GUY LAFFAILLE

Construction de groupes p-divisibles

Astérisque, tome 65 (1979), p. 103-123

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__103_0>

CONSTRUCTION DE GROUPES p-DIVISIBLES

Le cas de dimension 1 .

par

Guy LAFFAILLE

0. - INTRODUCTION.

Soit A l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \neq 0$. Soit K le corps des fractions de A . Soient K' une extension finie de K de degré e et A' l'anneau des entiers de K' .

Soient G un groupe p-divisible sur A' et M le module de Dieudonné de sa fibre spéciale. Grothendieck [5] , [6] et Messing [9] associent à G un couple $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ où $\mathcal{M} = K \otimes_A M$ et où $\mathcal{L}$ est le K'-espace vectoriel des logarithmes, avec une injection K'-linéaire de $\mathcal{L}$ dans $K' \otimes_K \mathcal{M}$. Ils obtiennent ainsi un foncteur $LM_{K'}$ contravariant, additif et pleinement fidèle de la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénie près, sur A' dans une catégorie de couples (voir aussi [3] , p. 221).

Grothendieck a posé la question de savoir quelle est l'image essentielle de $LM_{K'}$ et Fontaine a conjecturé que celle-ci est la catégorie des K'-couples faiblement admissibles définis au n° 1.3 ci-après (voir aussi [4]).

Nous démontrons cette conjecture en dimension 1 : les K'-couples faiblement admissibles $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ tels que $\dim_{K'}\mathcal{L} = 1$ proviennent de groupes p-divisibles de dimension 1. La démonstration utilise d'une part un procédé de réduction au cas simple (th. 1.8 et cor. 1.12) et d'autre part les formules explicites de Hazewinkel ([7], § 15.2).

Nous obtenons le résultat suivant (cf. prop. 2.4 et 2.7) : soit h un entier ≥ 1. Posons $\ell_h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$ et soit v la valuation de K' normalisée par $v(p) = 1$. Alors quels que soient les éléments b_i de K', avec $1 \leq i \leq h-1$, tels que $v(b_i) \geq -i/h$, la série formelle $\ell(X) = \ell_h(X) + \sum_{i=1}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$ est le logarithme d'un groupe p-divisible de hauteur h défini sur A'. En outre, tout groupe p-divisible connexe de dimension 1 et de hauteur h défini sur A' est isogène à un (mais pas un seul) groupe dont le logarithme a la forme ci-dessus.

<u>Remarques</u>.

1. Des calculs assez longs permettent de montrer que tout K'-couple faiblement admissible $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ tel que $\dim_K \mathcal{M} \leq 4$ est l'image d'un groupe p-divisible défini sur A'.

2. Lorsque $e \leq p-1$, on connaît déjà une autre description de l'image essentielle de $LM_{K'}$ (Messing [9] et Fontaine [3]) ; nous montrerons ailleurs que cette description entraîne que la conjecture de Fontaine est vraie dans ce cas.

1. - <u>LA CATÉGORIE DES</u> K'-<u>COUPLES FAIBLEMENT ADMISSIBLES</u>.

1.1. On note π une uniformisante de A' et σ le Frobenius absolu sur k et K.

Un F-<u>iso-cristal</u> est un espace vectoriel de dimension finie sur K

muni d'un automorphisme σ-semi-linéaire F.

On appelle K'-<u>couple</u> la donnée d'un couple $(\mathcal{L},\mathfrak{M})$ formé :

- d'une part, d'un F-iso-cristal $\mathfrak{M}$ contenant un <u>réseau</u> M de $\mathfrak{M}$ (i.e. un sous-A-module libre de $\mathfrak{M}$ tel que $K\otimes_A M$ s'identifie à $\mathfrak{M}$) tel que $pM \subset FM \subset M$;
- d'autre part, d'un sous-K'-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{M}_{K'} = K'\otimes_K \mathfrak{M}$.

Un morphisme de K'-couples est une application K-linéaire $u : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ qui commute à l'action de F telle que, si $u_{K'} = \mathrm{id}_{K'} \otimes u$, on ait $u_{K'}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}'$.

Soit $K_\sigma[F]$ (resp. $A_\sigma[F]$) l'anneau non commutatif engendré par K (resp. A) et une indéterminée F avec les relations $F\lambda = \sigma(\lambda)F$ pour tout $\lambda \in K$ (resp. $\lambda \in A$). Si $\mathfrak{M}$ est un F-iso-cristal, $\mathfrak{M}$ est muni d'une structure de $K_\sigma[F]$-module à gauche, et si M est un réseau de $\mathfrak{M}$ stable par F, alors M est muni d'une structure de $A_\sigma[F]$-module à gauche.

On sait depuis Dieudonné [2] et Manin ([8] II §4.1) que la catégorie des F-iso-cristaux est semi-simple. Si $\mathfrak{M}$ est un F-iso-cristal, on a une décomposition en composantes isotypiques $\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Q}} \mathfrak{M}_\alpha$, où $\mathfrak{M}_\alpha$ est le sous-K-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ engendré par les x tels que $F^s x = p^r x$ si $\alpha = r/s$, avec r et s entiers premiers entre eux et $s \geq 1$. Les α tels que $\mathfrak{M}_\alpha \neq 0$ sont les <u>pentes</u> de $\mathfrak{M}$. Un objet simple de pente $\alpha = r/s$ est isomorphe à $K_\sigma[F]/(F^s - p^r)$, sa dimension sur K est donc égale à s (cf. aussi [1]).

Manin montre aussi (<u>loc. cit.</u>) qu'un F-iso-cristal $\mathfrak{M}$ contient un réseau M tel que $pM \subset FM \subset M$ si et seulement si les pentes de $\mathfrak{M}$ sont telles que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Si $\mathfrak{M}$ est un F-iso-cristal, on pose $d_{\mathfrak{M}} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} \alpha \dim_K(\mathfrak{M}_\alpha)$. Si $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ est une suite exacte de F-iso-cristaux, il est clair que $d_{\mathcal{M}} = d_{\mathcal{M}'} + d_{\mathcal{M}''}$.

1.2. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{M}$ un F-iso-cristal dont les pentes sont ≥ 0 et soit M un réseau de $\mathcal{M}$ stable par F . La longueur du A-module M/FM est égale à $d_{\mathcal{M}}$; en particulier elle ne dépend pas du choix de M .

Démonstration : Montrons d'abord que la longueur de M/FM ne dépend pas du choix de M . Soit N un autre réseau de $\mathcal{M}$ stable par F . Quitte à remplacer N par $p^n N$, pour un entier n convenable, on peut supposer que $N \subset M$. On a alors

$$\lg(M/FN) = \lg(M/N) + \lg(N/FN) = \lg(M/FM) + \lg(FM/FN) .$$

L'application F induit par passage aux quotients une bijection σ-semi-linéaire de M/N sur FM/FN , donc ces deux modules ont même longueur et par conséquent $\lg(M/FM) = \lg(N/FN)$.

Il suffit donc pour terminer la démonstration de calculer $\lg(M/FM)$ pour un M particulier. Comme la catégorie des F-iso-cristaux est semi-simple, on peut supposer $\mathcal{M}$ simple de pente $\alpha = r/s$. Soit $x \neq 0$ dans $\mathcal{M}$ tel que $F^s x = p^r x$ et soit M le $A_\sigma[F]$-module engendré par x ; alors $(x, Fx, \ldots, F^{s-1}x)$ forme une base de M et $\lg(M/FM) = r = s(r/s) = \alpha \dim_K \mathcal{M}_\alpha$.

1.3. PROPOSITION. - Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ un K'-couple. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) on a $\dim_{K'} \mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et pour tout sous-F-iso-cristal $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, on a $\dim_{K'}(\mathcal{L} \cap \mathcal{M}'_{K'}) \leq d_{\mathcal{M}'}$;

(ii) on a $\dim_{K'} \mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et pour tout F-iso-cristal quotient $\mathcal{M}''$ de $\mathcal{M}$, la dimension sur K' de l'image de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}''_{K'}$ est supérieure ou égale à $d_{\mathcal{M}''}$.

Démonstration . Soit $\mathcal{M}''$ un F-iso-cristal quotient de $\mathcal{M}$ et soit

$\mathcal{M}'$ le noyau de la projection de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}''$. Soit $\mathcal{L}''$ la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}''_{K'}$, on a $\dim_{K'}\mathcal{L} = \dim_{K'}(\mathcal{L}\cap\mathcal{M}'_{K'}) + \dim_{K'}\mathcal{L}''$ et $d_{\mathcal{M}} = d_{\mathcal{M}'} + d_{\mathcal{M}''}$, d'où la proposition.

On dit qu'un K'-couple est <u>faiblement admissible</u> s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente.

La catégorie des K'-couples faiblement admissibles forme une sous-catégorie pleine de la catégorie des K'-couples ; c'est une catégorie abélienne [4] . Les objets simples sont caractérisés par le fait que les inégalités de la proposition 1.3 sont strictes pour tout sous-F-isocristal propre (ou pour tout quotient propre).

1.4. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ <u>un</u> K'-<u>couple qui est dans l'image essentielle du foncteur</u> $LM_{K'}$. <u>Alors</u> $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ <u>est faiblement admissible</u>.

Avant de démontrer la proposition, rappelons quelques résultats de [3] . Fontaine y construit un foncteur $M \to M_{A'}$ de la catégorie des $A_\sigma[F]$-modules M , tels que $pM \subset FM \subset M$, dans la catégorie des A'-modules. Il définit un sous-A'-module $M_{A'}[1]$ de $M_{A'}$ tel que $M_{A'}/M_{A'}[1]$ soit fonctoriellement isomorphe à M/FM en tant que k-espace vectoriel (IV, §2).

Si G est un groupe p-divisible sur A' , Fontaine associe à G un A'-module libre $L_{A'}(G)$ avec une application A'-linéaire $\rho : L_{A'}(G) \to M_{A'}$ où M est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G . L'application ρ induit un isomorphisme de $L_{A'}(G)/\pi L_{A'}(G)$ sur $M_{A'}/M_{A'}[1] \simeq M/FM$ (IV, prop.4.2).

Si $(\mathcal{L},\mathcal{M}) = LM_{K'}(G)$, on a $\mathcal{M}_{K'} = K' \otimes_K M_K = K' \otimes_{A'} M_{A'}$ et $\mathcal{L}$ est l'image dans $\mathcal{M}_{K'}$ de $K' \otimes_{A'} L_{A'}(G)$.

1.5. <u>Démonstration de la proposition</u>. On reprend les notations de [3] rappelées ci-dessus.

Soit G un groupe p-divisible sur A' tel que $(\mathcal{L},\mathcal{M}) \simeq LM_{K'}(G)$. Soit M le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G.

Des isomorphismes : $L_{A'}(G)/\pi L_{A'}(G) \simeq M_{A'}/M_{A'}[1] \simeq M/FM$, on déduit $\dim_{K'}\mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et $M_{A'} = L_{A'}(G) + M_{A'}[1]$.

Soit $\mathcal{M}''$ un quotient de $\mathcal{M}$ et M'' la projection de M sur $\mathcal{M}''$. Soit $\psi : M_{A'} \to M''_{A'}$ la flèche déduite par fonctorialité de la projection de M sur M''. D'après la proposition 2.4 du chapitre IV de [3], l'application ψ est surjective et on a $\psi(M_{A'}[1]) \subset M''_{A'}[1]$. On en déduit que $M''_{A'} = \psi(L_{A'}(G)) + M''_{A'}[1]$, d'où une surjection de $\psi(L_{A'}(G))$ sur M''/FM''. Donc le rang de $\psi(L_{A'}(G))$ sur A' est supérieur ou égal à $d_{\mathcal{M}''}$; comme ce rang est égal à la dimension de la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}''_{K'}$, la proposition est démontrée.

1.6. Soit $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ un K'-couple faiblement admissible, on pose $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^{et}$ et $\mathcal{M}^c = \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathcal{M}_\alpha$. On dit que le K'-couple $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est <u>connexe</u> si $\mathcal{M}^{et} = 0$, <u>étale</u> si $\mathcal{M}^c = 0$.

Comme $d_{\mathcal{M}_0} = 0$, on a $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}^{et}_{K'} = 0$, donc la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}^c_{K'}$ est injective, soit $\mathcal{L}^c$ son image. On pose $(\mathcal{L},\mathcal{M})^c = (\mathcal{L}^c,\mathcal{M}^c)$ et $(\mathcal{L},\mathcal{M})^{et} = (0,\mathcal{M}^{et})$. On a donc une suite exacte de K'-couples faiblement admissibles :

$$0 \to (\mathcal{L},\mathcal{M})^{et} \to (\mathcal{L},\mathcal{M}) \to (\mathcal{L},\mathcal{M})^c \to 0 .$$

1.7. PROPOSITION. <u>Si</u> $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ <u>est un</u> K'-<u>couple étale</u>, <u>alors</u> $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ <u>est dans l'image essentielle de</u> $LM_{K'}$.

<u>Démonstration</u>. On a $\mathcal{L} = 0$ et $\mathcal{M} = K \otimes_A M$ où M est le module de Dieudonné d'un groupe p-divisible étale sur k. Ce groupe se relève en un groupe étale G sur A et $LM_{K'}(A' \otimes_A G)$ s'identifie à $(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

1.8. THÉORÈME. - Soit $0 \to (\mathcal{L}',\mathcal{M}') \to (\mathcal{L},\mathcal{M}) \to (\mathcal{L}'',\mathcal{M}'') \to 0$ une suite exacte de K'-couples faiblement admissibles. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est dans l'image essentielle du foncteur $LM_{K'}$.

(ii) $(\mathcal{L}',\mathcal{M}')$ et $(\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')$ sont dans l'image essentielle de $LM_{K'}$.

Avant de démontrer le théorème, rappelons quelques résultats de Fontaine.

Dans [3], p.100, Fontaine associe à certains A'-anneaux R un anneau $\hat{R}_K^{an}$ de fonctions analytiques qui est le complété de $K' \otimes_{A'} R$ pour une topologie convenable. Si R est la bigèbre d'un groupe p-divisible, connexe, de dimension d , sur A' , l'anneau $\hat{R}_K^{an}$ est isomorphe à un sous-anneau de $K'[[X_1,\dots,X_d]]$.

Soit G un groupe p-divisible sur A' . Soit B la bigèbre formelle de G et Δ le coproduit de B . Le coproduit Δ se prolonge à $\hat{B}_K^{an}$ et si $x \in \hat{B}_K^{an}$ on pose $\partial x = x \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} x - \Delta x$. On peut alors identifier $\mathcal{M}_{K'}(G)$ au quotient, par $K' \otimes_{A'} B$, du sous-K'-espace vectoriel de $\hat{B}_K^{an}$ formé des x tels que $\partial x \in K' \otimes_{A'} (B \hat{\otimes}_{A'} B)$ et $\mathcal{L}(G)$ s'identifie à l'image dans $\mathcal{M}_{K'}(G)$ des $x \in \hat{B}_K^{an}$ tels que $\partial x = 0$.

Soit $\underline{a} = (\dots,a_{-n},\dots,a_o)$ un covecteur de Witt à coefficients dans $B \otimes_{A'} k$. Pour tout entier n , soit $\hat{a}_{-n}$ un relèvement de a_{-n} dans B ; la série $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_{-n}^{p^n}/p^n$ converge dans $\hat{B}_K^{an}$: c'est un relèvement de $\underline{a}$ dans $\hat{B}_K^{an}$ ([3], II, §5.5 et IV, §3.2). Comme le module de Dieudonné M de la fibre spéciale de G , s'identifie à un sous-A-module de $CW_k(B \otimes_{A'} k)$, on définit ainsi des relèvements des éléments de M dans $\hat{B}_K^{an}$. Ces relèvements dépendent du choix des $\hat{a}_{-n}$, Fontaine montre que deux relèvements distincts diffèrent d'un élément de P'(B) qui est le sous-A'-module fermé de $\hat{B}_K^{an}$ engendré par les $\hat{b}_{-n}^{p^n}/p^n$ où $\hat{b}_{-n} \in \pi B$.

1.9. Démonstration du théorème. Posons $d = d_{\mathcal{M}}$, $d' = d_{\mathcal{M}'}$ et $d'' = d_{\mathcal{M}''}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) . Supposons d'abord que $(\mathcal{L}'', \mathcal{M}'')$ est connexe. Soit G'' un groupe p-divisible connexe de dimension d'' défini sur A' tel que $LM_{K'}(G'') \simeq (\mathcal{L}'', \mathcal{M}'')$. Si on choisit des coordonnées $X_1, \ldots, X_{d''}$ sur G'' , la bigèbre formelle B'' de G'' s'identifie à $A'[[X_1, \ldots, X_{d''}]]$, avec un coproduit Δ'' .

Soit, d'autre part, un groupe p-divisible G' de dimension d' défini sur A' tel que $LM_{K'}(G') \simeq (\mathcal{L}', \mathcal{M}')$. Notons B' la bigèbre de G' et Δ' le coproduit de B' .

On va munir $B = B' \hat{\otimes}_{A'} B'' = B'[[X_1, \ldots, X_{d''}]]$ d'un coproduit Δ tel que $\Delta(b) = \Delta'(b)$ si $b \in B'$ et tel que le groupe formel associé à B ait une image par $LM_{K'}$ isomorphe à $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Identifions le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G' à un réseau M' de $\mathcal{M}'$. Soit $m_1, \ldots, m_{h'}$ une base de M' sur A . Soit $\hat{m}_j$ un relèvement de m_j dans $\hat{B}'^{an}_K$. D'après Fontaine ([3] , IV prop. 4.1), les éléments $\partial \hat{m}_j = 1 \hat{\otimes} \hat{m}_j + \hat{m}_j \hat{\otimes} 1 - \Delta' \hat{m}_j$ sont à dénominateurs bornés. Soit s un entier tel que, pour tout j , les $\partial \hat{m}_j$ appartiennent à $p^{-s+1}(B' \hat{\otimes}_{A'} B')$.

Soit $x_1, \ldots, x_{d''}$ une base de $\mathcal{L}''$; on peut choisir les coordonnées $X_1, \ldots, X_{d''}$ de G'' de sorte que x_i se relève dans l'anneau des fonctions analytiques $\hat{B}''^{an}_K$ sur G'' (cf. [3] p.100) en une série $\hat{x}_i$ telle que $\hat{x}_i \equiv X_i$ modulo degré 2 . La série x_i appartient à $K'[[X_1, \ldots, X_{d''}]]$ et ses dérivées partielles sont à coefficients dans A' (cf. [3] p. 104).

D'après la semi-simplicité de la catégorie des F-iso-cristaux, $\mathcal{M}''$ est isomorphe (de manière non canonique) à un F-iso-cristal supplémentaire de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$, ceci nous permet d'identifier $\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}''$.

Relevons $x_1, \ldots, x_{d''}$ dans $\mathcal{L}$ en $y_1, \ldots, y_{d''}$. On a donc

$y_i = x_i + z_i$, avec $z_i \in K' \otimes_K \mathfrak{m}'$.

Les z_i s'écrivent $z_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} m_j$ avec $a_{ij} \in K'$. Si on remplace M' par $p^{-r}M'$, pour un certain entier r , on a $z_i = \sum_{j=1}^{h'} (p^r a_{ij})(p^{-r} m_j)$. Choisissons r de sorte que les z_i appartiennent tous à $p^s M'$, où s est l'entier choisi plus haut. On relève z_i en $\hat{z}_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} \hat{m}_j$, donc $\partial \hat{z}_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} \partial \hat{m}_j \in p(B' \hat{\otimes}_{A'} B')$. On relève enfin y_i en $\hat{y}_i = \hat{x}_i + \hat{z}_i$.

Soit $\ell(X) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{d''} \end{pmatrix}$, c'est un vecteur à d'' composantes dont chacune est une série à d'' indéterminées, à coefficients dans K' . La jacobienne de $\ell(X)$ est à coefficients dans A' ainsi que son inverse.

Pour définir le coproduit Δ de B dans

$B \hat{\otimes}_{A'} B = (B' \hat{\otimes}_{A'} B')[[1 \hat{\otimes} X_1, \ldots, X_1 \hat{\otimes} 1, \ldots]]$

il reste à définir les $\Delta(X_i)$.

Soit $\partial \hat{z} = \begin{pmatrix} \partial \hat{z}_i \\ \vdots \\ \partial \hat{z}_{d''} \end{pmatrix}$ et posons $\Delta(X) = \begin{pmatrix} \Delta(X_1) \\ \vdots \\ \Delta(X_{d''}) \end{pmatrix} = \ell^{-1}(\ell(X \hat{\otimes} 1) + \ell(1 \hat{\otimes} X) + \partial \hat{z})$.

Comme les $\partial \hat{z}_i$ appartiennent à $pB' \hat{\otimes}_{A'} B'$, en appliquant la formule de Taylor à ℓ^{-1} on voit que la définition de $\Delta(X)$ a un sens et que $\Delta(X)$ a ses composantes dans $B \hat{\otimes}_{A'} B$. On vérifie facilement que Δ est un coproduit.

La formule qui définit $\Delta(X)$ entraîne immédiatement que :

$\Delta(\ell(X) + \hat{z}) = \ell(X \hat{\otimes} 1) + \ell(1 \hat{\otimes} X) + \hat{z} \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \hat{z}$

ce qui veut dire que $\Delta(\hat{y}_i) = \hat{y}_i \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \hat{y}_i$. Il est alors clair que le groupe p-divisible associé à B a une image par $LM_{K'}$ qui s'identifie à $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$, ce qui achève la démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) lorsque $(\mathfrak{L}'', \mathfrak{m}'')$

est connexe.

1.10. Si $(\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')$ n'est pas connexe, on a le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{L}',\mathcal{M}')^{et} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L},\mathcal{M})^{et} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')^{et} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{L}',\mathcal{M}') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L},\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L}'',\mathcal{M}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{L}',\mathcal{M}')^{c} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L},\mathcal{M})^{c} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')^{c} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme $(\mathcal{L}',\mathcal{M}')$ est dans l'image essentielle de $LM_{K'}$, il existe un groupe p-divisible G tel que $LM_{K'}(G) \simeq (\mathcal{L}',\mathcal{M}')$; alors $(\mathcal{L}',\mathcal{M}')^{c}$ s'identifie à $LM_{K'}(G^{c})$ où G^{c} est la composante neutre de G. De même $(\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')^{c}$ est dans l'image essentielle de $LM_{K'}$. Donc, d'après la première partie de la démonstration $(\mathcal{L},\mathcal{M})^{c}$ est dans l'image essentielle de $LM_{K'}$; en appliquant encore la première partie et en utilisant la proposition 1.4, on en déduit que $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est dans l'image essentielle de $LM_{K'}$.

1.11. <u>Démonstration de</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) <u>du théorème</u>. On a le même diagramme commutatif exact que ci-dessus ; pour terminer la démonstration il suffit donc d'établir (i) $\Rightarrow$ (ii) dans le cas où $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est connexe.

Soit G un groupe p-divisible connexe de dimension d défini sur A' tel que $LM_{K'}(G) \simeq (\mathcal{L},\mathcal{M})$. Identifions le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G à un réseau M de $\mathcal{M}$.

Soit $M' = \mathcal{M}' \cap M$ et soit M'' la projection de M sur $\mathcal{M}''$. On a $FM' = FM \cap M'$ et la suite $0 \to M'/FM' \to M/FM \to M''/FM'' \to 0$ est exacte.

Reprenons les notations du chapitre IV de [3] .

D'après le corollaire 1 de la proposition 2.4 du chapitre IV de [3] , on a le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M'_{A'}[1] & \to & M_{A'}[1] & \to & M''_{A'}[1] & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M'_{A'} & \to & M_{A'} & \to & M''_{A'} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M'/FM' & \to & M/FM & \to & M''/FM'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Posons $L = L_{A'}(G)$. On sait (<u>loc. cit.</u>) que L s'identifie à un sous-A'-module de $M_{A'}$ et que $L/\pi L \simeq M/FM$.

Soient L'' la projection de L sur $M''_{A'}$ et $L' = M'_{A'} \cap L$. On sait (<u>loc. cit.</u>) que l'on peut faire les identifications :

$$\mathcal{M}_{K'} = K' \otimes_{A'} M_{A'} \qquad \mathcal{M}'_{K'} = K' \otimes_{A'} M'_{A'} \qquad \mathcal{M}''_{K'} = K' \otimes_{A'} M''_{A'}$$

$$\mathcal{L} = K' \otimes_{A'} L \qquad \mathcal{L}' = K' \otimes_{A'} L' \qquad \mathcal{L}'' = K' \otimes_{A'} L'' \ .$$

On a le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccc} L & \to & L'' & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ M/FM & \to & M''/FM'' & \to & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

d'où une surjection $\varphi : L'' \to M''/FM''$. Comme $\varphi(\pi L'') = 0$, on a encore une surjection $L''/\pi L'' \to M''/FM''$.

Puisque $(\mathcal{L}'', \mathcal{M}'')$ est faiblement admissible, les deux k-espaces vectoriels $L''/\pi L''$ et M''/FM'' sont de même dimension, donc

$L''/\pi L'' \to M''/FM''$ est un isomorphisme. On en déduit le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi L & \to & L & \to & M/FM & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \pi L'' & \to & L'' & \to & M''/FM'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

D'après le lemme du serpent, la suite des noyaux des flèches verticales est exacte, donc la suite $0 \to \pi L' \to L' \to M'/FM' \to 0$ est exacte.

Choisissons des coordonnées $X_1,\dots,X_{d'}$, $Y_1,\dots,Y_{d''}$ de G de sorte que les X_i induisent une base de M'/FM' et les Y_i une base de M''/FM''. Le A-module M' s'identifie donc à un sous-module de $C\hat{W}_k(k[[X_1,\dots,X_{d'}]])$.

Posons $B' = A'[[X_1,\dots,X_{d'}]]$ et $B'' = A'[[Y_1,\dots,Y_{d''}]]$. La bigèbre de G s'identifie donc à $B = B'\hat{\otimes}_{A'} B''$.

Soit $x_1,\dots,x_{d'}$ une base de L'. Il existe donc un relèvement $\hat{x}_j$ de x_j dans $\hat{B}_K^{an}$ qui appartient à $\hat{B}'^{an}_K$. Comme $L' \subset L$, chaque x_j admet un relèvement $\hat{x}'_j$ dans $\hat{B}_K^{an}$ tel que $\partial\hat{x}'_j = 0$.

La différence $g_j = \hat{x}'_j - \hat{x}_j$ appartient alors à ce que Fontaine note $P'(B)$ (cf. [3], IV § 4.1, § 4.2 et prop. 5.1). On a donc
$\partial g_j = \partial\hat{x}'_j - \partial\hat{x}_j = -\partial\hat{x}_j \in P'(B'\hat{\otimes}_{A'} B')$.

Si on écrit $g_j = \sum_{\underline{i}} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}}$ avec $\underline{i} = (i_1,\dots,i_{d''}) \in \mathbb{N}^{d''}$, $F_{\underline{i}} \in K'[[X_1,\dots,X_{d'}]]$ et $Y^{\underline{i}} = Y_1^{i_1} \dots Y_{d''}^{i_{d''}}$, on a :

$$\partial g_j = \partial F_0 + \partial\Big(\sum_{\underline{i}\neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}}\Big) .$$

Donc $\partial\big(\sum_{\underline{i}\neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}}\big) = 0$. Comme g_j appartient à $P'(B)$, on a $F_0 \in P'(B')$, donc $\sum_{\underline{i}\neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}} \in P'(B)$. Comme G est p-divisible, on a $\sum_{i \neq 0} F_i Y^{\underline{i}} = 0$. Donc $g_j \in P'(B')$ et $\hat{x}'_j \in K'[[X_1,\dots,X_{d'}]]$.

On peut donc restreindre le coproduit de B induit par G à B' , ce qui définit un groupe p-divisible G' , dont l'image par $LM_{K'}$ s'identifie à $(\mathcal{L}',\mathcal{M}')$. Le noyau de la flèche de G dans G' est un groupe p-divisible G" dont l'image par $LM_{K'}$ s'identifie à $(\mathcal{L}'',\mathcal{M}'')$.

Le théorème est donc démontré.

1.12. COROLLAIRE. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) le foncteur $LM_{K'}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénies près, sur A' et la catégorie des K'-couples faiblement admissibles.

(ii) Tout K'-couple faiblement admissible, connexe et simple, appartient à l'image essentielle de $LM_{K'}$.

Démonstration . Il suffit de remarquer que tout K'-couple faiblement admissible admet une suite de composition telle que le premier terme soit étale et que les quotients successifs soient connexes et simples. On montre alors la proposition en raisonnant par récurrence sur le nombre de termes de la suite de composition et en appliquant le théorème.

2. - LE CAS DE DIMENSION UN .

2.1. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THEOREME. - Le foncteur $LM_{K'}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles de dimension un, à isogénies près, sur A' et la catégorie des K'-couples faiblement admissibles $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ tels que $\dim_{K'}\mathcal{L} = 1$.

Remarque. Un K'-couple $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ tel que $\dim_{K'}\mathcal{L} = 1$ est faiblement admissible si et seulement si $d_{\mathcal{M}} = 1$ et $\mathcal{L} \not\subset K'\otimes_K \mathcal{M}^{et}$.

Démonstration du théorème . Il suffit de montrer que si $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est un K'-couple faiblement admissible tel que $d_{\mathcal{M}} = 1$ alors $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ appartient à l'image essentielle de $LM_{K'}$.

D'après le théorème 1.8 et la proposition 1.4, on peut supposer que $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est connexe. Comme $d_{\mathcal{M}} = 1$, le F-iso-cristal $\mathcal{M}$ est alors simple de pente $1/h$ où $h = \dim_K\mathcal{M}$.

Si $h = 1$, il est clair que $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ est l'image par $LM_{K'}$ du groupe multiplicatif. On peut donc supposer que $\dim_K \mathcal{M} \geq 2$.

2.2. PROPOSITION. - Soit $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ un K'-couple faiblement admissible connexe vérifiant $\dim_{K'}\mathcal{L} = 1$ et $\dim_K\mathcal{M} = h \geq 2$. Il existe alors un élément e_o de $\mathcal{M}$ et un élément ℓ de $\mathcal{L}$ tels que :

(i) on a $F^h e_o = pe_o$ et $(e_o, Fe_o, \dots, F^{h-1}e_o)$ est une base de $\mathcal{M}$ sur K ;

(ii) si $\ell = \sum_{i=0}^{h-1} b_i F^i e_o$, avec $b_i \in K'$, on a $b_o = 1$ et $v(b_i) \geq -i/h$ pour $1 \leq i \leq h-1$ (où v désigne la valuation de K' normalisée par $v(p) = 1$).

Démonstration . Comme k est algébriquement clos, il existe un élément non nul e'_o de $\mathcal{M}$ tel que $F^h e'_o = pe'_o$. Alors $(e'_o,\dots,F^{h-1}e'_o)$ est une base de $\mathcal{M}$ sur K . Si ℓ' est un élément non nul de $\mathcal{L}$, il s'écrit $\sum_{i=0}^{h-1} b'_i F^i e'_o$ avec $b'_i \in K'$. Quitte à remplacer e'_o par $F^n e'_o$, pour un entier n convenable, et à multiplier ℓ' par une constante, on peut supposer que $b'_o = 1$.

Soit i tel que $v(b'_i) + \frac{i}{h} \leq v(b'_j) + \frac{j}{h}$ pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq h-1$. Si $v(b'_i) + \frac{i}{h} \geq 0$, il suffit de poser $e_o = e'_o$ et $\ell = \ell'$.

Sinon l'élément b'_i est non nul. Posons $e_o = F^i e'_o$; alors $\ell = \frac{1}{b_i}\ell'$ s'écrit $\sum_{j=1}^{h-1} b_j F^j e_o$ avec $b_o = 1$ et :

$$b_j = \begin{cases} b'_{i+j}/b'_i & \text{si} \quad i+j < h \\ b'_{i+j-h}/pb'_i & \text{si} \quad i+j \geq h \; . \end{cases}$$

Si $i+j < h$, on a :

$$v(b_j) = v(b'_{i+j}) - v(b'_i) = (v(b'_{i+j}) + \tfrac{i+j}{h}) - (v(b'_i) + \tfrac{i}{h}) - \tfrac{j}{h} \geq -\tfrac{j}{h} \; .$$

Si $i+j \geq h$, on a :

$$v(b_j) = v(b'_{i+j-h}) - 1 - v(b'_i) = (v(b'_{i+j-h}) + \tfrac{i+j-h}{h}) - (v(b'_i) + \tfrac{i}{h}) - 1 + \tfrac{h-j}{h} \geq -\tfrac{j}{h} \; .$$

La proposition est donc démontrée.

2.3. Soit $\ell_h(X)$ la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$, c'est le logarithme d'un groupe p-divisible G_h de hauteur h et de dimension un défini sur $\mathbb{Z}_p$. L'image x de $\ell_h(X)$ dans le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G_o vérifie $F^h x = px$ ([3], V § 2). On peut donc relever l'élément e_o de la proposition 2.2 en $\ell_h(X)$ dans l'anneau des fonctions analytiques $(A'\widehat{[[X]]})^{an}_K$ et $F^i e_o$ en $\ell_h(X^{p^i})$. La base de $\mathcal{L}$ de la prop. 2.2 peut donc se relever en $\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$.

Pour achever la démonstration du théorème 2.1, il suffit alors de montrer la proposition suivante :

2.4. PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\ell_h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$ <u>et soit pour</u> $i = 1,\ldots,h-1$ <u>un élément</u> b_i <u>de</u> K' <u>vérifiant</u> $v(b_i) \geq -i/h$. <u>Soit</u> $b_o = 1$. <u>Alors la série</u> $\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$ <u>est le logarithme d'une loi de groupe formel définie sur</u> A' .

<u>Démonstration</u> : la série $\ell(X)$ s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{p^n}$. Si $n = rh+j$ avec $0 \leq j \leq h-1$, on a $a_{rh+j} = b_j/p^r$.

D'après Hazewinkel ([7], § 15.2), la série $\ell(X)$ est le logarithme d'une loi de groupe formel définie sur A' si et seulement si les T_n, définis par les formules suivantes

$$T_1 = pa_1$$
$$\dots$$
$$T_n = pa_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} T_i^{p^{n-i}} \quad ,$$
$$\dots$$

sont entiers.

a) Si $1 \leq n \leq h-1$, on va montrer par récurrence sur n que $V(T_n) \geq \frac{h-n}{h}$. On a $T_1 = pa_1 = pb_1$, donc $v(T_1) \geq 1-\frac{1}{h} = \frac{h-1}{h}$.

Supposons que, pour $1 \leq i \leq n-1$, on ait $v(T_i) \geq \frac{h-i}{h}$. On a alors :

$$v(a_{n-i}T_i^{p^{n-i}}) = v(b_{n-i}T_i^{p^{n-i}}) \geq -\frac{n-i}{h} + p^{n-i}\,\frac{h-i}{h} = \frac{1}{h}[p^{n-i}(h-i)-n+i]$$
$$\geq \frac{1}{h}[\,p^{n-i}(h-i)-(h-i)] \geq \frac{h-i}{h}[2^{n-i}-1] \geq \frac{h-n}{h} \ .$$

Comme $v(pa_n) = v(pb_n) \geq 1 - \frac{n}{h} = \frac{h-n}{h}$, on a bien $v(T_n) \geq \frac{h-n}{h}$.

b) On a $T_h = 1 - \sum_{j=1}^{h-1} a_{h-j} T_j^{p^{h-j}}$. D'après a), on a :

$$v(a_{h-j}T_j^{p^{h-j}}) \geq p^{h-j}\,\frac{h-j}{h} - \frac{h-j}{h} = \frac{h-j}{h}(p^{h-j}-1) \geq \frac{p-1}{h} \ .$$

Donc $T_h = 1+c$ avec $v(c) \geq \frac{p-1}{h}$.

c) Nous allons montrer par récurrence sur n que $v(T_n) \geq 1/h$ pour $n>h$. Si $v(T_i) \geq 1/h$, alors $v(a_n T_i^{p^n}) \geq 1/h$. En effet, posons $n = rh+j$ avec $0 \leq j \leq h-1$, alors

$$v(a_n T_i^{p^n}) = p^n v(T_i) + v(b_j/p^r) \geq \frac{p^{rh+j}}{h} - \frac{j}{h} - r \geq \frac{2^{rh+j}}{h} - \frac{rh+j}{h}$$
$$= \frac{1}{h}(2^n-n) \geq \frac{1}{h} \ .$$

Donc, d'après a) et en raisonnant par récurrence, dans l'écriture de T_n , pour $n > h$, tous les termes sont de valuation supérieure ou égale à $1/h$, sauf peut-être le premier et celui qui contient T_h . Il faut donc étudier $pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}}$. Posons $n = rh+j$ avec $0 \leq j \leq h-1$, alors d'après b), on a :

$$pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}} = \frac{b_j}{p^{r-1}}[1-(1+c)^{p^{(r-1)h+j}}] ,$$

et il suffit de vérifier que $v(1-(1+c)^{p^{(r-1)h+j}}) - (r-1) - \frac{j}{h} \geq \frac{1}{h}$.

2.5. LEMME. - Soit $x \in A'$ tel que $v(x) \geq \frac{p-1}{h}$, alors :

a) si $h \leq (p-1)^2$, on a $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq \frac{p-1}{h} + m$ pour tout entier $m \geq 0$;

b) si $h > (p-1)^2$, soit s le plus grand entier tel que $p^s(p-1)^2 \leq h$; on a alors

$$v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h} \quad \text{si} \quad m \leq s$$

et

$$v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^s \frac{p-1}{h} + m - s \quad \text{si} \quad m \geq s .$$

Démonstration. Soit $y \in A'$ et supposons que $v(y) \geq u > 0$. On a :

$$v(1-(1+y)^p) \geq \inf(v(py), v(y^p)) \geq \inf(1+u, pu) .$$

On a $\inf(1+u, pu) = 1+u$ si $u \geq 1/(p-1)$.

Supposons que $h \leq (p-1)^2$, ce qui veut dire $1 + \frac{p-1}{h} \leq p\frac{p-1}{h}$. D'après la remarque précédente, on a $v(1-(1+x)^p) \geq 1 + \frac{p-1}{h}$. Supposons que $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq m + \frac{p-1}{h}$. Ecrivons $(1+x)^{p^m} = 1+z$ avec $v(z) \geq m + \frac{p-1}{h}$. On a alors $v(1-(1+x)^{p^{m+1}}) \geq \inf(v(pz), v(z^p))$. Comme :

$$p[m + \frac{p-1}{h}] - [m+1+\frac{p-1}{h}] = \frac{(p-1)^2}{h} + p(m-1) - 1 > 0 ,$$

le a) est démontré.

Si $h > (p-1)^2$, on a $v(1-(1+x)^p) \geq p\frac{p-1}{h}$. Supposons que : $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h}$. Posons encore $(1+x)^{p^m} = 1+z$. On a

$$v(1-(1+z)^p) \geq \inf(1+v(z), pv(z)) \geq \inf(1+p^m \frac{p-1}{h}, p^{m+1}\frac{p-1}{h}) .$$

Or $1+p^m \frac{p-1}{h} - p^{m+1}\frac{p-1}{h} = 1-p^m \frac{(p-1)^2}{h}$ et ce nombre est positif si et seulement si $p^m(p-1)^2 \leq h$, donc si $m \leq s$. Donc, pour $m \leq s$, on a $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h}$. D'après la remarque du début, on a $v(1-(1+x)^{p^{s+1}}) \geq 1+p^s \frac{p-1}{h}$. On achève la démonstration du lemme par récurrence.

2.6. <u>Revenons à la démonstration de la proposition</u>. On applique le lemme avec $x = c$ et $m = (r-1)h+j$.

Dans le cas a), on a :

$$v(pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}}) \geq \frac{p-1}{h} + (r-1)h+j-(r-1)-\frac{j}{h} = \frac{p-1}{h} + \frac{h-j}{h} + (r-1)h+j-r .$$

Or $(r-1)h+j-r \geq 2(r-1)+j-r = r+j-2$. Si $r \geq 2$, la proposition est démontrée, si $r = 1$, on a $n = h+j > h$, donc $j \geq 1$ et on a bien $r+j \geq 2$.

Dans le cas b), remarquons que l'inégalité $h \geq p^s(p-1)^2$ implique que $h > s$.

Si $m \leq s$, donc $(r-1)h+j \leq s$, on a $r = 1$ et comme $n > h$, on a $j \neq 0$. On a :

$$v(pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}}) \geq -\frac{j}{h} + p^j\frac{p-1}{h} = \frac{1}{h}[p^j(p-1)-j] \geq \frac{1}{h}(2^j-j) \geq \frac{1}{h} .$$

Si $m > s$, ce qui équivaut à $n > s+h$, on a :

$$\begin{aligned} v(pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}}) &\geq -\frac{j}{h}-r+1+p^s\frac{p-1}{h}+(r-1)h+j-s = p^s\frac{p-1}{h}+n(1-\frac{1}{h})-h-s+1 \\ &\geq p^s\frac{p-1}{h} + (s+h+1)(1-\frac{1}{h}) - (s+h+1)+2 \\ &\geq \frac{1}{h} - \frac{s+h+1}{h} + 2 = \frac{1}{h} - \frac{s+1}{h} + 1 \geq \frac{1}{h} \quad \text{car} \quad s < h . \end{aligned}$$

La proposition 2.4 et le théorème 2.1 sont donc démontrés.

2.7. De ce qui précède résulte la proposition suivante :

PROPOSITION. - Toute loi de groupe formel à un paramètre définie sur A' de hauteur $h \geq 1$ est isogène à une loi de groupe formel à un paramètre dont le logarithme est de la forme
$\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh+i}}/p^n \right)$ avec $b_i \in K'$, $b_o = 1$ et $v(b_i) \geq -i/h$, pour $1 \leq i \leq h-1$.

2.8. Soit h un entier ≥ 1. Soit $\mathbb{Q}_{p^h}$ le sous-corps de K de degré h sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathfrak{M}$ un F-iso-cristal simple de pente $1/h$; l'ensemble des x de $\mathfrak{M}$ tels que $F^h x = px$ forme un sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ de dimension h. Un automorphisme u de $\mathfrak{M}$ est déterminé par l'image d'un élément non nul tel que $F^h x = px$. Prenons pour base de $\mathfrak{M}$ sur K les $F^i x$ avec $0 \leq i \leq h-1$. Si $u(x) = \sum_{i=0}^{h-1} u_i F^i x$, les u_i appartiennent à $\mathbb{Q}_{p^h}$ et si $\Phi = (\varphi_{ij})$ est la matrice de u sur la base x, $Fx, \dots, F^{h-1}x$ de $\mathfrak{M}$, on vérifie facilement que :

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \sigma^j(u_{i-j}) & \text{si } i \geq j \\ p\sigma^j(u_{i-j+h}) & \text{si } i < j. \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq h-1 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq h-1.$$

Si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_o \\ \vdots \\ u_{h-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul dont les coordonnées sont dans $\mathbb{Q}_{p^h}$, on note $\Phi(\underline{u})$ la matrice carrée d'ordre h dont le terme général est donné par les formules ci-dessus. L'ensemble des matrices $\Phi(\underline{u})$ quand les u_i parcourent $\mathbb{Q}_{p^h}$ s'identifie au corps (non commutatif si $h \geq 2$) des endomorphismes du F-iso-cristal simple $\mathfrak{M}$.

Etant donné un entier $h \geq 1$ et $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_o \\ \vdots \\ c_{h-1} \end{pmatrix}$ avec $c_i \in K'$, $c_o = 1$ et $v(c_i) \geq -i/h$, on sait d'après la proposition 2.4 construire une loi de groupe formel à un paramètre $G(h,\underline{c})$.

2.9. PROPOSITION. - <u>Les lois de groupe formel</u> $G(h,\underline{c})$ <u>et</u> $G(h,\underline{c}')$ <u>sont isogènes si et seulement s'il existe un vecteur non nul</u> $\underline{u} \in (\mathbb{Q}_{p^h})^h$ <u>et un élément</u> t <u>de</u> K' <u>tels que</u> $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$.

Soient $(\mathcal{L},\mathcal{M}) = LM_{K'}(G(h,\underline{c}))$ et $(\mathcal{L}',\mathcal{M}') = LM_{K'}(G(h,\underline{c}'))$. Soit $e_o \in \mathcal{M}$ tel que $F^h e_o = pe_o$ et que $\mathcal{L}$ ait pour base $\sum_{i=0}^{h-1} c_i F^i e_o$. De même, soit $e'_o \in \mathcal{M}'$ tel que $\mathcal{L}'$ ait pour base $\sum_{i=0}^{h-1} c'_i F^i e'_o$. On peut identifier $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ par l'isomorphisme qui envoie e_o sur e'_o . Supposons qu'il existe $\underline{u}$ et t vérifiant les conditions de la proposition tels que $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$. L'automorphisme de $\mathcal{M}$ associé à la matrice $\Phi(\underline{u})$ sur la base $(F^i e_o)_{0 \leq i \leq h-1}$ envoie $\underline{c}$ sur un vecteur parallèle à $\underline{c}'$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, ce qui entraîne que les deux groupes sont isogènes.

Réciproquement, si G et G' sont isogènes, les K'-couples $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ et $(\mathcal{L}',\mathcal{M})$ sont isomorphes. A un automorphisme près de $\mathcal{M}$, on peut choisir le même e_o pour les deux groupes. On a donc un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui après extension des scalaires envoie $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$, donc $\underline{c}$ sur un vecteur parallèle à $\underline{c}'$, ce qui veut dire qu'il existe $\underline{u}$ et t tels que $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTHELOT, Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, in Algebraic Geometry (Arcata 1974), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 29, 315-328, American Math. Soc.,(1975).

[2] J. DIEUDONNÉ, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (VII), Math. Ann. 134 (1957), 114-133.

[3] J.-M. FONTAINE, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque, n° 47-48, Soc. Math. France, (1977).

[4] J.-M. FONTAINE, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, ce volume.

[5] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux. Actes du Congrès Intern. des Math. 1970, tome I, 431-436, Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[6] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné, Université de Montréal, (1974).

[7] M. HAZEWINKEL, Formal Groups and Applications, New-York, San Francisco, London : Academic Press (1978).

[8] Y. MANIN, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Russian Math. Surveys, 18 (1963), 1-83.

[9] W. MESSING, The crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes, Lecture Notes in Math., n° 264, Springer, Berlin, (1972).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)