{A} est "de

type (CM)"). Le module de Tate V de \underline{A} , tensorisé avec \mathbb{Q}_p , est un E_1 -espace vectoriel de dimension 1. Comme l'action de G_K sur V est E_1 -linéaire, elle est donnée par un homomorphisme $\chi_A : G_K \rightarrow E_1^*$. Par passage aux enveloppes algébriques, on en déduit, comme au n° 2.1, un homomorphisme

$$\rho_A : H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow T_{E_1}.$$

D'après le th. 5, cet homomorphisme peut se factoriser en

$$H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow T_E \xrightarrow{\delta} T_{E_1},$$

pour E et δ bien choisis. Indiquons brièvement comment on peut construire (E, δ) :

On considère la représentation de E_1 dans l'espace tangent à \underline{A} . C'est une représentation de dimension n , définie sur K . Elle provient par extension des scalaires d'une représentation définie sur un sous-corps E de K de degré fini sur \mathbb{Q}_p ; on obtient ainsi un (E, E_1) -bimodule t , de dimension n sur E . Si $x \in E^*$, l'automorphisme x_t de t défini par x est E_1 -linéaire; soit

$$f(x) = \det_{E_1}(x_t)$$

son déterminant. L'application f de E^* dans E_1^* ainsi définie est "algébrique": elle se prolonge en un homomorphisme δ de T_E dans T_{E_1} . On peut prouver (par exemple en utilisant [6], III. App.) que le couple (E, δ) ainsi construit a les propriétés voulues.

2.4. Structure de $(H^0)^{\text{ab}}$

Si U est un sous-groupe ouvert de G_K , notons H_U le sous-groupe de H image réciproque de U par l'homomorphisme canonique $H \rightarrow G_K$ (cf. 1.6). Le groupe H^0 est limite projective des H_U . On en conclut que

$$(H^0)^{\text{ab}} = \varprojlim H_U^{\text{ab}} = \varprojlim (H_U^{\text{ab}})^0.$$

Si K_U désigne la sous-extension de \bar{K} fixée par U , le groupe H_U n'est autre que le "groupe H " relatif au corps de base K_U , cf. prop. 3. D'après le th. 4', appliqué à K_U , on a

$$(H_U^{\text{ab}})^0 = \lim_{E \subset K_U} T_E.$$

Comme la réunion des K_U est \bar{K} , on en déduit :

THÉOREME 6 - Le groupe $(H^0)^{ab}$ est isomorphe à $\lim_{E \subset \bar{K}} T_E$.

Remarque. La condition " $E \subset \bar{K}$ " est équivalente à " $E \subset \bar{Q}_p$ ". Il en résulte que le groupe $(H^0)^{ab}$ ne dépend pas de K : il ne dépend que de la caractéristique résiduelle p .

§ 3. Modules de Hodge-Tate à poids 0 et 1

3.1. Rappels sur les poids et racines (cf. [1], [11], SGA 3 III)

Soit M un groupe réductif connexe sur un corps E de caractéristique 0 . Soit E' une extension galoisienne finie de E sur laquelle M se déploie ([1], 18.8); choisissons un tore maximal \underline{T} de M/E' , qui soit déployé (i.e. isomorphe à un produit de groupes $G_{m/E'}$) et soit \underline{B} un sous-groupe de Borel de M/E' , contenant \underline{T} . Notons X (resp. Y) le groupe des caractères (resp. cocaractères, ou "groupes à un paramètre") de \underline{T} . On a :

$$X = \text{Hom}(\underline{T}, G_{m/E'}) \quad \text{et} \quad Y = \text{Hom}(G_{m/E'}, \underline{T}).$$

Les groupes X et Y sont des \mathbf{Z} -modules libres duaux l'un de l'autre ; leur rang est égal à $\dim \underline{T}$. On pose

$$X_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes X \quad \text{et} \quad Y_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes Y ;$$

ce sont des \mathbf{Q} -espaces vectoriels en dualité. Si $x \in X_{\mathbf{Q}}$ et $y \in Y_{\mathbf{Q}}$, le produit scalaire de x et y est noté $\langle x, y \rangle$. On a

$$\langle x, y \rangle \in \mathbf{Z} \quad \text{si} \quad x \in X \quad \text{et} \quad y \in Y .$$

Système de racines

Le système de racines de M/E' , relativement à \underline{T} est une partie finie R de X (à savoir l'ensemble des poids $\neq 0$ de \underline{T} dans la représentation adjointe de M), munie d'une injection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ dans Y . Si $\alpha \in R$, on a $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; la symétrie s_α de $X_{\mathbf{Q}}$ définie par

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

laisse stable X et R ; sa transposée est la symétrie s_α de $Y_{\mathbf{Q}}$ telle que

$$s_\alpha(y) = y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee$$

pour tout y . Le groupe W engendré par les s_α est le groupe de Weyl; il opère sur $X_{\mathbf{Q}}$ et $Y_{\mathbf{Q}}$; on a

$$\langle wx, wy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{si} \quad x \in X_{\mathbf{Q}}, \quad y \in Y_{\mathbf{Q}}, \quad w \in W .$$

Base

Au groupe de Borel \underline{B} est associé une base B de R ; tout élément de R s'é-

crit de façon unique sous la forme $\sum_{\alpha \in B} n_{\alpha} \alpha$, où les n_{α} sont des entiers de même signe. Soit $X_{\mathbb{Q}}^+$ (resp. $Y_{\mathbb{Q}}^+$) l'ensemble des $x \in X_{\mathbb{Q}}$ (resp. $y \in Y_{\mathbb{Q}}$) tels que

$$\langle x, \alpha^{\vee} \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } \langle \alpha, y \rangle \geq 0) \quad \text{pour tout } \alpha \in B,$$

et posons

$$X^+ = X \cap X_{\mathbb{Q}}^+, \quad Y^+ = Y \cap Y_{\mathbb{Q}}^+.$$

Tout élément de X (resp. $Y, X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}$) est le transformé par W d'un élément et d'un seul de X^+ (resp. $Y^+, X_{\mathbb{Q}}^+, Y_{\mathbb{Q}}^+$).

Décomposition de $X_{\mathbb{Q}}$ et $Y_{\mathbb{Q}}$

Soient $(R_i)_{i \in I}$ les composants irréductibles de R ; les $B_i = B \cap R_i$ sont les composantes connexes du graphe de Coxeter de W (Bourbaki, LIE V.VI). Soit X_i le sous-espace vectoriel de $X_{\mathbb{Q}}$ engendré par R_i , et soit Y_i le sous-espace vectoriel de $Y_{\mathbb{Q}}$ engendré par l'ensemble R_i^{\vee} des α^{\vee} avec $\alpha \in R_i$. Si X_c (resp. Y_c) désigne l'orthogonal dans $X_{\mathbb{Q}}$ (resp. dans $Y_{\mathbb{Q}}$) de la somme des Y_i (resp. des X_i), on a

$$X_{\mathbb{Q}} = X_c \oplus \bigoplus_{i \in I} X_i \quad \text{et} \quad Y_{\mathbb{Q}} = Y_c \oplus \bigoplus_{i \in I} Y_i.$$

Ces décompositions en sommes directes reflètent la décomposition du groupe M/E , à isogénie près, en produit direct d'un tore M_c et de groupes simples M_i , $i \in I$.

Si $x \in X_{\mathbb{Q}}$, nous noterons x_c et $(x_i)_{i \in I}$ les composantes de x dans X_c et dans les X_i ; nous emploierons une notation analogue pour les composantes d'un élément y de $Y_{\mathbb{Q}}$. On a

$$\langle x, y \rangle = \langle x_c, y_c \rangle + \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle.$$

Si x et y sont des éléments non nuls de $X_i^+ = X_i \cap X_{\mathbb{Q}}^+$ et de $Y_i^+ = Y_i \cap Y_{\mathbb{Q}}^+$, on a $\langle x, y \rangle > 0$.

Action de $\Gamma = \text{Gal}(E'/E)$

Changer le couple (\underline{T}, B) ne modifie pas (à isomorphisme unique près) le système $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^{\vee}, B)$. Ce système est donc attaché canoniquement au groupe M/E (cf. Bourbaki, LIE VIII.110, Remarque 2). Du fait que M est défini sur E , il en résulte que le groupe $\Gamma = \text{Gal}(E'/E)$ opère de façon naturelle sur $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^{\vee}, B)$, cf. [11], 3.1 ainsi que Bourbaki, LIE VIII.227, exerc.8. En particulier, Γ opère sur le groupe de Weyl W et sur l'ensemble I des composants irréductibles de R .

On a

$$\langle \gamma x, \gamma y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \gamma w x = \gamma(w) \gamma x, \quad \gamma X_C = X_C, \quad \gamma X_i = X_{\gamma i},$$

si $x \in X_Q, y \in Y_Q, w \in W, i \in I$ et $\gamma \in \Gamma$.

Représentations linéaires (cf. [11], ainsi que Bourbaki, LIE VIII, § 7)

Soient V une représentation linéaire de M sur E , et V_E la représentation linéaire de M/E , déduite de V par extension des scalaires à E' . Le tore \underline{T} opère sur V_E . Si $\omega \in X$, soit $V_E(\omega)$ le sous-espace propre de V_E correspondant à ω : on a $v \in V_E(\omega)$ si et seulement si $tv = \omega(t)v$ pour tout point t de \underline{T} . L'espace V_E est somme directe des $V_E(\omega)$, pour $\omega \in X$. On dit que ω est un poids de V si $V_E(\omega) \neq 0$; la dimension $n_V(\omega)$ de $V_E(\omega)$ est alors appelée la multiplicité de ω . L'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V est une partie finie de X , stable par W et Γ . Pour que V soit une représentation linéaire fidèle (resp. à noyau fini) de M , il faut et il suffit que $\Omega(V)$ engendre le Z -module X (resp. le Q -espace vectoriel X_Q). La connaissance des poids de V et de leurs multiplicités détermine la représentation V à isomorphisme près.

On peut décomposer V_E en somme directe de représentations absolument irréductibles. Si V^λ est l'une de ces représentations, il existe une droite D^λ de V^λ et une seule qui est stable par le groupe de Borel \underline{B} . L'action de \underline{T} sur D^λ se fait grâce à un caractère χ^λ qui appartient à X^+ . On a $D^\lambda = V^\lambda \cap V_E(\chi^\lambda)$; le caractère χ^λ est de multiplicité 1 dans V^λ . L'ensemble $\Omega(V^\lambda)$ des poids de V^λ est le R-saturé de χ^λ , au sens de Bourbaki, LIE VIII.125. Tout élément de cet ensemble est de la forme

$$\chi^\lambda = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha,$$

où les n_α sont des entiers ≥ 0 . On dit que χ^λ est le plus haut poids de V^λ . Le plus bas poids de V^λ est $w_0 \chi^\lambda$, où w_0 est l'unique élément de W qui transforme B en $-B$ [l'automorphisme $-w_0$ est l'involution fondamentale de X ; nous le noterons $x \mapsto x'$].

3.2. Représentations de M à poids 0 et 1

On conserve les notations $M, \underline{T}, \underline{B}, R, \dots$ du n° 3.1. On se donne :

- a) une représentation linéaire V du groupe réductif M ,
- b) un corps algébriquement clos C contenant E' ,
- c) un groupe à un paramètre $h_M : G_{m/C} \rightarrow M/C$ défini sur C .

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) V est fidèle ;
- (ii) tout sous-groupe algébrique normal N de M , défini sur E , tel que N/C contienne $\text{Im}(h_M)$, est égal à M ;
- (iii) l'action de $G_{m/C}$ sur $V_C = C \otimes_E V$ définie par h_M a pour seuls poids 0 et 1 .

[Rappelons que le groupe des caractères de G_m s'identifie de façon naturelle à Z ; cela donne un sens à (iii) .]

Nous allons voir que ces hypothèses entraînent des propriétés très particulières pour l'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V , ainsi que pour le groupe à un paramètre h_M . Tout d'abord :

LEMME 2 - Il existe $h_0 \in Y^+$ tel que h_M et h_0 , considérés comme homomorphismes de $G_{m/C}$ dans M/C , soient conjugués l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de M/C ; on a

$$(1) \quad \langle \omega, h_0 \rangle = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } \omega \in \Omega(V) .$$

(On peut en fait montrer que h_0 est unique.)

D'après [1], cor. 11.3, il existe un automorphisme intérieur de M/C qui transforme h_M en un homomorphisme

$$h_1 : G_{m/C} \rightarrow \mathbb{T}/C \subset M/C$$

à valeurs dans \mathbb{T}/C . Du fait que \mathbb{T} est déployé sur E' , h_1 est rationnel sur E' , donc appartient à Y . D'après ce qui a été rappelé au n° 3.1, il existe $w \in W$ tel que $h_0 = wh_1$ appartienne à Y^+ ; comme tout élément de W est induit par un automorphisme intérieur de M/C , l'élément h_0 répond à la question. Les actions de $G_{m/C}$ sur V_C définies par h_M et par h_0 sont conjuguées, donc ont même poids ; vu (iii), ces poids sont égaux à 0 ou 1, ce qui démontre la formule (1).

Remarque. Comme $\Omega(V)$ est stable par le produit semi-direct ΓW de Γ par W , la formule (1) entraîne :

$$(2) \quad \langle \omega, h \rangle = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } \omega \in \Omega(V) \text{ et tout } h \in \Gamma W h_0 .$$

LEMME 3 - (a) L'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V engendre le Z -module X .

(b) L'orbite ΓWh_0 de h_0 par le groupe ΓW engendre le Q-espace vectoriel Y_Q .

L'assertion (a) traduit l'hypothèse que V est fidèle. D'autre part, les sous-espaces de Y_Q stables par W et Γ correspondent de façon naturelle aux sous-groupes normaux connexes de M définis sur E ; si le sous-espace engendré par ΓWh_0 était distinct de Y_Q , il existerait un tel sous-groupe N , distinct de M , et tel que l'image de h_0 soit contenue dans N/C ; il en serait alors de même de l'image de h_M , ce qui contredirait l'hypothèse (ii). D'où (b).

LEMME 4 - Si $\alpha \in R$, $\omega \in \Omega(V)$ et $h \in \Gamma Wh_0$, on a

$$(3) \quad \langle \omega, \alpha^\vee \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1,$$

$$(4) \quad \langle \alpha, h \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

(Noter le rôle symétrique joué par les éléments de $\Omega(V)$ et de ΓWh_0 : ils s'échangent par " dualité de Langlands ". Je ne connais pas d'explication a priori de ce phénomène.)

Appliquons (2) à ω et à $s_\alpha \omega = \omega - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \alpha$. On obtient

$$\langle \omega, h \rangle = 0 \text{ ou } 1$$

$$\langle \omega, h \rangle - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, h \rangle = 0 \text{ ou } 1.$$

Par différence, cela donne :

$$(5) \quad \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, h \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

Remarquons maintenant que, pour ω et α fixés, on peut choisir $h \in \Gamma Wh_0$ tel que $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (b). Comme $\langle \alpha, h \rangle$ est un entier non nul, et que $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle$ est un entier, (5) n'est possible que si $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle = 0, 1$ ou -1 , ce qui démontre (3). De même, pour α et h fixés, on peut choisir $\omega \in \Omega(V)$ tel que $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (a); on en déduit comme ci-dessus que $\langle \alpha, h \rangle = 0, 1$ ou -1 .

[Variante. Puisque V est un M -module fidèle, la représentation adjointe de M est isomorphe à une sous-représentation de $\text{End}(V)$. Or les poids de $\text{End}(V)$ (pour l'action de G_m/C donnée par h, h_0 ou h_M) sont différences de deux poids de V (cf. [8], lemme 11.3), donc appartiennent à $\{0, 1, -1\}$. On retrouve ainsi la formule (4).]

Soit $\Omega^+(V)$ l'ensemble des plus hauts poids des composantes irréductibles de V_E ; on a $\Omega^+(V) \subset X^+ \cap \Omega(V)$, et le R -saturé de $\Omega^+(V)$ est $\Omega(V)$, cf. n° 3.1.

LEMME 5 - Soit R_i ($i \in I$) un composant irréductible de R .

(a) Il existe $\omega \in \Omega^+(V)$ tel que $\omega_i \neq 0$; l'élément ω_i de X_i est alors un poids minuscule du système de racines R_i , au sens de Bourbaki, LIE VIII.129.

(b) Il existe $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$; l'élément h_i de Y_i est alors un poids minuscule du système de racines R_i^\vee dual de R_i .

(Rappelons que ω_i et h_i désignent les composantes d'indice i de ω et de h , cf. n° 3.1.)

Si l'on avait $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega^+(V)$, on aurait aussi $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega(V)$ puisque $\Omega(V)$ est le R -saturé de $\Omega^+(V)$, et cela contredirait le lemme 3 (a). D'autre part, si $\omega_i \neq 0$, la formule (3) du lemme 4, appliquée avec $\alpha \in R_i$, montre que ω_i satisfait à la condition (iii) de Bourbaki, loc. cit., déf. 1, donc est minuscule. D'où (a).

De même, l'existence de $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$ résulte du lemme 3 (b) ; le fait que " $h_i \neq 0$ " \Rightarrow " h_i minuscule" résulte de la formule (4) du lemme 4. D'où (b).

Le lemme 5 entraîne déjà un certain nombre de propriétés de V :

PROPOSITION 4 - On a $\Omega(V) = W \cdot \Omega^+(V)$.

Cela résulte de (a), et du fait que le R -saturé d'un poids minuscule est égal à son orbite par W , cf. Bourbaki, loc. cit., condition (i).

PROPOSITION 5 - Soit \mathfrak{m} l'algèbre de Lie de M , et soit \mathfrak{m}^α le sous-espace propre de $\mathfrak{m}_{\mathbb{E}}$, $= E' \otimes \mathfrak{m}$ correspondant à une racine $\alpha \in R$. Si x appartient à \mathfrak{m}^α , l'endomorphisme x_V de $V_{\mathbb{E}}$, défini par x est de carré nul.

Cela résulte de la prop. 7 de Bourbaki, LIE VIII.128.

COROLLAIRE - Les éléments x de $\mathfrak{m}_{\mathbb{E}}$, tels que $(x_V)^2 = 0$ engendrent l'algèbre dérivée de $\mathfrak{m}_{\mathbb{E}}$.

(Noter l'analogie avec les " Quadratic Pairs " de Thompson [10].)

PROPOSITION 6 - Le groupe $M_{\mathbb{E}}$, n'a aucun quotient $\neq \{1\}$ qui soit simplement connexe.

Il suffit de prouver que $M_{\mathbb{E}}$, n'a aucun quotient simple simplement connexe. Un

tel quotient correspond à un composant irréductible R_i de R ayant la propriété suivante : pour tout $y \in Y$, la composante y_i de y appartient au sous-groupe $Z.R_i^\vee$ de Y_i engendré par R_i^\vee (c'est ainsi que se traduit la simple connexion, cf. SGA 3 III, p. 129). Or, si l'on prend pour y un élément de Γh_0 satisfaisant au lemme 5 (b), la composante y_i de y est minuscule ; d'après la prop. 8 de Bourbaki, LIE VIII.128, y_i n'appartient pas à $Z.R_i^\vee$. D'où la proposition.

COROLLAIRE - Aucun quotient de M/\mathbb{E} , n'est isomorphe à SL_n ($n \geq 2$), Sp_{2n} ($n \geq 1$), G_2 , F_4 ou E_8 .

Revenons aux propriétés des w_i et des h_i :

LEMME 6 - Soient $w \in \Omega^+(V)$ et $h \in \Gamma h_0$. Alors :

- (a) Il existe au plus un élément i de I tel que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$.
- (b) Si $i \in I$ est tel que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$, on a
- (6) $\langle w_i, h_i \rangle + \langle w_i', h_i \rangle = 1$,

où w_i' est le transformé de w_i par l'involution fondamentale $-w_0$, cf. n° 3.1.

Soit J l'ensemble des $i \in I$ tels que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$. Si $i \in J$, le lemme 5 montre que (w_i, h_i) est un couple minuscule : ses deux composantes sont minuscules. Définissons alors la hauteur $\ell(w_i, h_i)$ d'un tel couple par la formule

$$(7) \quad \ell(w_i, h_i) = \langle w_i, h_i \rangle + \langle w_i', h_i \rangle.$$

Comme w_i appartient à $X_i^+ - \{0\}$ et h_i à $Y_i^+ - \{0\}$, les produits scalaires $\langle w_i, h_i \rangle$ et $\langle w_i', h_i \rangle$ sont > 0 , et il en est de même de $\ell(w_i, h_i)$. De plus, comme $w_i + w_i' = w_i - w_0 w_i$, et que w_i est un poids de X_i , $w_i + w_i'$ appartient au sous-groupe $Z.R_i$ de X_i engendré par R_i (Bourbaki, LIE VI.167, prop. 27). Ceci entraîne que son produit scalaire $\ell(w_i, h_i)$ avec h_i est un entier. On conclut de là que $\ell(w_i, h_i)$ est un entier ≥ 1 .

D'autre part, d'après (2) appliqué à w et $w_0 w = -w'$, on a :

$$(8) \quad \langle w_c, h_c \rangle + \sum_{i \in J} \langle w_i, h_i \rangle = 0 \text{ ou } 1$$

$$(9) \quad \langle w_c', h_c \rangle + \sum_{i \in J} \langle w_i', h_i \rangle = 0 \text{ ou } -1.$$

Comme w_0 opère trivialement sur X_c , on a $w_c' = -w_c$. En ajoutant les équations

ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{i \in J} \{ \langle \omega_i, h_i \rangle + \langle \omega_i^!, h_i \rangle \} = 0, 1 \text{ ou } -1,$$

autrement dit

$$\sum_{i \in J} \ell(\omega_i, h_i) = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

Comme les $\ell(\omega_i, h_i)$ sont des entiers ≥ 1 , ceci n'est possible que si $J = \emptyset$, ou si J est réduit à un élément $\{i\}$ et si $\ell(\omega_i, h_i) = 1$, ce qui démontre le lemme.

Remarques

1) Si $J = \{i\}$, les formules (8) et (9) entraînent :

$$(10) \quad \langle \omega_c, h_c \rangle = \langle \omega_i^!, h_i \rangle = 1 - \langle \omega_i, h_i \rangle.$$

La connaissance des $\langle \omega_i, h_i \rangle$ détermine donc celle de $\langle \omega_c, h_c \rangle$. Par contre, si $J = \emptyset$, on a simplement

$$\langle \omega_c, h_c \rangle = \langle \omega, h \rangle = 0 \text{ ou } 1,$$

ce qui ne suffit pas à déterminer $\langle \omega_c, h_c \rangle$.

2) Les arguments utilisés ci-dessus sont essentiellement les mêmes que ceux de Springer [8], § 11 ; la différence principale est la présence du groupe Γ qui n'apparaît pas dans [8], où le corps de base est supposé algébriquement clos.

La proposition suivante résume le lemme 5 et la partie (b) du lemme 6 :

PROPOSITION 7 - Pour tout $i \in I$, il existe $\omega \in \Omega^+(V)$ et $h \in \Gamma h_0$ tels que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$; tout couple (ω_i, h_i) ainsi obtenu est un couple minuscule de hauteur 1 (au sens défini ci-dessus).

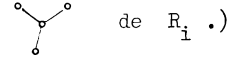
COROLLAIRE 1 - Tous les composants irréductibles de R sont de type classique A_n, B_n, C_n ou D_n .

En effet, les systèmes de racines irréductibles de type G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 ne possèdent pas de couple minuscule de hauteur 1, cf. Annexe.

COROLLAIRE 2 - Aucun composant irréductible de R n'est de type D_4 trialitaire.

(Soit Γ_i le sous-groupe de Γ qui fixe i . Le groupe Γ_i opère sur R_i . On dit que R_i est "de type D_4 trialitaire" s'il est de type D_4 et si l'image de Γ_i dans $\text{Aut}(R_i)$ est d'ordre 3 ou 6, autrement dit si Γ_i permute tran-

sitivement les trois sommets terminaux du graphe de Dynkin



Supposons que R_i soit de type D_4 tripartite. Le groupe Γ_i permute transitivement les trois poids minuscules $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ de R_i , cf. Annexe. Comme l'un de ces poids est de la forme ω_i , avec $\omega \in \Omega^+(V)$, ils le sont tous. Choisissons alors $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$. D'après la prop. 7, les trois couples minuscules

$$(\omega_1, h_i), (\omega_3, h_i) \text{ et } (\omega_4, h_i)$$

sont de hauteur 1, ce qui est impossible (cf. Annexe).

Le cas irréductible

Supposons V irréductible. Son commutant Δ est un corps. Notons E_1 le centre de Δ , et posons

$$[\Delta : E_1] = m^2 \text{ et } [E_1 : E] = r.$$

L'entier m est l'indice de Schur de V . La représentation V_{E_1} de M/E_1 se décompose en r représentations irréductibles conjuguées, chacune de multiplicité m . Le groupe Γ opère transitivement sur $\Omega^+(V)$, qui a r éléments. Si $\omega \in \Omega(V)$, la multiplicité $n_V(\omega)$ de ω est égale à m : c'est clair lorsque ω appartient à $\Omega^+(V)$, et le cas général résulte de ce que $\Omega(V)$ est égal à $W \cdot \Omega^+(V)$, cf. prop. 4. On a en particulier

$$\dim V = m \text{ Card } \Omega(V) = m \text{ Card } W \cdot \Omega^+(V).$$

D'autre part, si ω est un élément de $\Omega^+(V)$, on a

$$\text{Card } W \cdot \Omega^+(V) = r \text{ Card } W \omega = r \prod_{i \in I} d(\omega_i),$$

où $d(\omega_i) = \text{Card } W \omega_i$. D'où :

PROPOSITION 8 - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a

$$(11) \quad \dim V = m r \prod_{i \in I} d(\omega_i).$$

Noter que $d(\omega_i) = 1$ si $\omega_i = 0$; lorsque $\omega_i \neq 0$, ω_i est minuscule, et $d(\omega_i)$ se calcule sans difficulté (cf. Annexe) ; on trouve en particulier que $d(\omega_i)$ est pair si R_i n'est pas de type A. Comme, pour $i \in I$ donné, on peut choisir ω tel que $\omega_i \neq 0$ (lemme 5), on en conclut en appliquant (11) :

COROLLAIRE - Si V est irréductible de dimension impaire, tous les composants irréductibles de R sont de type A.

Remarque

Lorsque $r = 1$, ce qui est le cas lorsque V est absolument simple, on peut pré-

ciser davantage la structure de M et de V : si ω est l'unique élément de $\Omega^+(V)$, on a $\omega_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ d'après le lemme 5 (a) ; vu le lemme 6 (a), il existe au plus un élément i de I tel que $(h_0)_i \neq 0$. D'où deux cas :

a) $(h_0)_i = 0$ pour tout $i \in I$; d'après le lemme 3, cela entraîne que $I = \emptyset$, i.e. que M est commutatif ; on a alors $m = 1$ et $\dim V = 1$; le groupe M est, soit réduit à $\{1\}$ (poids 0), soit égal à G_m (poids 1).

b) Il existe un unique élément i de I tel que $(h_0)_i \neq 0$; utilisant le lemme 5 (b), on voit que $I = \Gamma i$, donc que Γ opère transitivement sur I . Soit Γ_i le fixateur de i dans Γ , et soit E_i le sous-corps de E' fixé par Γ_i . Le groupe adjoint de M s'obtient par restriction des scalaires de E_i à E à partir d'un groupe absolument simple sur E_i , de type A, B, C ou D . La composante neutre du centre de M est le groupe G_m , opérant par homothéties. On a

$$(12) \quad \dim V = m d(\omega_i) \begin{matrix} [E_i : E] \\ \uparrow \\ \Gamma_i \end{matrix} .$$

3.3. Application aux modules de Hodge-Tate à poids 0 et 1

Soit V un module de Hodge-Tate, et soit H_V le groupe algébrique correspondant, cf. n° 1.3. Soit V_{ss} le semi-simplifié de V , i.e. la somme directe des quotients d'une suite de Jordan-Hölder de V . Le groupe H_V opère sur V_{ss} , et le noyau de cette action est le radical unipotent U_V de H_V , autrement dit le plus petit sous-groupe normal de H_V tel que H_V/U_V soit réductif ([1], 11.21). Si l'on s'intéresse simplement aux quotients réductifs de H_V , on peut donc supposer que $V = V_{ss}$, i.e. que V est semi-simple ; dans ce cas H_V est réductif.

Faisons cette hypothèse, et supposons en outre que les poids de V sont 0 et 1, autrement dit que $V_C = V_C(0) \oplus V_C(1)$. Si l'on pose $E = \mathbb{Q}_p$, $M = H_V^0$, les hypothèses de 3.2 sont satisfaites, en prenant pour h_M le groupe à un paramètre canonique h_V (cf. 1.4) : (i) est évident, (ii) est une conséquence du théorème de Sen (th. 2), et (iii) traduit le fait que les poids de V sont égaux à 0 et 1. On peut donc appliquer au groupe $M = H_V^0$ les résultats du n° 3.2, et en particulier les prop. 4, 5, 6, 7, 8. On obtient ainsi, par exemple :

THÉOREME 7 - Si V est un module de Hodge-Tate semi-simple à poids 0 et 1, les composants irréductibles du système de racines de H_V^0 sont de type A, B, C ou D ; si V est irréductible de dimension impaire, ces composants sont tous de type A . Aucun quotient $\neq \{1\}$ de H_V^0 n'est simplement connexe.

COROLLAIRE - Tout quotient simple du groupe proalgébrique H_{div} (cf. 1.6) est de type A, B, C ou D.

Problème

Existe-t-il des groupes p-divisibles correspondant aux divers couples (V, H_V^0) qui sont a priori possibles d'après le n° 3.2 ? Par exemple, peut-on construire un tel groupe pour lequel le système de racines de H_V^0 soit de type D_n , le module V étant (à l'action du centre près) une représentation semi-spinorielle de D_n , de degré 2^{n-1} ? La théorie de Fontaine [2] devrait permettre de répondre à ce genre de question.

Annexe - Couples minuscules de type A_n, B_n, \dots, E_8

Pour chaque système de racines irréductible réduit, on note $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sa base, numérotée comme dans Bourbaki, LIE VI, Planches, $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ ses poids fondamentaux, et $\{\check{\varpi}_1, \dots, \check{\varpi}_n\}$ ceux du système dual. Les ϖ_i et les $\check{\varpi}_i$ sont caractérisés par

$$\langle \varpi_i, \alpha_j \check{\varpi}_j \rangle = \langle \alpha_j, \check{\varpi}_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Tout poids minuscule est un poids fondamental ; pour qu'un poids fondamental ϖ_i soit minuscule, il faut et il suffit que le coefficient de $\alpha_i \check{\varpi}_i$ dans la plus grande racine du système dual soit égal à 1 (Bourbaki, LIE VIII.128, prop.8). Cela rend immédiate la détermination des poids minuscules. On obtient ainsi :

Type A_n ($n \geq 1$) $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{0}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{0}{\circ} \text{---} \overset{n}{\circ}$

Tous les ϖ_i et tous les $\check{\varpi}_j$ sont minuscules. L'involution fondamentale $-w_0$ transforme i en $i' = n + 1 - i$ et j en $j' = n + 1 - j$. La hauteur du couple minuscule $(\varpi_i, \check{\varpi}_j)$ est donnée par :

$$h(\varpi_i, \check{\varpi}_j) = \langle \varpi_i, \check{\varpi}_j \rangle + \langle \check{\varpi}_{i'}, \varpi_{j'} \rangle = \text{Inf}(i, j, i', j').$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont :

$$(\varpi_1, \check{\varpi}_i), (\varpi_n, \check{\varpi}_i), (\varpi_i, \check{\varpi}_1), (\varpi_i, \check{\varpi}_n) \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n.$$

La représentation associée à w_i est la puissance extérieure i -ème de la représentation standard de degré $n + 1$. Son degré

$$d(w_i) = \text{Card } Ww_i$$

est égal à $\binom{n+1}{i}$.

Type B_n ($n \geq 2$) $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{\dots}{\circ} \text{---} \overset{n}{\circ} \Rightarrow \overset{\circ}{\circ}$

Le couple (w_n, w_1^\vee) est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1 . La représentation associée à w_n est la représentation spinorielle ; son degré $d(w_n)$ est 2^n .

Type C_n ($n \geq 2$) $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{\dots}{\circ} \text{---} \overset{n}{\circ} \Leftarrow \overset{\circ}{\circ}$

Ce cas est dual du précédent. Le couple (w_1, w_n^\vee) est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1 . La représentation associée à w_1 est la représentation standard ; son degré $d(w_1)$ est $2n$.

Type D_n ($n \geq 4$) $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{\dots}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \begin{matrix} \swarrow \overset{n-1}{\circ} \\ \searrow \overset{n}{\circ} \end{matrix}$

Il y a trois poids minuscules w_1, w_{n-1} et w_n qui correspondent à la représentation standard et aux deux représentations semi-spinorielles. Leurs degrés sont :

$$d(w_1) = 2n, d(w_{n-1}) = 2^{n-1} \text{ et } d(w_n) = 2^{n-1} .$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont

pour $n = 4$: (w_i, w_j^\vee) avec $i, j \in \{1, 3, 4\}$ et $i \neq j$

pour $n \geq 5$: (w_1, w_{n-1}^\vee) , (w_1, w_n^\vee) , (w_{n-1}, w_1^\vee) et (w_n, w_1^\vee) .

Type E_6 $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{6}{\circ}$
 $\overset{\circ}{\circ} \downarrow$

Il y a quatre couples minuscules :

$$(w_1, w_1^\vee), (w_1, w_6^\vee), (w_6, w_1^\vee) \text{ et } (w_6, w_6^\vee) .$$

Ils sont de hauteur 2 .

Type E_7 $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{\circ}{\circ} \text{---} \overset{7}{\circ}$
 $\overset{\circ}{\circ} \downarrow$

Il y a un seul couple minuscule : (w_7, w_7^\vee) . Il est de hauteur 3 .

Types G_2, F_4, E_8

Il n'y a pas de poids minuscule.

* * *

Bibliographie

- [1] A. BOREL - Linear Algebraic Groups, Notes by Hyman Bass, Benjamin, New York, 1969.
 - [2] J-M. FONTAINE - Modules galoisiens, modules filtrés, et anneaux de Barsotti-Tate, ce volume.
 - [3] N. SAAVEDRA RIVANO - Catégories Tannakiennes, Lect. Notes in Math. 265, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.
 - [4] S. SEN - Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. 97 (1973), 160-170.
 - [5] J-P. SERRE - Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 118-131.
 - [6] ——— - Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.
 - [7] ——— - Résumé des cours de 1967-1968, Annuaire du Collège de France (1968-1969), 45-50.
 - [8] T.A. SPRINGER - Jordan Algebras and Algebraic Groups, Ergebn. der Math. 75, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.
 - [9] J. TATE - p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 158-183.
 - [10] J.G. THOMPSON - Quadratic Pairs, Congrès Intern. Math. Nice, 1970, tome I, 375-376.
 - [11] J. TITS - Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, J. reine ang. Math. 247 (1971), 196-220.
- SGA 3 III M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en groupes III, Lect. Notes in Math. 153, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.
- SGA 7 I A. GROTHENDIECK - Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lect. Notes in Math. 288, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

Collège de France
75231 PARIS Cedex 05

Errata et Compléments

à

[6] Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves

- I-12. La question 3 est trop optimiste. Il est facile de faire des contre-exemples en prenant des représentations à image finie d'indice de Schur > 1 .
- I-13, l. 8-9. Le "problème des groupes de congruence" pour les variétés abéliennes a une réponse positive (cf. Izv. Akad. Nauk CCCP, 35 (1971), 731-737).
- I-17, l. 19-20. L'existence des représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires a été prouvée par Deligne (Sém. Bourbaki 1968/69, exposé 355).
- I-29, l. 8. Remplacer " $c_\chi + o(n)$ " par " $c_\chi n + o(n)$ ".
- II-12, l. -4. Remplacer " $U_{\ell,m}$ " par " $\pi_\ell(U_{\ell,m})$ ".
- II-20, l. 13. Remplacer "Assertion a)" par "Assertion 3)".
- II-25, l. -8. Remplacer " $e(I)$ " par " $e(I)$ ".
- III-13, l. -4. Remplacer "Bambaki" par "Bourbaki".
- III-36, l. -6. Remplacer "in \mathbb{Q} " par "is \mathbb{Q} ".
- III-37, l. 5 ; III-38, l. 7,11 ; III-51, l. -4. L'espace $H^1(G, C)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur K , et non sur C .
- IV-14, l.4. Ajouter l'hypothèse que C est semi-simple.
- IV-18, l.8. Remplacer " $\text{Gal}(K/K)$ " par " $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ ".
- IV-21, l. -7, -8. La conjecture faite dans cette Remarque a été démontrée (cf. Invent. math. 15 (1972), 259-331).
- IV-28, l. 8. Remplacer "order 2" par "order 4".
- IV-28, l. 9. Remplacer "order 6" par "order 12".
- IV-28, l. 11. Remplacer "an isomorphism" par "a homomorphism with a kernel of order 2".
- IV-41, l. 13. Supprimer "in the near future". Ajouter "A different proof has been published by W. Messing (Lect. Notes in Math. 264, Springer-Verlag, 1972)".
- B-2, [17]. Remplacer "89" par "81".
- B-3, [32]. Supprimer "and applications". Remplacer "In preparation" par "Ann. of Math. 88 (1968), 492-517".