L. SZPIRO

Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov

Astérisque, tome 64 (1979), p. 169-202

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__64__169_0>

SUR LE THÉORÈME DE RIGIDITÉ

de PARSIN et ARAKELOV

par

L. SZPIRO

Nous étendons ici à la caractéristique positive l'énoncé suivant dû à Parsin [9] et Arakelov [1] en caractéristique zéro :

Soient C une courbe lisse sur un corps k, S un ensemble fini de points fermés de C. Alors l'ensemble des surfaces X lisses sur k, munies d'un morphisme $f : X \to C$ projectif, semi-stable à fibres de genre g fixé $\geqslant 2$, lisses en dehors de S, et dont la classe de Kodaira-Spencer n'est pas nulle, est un ensemble fini.

Ce théorème se divise en trois parties intéressantes par elles-mêmes :

1) Dans la situation décrite ci-dessus le faisceau dualisant relatif est numériquement positif.

2) Un tel morphisme n'admet pas de déformation non triviale, ce qui revient à montrer en caractéristique $p > 0$ un théorème d'annulation à la Ramanujam-Kodaira : $H^1(X,\omega_{X/C}^{-1}) = 0$ (notons que le "vanishing de Kodaira" n'est pas vrai tel quel en caractéristique positive).

3) L'ensemble de tels morphismes forme une famille bornée.

Ce plan de démontration est celui originellement introduit par Parsin [9] (il traite le cas $S = \phi$ et $car(k) = 0$). Les différences essentielles introduites ici sont les suivantes :

Dans 1) (qui est d'ailleurs équivalent à montrer que pour toute section E on a $(E.E) < 0$), nous avons remplacé les points de Weierstrass utilisés chez Arakelov, par l'itération du morphisme de Frobenius de la base C et les changements de base associés.

Dans 2), nous donnons un critère d'annulation pour un $H^1(X,L^{-1})$ qui s'applique étonnamment bien à la situation. Nous notons aussi qu'un tel critère redémontre le théorème d'annulation de Ramanujam en caractéristique 0 par réduction mod $p >> 0$ où, a priori, il peut être faux !!!

Dans 3), nous utilisons une idée différente de celles des deux auteurs cités. Essentiellement, la non-nullité de la classe de Kodaira-Spencer, permet de montrer qu'il existe $S' \subset S$ tel que $H^1(X, \omega_{X/C}^{-1} \otimes f^* \Omega_C^1(S')) \neq 0$; on déduit alors du critère cité plus haut (2)) que $\omega_{X/C} \otimes f^* T_C(-S')$ n'est pas numériquement positif, d'où une borne pour la hauteur du morphisme $C \longrightarrow \overline{M}_g$ (module des courbes de genre g).

Nous donnons comme applications :

a) de nouveaux contrexemples au théorème d'annulation de Kodaira ;

b) une construction simple pour obtenir des formes différentielles globales non fermées ;

c) le fait que les fibrations lisses sur $\mathbb{P}^1$ ou une courbe elliptique sont isotriviales ;

d) une démonstration nouvelle de la conjecture de Mordell pour les corps de fonctions en caractéristique $p > 0$.

Nous tenons à remercier D. Mumford, M. Raynaud et A. Laudal pour l'intérêt qu'ils ont porté à l'évolution de ce travail. En particulier, les applications a) et b) citées plus haut, n'auraient pas vu le jour sans M. Raynaud. Nous sommes reconnaissant à P. Berthelot et au secrétariat du département de mathématiques de l'Université de Rennes, de nous avoir aidés, parfois dans des conditions difficiles, à mettre une forme finale à ce manuscrit.

§ O. Morphismes semi-stables.

Nous indiquons ici les définitions et notations utilisées dans la suite de ce travail. Nous donnons aussi quelques propriétés des morphismes semi-stables qui nous serviront dans les prochains paragraphes.

Définition 0.1. *Soit* C *une courbe projective de genre arithmétique* $g \geq 2$ *sur un corps* k. *On dit que* C *est semi-stable (resp. stable) si elle satisfait aux propriétés suivantes :*

a) C *est géométriquement réduite et géométriquement connexe.*

b) *Les singularités géométriques de* C *sont des points doubles ordinaires.*

c) *Si une composante géométrique de* C *est une droite projective, elle rencontre les autres composantes géométriques en au moins deux points (resp. en au moins trois points), cf.* ([6], [2], [22]).

Définition 0.2. *Soient* S *un schéma et* $X \xrightarrow{f} S$ *une courbe relative sur* S. *On dira que le morphisme* f *est semi-stable (resp. stable) si les fibres de* f *le sont.*

Soit C une courbe lisse et projective de genre q sur un corps k. Soient X une surface lisse et projective sur k et $f : X \longrightarrow C$ un morphisme semi-stable (resp. stable) à fibre générique lisse de genre $g \geq 2$. Sous ces hypothèses le faisceau $f_* \omega_{X/C}$ est localement libre de rang g et commute au changement de base. Nous poserons

$$d = \text{degré}\left(\overset{g}{\Lambda} f_* \omega_{X/C} \right) .$$

D'autre part, si s est un point de C, nous noterons δ_s le nombre de points singuliers dans $f^{-1}(s)$ et $\delta = \sum_{s \in C} \delta_s$ (k algébriquement clos).

Lemme 0.3. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme semi-stable à fibre générique lisse de genre* $g \geq 2$ *d'une surface lisse* X *et projective sur un coprs* k, *dans une courbe lisse* C *projective sur* k. *Soit* $\pi : C' \longrightarrow C$ *un morphisme fini et surjectif d'une courbe lisse* C' *dans* C. *Soit* $f' : \tilde{X}' \longrightarrow C'$ *le morphisme de la résolution des singularités* $\tilde{X}'$ *de* $X \times_C C'$ *dans* C' *et soit* $\alpha : \tilde{X}' \longrightarrow X$ *le morphisme naturel. Alors :*

a) $\omega_{\tilde{X}'/C'} = \alpha^* \omega_{X/C}$.

b) $\text{degré}(f'_* \omega_{\tilde{X}'/C'}) = \text{degré}(\pi) \times \text{degré}(f_* \omega_{X/C})$.

c) $\delta(\tilde{X}') = \text{degré}(\pi) \times \delta(X)$.

On trouvera la démonstration de ces faits dans Arakelov [1]. Notons qu'une fois qu'on a établi a), b) est évident. D'autre part a) et c) se démontrent en remarquant que la résolution des singularités $\tilde{X}' \longrightarrow X \times_C C'$ ne rajoute que des $\mathbb{P}^1$

de self-intersection (- 2) (résoudre une singularité de la forme

$$k[[X,Y,T]]/(XY - T^n)) .$$

Définition 0.3. *Soit* C *une courbe lisse et projective sur un corps* k. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme propre d'une surface lisse dans* C. *On dit que* f *est isotrivial s'il existe un morphisme fini* $n : C' \longrightarrow C$ *d'une courbe lisse* C' *dans* C *tel que* $X \times_C C'$ *soit* C'*-birationnel à un produit* $F \times C'$ *où* F *est une courbe lisse sur* k.

Remarquons qu'il suffit qu'il existe un morphisme fini étale $n : C' \longrightarrow C$ ayant la même propriété [9].

§ 1. Positivité du faisceau dualisant relatif.

Soit $f : X \longrightarrow C$ une fibration semi-stable avec X lisse. Soit $g \geq 2$ le genre des fibres de f et soit q le genre de C. Nous notons $d = \deg(\overset{g}{\Lambda} f_* \omega_{X/C})$ et $\delta = \sum_{s \in C} \delta_s$ où δ_s est le nombre de points singuliers dans la fibre de s.

Proposition 1. Avec les notations précédentes $(12d - \delta) \geqslant 0$.

Remarquons tout de suite que si $\delta > 0$ i.e. si f a des fibres singulières, on a $d > 0$. On verra par la suite que c'est le point clef de la démonstration du théorème 1. Nous démontrons la proposition 1 quand $car(k) > 0$, bien entendu cela démontre le même énoncé en caractéristique 0 par réduction modulo p pour $p >> 0$.

En effet nous allons montrer :

(1) $$(\omega_{X/C}.\omega_{X/C}) = (12d - \delta)$$

$(12d - \delta)$ est donc invariant par spécialisation. Pour démontrer la formule (1) nous utilisons le théorème de Riemann-Roch sur X et sur C :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = \chi(f_*\mathcal{O}_X) - \chi(R^1 f_* \mathcal{O}_X) .$$

Comme $\Omega_X^2 = \omega_X = \omega_{X/C} \otimes f^*\Omega_C^1$, on obtient :

(2) $$c_1^2 = (\omega_{X/C}.\omega_{X/C}) + 8(g - 1)(q - 1) ;$$

d'autre part la suite exacte :

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_C^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow 0$$

nous donne

$$c_2 = c_1(f^*\Omega_C^1).c_1(\Omega_{X/C}^1) + c_2(\Omega_{X/C}^1) .$$

On a de plus la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/C}^1 \longrightarrow \omega_{X/C} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

où N est de longueur finie égale à δ (en effet un calcul local nous montre que chaque singularité a un anneau local de la forme $k[[X,Y,T]]/(XY - T)$ et donne dans N une contribution de longueur 1). On en déduit $c_1(\Omega^1_{X/C}) = c_1(\omega_{X/C})$ et $c_2(\Omega^1_{X/C}) = \delta$ donc

(3) $$c_2 = 4(q-1)(g-1) + \delta$$

d'où

$$(\omega_{X/C}\cdot\omega_{X/C}) + 8(g-1)(q-1) + 4(g-1)(q-1) + \delta = 12(1-q-\chi(R^1 f_* \mathcal{O}_X)) .$$

Mais par dualité $R^1 f_* \mathcal{O}_X = (f_* \omega_{X/C})^{\vee}$,

donc $$\chi(R^1 f_* \mathcal{O}_X) = -d - g(q-1)$$

d'où la formule (1).

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 1. Soit F l'endomorphisme de Frobenius sur C. Nous notons, pour tout n entier, $X^{(p^n)}$ la résolution des singularités relativement minimale de $X \times_{(C,F^n)} C$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X^{(p^n)} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & X \times_C C \arrow[ur] & \\ C \arrow[rr, "F^n"] & & C \end{tikzcd} .$$

Par les formules du paragraphe 0 on a :

$$d(X^{(p^n)}) = p^n d$$

$$\delta(X^{(p^n)}) = p^n \delta$$

donc $$c_1^2(X^{(p^n)}) = p^n(12 - \delta) + 8(g-1)(q-1) .$$

Si $12d - \delta$ était négatif, pour $n >> 0$ on aurait $c_1^2(X^{(p^n)}) < 0$. On peut toujours supposer, quitte à remplacer C par un revêtement (ramifié) C', que $q \geqslant 2$. En effet d et δ seraient multipliés par le degré de C' sur C, donc $12d - \delta$ ne changerait pas de signe. Par des lemmes élémentaires sur la classification des surfaces en caractéristique $p > 0$ (cf. Mumford [5]) si $c_1^2 < 0$, la surface $X^{(p^n)}$ posséderait une infinité de diviseurs qui sont des courbes rationnelles (i.e. isomorphes à $\mathbb{P}^1$). Le genre de C étant au moins deux, ces $\mathbb{P}^1$ seraient dans les fibres de f, et même dans les fibres singulières de f. Contradiction !

Proposition 2. *Si le morphisme* $f : X \longrightarrow C$ *est non isotrivial alors on a* $d > 0$.

Comme nous l'avons remarqué plus haut on peut supposer f lisse. C'est le seul endroit où nous utiliserons un espace de module : soit $\overline{M}_g$ l'espace de module des courbes de genre g. Grâce au théorème d'Haboush [3] la théorie du passage au quotient par un groupe du type SL(n) est valable en caractéristique $p > 0$.

Soit H le schéma de Hilbert des courbes de genre g plongées tricanoniquement. Le groupe $G = SL(5g - 5)$ agit sur H, soit H_s l'ensemble des points de H qui sont <u>stables pour l'action de</u> G. D'après Mumford [6] un point de H qui correspond à une courbe lisse est dans H_s. Nous noterons $\overline{M}_g$ le quotient de H_s par G. Notons que nous ne nous préoccupons pas de ce qui se passe à "l'infini" sur $\overline{M}_g$. On trouvera cependant dans Mumford [6] que stable au sens du § 0 et stable pour l'action de G sont équivalents.

Soit $\mathfrak{X}$ la courbe universelle sur H_s et soit $\pi : H_s \longrightarrow \overline{M}_g$, on sait qu'il existe des entiers $n > 0$, $\ell > 0$ et un faisceau <u>inversible ample</u> L sur $\overline{M}_g$ tel que

$$\pi^* L = \Big(\overset{\max}{\Lambda} (f_* \, \omega^{\otimes 5\ell}_{\mathfrak{X}/H_s}) \otimes (\overset{\max}{\Lambda} f_* \, \omega^{\otimes 5}_{\mathfrak{X}/H_s})^{\otimes -\ell} \Big)^{\otimes n} \qquad ([8])$$

où f est le morphisme $\mathfrak{X} \longrightarrow H_s$. Soit P l'espace principal homogène sur C sous $PG\ell(9g-9) = G$ associé au fibré vectoriel $f_*(\omega^{\otimes 5}_{X/C})$. Les courbes lisses étant G-stables, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[dr] & & \\
& H_s \arrow[r, "\pi"] & \overline{M}_g \\
X \times_C P \arrow[uu] \arrow[dr, "f_P"'] & & \\
& P \arrow[uu, "\beta"'] \arrow[r, "r"] & C \arrow[uu, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

tel que $X \times_C P = \mathfrak{X} \times_{H_s} P$.

L'hypothèse f non isotrivial est équivalente à

$$\text{degré } (\alpha^* L) > 0 \, .$$

Le faisceau $r^* \alpha^*(L)$ est égal à

$$\Big((\overset{\max}{\Lambda} \; f_{P_*} \; \omega^{\otimes 5\ell}_{X \times_C P/P}) \otimes (\overset{\max}{\Lambda} \; f_{P_*} \; \omega^{\otimes 5}_{X \times_C P/P})^{\otimes -\ell} \Big)^{\otimes n} .$$

Par le lemme qui suit, on a donc

$$\text{degré } (\alpha^*(L)) = \binom{5\ell}{2} (12d-\delta) + d - \ell\binom{5}{2} (12d-\delta) - \ell d > 0 \, .$$

En effet Pic C $\longrightarrow$ Pic P est injectif (cf. § 4 corollaire pages 31-32).

<u>Lemme</u>. Degré$(f_* \omega^{\otimes n}_{X/C}) = \binom{n}{2}(12d-\delta) + d$, *pour un morphisme semi-stable* $f : X \longrightarrow C$, *et tout entier* $n \geqslant 2$.

Comme $R^1 f_* \omega_{X/C}^{\otimes n} = 0$, on a :

$$\chi(\omega_{X/C}^{\otimes n}) = \chi(f_*\omega_{X/C}^{\otimes n}) = \text{degré}(f_*\omega_{X/C}^{\otimes n}) - (2n-1)(g-1)(q-1) \ ;$$

d'autre part :

$$\chi(\omega_{X/C}^{\otimes n}) = \binom{n}{2}(\omega_{X/C}\cdot\omega_{X/C}) - \frac{n}{2}\,(\omega_{X/C}\cdot f^*\Omega_C^{\prime}) + \chi(\mathcal{O}_X)$$

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = (12d - \delta) + \frac{12(g-1)(q-1)+\delta)}{12} = d + (g-1)(q-1)$$

d'où l'on tire :

$$\text{degré}(f_*\omega_{X/C}^{\otimes n}) = (2n-1)(g-1)(q-1) - 2n(g-1)(q-1) + d + (g-1)(q-1) + \binom{n}{2}(12d-\delta)$$

ce qui montre le lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition 2. Ici $\delta = 0$, donc $(150\ell^2 - 151\ell + 1)d > 0$ comme $d \geqslant 0$. On en déduit $d > 0$ c.q.f.d.

Proposition 3. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme semi-stable avec* X *lisse et les fibres de genre* $g \geqslant 2$, *les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *n'est pas isotrivial.*

(ii) $(12d - \delta) = (\omega_{X/C}\cdot\omega_{X/C}) > 0$.

Il est facile de voir que (ii) $\Longrightarrow$ (i). En effet, si $\delta > 0$ i.e. f non lisse, alors f n'est pas isotrivial. Si $\delta = 0$ et si le morphisme était isotrivial on peut supposer que $X \simeq F \times C$; F une courbe lisse de genre $g \geqslant 2$ donc $(\omega_{X/C}\cdot\omega_{X/C}) = 0$.

Il nous faut montrer (i) $\Longrightarrow$ (ii) seulement dans le cas $\delta > 0$ d'après la proposition 2. Notons comme plus haut $X^{(p^n)}$ le "changement de base désingularisé" par le n-ième itéré de Frobenius sur C. Soit A un faisceau inversible de degré positif sur C.

Lemme. *Pour* n *suffisamment grand et* A *fixé*

$$H^0(C, f_*(\omega_{X^{(p^n)}/C} \otimes f^*A^{-1})) \neq 0 \ .$$

Calculons le rang et le degré de

$$f_*(\omega_{X^{(p^n)}/C} \otimes f^*A^{-1}) = (f_*(\omega_{X^{(p^n)}/C})) \otimes A^{-1} \ ;$$

son rang est égal à g, son degré à $p^n d - g$ degré (A), donc

$$\chi(f_*(\omega_{X^{(p^n)}} \otimes f^*A^{-1})) = p^n d - g(\text{degré}(A) + q - 1) \ ;$$

si $n >> 0$ ce nombre est positif car $d > 0$, ce qui démontre le lemme.

Nous prenons maintenant un tel n et notons $X^{(p^n)}$ par X. On peut donc écrire $\omega_{X/C} = \mathcal{O}_X(D + F) \otimes f^*A$ où D est un diviseur positif sur X qui n'a pas de composante contenue dans une fibre et où F est un diviseur positif contenu dans un nombre fini de fibres. On peut trouver une courbe C' finie sur C telle que sur $X \times_C C'$, D s'écrive comme une combinaison linéaire de sections de $X \times_C C' \longrightarrow C'$, plus des composantes contenues dans des fibres.

Finalement, si $\tilde{X}'$ est la résolution des singularités relativement minimale de $X \times_C C' = X'$, on a

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}' \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, dash] \\
& C' \arrow[r, "p"] & C
\end{tikzcd}$$

$$\alpha^*\omega_{X/C} = \mathcal{O}_{\tilde{X}'}\left(\sum_{i=1}^{t} r_i E_i + F\right) \otimes f^*B$$

où : $B = p^*A$ est un fibré inversible positif sur C',

F est un diviseur positif sur $\tilde{X}'$ contenu dans un nombre fini de fibres,

r_i est un nombre positif,

E_i est une section de $f : \tilde{X}' \longrightarrow C'$.

Notons que $t \neq 0$; en effet :

$$\alpha^*\omega_{X/C} = \omega_{\tilde{X}'/C'} \qquad (\text{cf. § 0}) ;$$

si $t = 0$, on aurait $(\omega_{\tilde{X}'/C'} \,.\, (\text{une fibre})) = 0$, or ce nombre vaut $(2g - 2) > 0$.

On sait que $(\omega_{\tilde{X}'/C'} \,.\, E_i) = - E_i^2$, d'autre part

$$- E_i^2 = \omega_{\tilde{X}'/C'}.E_i = r_i E_i^2 + \sum_{i \neq j} r_j E_j.E_i + F.E_i + (\mathcal{O}_X(E_i).f^*B) ,$$

donc :

$$- (1+r_i)E_i^2 > (\mathcal{O}_X(E_i).f^*B) = \text{degré}(B) > 0$$

d'où : $\quad E_i^2 < 0$.

Soit m le degré de C' sur C :

$$\begin{aligned} m(12d - \delta) &= \omega_{\tilde{X}'/C'} . (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}(\textstyle\sum r_i E_i + F) \otimes f^*B) \\ &= - \textstyle\sum r_i E_i^2 + (\omega_{\tilde{X}'/C'} \,.\, \mathcal{O}_{\tilde{X}'}(F)) + \deg B \times (2g - 2) ; \end{aligned}$$

la proposition 3 sera donc démontrée si on vérifie le lemme suivant :

Lemme. *Soit* $X \xrightarrow{f} C$ *un morphisme semi-stable à fibres de genre au moins deux et soit* F *une composante d'une fibre de* f. *Alors* $(\omega_{X/C}.F) \geqslant 0$. *De plus les seuls diviseurs verticaux* F *tels que* $(\omega_{X/C}.F) = 0$ *sont des* $\mathbb{P}^1$ *d'auto-intersection* -2.

Soit s le point de C image de F et soit $G = f^{-1}(s) - F$.
On a :

$$F.(F+G) = F^2 + (F.G) ,$$

donc $F^2 = -(F.G) < 0$ car $F+G$ est connexe,

$$\omega_{X/C}.F = 2p-2-F^2 \quad \text{où} \quad p = \dim H^1(F,\mathcal{O}_F) ;$$

si $p \geqslant 1$, $\omega_{X/C}.F > 0$; si $p = 0$, $\omega_{X/C}.F = -2-F^2$, $-F^2 \geqslant 1$, donc le seul cas où $\omega_{X/C}.F < 0$ est obtenu avec $p(F) = 0$ et $F^2 = -1$; or nous avons comme hypothèse qu'il n'y a pas de courbe exceptionnelle de première espèce dans les fibres. Il reste $(\omega_{X/C}.F) \geqslant 0$ et il n'est nul que si $F^2 = -2$ et $p(F) = 0$, c.q.f.d.

Théorème 1. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme projectif, plat et semi-stable d'une surface* X *dans une courbe lisse et projective sur un corps* k, *à fibre générique lisse de genre au moins deux. Supposons que* f *n'est pas isotrivial, alors* $\omega_{X/C}$ *est numériquement positif. De plus les seuls diviseurs réduits et irréductibles* D *tels que* $(\omega_{X/C}.D) = 0$ *sont des* $\mathbb{P}^1$ *d'auto-intersection* -2 *contenus dans une fibre. En particulier, si* f *est stable,* $\omega_{X/C}$ *est ample.*

Corollaire. *Soit* E *une section, de* f *alors* $E^2 < 0$.

En vertu des propositions précédentes, il nous suffit de montrer que si D est un diviseur positif de X non contenu dans une fibre, $(\omega_{X/C}.D) > 0$.

Rappelons qu'un faisceau inversible L sur une surface X est dit numériquement positif si $(L.L) > 0$ et si $L.D \geqslant 0$ pour toute courbe D contenue dans X. Il suffit bien entendu de montrer le même énoncé après un changement de base fini $C' \longrightarrow C$ et résolution des singularités. On peut donc supposer que

$$\omega_{X/C} = \mathcal{O}_X \left(\sum_{1}^{t} r_i E_i + F \right) \otimes f^* B$$

comme dans la démonstration de la proposition 3 (B faisceau inversible positif sur C). D sera de la forme

$$\sum_{j=1}^{s} s_j D_j + F'$$

où les D_j ne sont contenus dans aucune fibre, $s \neq 0$, et F' est contenu dans un nombre fini de fibres.

Il nous suffit donc de montrer (en vertu du dernier lemme)

$$\omega_{X/C}.D_j > 0\ ;$$

or $\qquad \omega_{X/C}.D_j = \sum r_i E_i.D_j + F.D_j + \deg B \times \deg D_j\ ;$

si D_j n'est égal à aucun des E_i ,

$$E_i.D_j > 0 \quad , \quad F.D_j > 0 \quad , \quad d^o(D_j \longrightarrow C) > 0$$

donc $\qquad \omega_{X/C}.D_j > 0\ ;$

si D_j est égal à un de E_i, on l'a déjà démontré.

<u>Commentaires</u>.

a) Le calcul du degré de $f_*\omega_{X/C}^{\otimes n}$ est inspiré de celui, plus compliqué, de la première classe de Chern de $f_*\omega_{\mathfrak{X}/H_s}^{\otimes n}$ pour $f : \mathfrak{X} \longrightarrow H_s$ la courbe universelle sur le schéma de Hilbert des courbes stables (cf. Mumford [6]).

b) En caractéristique zéro Arakelov [1] utilise pour montrer $\omega_{X/C}.E = -E^2 > 0$ (E section) les points de Weierstrass de la fibre générique. De cette façon il obtient un morphisme

$$\overset{g}{\Lambda}\, f_*\omega_{X/C} \longrightarrow \omega_{X/C}^{g(g+1)/2} .$$

Une fois qu'on sait que ce morphisme est non nul, on conclut de la même façon si on sait que $\text{degré}(f_*\omega_{X/C}) > 0$.

En caractéristique $p > 0$, ce morphisme peut être nul. Nous avonc donc été obligés d'introduire des itérés du changement de base par Frobenius au lieu des points de Weierstrass.

§ 2. Théorèmes d'annulations et de rigidité.

Nous avons montré au paragraphe précédent que $\omega_{X/C}$ est numériquement positif et dans certains cas ample. Nous prouvons ici (en toute caractéristique) que $H^1(X,\omega_{X/C}^{-1}) = 0$. Interprétant ce groupe en terme de déformations infinitésimales du morphisme $f : X \longrightarrow C$, nous montrons le théorème annoncé dans l'introduction.

M. Raynaud [14] a donné des contre-exemples au "vanishing" de Kodaira en caractéristique positive. Nous montrons en 2.1 un critère d'annulation qui est suffisant pour notre propos. A la fin de 2.1, nous montrons comment ce critère permet de prouver le théorème d'annulation de Ramanujam-Kodaira en caractéristique zéro par réduction modulo $p >> 0$, où il est faux !!!

2.1. Un critère d'annulation.

<u>Critère</u>. *Soit* X *une variété projective normale sur un corps* k *algébriquement clos*

de caractéristique $p > 0$. *Soit* F *l'endomorphisme de Frobenius de* X *et soit* E *un fibré vectoriel de rang fini sur* X. *Supposons que* $\dim(X) \geqslant 2$ *et* $H^0(X;F^*E \otimes \Omega^1_X) = 0$, *alors l'homomorphisme*

$$H^1(X;E) \longrightarrow H^1(X;F_*F^*E)$$

est injectif. En particulier, si E *est un fibré en droites* L *tel que* $H^0(X,L^{-p} \otimes \Omega^1_X)$ *et* $H^1(X,L^{-p})$ *soient nuls, on a* $H^1(X,L^{-1}) = 0$.

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow O_X \longrightarrow F_*O_X \xrightarrow{d} F_*\Omega^1_X .$$

Il est clair que cette suite est exacte en tout point lisse de X, et qu'elle est nulle sur tout X. La suite est aussi exacte quand X est normale : en effet, on a un homorphisme

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{Ker}\ d$$

qui est un isomorphisme sauf en un nombre fini de points fermés. $\mathcal{O}_X$ étant de profondeur aux moins deux partout, et Kerd étant sans torsion (car $F_*\mathcal{O}_X$ l'est), cet homomorphisme est un isomorphisme.
Tensorisant cette suite par E, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F_*F^*E \longrightarrow F_*(F^*E \otimes \Omega^1_X) .$$

Le lemme s'en déduit en prenant la suite exacte de cohomologie associée.

Proposition 2.1. *Soit* X *une surface projective et lisse sur un corps* k *algébriquement clos de caractéristique* p *positive. Soit* L *un faisceau inversible sur* X *tel que :*

$(L^2) > 0$,

$(L.\mathcal{O}_X(C)) \geqslant 0$ *pour toute courbe* C *de* X ,

alors $H^1(X;L^{-n}) = 0$ *pour* n *suffisamment grand.*

Il est clair que $H^2(X,L^n) \simeq H^0(X,L^{-n} \otimes \omega_X) = 0$ pour $n >> 0$. Par le théorème de Riemann-Roch, on vérifie que $h^0(X,L^n)$ tend vers l'infini avec n. Pour montrer le lemme 2, il nous suffira donc de supposer que $L = \mathcal{O}_X(D)$ pour D un certain diviseur effectif sur X. C.P. Ramanujam a montré dans ses articles [12], [13] que $H^0(D,\mathcal{O}_D) = k$ (notons que la démonstration est valable en toute caractéristique).
On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(D,\mathcal{O}_D) .$$

Notant F l'endomorphisme de Frobenius de $H^1(X,\mathcal{O}_X)$, il est clair que le sous-espace $H^1(X,\mathcal{O}_X(-D))$ de $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ est stable sous F. Cette action se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^1(X,\mathcal{O}_X(-D)) \arrow[dl, "c"'] \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[d, "F"] \\ H^1(X,\mathcal{O}_X(-pD)) \arrow[dr, "a"'] & & \\ & H^1(X,\mathcal{O}_X(-D)) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}_X) \end{tikzcd}$$

où c est l'application canonique

$$H^1(X,L^{-1}) \longrightarrow H^1(X,F_*F^*L^{-1}) = H^1(X,L^{-p}) .$$

En vertu du lemme 1, le lemme 2 sera démontré si on montre :

a) l'homomorphisme a est injectif ;

b) F est nilpotent sur $H^1(X,\mathcal{O}_X(-D))$.

a) Injectivité de a.

Il suffit de montrer que, pour tout n entier positif, on a :

$$H^0(X,L^{-n}/D) = 0 .$$

Ecrivons $D = \sum_1^m n_i C_i$ où les C_i sont les composantes réduites et irréductibles de D. Comme $D^2 > 0$, il existe C_i tel que $D.C_i > 0$, donc $H^0(L^{-n}/C_i) = 0$ pour au moins un i. Pour avoir ce que nous voulons, il nous suffit donc de montrer : soient D_1 et D_2 deux diviseurs positifs et non nuls tels que

$$D = D_1 + D_2$$

$$H^0(L^{-n}/D_1) = 0 .$$

Alors il existe une courbe C réduite et irréductible contenue dans D_2 telle que

$$H^0(L^{-n}/D_1+C) = 0 .$$

Or on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D_1)/C \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1+C} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0 .$$

Nous avons donc à trouver $C \hookrightarrow D_2$ tel que $H^0(L^{-n}(-D_1)/C) = 0$. Comme degré $(L^{-n}/C) \leqslant 0$ et $(D_1.D_2) > 0$ (Ramanujam), il existe dans D_2 une courbe irréductible et réduite C telle que degré $(L^{-n}(-D_1)/C) < 0$, c.q.f.d.

Nota. Nous remercions R. Ménégaux qui nous a signalé que l'argument initial pour a) était incomplet.

b) Nilpotence de l'action de Frobenius.

Rappelons qu'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p > 0, muni d'un endomorphisme F p-linéaire, est muni d'une décomposition canonique $V = V_n \oplus V_s$, telle que F soit nilpotent sur V_n

et soit injectif sur V_s. De plus si V_s n'est pas nul, il existe un élément non nul de V_s fixé par F.

Appliquant ce qui précède à l'espace vectoriel $H^1(X,\mathcal{O}_X(-D))$, on trouve un élément de $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ fixe sous l'action de l'endomorphisme de Frobenius et dont l'image dans $H^1(D,\mathcal{O}_D)$ est nulle. J-P. Serre a montré dans son article [16] qu'il correspond à cet élément un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$Y \xrightarrow{\pi} X$$

qui est trivial sur D. Nous allons montrer que ce revêtement est trivial sur X aussi, ce qui montrera bien que l'action de Frobenius sur $H^1(X,\mathcal{O}_X(-D))$ est nilpotente.

Il nous suffit de montrer, supposant Y connexe :

$$(\pi^*L.\pi^*L) > 0 \ ,$$

$$(\pi^*L.\mathcal{O}_Y(C)) \geqslant 0 \ , \text{ pour toute courbe C sur Y.}$$

En effet, dans ce cas, $H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D}) = k$ d'après le résultat de C.P. Ramanujam cité plus haut. Ce qui implique π^*D est connexe !

La première inégalité est évidente car $(\pi^*L.\pi^*L) = p(L.L)$. On sait qu'on a : $((\cup\,\sigma\, C).\pi^*D) \geqslant 0$. Donc, pour au moins un $\sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

$$((\sigma C).\pi^*D) \geqslant 0$$

ce qui démontre la deuxième inégalité, puisque $\pi^*D = \sigma\pi^*D$.

<u>Théorème</u> 2.1. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme plat, projectif et semi-stable d'une surface* X *sur une courbe lisse* C *sur un corps* k. *Supposons que la fibre générique de* f *soit lisse et de genre au moins deux, et que le morphisme* f *ne soit pas isotrivial. Soit* $\omega_{X/C}$ *le faisceau dualisant relatif, alors* $H^1(X,\omega_{X/C}^{-1}) = 0$.

Remarquons qu'une telle surface X est normale. D'après le critère et la proposition précédente, il suffit de montrer :

$$H^0(X,\omega_{X/C}^{-p^n} \otimes \Omega_X^1) = 0 \ , \text{ pour tout } n \geqslant 1 \ .$$

Comme on sait que $(\omega_{X/C}.\omega_{X/C}) > 0$, on ne peut avoir de morphisme non nul

$$\omega_{X/C}^k \longrightarrow f^*\Omega_C^1 \ , \quad k > 0 \ .$$

En effet $h^0(\omega_{X/C}^{kn}) \sim \dfrac{h^2n^2}{2}(12 - \delta), \quad n \to \infty$,

et $h^0(f^*\Omega_C^1) \sim n(2q - 2), \quad n \to \infty \quad (q = \text{genre de C}).$

La suite exacte :

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_C \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/C} \longrightarrow 0$$

nous fournit donc une injection :

$$H^0(X,\omega_{X/C}^{-p^n} \otimes \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(X,\omega_{X/C}^{-p^n} \otimes \Omega^1_{X/C}) .$$

La suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/C} \longrightarrow \omega_{X/C}$$

entraîne que le théorème sera démontré quand on aura vérifié

$$H^0(X,\omega_{X/C}^{-p^n+1}) = 0 , \quad \forall\, n \geqslant 1 .$$

Or $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$ donne $1 - p^{-n} < 0$, $\omega_{X/C}$ étant numériquement positif ses puissances négatives ne peuvent avoir de section.

2.2. <u>Une réduction modulo p</u>.

Nous indiquons maintenant comme autre illustration du critère d'annulation une démonstration du théorème suivant de C.P. Ramanujam.

<u>Théorème</u> (C.P. Ramanujam [12], [13]). *Soit* X *une variété projective et lisse de dimension* $n \geqslant 2$ *sur un corps* k *de caractéristique nulle et soit* L *un fibré inversible sur* X *tel que :*

$(L^n) > 0$,

$(c_1(L).C) \geqslant 0$ *pour toute courbe* C *sur* X ;

on a alors :

$H^1(X,L^{-1}) = 0$.

Il est clair, grâce aux théorèmes d'annulation de J.P. Serre [9], qu'on peut supposer que X est une surface.

Il existe un schéma S de type fini sur $\mathbb{Z}$, et un morphisme

$$Y \xrightarrow{f} S$$

tel que :

- f est propre et lisse,
- S est le spectre d'un anneau intègre,
- si η est le point générique de S, on a $k(\eta) \hookrightarrow k$ et $Y_\eta \times_{k(\eta)} k = X$,
- il existe un faisceau inversible sur Y qui donne L sur la fibre générique,
- il existe un point fermé s de S, tel que la caractéristique p du corps k(s) possède les propriétés suivantes :

a) $H^0(Y(s), \mathcal{L}(s)^{-p} \otimes \Omega^1_{Y(s)}) = 0$ et $\mathcal{L}(s)^p$ a au moins une section.

b) $H^1(Y(s), \mathcal{L}(s)^{-p^t}) = 0$, pour un entier positif t.

Le seul point à démontrer est le dernier. On peut toujours choisir S tel que $f_*(\Omega^1_{Y/S})$ soit plat sur S. Soit r son rang sur S. On peut alors choisir un nombre A tel que : pour tout $n \geqslant A$, on ait $H^0(X,L^n)$ de rang strictement plus grand que r. En effet, nous avons déjà vu que le nombre de sections globales de L^n tend vers l'infini avec n. Par le théorème de semi-continuité de la cohomologie on déduit que la propriété a) sera satisfaite dès que $p \geqslant A$. Pour voir que la propriété b) est alors satisfaite en choisissant encore plus attentivement s, il nous suffira de montrer que les deux hypothèses de positivité du théorème sont satisfaites par $\mathcal{L}(s)$ pour s dans un ouvert non vide de S. La proposition 2.1 prouve en effet qu'un tel t existe. Fixons un entier n tel que $L^n = \mathcal{O}_X(D)$ pour un diviseur D sur X. Comme le produit d'intersection ne change pas dans une famille plate, il nous suffit de vérifier que, pour toute composante géométriquement réduite et irréductible C de D, C reste géométriquement réduit et irréductible modulo l'idéal de s, et ceci pour s dans un ouvert non vide de S. Ce dernier point est évident, quitte à remplacer S par un schéma fini sur S.

Le théorème de C.P. Ramanujam se déduit alors du critère et du théorème de semi-continuité de la cohomologie.

Remarques.

i) D'autres démonstrations algébriques du théorème de Kodaira ou de C.P. Ramanujam ont été données par D. Mumford [7], C.P. Ramanujam [12], [13] et Bogomolov [21]. L'annulation du H^1 est équivalente à la "régularité de l'adjointe" en caractéristique zéro. Nous avons montré ailleurs qu'il n'en est pas de même en caractéristique positive [18].

ii) Nous espérons avoir convaincu le lecteur qu'il existe en caractéristique positive des "vanishing theorems" pratiquement aussi utiles que ceux qu'on a en caractéristique zéro. On pourra consulter à ce propos les articles de M. Raynaud [14], [15].

iii) On peut essayer de montrer par une méthode analogue l'annulation des H^i supérieurs comme dans le théorème original de Kodaira. Malheureusement on obtient moins : soit X une variété lisse projective de dimension supérieure à trois sur un corps de caractéristique p positive. Soit L un faisceau ample sur X, alors, supposant

$$H^2(X,L^{-p}) = 0$$
$$H^1(X,L^{-p} \otimes \Omega^1_X) = 0$$

on a un isomorphisme

$$H^2(X,L^{-1}) \simeq H^0(X,L^{-1} \otimes \Omega^1_X) .$$

2.3. Le théorème de rigidité.

Nous montrons ici -comme Arakelov en caractéristique zéro [1]- que la seule façon de déformer un morphisme semi-stable $f : X \longrightarrow C$ est de mouvoir les points de C dont la fibre est singulière.

Théorème 2.3. *Soit* V *un anneau de valuation discrète complet et soit* $\pi : C \longrightarrow \mathrm{Spec}\, V$ *une courbe projective et lisse sur* Spec V. *Soit* S *un diviseur de* C *plat sur* Spec V. *Soit* $f_0 : X_0 \longrightarrow C_0$ *un morphisme non isotrivial d'une surface lisse* X_0 *sur* k_0 *(corps résiduel de* V*), dans la fibre spéciale* C_0 *du morphisme* π. *Supposons que la fibre générique de* f_0 *soit une courbe projective, lisse, géométriquement connexe et de genre* $g \geqslant 2$. *Supposons en outre que les fibres singulières de* f_0 *soient semi-stables, et situées exactement au-dessus de la fibre spéciale* S_0 *de* S. *Alors il existe au plus une surface lisse* X *sur* Spec V *munie d'un morphisme* $f : X \longrightarrow C$ *telle que :*

a) *la fibre spéciale, sur* Spec V, *de* f *soit égale à* f_0 *;*

b) *le morphisme* f *soit lisse en dehors de* S.

Pour justifier le nom du théorème de frigidité, nous indiquons deux corollaires : l'un équicaractéristique, l'autre de passage de la caractéristique $p > 0$ à la caractéristique zéro.

Corollaire 1. *Soit* C *une courbe lisse et projective sur un corps* k *et soit* S *un ensemble fini de points de* C. *Soient* X *une surface lisse sur* k *et* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme non isotrivial projectif, lisse exactement en dehors de* S, *à fibres semi-stables de genre au moins deux. Soit* Y *une surface lisse sur* k[[t]] *munie d'un morphisme* $\varphi : Y \longrightarrow C \times \mathrm{Spec}\, k[[t]]$ *tel que :*

a) *pour* $t = 0$, $Y_0 = X$ *et* $\varphi_0 = f$;

b) φ *est lisse en dehors de* $S \times \mathrm{Spec}\, k[[t]]$.

Alors Y *est isomorphe à* $X \times \mathrm{Spec}\, k[[t]]$ *et* $\varphi = f \times 1_{k[[t]]}$.

Corollaire 2. *Soit* k *un corps de caractéristique* $p > 0$. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme lisse, non isotrivial, d'une surface* X *lisse sur* k, *dans une courbe* C *lisse sur* k. *Supposons que les fibres de* f *soient des courbes projectives de genre au moins deux. Alors il existe au plus un relèvement du couple* (X,f) *en caractéristique zéro.*

Démonstration du théorème 2.3. Nous reprenons un argument dû à Arakelov [1]. Il s'agit de montrer qu'il y a au plus une déformation infinitésimale du morphisme f_0 avec les conditions fixées. L'ensemble des déformations infinitésimales de f_0 est un espace homogène sous $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0})$.

Ecrivons la suite spectrale des Ext locaux vers les Ext globaux :

$$H^i(X_0, \mathcal{E}xt^j(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0}) .$$

On en déduit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X_0, \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \longrightarrow H^0(X_0, \underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

Notons tout d'abord que

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0}) = \omega^{-1}_{X_0/C_0}$$

car $\Omega^1_{X_0/C_0}$ est sans torsion et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X_0/C_0} \longrightarrow \omega_{X_0/C_0} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

où N est à support aux points de X_0 qui sont singuliers dans leurs fibres. Par le théorème 2.1 on a donc

$$H^1(X_0, \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^1_{X_0/C_0}, \mathcal{O}_{X_0})) = 0 .$$

Il reste donc à voir que deux déformations du type envisagé sont localement isomorphes (c'est automatique si $X_0 \longrightarrow C_0$ est lisse).

Lemme (Arakelov [1] pages 1291, 1292). *Soit* V *un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel* k *et de corps de fractions* K. *Soient* T, X, Y *des variables formelles sur* V. *Soit* A *un anneau local complet contenant* V *tel que* $A \simeq V[[T,X,Y]]/XY - \varphi(T)$ *où* $\varphi(T) \in V[[T]]$. *Supposons que :*

a) $\varphi(T) \equiv T$ (mod π *uniformisante de* V) ;

b) $K \underset{V}{\otimes} A/(T)$ *ne soit pas lisse sur* K.

Alors on peut trouver des variables X' *et* Y' *telles que*

$$A \simeq V[[T,X',Y']]/X'Y' - T .$$

Ecrivons $\varphi(T) = T + \pi\Psi(T)$, $\Psi \in V[[T]]$,

$$K \underset{V}{\otimes} A/(T) = K[[X,Y]]/XY - \pi\Psi(0) .$$

Les points non lissité sur K sont donnés par :

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$XY - \pi\Psi(0) = 0 ;$$

s'il y en a, c'est que $\Psi(0) = 0$. On peut donc écrire :

$$\varphi(T) = Tu, \text{ u unité dans } V[[T]] ,$$

posant $X' = X$, $Y' = Y$, on a ce qu'on veut.

Pour finir de montrer le théorème, il nous faut vérifier que les fibres de $X_0 \longrightarrow C_0$ qui sont au-dessus de S_0 ne peuvent se lissifier par générisation. Ceci montrera que le discriminant du morphisme f a pour support exactement S. La démonstration du lemme ci-dessous nous a été gracieusement fournie par Laurent Moret-Bailly.

Lemme. *Soient* V *un anneau de valuation discrète,* R *un anneau local régulier de dimension* 2 *lisse sur* V. *Soit* A *un* R*-anneau local lisse sur* V. *Notons avec des indices* s *(resp.* η*) ce qui se passe au-dessus du point fermé de* V *(resp. au-dessus du point générique de* V*). Supposons le morphisme* $R_s \longrightarrow A_s$ *génériquement lisse et* $\Omega^1_{A_s/R_s}$ *localement libre sur* A_s *sauf au point fermé de* $\mathrm{Spec}(A_s)$*; alors, le morphisme* $R_\eta \longrightarrow A_\eta$ *est génériquement lisse et* $\Omega^1_{A_\eta/R_\eta}$ *n'est pas localement libre sur* A_η.

Démonstration. Il nous suffit de montrer que l'ensemble des points où l'homomorphisme $A \otimes_R \Omega^1_{R/V} \longrightarrow \Omega^1_{A/V}$ n'est pas localement scindé ne peut être fini i.e. de codimension 3 dans Spec A. Or cet ensemble de points est le support du conoyau de $T_{A/V} \otimes_R T_{R/V} \xrightarrow{\alpha} A$; $T_{A/V} \otimes_R T_{R/V}$ étant libre de rang deux sur A et α n'étant pas surjectif, le conoyau est de codimension ≤ 2 , c.q.f.d.

§ 3. Applications.

3.1. Nouveaux contre-exemples aux énoncés d'annulation "à la Kodaira" en caractéristique positive.

3.1.0. Il s'agit de trouver des surfaces lisses X avec un faisceau ample L sur X tel que $H^1(X,L^{-1}) \neq 0$. M. Raynaud [14] a déjà donné de tels exemples. Nous en fournissons ici de nouveaux construits avec l'aide du même M. Raynaud. Essentiellement X sera une surface fibrée en courbes lisses sur une courbe lisse C. On demandera de plus aux fibres de $f : X \longrightarrow C$ d'être des courbes de Tango-Raynaud au sens défini plus bas. Pour une telle fibration, nous trouverons un faisceau inversible L sur X tel que $L^p \simeq \Omega^1_{X/C}$ (p = caractéristique du corps de base). Si on s'est arrangé pour que la fibration $X \longrightarrow C$ soit non isotriviale, le théorème 1 implique que L est ample. La construction sera faite telle que $H^1(X,L^{-1}) \neq 0$.

3.1.1. Courbes de Tango-Raynaud.

Soit C une courbe propre et lisse sur un schéma T. On supposera toujours que le genre de C est au moins 2. Supposons que T soit un schéma sur un corps de caractéristique $p > 0$ (par exemple T peut être un corps).

Soit F l'homomorphisme de Frobenius de T dans T. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[ddr] & & \\ & C^{(p)} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f^{(p)}"] & C \arrow[d, "f"] \\ & T \arrow[r, "F"] & T \end{tikzcd} ;$$

considérons le complexe de De Rham relatif

$$0 \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_C \xrightarrow{d} \alpha_* \Omega^1_{C/T} \longrightarrow 0 .$$

On peut décomposer ce complexe en deux suites exactes de $\mathcal{O}_{C^{(p)}}$ modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C^{(p)}} \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_C \longrightarrow B^1_{C/T} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B^1_{C/T} \longrightarrow \alpha_* \Omega^1_{C/T} \xrightarrow{c} \Omega^1_{C^{(p)}/T} \longrightarrow 0$$

où c est l'opération de Cartier.

Définition ([19], [14]). *Avec les notations précédentes, on dit que* $C \longrightarrow T$ *est une courbe de Tango-Raynaud s'il existe un faisceau inversible* L *sur* $C^{(p)}$ *tel que :*

a) L *est contenu dans* $B^1_{C/T}$ *;*

b) *l'homomorphisme canonique* $\alpha^* L \longrightarrow \Omega^1_{C/T}$ *déduit de* α) *est un isomorphisme.*

Remarquons quelques faits :

(I) $$L^{p^2} \simeq \Omega^{1 \otimes p}_{C^{(p)}/T} .$$

En effet :

$$\alpha^* \Omega^1_{C^{(p)}/T} = \alpha^* \beta^* \Omega^1_{C/T} = F^* \Omega^1_{C/T} = (\Omega^1_{C/T})^{\otimes p} ,$$

donc :

$$\alpha^* (L^{-p} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T}) = \mathcal{O}_C .$$

D'autre part :

$$\alpha_* \alpha^* (L^{-p} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T}) = (L^{-p} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T}) \otimes \alpha_* \mathcal{O}_C$$

i.e. $$\alpha_* \mathcal{O}_C \otimes (L^{-p} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T}) = \alpha_* \mathcal{O}_C ;$$

comme $\alpha_* \mathcal{O}_C$ est localement libre sur $C^{(p)}$ de rang p, on en déduit

$$(L^{-p} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T})^{\otimes p} \simeq \mathcal{O}_{C^{(p)}} .$$

En fait on peut aussi vérifier -laissé au lecteur- $L^p \simeq \Omega^1_{C^{(p)}/T}$.

(II) La condition b) est équivalente à :

$$\mathrm{Sym}_{p-1}(E) \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_C$$

est un isomorphisme, E étant le fibré de rang 2 sur $C^{(p)}$ obtenu par image réciproque de l'injection $L \hookrightarrow B^1_{C/T}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C^{(p)}} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C^{(p)}} & \longrightarrow & \alpha_* \mathcal{O}_C & \longrightarrow & B^1_{C/T} & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

<u>Exemple</u> 1. Si la caractéristique de la base est 2 toute courbe est de Tango-Raynaud : prendre $L = B^1_{C/T}$.

<u>Exemple</u> 2. Soit $C_2 \longrightarrow C_1$ un morphisme étale de courbes lisses sur un schéma T. Alors si C_1 est de Tango-Raynaud, C_2 l'est aussi.

<u>Proposition</u> (Tango [19]). *Soit* C *une courbe lisse projective, de genre au moins deux, sur un corps* K *de caractéristique* $p > 0$. *Pour que* C *soit de Tango-Raynaud, il faut et il suffit qu'il existe une fonction rationnelle* f *sur* C *telle que* $0 \neq (df) = \alpha^* D$, *où* D *est un diviseur sur* $C^{(p)}$.

Nous renvoyons à l'article [19] de H. Tango pour la démonstration.

<u>Exemple</u> 3 (M. Raynaud [14]). Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit C la fermeture projective d'un revêtement d'Artin-Schreier de la droite affine ayant pour équation

$$X^p - X = T^{p^n - 1} .$$

Alors C est une courbe de Tango-Raynaud sur k.

<u>Exemple</u> 4. Soit C une courbe lisse de genre au moins deux sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Supposons que C soit de Tango-Raynaud. Soit $C' \xrightarrow{\pi} C$ un morphisme fini d'une courbe lisse C' sur C. Supposons que le morphisme π soit génériquement séparable, modérement ramifié, et que, pour tout point Q de C', l'indice de ramification de Q soit de la forme $p\lambda_Q + 1$ où λ_Q est un entier.

Alors C' est de Tango-Raynaud. Ecrivons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^* \Omega^1_C \longrightarrow \Omega^1_{C'} \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C'}(-\, p \sum_{Q \text{ ramifié}} \lambda_Q . Q) \longrightarrow \mathcal{O}_{C'} \longrightarrow N \longrightarrow 0 \; .$$

Soit f une fonction rationnelle sur C telle que $0 \neq (df) = \alpha^* D$, D diviseur sur $C^{(p)}$. On a

$$0 \neq d(\pi^* f) = \alpha^*(\pi^* D + \sum_{Q \text{ ramifié}} \lambda_Q . Q) \; .$$

La proposition précédente implique que C' est de Tango-Raynaud.

<u>Proposition</u> 3.1.1. *Soit* T *un schéma lisse connexe de dimension* 1 *sur un corps* k *de caractéristique* $p > 0$. *Soit* $f : C \longrightarrow T$ *une courbe lisse sur* T, *projective et de genre au moins deux. Soit* η *le point générique de* T. *Supposons que la courbe* $C_\eta \longrightarrow k(\eta)$ *soit de Tango-Raynaud ; alors* $C \longrightarrow T$ *est de Tango-Raynaud.*

Soit $L_{1,\eta}$ le sous-fibré de rang un de B^1 tel que $\alpha^* L_{1,\eta} = \Omega^1_{C_\eta/k(\eta)}$.

Soit L_1 un fibré de rang un sur $C^{(p)}$ dont la restriction à la fibre générique de $f^{(p)} : C^{(p)} \longrightarrow T$ est égale à $L_{1,\eta}$. Le fibré inversible $\alpha^* L_1^{-1} \otimes \Omega^1_{C/T}$ est trivial sur la fibre générique de f. Il existe donc un fibré inversible M sur T tel que

$$\Omega^1_{C/T} = \alpha^* L_1 \otimes f^* M \; .$$

Posant $L = L_1 \otimes f^{(p)^*} M$, on a $\alpha^* L = \Omega^1_{C/T}$ et $L_\eta = L_{1,\eta}$.

En contemplant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L^{-1} \otimes B^1_{C/T} \longrightarrow \alpha_*(\alpha^* L^{-1} \otimes \Omega^1_{C/T}) \longrightarrow L^{-1} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T} \longrightarrow 0 \; ,$$

on voit qu'on a une section de

$$\mathcal{O}_C = \alpha^* L^{-1} \otimes \Omega^1_{C/T}$$

qui donne une section de $L^{-1} \otimes \Omega^1_{C^{(p)}/T}$ nulle au point générique. Cette section provient donc d'une section de $L^{-1} \otimes B^1_{C/T}$, c.q.f.d.

3.1.2. <u>Construction du contre-exemple</u>.

Nous allons construire une surface lisse X munie d'un morphisme lisse non isotrivial f de X dans une courbe lisse C. Nous ferons en sorte que le courbe relative $f : X \longrightarrow C$ soit de Tango-Raynaud.

Soit L le fibré inversible de Tango-Raynaud sur $X^{(p)}$. Alors :

- L est <u>ample</u> sur $X^{(p)}$: en effet $L^{p^2} \simeq \Omega^{1 \otimes p}_{X^{(p)}/C}$ est ample sur X en vertu du théorème 1.

- $H^1(X^{(p)},L^{-1}) \neq 0$: en effet l'injection $L \hookrightarrow B^1_{X/C}$ nous donne une section dans $H^0(L^{-1} \otimes B^1_{X/C})$. Examinons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow \alpha_*\alpha^*L^{-1} \longrightarrow L^{-1} \otimes B^1_{X/C} \longrightarrow 0 \ ;$$

on a

$$0 = H^0(\alpha_*\alpha^*L^{-1}) = H^0(\alpha^*L^{-1}) = H^0(\Omega^{1\otimes -1}_{X/C})$$

car $\Omega^1_{X/C}$ est ample.

Donc $H^0(X^{(p)},L^{-1} \otimes B^1_{X/C})$ est non nul et contenu dans $H^1(X^{(p)},L^{-1})$.

En fait on peut vérifier que

$$H^1(X^{(p)},L^{-1}) \simeq k \quad \text{car} \quad k \simeq H^0(X^{(p)},\alpha_*(\alpha^*L^{-1} \otimes \Omega^1_{X/C}))$$

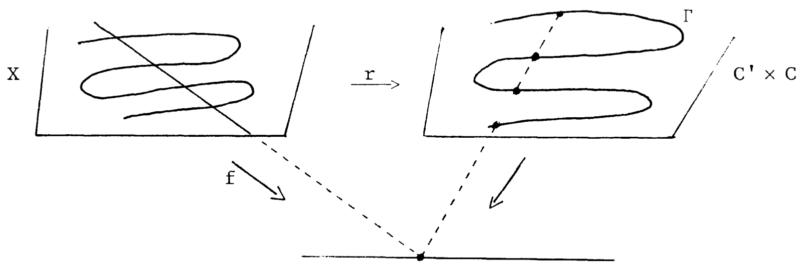
et $H^1(X^{(p)},L^{-p}) = 0$ d'après le théorème 2.1. Pour construire une telle fibration non isotriviale, nous suivons une méthode due à Kodaira. Nous ajoutons bien sûr quelques grains de sel dus à la caractéristique et à la nécessité d'avoir une courbe de Tango-Raynaud.

Soit C une courbe de Tango-Raynaud sur un corps k de caractéristique positive p. Soit $C' \xrightarrow{\pi} C$ un morphisme étale non trivial de degré n premier à p. On peut supposer, quitte à remplacer C par un revêtement étale C" de degré n^{2g}, que le graphe Γ de π satisfait à $\mathcal{O}_{C' \times C''}(\Gamma) = L^n$, où L est un faisceau inversible sur $C' \times C''$.

On notera C" par C par abus de langage. On va supposer de plus que

$$n = mp + 1 \ , \quad m \in \mathbb{N}^+ \ .$$

Soit $X \xrightarrow{r} C' \times C$ le revêtement de $C' \times C$ ramifié n fois le long de Γ.



On a $r_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{C' \times C} \oplus L^{-1} \ \dots \oplus L^{-n+1}$.

Les fibres de $f : X \longrightarrow C$ sont lisses, elles sont de Tango-Raynaud en vertu de l'exemple 4. La fibre générique est aussi de Tango-Raynaud en vertu de l'exemple 4. Indiquons pour terminer l'argument, dû à Kodaira, qui prouve que $f : X \longrightarrow C$ n'est pas isotrivial.

Si ce n'était pas le cas, toutes les fibres de f seraient isomorphes à une courbe, disons F. Pour chaque point géométrique s de C on aurait un morphisme séparable $r(s) : F \longrightarrow C'$. C' étant de genre plus grand que deux, on aurait au moins deux points distincts s_1 et s_2 de C tels que $r(s_1) = r(s_2)$. Ceci est impossible car $r(s_1)$ est ramifié le long de $\Gamma \cap p^{-1}(s_1)$ et $r(s_2)$ le long de $\Gamma \cap p^{-1}(s_2)$, qui sont deux diviseurs distincts.

3.2. Formes différentielles non fermées.

Nous montrons ici qu'il apparaît des 1-formes différentielles globales non fermées, après un changement de base par le morphisme de Frobenius pour un morphisme semi-stable et non isotrivial d'une surface lisse dans un courbe lisse (fibres de f de genre au moins deux). Nous avons vu au § 3.1 la construction due à Kodaira de telles fibrations. Remarquons que c'est sur des surfaces du même type qu'on a construit des contre-exemples au "vanishing" de Kodaira. On peut, en suivant W. Lang [23], se demander si la présence de 1-formes globales non fermées est nécessaire pour avoir un contre-exemple au "vanishing" de Kodaira. Dans ce sens, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme (à la Castelnuovo - De Franchis). *Soit X une surface lisse sur un corps k de caractéristique $p > 2$. Soit L un faisceau inversible très ample sur X. Alors si $L \subset \Omega^1_{X/k}$, il y a sur X au moins une 1-forme différentielle globale non fermée.*

On voit ainsi que si les 1-formes différentielles globales sur une surface lisse X sont fermées, un faisceau inversible L tel que L^p soit très ample vérifie $H^1(X,L^{-1}) = 0$ (appliquer le critère du § 2). Nous laissons au lecteur le soin de montrer ce lemme (cf. par exemple Van de Ven [20]).
L'existence de formes différentielles globales non fermées après un "changement de base" par le morphisme de Frobenius résultera du théorème 1 ($d > 0$) et du lemme suivant qui nous a été communiqué par M. Raynaud pour les fibrations elliptiques.

Lemme 3.2.1. *Soit X une surface lisse sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit $f : X \longrightarrow C$ un morphisme semi-stable de X dans une courbe C, lisse sur k. Soit $\tilde{X}^{(p)}$ la désingularisation minimale de $X^{(p)} = X \times_{(F,C)} C$ où $F : C \longrightarrow C$ est le morphisme de Frobenius. Alors toute 1-forme différentielle globale sur $\tilde{X}^{(p)}$ dont l'image dans $H^0(\tilde{X}^{(p)},\Omega^1_{\tilde{X}^{(p)}/C})$ ne provient pas de $H^0(X,\Omega^1_{X/C})$, n'est pas fermée.*

Le diagramme définissant $X^{(p)}$ et $\tilde{X}^{(p)}$ est le suivant

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}^{(p)} \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddr, "f^{(p)}"'] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "F"] & C .
\end{tikzcd}$$

Notons d'abord que la suite exacte suivante est scindée :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \varphi^*\Omega^1_C \longrightarrow \Omega^1_{X^{(p)}} \longrightarrow \Omega^1_{X^{(p)}/C} \longrightarrow 0 .$$

Notons U l'ouvert des points de X qui sont lisses dans leur fibre. Par abus de langage nous noterons encore par U son image réciproque dans $X^{(p)}$. Nous appellerons d'autre part $\tilde{U}$ l'image réciproque de U dans $\tilde{X}^{(p)}$. On a le diagramme commutatif suivant où les isomorphismes sont dus à la normalité de X, $X^{(p)}$ et $\tilde{X}^{(p)}$

$$\begin{tikzcd}
H^0(C,\Omega^1_C) \arrow[d] \arrow[rr, "\sim"] & & H^0(U, \varphi^*\Omega^1_C) \arrow[d, shift left] \\
H^0(\tilde{X}^{(p)},\Omega^1_{\tilde{X}^{(p)}}) \arrow[r] & H^0(\tilde{U},\Omega^1_{\tilde{U}}) \arrow[r, "\sim"] & H^0(U,\Omega^1_{X^{(p)}}) \arrow[u, shift left, bend right] \arrow[d, shift left] \\
H^0(X,\Omega^1_{X/C}) \arrow[u] \arrow[r] & H^0(U,\Omega^1_{X/C}) \arrow[r, hook] & H^0(U,\Omega^1_{X^{(p)}/C}) \arrow[u, shift left, bend right] .
\end{tikzcd}$$

Soit ω une section globale de $\Omega^1_{\tilde{X}^{(p)}}$, montrons d'abord que si $d\omega = 0$ alors l'image de ω dans $H^0(U,\Omega^1_{X^{(p)}/C})$ provient de $H^0(U,\Omega^1_{X/C})$. En un point de U choisissons des paramètres locaux z_1 et z_2 (z_1 pour la base, z_2 pour la fibre). Comme la suite exacte (*) est scindée, on peut supposer que l'image $\bar{\omega}$ de ω dans $H^0(U,\Omega^1_{X^{(p)}/C})$ est de la forme $A(z_1,z_2)\, dz_2$. La fermeture de ω est alors équivalente à $\frac{\partial A}{\partial z_1} = 0$. Ce qui signifie que A est une fonction de z_1^p et z_2. L'homomorphisme $\Omega^1_{X/C} \longrightarrow \Omega^1_{X^{(p)}/C}$ étant injectif, $\bar{\omega}$ provient bien de $H^0(U,\Omega^1_{X/C})$. Pour finir de montrer le lemme 3.2.1, il nous suffit donc de montrer que la section de $\Omega^1_{X/C}$ sur U ainsi trouvée se prolonge à X en entier. Considérons le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(X,\Omega^1_{X/C}) & \longrightarrow & H^0(X,\omega_{X/C}) & \longrightarrow & H^0(X,N) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{X}^{(p)},\Omega^1_{\tilde{X}^{(p)}/C}) & \longrightarrow & H^0(\tilde{X}^{(p)},\omega_{\tilde{X}^{(p)}/C}) & \longrightarrow & H^0(X,\tilde{N}) \ .
\end{array}$$

Comme $\omega_{X/C}$ est localement libre, on a $H^0(U,\Omega^1_{X/C}) \xrightarrow{\sim} H^0(X,\omega_{X/C})$. En vertu du diagramme précédent, nous aurons montré 3.2.1 si on vérifie que $H^0(X,N) \longrightarrow H^0(X,\tilde{N})$ est injectif, ce qui est évident.

<u>Proposition</u> 3.2.2. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme semi-stable non-isotrivial à fibres de genre* ≥ 2, *d'une surface lisse* X *dans une courbe lisse* C *sur un corps* k *de caractéristique* $p > 0$. *Soit* $X^{(n)}$ *la désingularisée minimale du "changement de base" par le* n*-ième itéré du morphisme de Frobenius de* C. *Alors pour une infinité de* $n \geq 1$, *il existe sur la surface* $X^{(n)}$ *des* 1*-formes différentielles globales non fermées.*

Nous avons montré ci-dessus qu'il suffit de vérifier que

$$\dim H^0(X^{(n)},\Omega^1_{X^{(n)}/C}) > \dim H^0(X^{(n-1)},\Omega^1_{X^{(n-1)}/C})$$

pour une infinité de n.

<u>Lemme</u> 3.2.2. *Soit* $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme semi-stable d'une surface lisse* X *dans une courbe lisse* C *sur un corps* k. *Soit* S *le diviseur (réduit) de* C *formé des points géométriques de* C *dont la fibre n'est pas lisse. Alors on a un homomorphisme injectif :*

$$(f_*\omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_C(-S) \longrightarrow f_*\Omega^1_{X/C} \ .$$

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/C} \longrightarrow \omega_{X/C} \longrightarrow N \longrightarrow 0 \ ,$$

où $N = \sum_{s \in S} \sum_{\substack{P \text{ non lisse} \\ \text{dans sa fibre}}} k(P)$.

On en déduit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow f_*\Omega^1_{X/C} \longrightarrow f_*\omega_{X/C} \longrightarrow f_*N \ ,$$

f_*N étant un espace vectoriel (donc annulé par l'idéal maximal d'un point dans S).

Il existe un sous ensemble S' dans S tel que, pour tout point $P \in S'$, on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow (f_*\Omega^1_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow (f_*\omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow k(P) \longrightarrow 0$$

et pour tout point $Q \notin S'$ on ait un isomorphisme

$$(f_*\Omega^1_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_{C,Q} \xrightarrow{\sim} (f_*\omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_{C,Q} .$$

On en déduit les inclusions :

$$f_* {}^{1}_{X/C} \hookrightarrow (f_*\omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_C(-S') \hookrightarrow (f_*\omega_{X/C}) \otimes \mathcal{O}_C(-S) .$$

- Pour finir la démonstration de la proposition 3.2.2., il suffit de vérifier :

a) $h^0(X^{(n)}, \Omega^1_{X^{(n)}/C}) \geqslant h^0(X^{(n-1)}, \Omega^1_{X^{(n-1)}/C})$;

b) $h^0(X^{(n)}, \Omega^1_{X^{(n)}/C}) \to \infty$.

a) est évident, b) se déduit de $d = d^0(f_*\omega_{X/C}) > 0$ (§ 1). En effet

$$h^0(\Omega^1_{X^{(n)}/C}) \geqslant h^0(f_*^{(n)} \omega_{X^{(n)}/C}(-S))$$

et par le théorème de Riemann-Roch

$$h^0(f_*^{(n)} \omega_{X^{(n)}/C}(-S)) \geqslant p^n d - gs - g\,(q+1)$$

où g = genre des fibres de f,

s = cardinal de S,

q = genre de la courbe C.

Remarque. D. Mumford a donné dans [7] une autre façon de construire des formes non fermées.

3.3. Fibrations lisses de base de genre au plus un.

Nous montrons ici que de telles fibrations sont isotriviales en toute caractéristique (en caractéristique 0 ceci est montré dans [9]). L'énoncé précis est le suivant :

Théorème 3.3. *Soient* k *un corps de caractéristique quelconque,* C *une courbe lisse sur* k, $f : X \longrightarrow C$ *un morphisme projectif, génériquement lisse et semi-stable, tel que les fibres soient des courbes de genre au moins deux. Alors :*

a) *Si* $C \simeq \mathbb{P}^1$ *et s'il y a au plus deux fibres géométriques non lisses,* f *est isotrivial.*

b) *Si* C *est une courbe de genre* 1 *et si* f *est lisse,* f *est isotrivial.*

Une courbe elliptique, $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1$ moins un point ($\mathbb{G}_a$), $\mathbb{P}^1$ moins deux points ($\mathbb{G}_m$) possèdent un groupe continu d'automorphismes G. Le théorème de rigidité (§ 2) implique, que pour tout $g \in G$,

$$f_g : X \underset{(C,g)}{\times} C \longrightarrow C \text{ est isomorphe à } f : X \longrightarrow C .$$

En particulier, pour tout point $P \in C$, la fibre P est isomorphe à la fibre de $f^{-1}(P)$. Donc toutes les fibres du morphisme f sont isomorphes i.e. f est isotrivial.

Remarques.

a) On sait qu'un morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ à fibres de genre 1 et semi-stables possède au moins quatre fibres singulières. On sait aussi qu'une telle fibration avec exactement quatre fibres singulières existe sur $\Gamma(3)$ (ces résultats nous ont été communiqués par J-P. Serre).

b) Je ne connais pas de morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ à fibre de genre $\geqslant 2$, semi-stables avec exactement trois fibres singulières. Par contre, L. Moret-Bailly a construit, en toute caractéristique $p > 0$, des morphismes $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ avec deux fibres singulières mais une d'entre elles n'est pas semi-stable.

c) Le fait -au moins pour les morphismes lisses- que le théorème de rigidité implique le théorème 3.3 formellement a déjà été vu par Parsin [9].

Nous tenons à remercier L. Moret-Bailly pour avoir bien voulu discuter la teneur de 3.3 avec nous.

3.4. Autres applications.

3.4.1. Contre-exemples à l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka.

Ces deux auteurs ont montré qu'en caractéristique nulle, si X est une surface de type général, $C_1^2 \leqslant 3C_2$. On sait qu'une telle inégalité n'est pas vraie en caractéristique positive car on connaît des surfaces de type général avec $C_2 < 0$. Nous allons montrer qu'à partir d'une fibration lisse $f : X \longrightarrow C$ non isotriviale à fibre de genre $\geqslant 2$, on construit des surfaces de type général avec C_2 fixé positif et C_1^2 aussi grand qu'on veut.

Soient C une courbe de genre $q \geqslant 2$, $f : X \longrightarrow C$ une fibration lisse à fibres de genre $g \geqslant 2$ et non isotriviales. De telles fibrations existent, cf. 3.1. Soit, comme d'habitude, $X^{(p^n)}$ le produit fibré de f avec le n-ième itéré du morphisme de Frobenius de C. Soit $d = \text{degré}(f_*\Omega_{X/C})$.

On a :

$$c_2(X^{(p^n)}) = 4(g-1)(q-1) > 0, \text{ pour tout } n,$$

et

$$c_1^2(X^{(p^n)}) = p^n d + 8(g-1)(q-1),$$

ce qui permet de conclure, puisqu'on sait que d est positif.

§ 4. Le théorème de finitude.

Le théorème que nous montrons ici a été conjecturé par I.R. Chafarevitch. En caractéristique zéro, il a été établi par Arakelov [1] et Parsin [9]. Rappelons que si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme propre de variétés algébriques, la classe de Kodaira-Spencer de f est la section canonique du faisceau

$$\underline{\mathrm{Hom}}(f_* \Omega^1_{X/Y}, R^1 f_*(f^* \Omega^1_Y))$$

obtenue en appliquant le foncteur f_* à la suite exacte des différentielles :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 .$$

Un calcul local montre :

- en caractéristique zéro, la classe de Kodaira-Spencer d'un morphisme lisse est nulle, si et seulement si le morphisme est isotrivial ;

- en caractéristique positive, la classe de Kodaira-Spencer d'un morphisme lisse est nulle si et seulement si le morphisme est isotrivial, ou s'il est image réciproque par le morphisme de Frobenius de Y d'un morphisme $f' : X' \longrightarrow Y$.

Théorème 4.1. *Soit* C *une courbe lisse et projective sur un corps* k, *et soit* S *un ensemble fini de points de* C. *Fixons un entier* $g \geq 2$; *alors l'ensemble des morphismes* $f : X \longrightarrow C$, *semi-stables à fibres des courbes projectives de genre* g, *lisses en dehors de* S *et dont la classe de Kodaira-Spencer est non nulle, est fini.*

On voit facilement qu'on peut supposer X lisse. Un tel morphisme n'étant pas isotrivial, on a déjà montré (théorème 2.3) qu'il n'a pas de déformation. Il nous suffira donc de montrer que l'ensemble de tels morphismes forme une famille bornée. Pour cela, considérons le schéma de module grossier M_g des courbes lisses de genre g. Soit $\overline{M}_g$ sa compactification par les courbes stables ; on va mettre en évidence un faisceau ample sur $\overline{M}_g$, dont l'image réciproque sur C par le morphisme $\alpha_f : C \longrightarrow \overline{M}_g$ correspondant à f est de degré borné.

Proposition 4.2. *Conservons les hypothèses du théorème* 4.1 *et notons* s *le cardinal de* S. *Alors*

$$(\omega_{X/C} \cdot \omega_{X/C}) = (12d-\delta) < (q-1 + \tfrac{s}{2})8(g-1)g .$$

Soit U l'image réciproque de C-S par f. Il est facile de voir que, si la classe de Kodaira-Spencer de f est non nulle, alors l'homomorphisme canonique

$$T_{C-S} \longrightarrow R^1(f_{|U})_* (T_{U/C-S})$$

est non nul (c'est d'ailleurs équivalent). Remarquons que pour montrer la proposition 4.2, on peut supposer k algébriquement clos.

Considérons les deux suites exactes :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow f^* \Omega^1_C \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/C} \longrightarrow 0 ,$$

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_{X/C} \longrightarrow \omega_{X/C} \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

On sait que N est un espace vectoriel sur k de dimension finie ; en fait on a

$$N = \bigoplus_{P \in S} \bigoplus_{\substack{Q \text{ non lisse} \\ \text{dans } f^{-1}(P)}} k(Q) .$$

En dualisant ces suites exactes, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{X/C} \longrightarrow T_X \longrightarrow f^*T_C \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2(N,\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 .$$

Soit I le conoyau de $T_{X/C} \longrightarrow T_X$.

L'hypothèse sur la classe de Kodaira-Spencer de F nous donne un homomorphisme non nul

$$f_*I \longrightarrow R^1 f_* T_{X/C} .$$

On a d'autre part une suite exacte

$$0 \longrightarrow f_*I \longrightarrow T_C \longrightarrow f_* \underline{\mathrm{Ext}}^2(N,\mathcal{O}_X) .$$

Comme en chaque point fermé P de C le faisceau $f_* \underline{\mathrm{Ext}}^2(N,\mathcal{O}_X)$ est annulé par l'idéal maximal m_P, on voit qu'il existe un sous ensemble S' de S tel que

$$f_*I = T_C\ (-S') .$$

Finalement, en remarquant que $T_{X/C} = \omega^{-1}_{X/L}$, on a :

$$H^0(C,\ R^1f_*(\omega^{-1}_{X/C} \otimes f^*\ \Omega^1_C(S')) \neq 0 .$$

Par la suite spectrale de Leray de f, on en déduit

$$H^1(X,\ \omega^{-1}_{X/C} \otimes f^*\ \Omega^1_C(S')) \neq 0 .$$

En copiant la démonstration du théorème 2.1, on prouve :

<u>Théorème</u> 2.1'. *Soit* f : X ⟶ C *un morphisme projectif semi-stable, à fibres des courbes de genre* $g \geq 2$, *d'une surface lisse* X *dans une courbe lisse* C. *Supposons que* f *n'est pas isotrivial ; alors, si* L *est un faisceau inversible sur* C *tel que*

$\omega_{X/C} \otimes f^{*}L$ *soit numériquement positif, on a :*

$$H^1(X, \omega_{X/C}^{-1} \otimes f^{*} L^{-1}) = 0 \ .$$

On déduit des considérations précédentes qu'on est dans au moins une des situations suivantes :

a) $(\omega_{X/C} \otimes f^{*}\, T_C(-S') \ . \ \omega_{X/C} \otimes f^{*}\, T_C(-S')) \leqslant 0$;

b) il existe un diviseur positif réduit et irréductible D sur X tel que

$$(\mathcal{O}_X(D) \ . \ \omega_{X/C} \otimes f^{*}\, T_C(-S')) < 0 \ .$$

Si on est dans la situation a), un calcul facile montre qu'on a

$$(12d-\delta) \leqslant 8\ (q-1 + \tfrac{s}{2})(g-1) \ ;$$

il reste donc pour prouver 4.2 à analyser le cas b).
Remarquons tout de suite qu'un tel diviseur D n'est contenu dans aucune fibre de f. En effet si $F \subset f^{-1}(P)$, on a :

$$(\mathcal{O}_X(F) \ . \ \omega_{X/C}) \geqslant 0$$
$$(\mathcal{O}_X(F) \ . \ f^{*}T_C(-S')) = 0 \ .$$

Par un argument déjà utilisé au § 1, on sait qu'il existe un morphisme fini

$$\pi : C' \longrightarrow C \ , \qquad C' \text{ lisse} \ ,$$

tel que, si on note X' la résolution minimale des singularités de $X \times_C C'$ et α le morphisme $X' \longrightarrow X$, on ait $\alpha^{*}D = \Sigma\, r_i\, E_i + F$, où les E_i sont des sections de $f' : X' \longrightarrow C'$, et F est contenu dans un nombre fini de fibres. Bien sûr, les r_i sont non nuls, et on voit donc qu'il existe une section E de $f' : X' \longrightarrow C'$ telle que

$$(\mathcal{O}_X(E) \ . \ \alpha^{*}(\omega_{X/C} \otimes f^{*}\, T_C(-S'))) < 0 \ .$$

En notant n le degré de C' sur C, et en se rappelant que $\alpha^{*}\, \omega_{X/C} = \omega_{X'/C'}$ (lemme 0.3), on obtient

$$-\ (E)^2 < 2n\ (q - 1 + \tfrac{s}{2}) \ .$$

Pour finir de montrer la proposition nous allons montrer, grâce à une idée de I.R. Chafaréritch (cf. [9]), que, si on borne la self-intersection d'une section, on a borné la self-intersection du faisceau dualisant relatif. Comme on sait (théorème 1) que $(\omega_{X'/C'} \cdot \omega_{X'/C'}) > 0$, en appliquant le théorème de l'index de Hodge au sous espace du groupe de Néron-Severi engendré par les trois faisceaux $\omega_{X'/C'}$, $\mathcal{O}_{X'}(E)$ et $f'^{*}\, \mathcal{O}_C(P)$ (P un point de C), on trouve :

$$\text{dét} \begin{vmatrix} n(12d-\delta) & -E^2 & 2g-2 \\ -E^2 & E^2 & 1 \\ 2g-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \ ,$$

ce qui donne

$$n(12d-\delta) \leqslant -(E^2).4.g(g-1) \;;$$

finalement on obtient l'inégalité voulue.

Nous allons maintenant vérifier qu'il existe un entier N fixe (ne dépendant que de g) et un faisceau inversible L ample sur $\overline{M}_g$ dont limage réciproque sur C est de degré plus petit que N.(12d-δ). Nous utiliserons pour ce faire un théorème délicat de D. Mumford.

Soit H le sous-schéma du schéma de Hilbert des courbes de $\mathbb{P}_k^{(2e-1)(g-1)-1}$ (e fixé ⩾ 3, g ⩾ 2) formé des courbes stables plongées e-canoniquement avec comme polynôme de Hilbert $ne(2g-2)-g+1$. Le groupe PGL((2e-1)(g-1)) agit sur H de façon stable. Le quotient de H par cette action est une compactification $\overline{M}_g$ du schéma de module grossier des courbes lisses de genre g. Soit $\mathfrak{X}$ la courbe universelle sur H ; on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & & \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \\ H & \xrightarrow{q} & \overline{M}_g \end{array}$$

On sait ([6] lemme 5.8, page 100) que $\operatorname{Pic}\overline{M}_g \longrightarrow \operatorname{Pic} H$ est injective.

Théorème (D. Mumford [6], corollaire 5.18, page 106). *Si* e ⩾ 5, *il existe un entier* N *et un faisceau inversible* L *ample sur* $\overline{M}_g$ *dont l'image réciproque sur* H *satisfait à :*

$$q^*L = \left(\left(\overset{\max}{\Lambda}\varphi_*(\omega_{\mathfrak{X}/H})\right)^{\otimes 12e-4} \otimes \mathcal{O}_H(-e\Delta)\right)^{\otimes N}$$

où Δ *est le diviseur formé des points de* H *dont la fibre dans* X *est singulière.*

Corollaire. *Soit* $X \xrightarrow{f} C$ *un morphisme semi-stable non isotrivial et soit* α *le morphisme correspondant* $\alpha : C \longrightarrow \overline{M}_g$ *alors*

$$0 < \operatorname{degré}(\alpha^*L) = N((12d-\delta)e-4d) \;.$$

Le fait que $\operatorname{degré}(\alpha^*L) > 0$ vient de la non isotrivialité de f. Pour finir de montrer le corollaire, considérons l'espace principal homogène T sous PGL((2e-1)(g-1)) sur C, qui rend $\mathbb{P}_C(f_*(\omega_{X/C}^{\otimes e}))$ isomorphe à $\mathbb{P}_C^{(2e-1)(g-1)-1}$.

On a un diagramme commutatif dont le carré de gauche est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & \longrightarrow & H & \xrightarrow{q} & \overline{M}_g \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha} \\ X \times_C T & \xrightarrow{\varphi} & T & \xrightarrow{t} & C \end{array}$$

Pour montrer le corollaire, il nous suffit de vérifier que Pic C $\longrightarrow$ Pic T est injectif. Pour vérifier ceci, il nous suffit de remarquer que si Y est un schéma normal, alors $(p_2)_*(\mathcal{O}^*_{Y\times PGL(n)}) = \mathcal{O}^*_Y$.

Je remercie M. Raynaud de m'avoir communiqué ces derniers points.

Remarques :

1) Nous avons montré le théorème 4.7 en bornant $(12d-\delta)$. Le théorème entraîne que d est borné aussi. Il serait intéressant de trouver une borne effective à d. En caractéristique zéro, Arakelov [1] a montré que $d \leqslant (q-1+\frac{s}{2})(g-g_o)$ où g_o est la dimension de la partie fixe de la jacobienne de la fibre générique.

2) On peut se demander si, avec les notations de la démonstration de 4.2, on a

$$(\omega_{X/C} \otimes f^* T_C(-S'))^2 \leqslant 0 \ ;$$

ceci donnerait une borne plus ressemblante à celle d'Arakelov :

$$(12d-\delta) \leqslant 8(q-1+\frac{s}{2})(g-1) \ .$$

3) Il est facile de voir que 4.2 redémontre le théorème 3.3. En effet :

- si $C \simeq \mathbb{P}^1$ i.e. $q=0$, on doit avoir $s \geqslant 3$;
- si C est de genre 1, on doit avoir $s > 0$.

4) Dans son article [9], Parsin a montré que la conjecture de Chafarevitch implique celle de Mordell. On peut donc dire que nous avons maintenant une démonstration raisonnablement rigoureuse de la conjecture de Mordell pour les corps de fonctions sur un corps de caractéristique $p > 0$ (c.f. P. Samuel [24]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ARAKELOV - *Families of algebraic curves with fixed degeneracy*, Isvest. Akad. Nauk. 35 (1971).

[2] P. DELIGNE, D. MUMFORD - *The irreductibility of the space of curves of a given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. (1969), p. 75.

[3] W. HABOUSH - *Reductive groups are geometrically reductive*, Annals of Math. 102 (1975), 67-84.

[4] K. KODAIRA - *On a differential-geometric method in the theory of analytical stacks*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 39 (1953).

[5] D. MUMFORD - *Enriques classification* I, in Global analysis Princeton N.Y. Princeton Univ. Press (1969).

[6] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, l'Ens. Math. XXIII, fasc. 1-2 (1977).

[7] D. MUMFORD - *Pathologies* III, Amer. Jour. of Math., 89 (1967).

[8] D. MUMFORD - *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag (1965).

[9] A.N. PARSIN - *Algebraic curves over function fields* I, Isv. Akad. Nauk SSSR, 32 (1968).

[10] A.N. PARSIN - *Minimal models of curves of genus* 2 *and homomorphisms of abelian varieties...*, Isv. Akad. Nauk SSSR, 36 (1972).

[11] D. MUMFORD - *Pathologies of modular geometry*, Amer. J. Math. 83 (1961).

[12] C.P. RAMANUJAM - *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*, Journ. Indian Math. Soc. 36 (1972).

[13] C.P. RAMANUJAM - *Supplement to the article* 12, Jour. Ind. Math. Soc., 38 (1974).

[14] M. RAYNAUD - *Un contre-exemple au "vanishing" de Kodaira en caractéristique* p > 0, à paraître Ind. Jour. of Math.

[15] M. RAYNAUD - p-*torsion du schéma de Picard*, ce volume.

[16] J.-P. SERRE - *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique* p > 0, Symp. Alg. Top. Mexico (1956).

[17] J.R. SAFAREVICH - *Algebraic number fields*, Proc. Int. Cong. Math. (Stockholm 1962).

[18] L. SZPIRO - *la régularité de l'adjointe...*, Proc. Int. Symp. on Alg. Geom. Kyoto (1977).

[19] H. TANGO - *On the behaviour of extensions of vector bundles under the Frobenius map*, Nagoya Math. Journal 48 (1972).

[20] A. VAN de VEN - *On the Chern numbers of surfaces of general type*, Invent. Math., 36 (1976)

[21] F.A. BOGOMOLOV - Congrès International des mathématiciens, Helsinki (1978).

[22] M. ARTIN -G. WINTERS - *Degenerate fibers and stable reduction of curves*, Topology 10 (1971), 373-384.

[23] W.E. LANG - *Quasi-elliptic surfaces in characteristic three,* Thesis Harvard University, May 1968, Cambridge, Mass. U.S.A.

[24] P. SAMUEL - *Complément à un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell,* Publications Math. I.H.E.S. n° 29 (1966).

L. SZPIRO
Centre de Mathématiques E.R.A. 589
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 - PARIS-CEDEX 05