Astérisque

LUC ILLUSIE

# Complexe de de Rham-Witt

*Astérisque*, tome 63 (1979), p. 83-112

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__63__83_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 63 (1979) p. 83-112

# COMPLEXE DE DE RHAM-WITT

par

Luc ILLUSIE
(Orsay *)

-:-:-:-

Soient $k$ un corps parfait de caractéristique $p > 0$ , $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de $k$ . Depuis le travail fondamental de Berthelot [3], on sait que la cohomologie cristalline est une bonne cohomologie p-adique pour les schémas propres et lisses sur $k$ , bien que le formalisme dont on dispose pour le moment ne soit pas aussi souple que son analogue $\ell$-adique ($\ell \neq p$). Toutefois, si $X$ est un schéma propre et lisse sur $k$ , les "mauvaises" cohomologies p-adiques étudiées avant l'introduction de la cohomologie cristalline, notamment la cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(X/k)$, la cohomologie de Hodge $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$, la cohomologie de $X$ à valeurs dans le faisceau des vecteurs de Witt $H^*(X,W\underline{O}_X)$ (Serre [28]), la cohomologie étale $H^*(X,\mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^*(X,\mathbb{Z}/p^n)$, la cohomologie plate $H^*(X,\mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim H^*(X,\mu_{p^n})$ reflètent des propriétés géométriques intéressantes de $X$ . Jusqu'à une date récente, les relations entre la

---
* Equipe de recherche associée au CNRS n° 653.

cohomologie cristalline $H^*(X/W)$ et ces diverses cohomologies étaient restées assez mystérieuses, excepté quelques résultats partiels, dont le plus frappant est sans doute le remarquable théorème de Mazur-Ogus [18], [19], [24], déterminant (sous certaines hypothèses, voir 5.1.1) la filtration de Hodge de $H^*_{DR}(X/k)$ en termes de l'opération de Frobenius sur $H^*(X/W)$. Avec le travail de Bloch [7], un progrès décisif a été accompli : Bloch montre en effet que, pour $p > 2$ et $X$ propre et lisse de dimension $< p$, $H^*(X/W)$ est l'hypercohomologie d'un complexe $C^{\cdot}_X$ de faisceaux de $W$-modules sur le site zariskien de $X$, fonctoriellement attaché à $X$, et qui apparaît comme un raffinement commun de l'anneau des vecteurs de Witt $W\underline{O}_X$ et du complexe de de Rham $\Omega^{\cdot}_{X/k}$ : cela lui permet de relier $H^*(X/W)$, par des suites exactes et suites spectrales naturelles, aux cohomologies citées plus haut. La théorie de Bloch est malheureusement limitée, dans la définition même de $C^{\cdot}_X$, par les hypothèses $p > 2$ et $\dim(X) < p$. Nous nous proposons ici de montrer comment on peut se débarrasser de ces restrictions et développer une théorie analogue à celle de Bloch pour tous les schémas propres et lisses sur $k$. Le complexe $C^{\cdot}_X$ est remplacé par un complexe similaire $W\Omega^{\cdot}_X$, le "complexe de de Rham-Witt" de $X$, défini pour tout schéma $X$ sur $k$, et qui s'identifie canoniquement à $C^{\cdot}_X$ pour $p > 2$ et $X$ lisse de dimension $< p$. L'idée de la construction est due à Deligne [9], inspirée par le travail de Lubkin [17]. La définition de $W\Omega^{\cdot}_X$, à la différence de celle de $C^{\cdot}_X$, ne fait aucun usage de K-théorie : tout repose sur des techniques standard de calcul différentiel, où, naturellement, l'opération de Cartier joue un rôle important.

Nous nous bornerons ici à résumer les principaux résultats de la théorie, en indiquant les grandes lignes des démonstrations. Nous renvoyons le lecteur à [11] pour une rédaction détaillée.

## 0. Notations.

La lettre $p$ désigne un nombre premier fixé.

Si $L$ est un faisceau, la notation $x \in L$ signifie que $x$ est une section locale de $L$.

Si $A$ est un faisceau d'anneaux de caractéristique $p$, on note $W(A)$ (ou $WA$) le faisceau des vecteurs de Witt sur $A$, et, pour $n \geqslant 1$, $W_n(A)$ (ou $W_nA$) le faisceau des vecteurs de longueur $n$ ; pour $n$ entier $\leqslant 0$, on pose $W_nA = 0$. Pour $x \in A$, on note $\underline{x} = (x, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W(A)$ le représentant de Teichmüller de $x$, et $\underline{x}_{\leqslant n}$ (ou simplement $\underline{x}$) son image dans $W_nA$ pour $n \geqslant 1$.

Les algèbres différentielles graduées considérées (en abrégé, adg) seront supposées à degrés $\geqslant 0$ et strictement anti-commutatives (i.e. telles que les éléments de degré impair soient de carré nul). Si $A$ est un anneau (commutatif), le foncteur associant à toute $A$-adg sa composante de degré zéro admet pour adjoint à gauche le foncteur complexe de de Rham $B \mapsto \Omega^{\cdot}_{B/A}$. On écrira $\Omega^{\cdot}_B$ pour $\Omega^{\cdot}_{B/\mathbb{Z}}$.

## 1. Définition du complexe de de Rham-Witt.

1.1 Soit $X$ un topos. Appelons V-pro-complexe de DR (= de Rham) de $X$ la donnée d'un système projectif $M_{\cdot} = ((M_n)_{n \in \mathbb{Z}}, R : M_{n+1} \to M_n)$ de $\mathbb{Z}$-adg de $X$ et d'une famille d'applications additives $(V : M_n^i \to M_{n+1}^i)_{i, n \in \mathbb{Z}}$ telles que $RV = VR$, vérifiant les conditions (V1) à (V3) ci-après :

(V1) $M_n = 0$ pour $n \leqslant 0$ ; $M_1^o$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre ; pour $n \geqslant 1$, $M_n^o = W_n(M_1^o)$, et $R : W_{n+1}(M_1^o) \to W_n(M_1^o)$ (resp. $V : W_n(M_1^o) \to W_{n+1}(M_1^o)$) est la flèche habituelle de restriction (resp. décalage) ;

(V2) $V(xdy) = (Vx)dVy$ quels que soient $x \in M_n^i$, $y \in M_n^j$, $i, j, n \in \mathbb{Z}$ ;

(V3) $(Vy)d\underline{x} = V(\underline{x}^{p-1}y)dV\underline{x}$ quels que soient $x \in M_1^o$, $y \in M_n^o$, $n \geqslant 1$. Les V-pro-complexes de DR de $X$ forment de manière naturelle une catégorie, et il n'est pas difficile de démontrer que le foncteur d'oubli associant à chaque V-pro-complexe $M.$ la $\mathbb{F}_p$-algèbre $M_1^o$ possède un adjoint à gauche $A \mapsto W.\Omega_A^\bullet$. Si $A$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre de $X$, on appelle <u>pro-complexe de DR-Witt</u> (resp. <u>complexe de DR-Witt</u>) de $A$ le V-pro-complexe de DR $W.\Omega_A^\bullet$ (resp. le complexe $W\Omega_A^\bullet = \varprojlim W_n\Omega_A^\bullet$). La propriété universelle de $W.\Omega_A^\bullet$ entraîne que le morphisme de systèmes projectifs d'adg

$$\pi. : \Omega_{W.A}^\bullet \to W.\Omega_A^\bullet \tag{1.1.1}$$

prolongeant l'identité de $W.A$ est surjectif. En particulier, les flèches de transition $W_{n+1}\Omega_A^\bullet \to W_n\Omega_A^\bullet$ (dites aussi projections canoniques) sont surjectives. De plus, $\pi_1 : \Omega_A^\bullet \longrightarrow W_1\Omega_A^\bullet$ est un isomorphisme, par lequel on identifiera dans la suite $W_1\Omega_A^\bullet$ à $\Omega_A^\bullet$.

1.2 Par définition, $W.\Omega_A^\bullet$ dépend fonctoriellement de la $\mathbb{F}_p$-algèbre $A$. En particulier, l'endomorphisme de Frobenius de $A$ induit un endomorphisme de $W.\Omega_A^\bullet$ (resp. $W\Omega_A^\bullet$) qu'on notera $\underline{F}$. Un fait remarquable est que $\underline{F}$ est canoniquement divisible par $p^i$ en degré $i$, plus précisément on a le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 1.2.1. <u>L'homomorphisme de systèmes projectifs d'anneaux</u> $W.A \to W._{-1}A$, <u>composé du Frobenius et de la restriction</u>, <u>se prolonge de manière unique en un homomorphisme de systèmes projectifs d'algèbres graduées</u> $F : W.\Omega_A^\bullet \to W._{-1}\Omega_A^\bullet$ <u>tel que</u> :

(i) $Fd\underline{x}_{\leqslant n} = \underline{x}_{\leqslant n-1}^{p-1}d\underline{x}_{\leqslant n-1}$ <u>pour tout</u> $x \in A$ <u>et tout</u> $n \geqslant 2$,

(ii) $FdV = d : W_nA \to W_n\Omega_A^1$ <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$.

<u>Pour tout</u> $n$ <u>et tout</u> $i$, <u>on a un carré commutatif</u>

$$(1.2.1.1)\qquad \begin{array}{ccc} W_n\Omega^i_A & \xrightarrow{\underline{F}} & W_n\Omega^i_A \\ \| & & \downarrow \\ W_n\Omega^i_A & \xrightarrow{p^iF} & W_{n-1}\Omega^i_A \end{array} ,$$

<u>où la flèche verticale de droite est la projection canonique</u>. <u>De plus</u>, <u>les opérateurs</u> $F$ <u>et</u> $V$ <u>vérifient le formulaire suivant</u> :

(1.2.1.2) $\qquad FV = VF = p$ , $FdV = d$ , $dF = pFd$ , $Vd = pdV$ ,

$xVy = V(Fx.y)$ <u>quels que soient</u> $x \in W_n\Omega^i_A$ , $y \in W_{n-1}\Omega^j_A$ .

Par passage à la limite, les homomorphismes $F : W_n\Omega^\cdot_A \to W_{n-1}\Omega^\cdot_A$ définissent un homomorphisme d'algèbres graduées $F : W\Omega^\cdot_A \to W\Omega^\cdot_A$ vérifiant avec $V$ un formulaire analogue à 1.2.1.2 et tel que $\underline{F} = p^iF$ en degré $i$ .

1.3 Soit $k$ une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite de $X$ (i.e. dont le Frobenius est un automorphisme). Alors on a $W.\Omega^\cdot_k = W.(k)$, i.e. $W.\Omega^i_k = 0$ pour $i > 0$ . Si $A$ est une $k$-algèbre, les $W_n\Omega^\cdot_A$ sont donc de manière naturelle des $W_n(k)$-adg ; la différentielle $d$ est $W_n(k)$-linéaire, tandis que $F$ (resp. $V$) est $\sigma$ (resp. $\sigma^{-1}$)-linéaire, où $\sigma$ est l'automorphisme de Frobenius de $W(k)$. Si $k'$ est une extension parfaite de $k$ , la flèche naturelle

$$W.\Omega^\cdot_A \otimes_{W.(k)} W.(k') \to W.\Omega^\cdot_A \otimes_k k'$$

est un isomorphisme, transformant $F\otimes\sigma$ (resp. $V\otimes\sigma^{-1}$) en $F$ (resp. $V$).

1.4 Si $X = (X,\underline{O}_X)$ est un topos annelé en $\mathbb{F}_p$-algèbres, le pro-complexe de DR-Witt (resp. complexe de DR-Witt) de $\underline{O}_X$ sera noté $W.\Omega^\cdot_X$ (resp. $W\Omega^\cdot_X$) et dit <u>pro-complexe de DR-Witt</u> (resp. <u>complexe de DR-Witt</u>) de $X$ . Si $f : X \to Y$ est un morphisme de topos annelés en $\mathbb{F}_p$-algèbres, on a des flèches naturelles de systèmes projectifs d'adg

(1.4.1) $$W.\Omega^{\bullet}_{Y} \to f_{*}W.\Omega^{\bullet}_{X} \quad , \quad f^{-1}W.\Omega^{\bullet}_{Y} \to W.\Omega^{\bullet}_{X} \ ,$$

adjointes l'une de l'autre, et compatibles à $F$ et $V$. Si $f^{-1}\underline{O}_Y = \underline{O}_X$, la seconde flèche 1.4.1 est un isomorphisme. En particulier, si $x$ est un point de $X$, on a $(W.\Omega^{\bullet}_{X})_x \xrightarrow{\sim} W.\Omega^{\bullet}_{\underline{O}_{X,x}}$.

Soit $X$ un $\mathbb{F}_p$-schéma. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, l'espace annelé $(X, W_n\underline{O}_X)$ est un schéma, extension infinitésimale de $X$. Les assertions suivantes sont faciles :

<u>Proposition</u> 1.4.2. a) <u>Si</u> $X$ <u>est un</u> $\mathbb{F}_p$-schéma, <u>les</u> $W_n\Omega^i_X$ <u>sont des faisceaux quasi-cohérents sur</u> $W_n(X)$ ; <u>pour tout ouvert affine</u> $U = \mathrm{Spec}(A)$, <u>on a</u> $\Gamma(U, W_n\Omega^i_X) = W_n\Omega^i_A$.

b) <u>Si</u> $f : X \to Y$ <u>est un morphisme étale de</u> $\mathbb{F}_p$-schémas, <u>alors</u>, <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$, $W_n(f) : W_n(X) \to W_n(Y)$ <u>est étale</u>, <u>et les flèches canoniques</u> $W_n(f)^* W_n\Omega^i_Y \to W_n\Omega^i_X$ <u>sont des isomorphismes</u>.

1.5 Soient $S$ un schéma parfait de car. $p$, et $X$ un $S$-schéma. Posons

$$\Omega^{\bullet\wedge}_{W\underline{O}_X} = \varprojlim \Omega^{\bullet}_{W_n(X)/W_n(S)} \ .$$

L'homomorphisme 1.1.1 définit, par passage à la limite, un homomorphisme de $W(\underline{O}_S)$-adg

(1.5.1) $$\Omega^{\bullet\wedge}_{W\underline{O}_X} \to W\Omega^{\bullet}_X \ .$$

Notons $T$ l'idéal différentiel gradué de $\Omega^{\bullet\wedge}_{W\underline{O}_X}$ formé des éléments de p-torsion. Notons d'autre part $N$ l'idéal différentiel gradué formé des éléments annulés par une puissance de $\underline{F}$, où $\underline{F}$ est l'endomorphisme de $\Omega^{\bullet\wedge}_{W\underline{O}_X}$ induit par le Frobenius (absolu) de $X$. Le résultat suivant, qui ne servira pas dans la suite, fait le lien avec la théorie de Lubkin [17].

<u>Théorème</u> 1.5.2. <u>Si</u> $X$ <u>est lisse sur</u> $S$ , <u>on a</u> $T^\wedge = N^\wedge$ , <u>et</u> 1.5.1 <u>induit un isomorphisme</u> $\Omega^{\cdot}_{W\underline{O}_X}{}^\wedge/T^\wedge \xrightarrow{\sim} W\Omega^{\cdot}_X$ .

1.6 Supposons $p > 2$ . Soient $k$ un corps parfait de car. $p$ , et $X$ un schéma lisse sur $k$ , de dimension $< p$ . Alors le complexe de DR-Witt de $X$ s'identifie canoniquement au complexe des courbes typiques $C^{\cdot}_X$ défini par Bloch dans [7]. Plus précisément, on a le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 1.6.1. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 1$ , <u>l'homomorphisme canonique</u> ([7] II 6.3.4 <u>et</u> III proof of 2.1) $\Omega^{\cdot}_{W_n\underline{O}_X} \to C^{\cdot}_{nX}$ <u>se factorise à travers</u> $\pi_n$ (1.1.1) <u>en un isomorphisme</u> $W_n\underline{O}_X$-linéaire <u>en chaque degré et compatible à</u> $d$

$$u_n : W_n\Omega^{\cdot}_X \xrightarrow{\sim} C^{\cdot}_{nX} .$$

<u>Les</u> $u_n$ <u>forment un isomorphisme de systèmes projectifs, compatible à</u> $F$ <u>et</u> $V$ .

Ce résultat résout affirmativement la question de Bloch ([7] IV Problem 1).

Par passage à la limite, les $u_n$ définissent un isomorphisme de complexes

(1.6.2) $$u : W\Omega^{\cdot}_X \xrightarrow{\sim} C^{\cdot}_X ,$$

$W(\underline{O}_X)$-linéaire en chaque degré, et compatible à $F$ et $V$ . Avec les notations de Bloch [7], $t$ désignant une indéterminée et $E(t)$ l'exponentielle d'Artin-Hasse, on a

(1.6.3) $$u(V^n\underline{x}\, d\log \underline{y}_1 \ldots d\log \underline{y}_i) = (-1)^{i(i+1)/2}\{E(xt^{p^n}), y_1, \ldots, y_i\} ,$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ , $x \in \underline{O}_X$ , $y_1, \ldots, y_i \in \underline{O}_X^*$ , avec $d\log \underline{y}_i = \underline{y}_i^{-1} d\underline{y}_i$ .

1.7 L'ingrédient essentiel de la démonstration de 1.2.1 est la construction suivante, due à Deligne. Soient $k$ un anneau parfait de car. $p$ , $W = W(k)$ , $K = W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ . Soit $n$ un entier $\geqslant 1$ , considérons les anneaux $A = k[T_1, \ldots, T_n]$ , $B = W[T_1, \ldots, T_n]$ , $C = \bigcup_{r \geqslant 0} K[T_1^{p^{-r}}, \ldots, T_n^{p^{-r}}]$ . Toute forme $x \in \Omega^m_{C/K}$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m}(T) \, d\log T_{i_1} \ldots d\log T_{i_m} ,$$

où $a_{i_1 \ldots i_m}(T) \in C$ est un polynôme, à coefficients dans $K$ , en les $T_i^{p^{-r}}$ , divisible par $(T_{i_1} \ldots T_{i_m})^{p^{-s}}$ pour un $s \geqslant 0$ . On dit que $x$ est <u>entière</u> si les $a_{i_1 \ldots i_m}$ sont à coefficients dans $W$ . On note $E_A$ (ou $E$) le sous-complexe de $\Omega^{\cdot}_{C/K}$ formé des formes entières $x$ telles que $dx$ soit entière. $E$ est une sous-W-adg de $\Omega^{\cdot}_{C/K}$ , contenant $\Omega^{\cdot}_{B/W}$ . L'automorphisme $\sigma$-linéaire $F$ de $C$ défini par $F(T_i^{p^{-r}}) = T_i^{p^{-r+1}}$ se prolonge de manière unique en un automorphisme $F$ de $\Omega^{\cdot}_{C/K}$ , qui laisse stable $E$ . L'endomorphisme $V = pF^{-1}$ de $\Omega^{\cdot}_{C/K}$ laisse également stable $E$ , et les opérateurs $F$ et $V$ sur $E$ vérifient un formulaire analogue à 1.2.1.2 :

(1.7.1) $FV = VF = p$ , $FdV = d$ , $dF = pFd$ , $Vd = pdV$ , $xVy = V(Fx.y)$ ,
$V(xdy) = (Vx)dVy$ , quels que soient $x \in E_i$ , $y \in E^j$ .

On vérifie que l'homomorphisme de W-algèbres $B \to W(A)$ envoyant $T_i$ sur $\underline{T}_i$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de W-algèbres $E^o \to W(A)$ compatible à $V$ , qui induit, pour tout $r \geqslant 1$ , un isomorphisme

(1.7.2) $$E^o/V^rE^o \xrightarrow{\sim} W(A)/V^rW(A) = W_r(A) .$$

Posons, pour tout $r \geqslant 0$ et tout $i$ ,

(1.7.3) $$\mathrm{Fil}^rE^i = V^rE^i + dV^rE^{i-1} .$$

Pour $r$ fixé, les $\mathrm{Fil}^r E^i$ forment un idéal différentiel gradué $\mathrm{Fil}^r E$ de $E$. On a $\mathrm{Fil}^0 E = E \supset \mathrm{Fil}^1 E \supset \ldots \supset \mathrm{Fil}^r E \supset \ldots$, d'où un système projectif de W-adg $E_r = E/\mathrm{Fil}^r E$. D'autre part, d'après 1.7.1, on a $V(\mathrm{Fil}^r E) \subset \mathrm{Fil}^{r+1} E$, de sorte que $V$ induit des homomorphismes additifs $V : E_r \to E_{r+1}$. Le résultat suivant est la clef de la théorie :

Théorème 1.7.4 (Deligne [9]). *Le système projectif* $E.$, *muni des opérateurs* $V : E_r \to E_{r+1}$, *et où* $E_r^0$ *est identifié à* $W_r(A)$ *par* 1.7.2, *est un* V-pro-complexe *de* DR (1.1) *et la flèche canonique*

$$W.\Omega_A^{\cdot} \to E. \tag{1.7.4.1}$$

*prolongeant l'identité de* $A$ *est un isomorphisme*.

La démonstration repose sur une étude assez fine de la structure de $E$. On note que $E$ est muni d'une graduation naturelle de type $\mathbb{N}[1/p]^n$ pour laquelle $d$ est homogène de degré 0 : une forme entière $x \in E^m$ est dite homogène de degré $h$ si les $a_{i_1 \ldots i_m}$, dans l'écriture de $x$ donnée plus haut, sont homogènes de degré $h$. On montre que les composantes homogènes des $E^m$ sont libres de type fini sur $W$, et l'on en exhibe des bases. On définit alors une flèche inverse de 1.7.4.1 en envoyant ces éléments de base sur certains éléments de $W.\Omega_A^{\cdot}$.

Dans 1.2.1, l'unicité de $F$ est immédiate ; l'existence nécessite la vérification de certaines identités : on se ramène au cas où $X$ est le topos ponctuel et $A$ l'anneau $\mathbb{F}_p[T_1,\ldots,T_n]$, et, grâce à 1.7.4.1, la vérification peut se faire alors dans $E.$, où elle est triviale.

D'après 1.7.1, on a $F(\mathrm{Fil}^{r+1}E) \subset \mathrm{Fil}^r E$, donc $F$ induit des homomorphismes d'algèbres graduées $F : E_{r+1} \to E_r$. Il est facile de voir que l'isomorphisme 1.7.4.1 est compatible à $F$.

Les démonstrations de 1.5.2 et 1.6.1 utilisent, outre 1.7.4 , des propriétés de la filtration canonique décrite au n° 2 .

1.8 Exemple. On déduit de 1.7.4 la description suivante du complexe de DR-Witt de $\mathbb{F}_p[T]$ : $W(\mathbb{F}_p[T])$ est l'ensemble des séries $\sum_{k\in\mathbb{N}[1/p]} a_k T^k$ , avec $a_k \in \mathbb{Z}_p$ , telles que dén(k) (= dénominateur de k) divise $a_k$ pour tout $k$ et $a_k$ tende vers 0 quand $k$ tend vers l'infini suivant le filtre $\mathfrak{F}$ des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}[1/p]$ ; $W\Omega^1_{\mathbb{F}_p[T]}$ est l'ensemble des séries $\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}[1/p]\\ k\neq 0}} a_k T^k dT/T$ avec $a_k \in \mathbb{Z}_p$ , telles que $\text{dén}(k)a_k$ tende vers 0 quand $k$ tend vers l'infini suivant $\mathfrak{F}$ ; $W\Omega^i_{\mathbb{F}_p[T]} = 0$ pour $i > 1$ . La structure d'algèbre différentielle graduée de $W\Omega^{\cdot}_{\mathbb{F}_p[T]}$ est donnée par l'addition, la multiplication et la dérivation habituelles des séries ; l'opérateur $F$ (resp. $V$) est donné par $F(\Sigma\, a_k T^k) = \Sigma\, a_k T^{pk}$, $F(\Sigma\, a_k T^k dT/T) = \Sigma\, a_k T^{pk} dT/T$ (resp. $V(\Sigma\, a_k T^k) = \Sigma\, pa_k T^{k/p}$ , $V(\Sigma\, a_k T^k dT/T) = \Sigma\, pa_k T^{k/p} dT/T)$ .

Les éléments $(V^n\underline{T})d\underline{T} - p^n\underline{T}dV^n\underline{T}$ de $\Omega^{1\,\wedge}_{W(\mathbb{F}_p[T])}$ appartiennent au noyau de la projection canonique sur $W\Omega^1_{\mathbb{F}_p[T]}$ (1.5.1) : c'est évident sur les formules ci-dessus, il est d'ailleurs clair que ces éléments sont de $\underline{F}$-torsion ; on peut montrer que, pour $n \geq 1$ , ils sont non nuls (cf. Lubkin [17]).

## 2. Structure de $W\Omega^{\cdot}_X$ pour $X$ lisse sur une base parfaite.

Dans ce numéro, $S$ désigne un schéma parfait de car. $p$ et $X$ un schéma lisse sur $S$ .

Proposition 2.1. a) Pour tout $n \geq 1$ et tout $i$ , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_{n+1}\Omega^i_X & \xrightarrow{F} & W_n\Omega^i_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^i_X & \xrightarrow{C^{-1}} & \Omega^i_X/d\Omega^{i-1}_X \end{array} ,$$

<u>où les flèches verticales sont les projections canoniques et</u> $C^{-1}$ <u>est l'opération de Cartier inverse</u> (*).

b) <u>Les endomorphismes</u> $p$ , $F$ , $V$ <u>du pro-objet</u> $W.\Omega^\cdot_X$ <u>sont injectifs</u>. <u>En particulier</u>, $W\Omega^\cdot_X$ <u>est sans</u> p-torsion.

c) <u>Si</u> $X$ <u>est de dimension relative</u> $\leqslant N$ , <u>on a</u> $W.\Omega^i_X = 0$ <u>pour</u> $i > N$ ; <u>si</u> $X$ <u>est purement de dimension relative</u> $N$ , $F$ <u>est un automorphisme du pro-objet</u> $W.\Omega^N_X$ .

L'assertion a) résulte immédiatement de 1.2.1 . Pour b) et c), on utilise la compatibilité de $W.\Omega^\cdot_X$ à la localisation étale et 1.7.4 .

2.2 <u>La filtration canonique</u>. Notons $\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\cdot_X$ le noyau de la projection canonique $W_r\Omega^\cdot_X \to W_n\Omega^\cdot_X$ pour $1 \leqslant n \leqslant r$ , posons $\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\cdot_X = W_r\Omega^\cdot_X$ (resp. 0) si $n \leqslant 0$ ou $r \leqslant 0$ (resp. $n \geqslant r$). Pour $n$ donné, les $\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\cdot_X$ forment un système projectif d'idéaux différentiels gradués de $W.\Omega^\cdot_X$ . On note également $\mathrm{Fil}^n W\Omega^\cdot_X$ le noyau de la projection canonique $W\Omega^\cdot_X \to W_n\Omega^\cdot_X$ si $n \geqslant 1$ , et $\mathrm{Fil}^n W\Omega^\cdot_X = W\Omega^\cdot_X$ si $n \leqslant 0$ . La filtration décroissante de $W.\Omega^\cdot_X$ (resp. $W\Omega^\cdot_X$) par les $\mathrm{Fil}^n W.\Omega^\cdot_X$ (resp. $\mathrm{Fil}^n W\Omega^\cdot_X$) s'appelle filtration canonique ; on a $\mathrm{Fil}^n W\Omega^\cdot_X = \varprojlim_r \mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\cdot_X$ . On note

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^n W\Omega^\cdot_X = \mathrm{Fil}^n W_{n+1}\Omega^\cdot_X &= \mathrm{Fil}^n W_r\Omega^\cdot_X/\mathrm{Fil}^{n+1}W_r\Omega^\cdot_X \qquad (r \geqslant n+1) \\ &= \mathrm{Fil}^n W\Omega^\cdot_X/\mathrm{Fil}^{n+1}W\Omega^\cdot_X \end{aligned}$$

le gradué associé.

(*) définie par exemple dans Katz [13].

On vérifie facilement que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $r$, $\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^{\bullet}_X$ est l'idéal différentiel gradué de $W_r\Omega^{\bullet}_X$ engendré par $V^n W_{r-n}(\underline{O}_X)$ et que l'on a, pour tout $i$,

(2.2.1) $$\mathrm{Fil}^n W_r\Omega^i_X = V^n W_{r-n}\Omega^i_X + dV^n W_{r-n}\Omega^{i-1}_X .$$

2.3 <u>Cycles et bords supérieurs</u>. Pour tout $i$, posons $Z_o\Omega^i_X = \Omega^i_X$, $B_o\Omega^i_X = 0$, $B_1\Omega^i_X = d\Omega^{i-1}_X$, et définissons par récurrence $B_n\Omega^i_X$, $Z_n\Omega^i_X$ par

(2.3.1) $$C^{-1}(B_n\Omega^i_X) = B_{n+1}\Omega^i_X/B_1\Omega^i_X , \quad C^{-1}(Z_n\Omega^i_X) = Z_{n+1}\Omega^i_X/B_1\Omega^i_X ,$$

où $C^{-1}$ est l'opération de Cartier inverse. $B_n\Omega^i_X$ et $Z_n\Omega^i_X$ sont des sous-modules localement libres de type fini de $F^n_*\Omega^i_X$ (i.e. $\Omega^i_X$ considéré comme module sur $X^{(p^n)}$), et l'on a (abrégeant $B_n\Omega^i_X$ en $B_n$, etc.) :

$$0 = B_o \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots \subset Z_1 \subset Z_o = \Omega^i_X .$$

L'itération de $C^{-1}$ fournit des isomorphismes

(2.3.2) $$C^{-n} : \Omega^i_X \xrightarrow{\sim} Z_n\Omega^i_X/B_n\Omega^i_X .$$

Noter aussi que l'on a $C(B_{n+1}\Omega^i_X) = B_n\Omega^i_X$, $C(Z_{n+1}\Omega^i_X) = Z_n\Omega^i_X$, de sorte que 2.3.2 donne une suite exacte

(2.3.3) $$0 \to B_n\Omega^i_X \to Z_n\Omega^i_X \xrightarrow{C^n} \Omega^i_X \to 0 .$$

2.4 <u>Structure de</u> $\mathrm{gr}^n W\Omega^{\bullet}_X$. Le fait essentiel est l'interprétation suivante des $B_n\Omega^i_X$ et $Z_n\Omega^i_X$, qui (compte tenu de 1.6.1) généralise le résultat de Bloch ([7] II 2.1) :

<u>Théorème</u> 2.4.1. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 0$ <u>et tout</u> $i$, <u>on a</u>

(2.4.1.1) $$B_n\Omega^i_X = \mathrm{Ker}(V^n : \Omega^i_X \to W_{n+1}\Omega^i_X) ,$$

(2.4.1.2) $$Z_n\Omega^i_X = \mathrm{Ker}(dV^n : \Omega^i_X \to W_{n+1}\Omega^{i+1}_X/V^n\Omega^{i+1}_X) .$$

Grâce à 2.2.1 , on en déduit des suites exactes

$$(2.4.2)\qquad 0 \to \Omega^i_X/B_n\Omega^i_X \xrightarrow{V^n} \mathrm{gr}^n W\Omega^i_X \to \Omega^{i-1}_X/Z_n\Omega^{i-1}_X \to 0 .$$

Noter que $\mathrm{gr}^n W\Omega^i_X$ est annulé par $p$ , donc peut être considéré comme $\underline{O}_X$-module via $F : \underline{O}_X = W_{n+1}\underline{O}_X/VW_n\underline{O}_X \to W_{n+1}\underline{O}_X/pW_{n+1}\underline{O}_X$ ; la suite 2.4.2 est alors $\underline{O}_X$-linéaire lorsqu'on regarde $\Omega^*_X$ comme $\underline{O}_X$-module via $F^{n+1}$ . Il en résulte notamment que $\mathrm{gr}^n W\Omega^i_X$ est un $\underline{O}_X$-module localement libre de type fini, et que $W_n\Omega^i_X$ est de type fini sur $W_n\underline{O}_X$ .

Pour la démonstration de 2.4.1 , on se ramène, par localisation étale, au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ , $A = k[T_1,\ldots,T_r]$ , $k$ un anneau parfait, et l'on utilise le lemme suivant (cf. Bloch ([7] II 4.2.4)) :

<u>Lemme</u> 2.4.3. <u>Posons</u> $W = W(k)$ , $B = W[T_1,\ldots,T_r]$ . <u>Soit</u> $x \in \Omega^i_A$ . <u>Pour que</u> $x$ <u>appartienne à</u> $Z_n\Omega^i_A$ (resp. $B_n\Omega^i_A$) <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> $y \in \Omega^i_{B/W}$ <u>relevant</u> $x$ <u>et tel que</u> $dy \in p^n\Omega^{i+1}_{B/W}$ (resp. $z \in \Omega^{i-1}_{B/W}$ <u>tel que</u> $dz \in p^{n-1}\Omega^i_{B/W}$ <u>et</u> $(dz)/p^{n-1}$ <u>relève</u> $x$).

2.5 <u>Structure de</u> $W.\Omega^{\cdot}_X/V$ <u>et</u> $W.\Omega^{\cdot}_X/F$ . Le fait que $F$ relève l'opération de Cartier inverse (2.1 a)) fournit une autre interprétation des $B_n\Omega^i_X$ et $Z_n\Omega^i_X$ :

<u>Proposition</u> 2.5.1. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 0$ <u>et tout</u> $i$ , <u>les flèches</u> $F^n : W_{n+1}\Omega^i_X \to \Omega^i_X$ <u>et</u> $F^n d : W_{n+1}\Omega^i_X \to \Omega^{i+1}_X$ <u>induisent des isomorphismes</u>

$$(2.5.1.1)\qquad F^n : W_{n+1}\Omega^i_X/VW_n\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} Z_n\Omega^i_X ,$$

$$(2.5.1.2)\qquad F^n d : W_{n+1}\Omega^i_X/FW_{n+2}\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} B_{n+1}\Omega^{i+1}_X .$$

L'isomorphisme 2.5.1.1 m'a été signalé par Raynaud. Le cas particulier $i = 0$ de 2.5.1.2 figure déjà dans Serre ([28] §7 Lemme 2).

Noter que la projection canonique $W_{n+1}\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X$ correspond par 2.5.1.1 (resp. 2.5.1.2) à l'opération de Cartier $C : Z_n\Omega^i_X \to Z_{n-1}\Omega^i_X$ (resp. $C : B_{n+1}\Omega^{i+1}_X \to B_n\Omega^{i+1}_X$) (2.3) ; cela résulte aussitôt de 2.1 a).

On vérifie d'autre part qu'on a une suite exacte de pro-objets

(2.5.2) $$0 \to W.\Omega^{i-1}_X/F \xrightarrow{dV} W.\Omega^i_X/V \to \Omega^i_X \to 0 ,$$

qui, par 2.5.1.1 , 2.5.1.2 , s'identifie à 2.3.3 avec pour flèches de transition $C$ sur $Z.\Omega^i_X$ , $B.\Omega^i_X$ , et l'identité sur $\Omega^i_X$ .

2.6 <u>Structure de</u> $W\Omega^\cdot_X/p^nW\Omega^\cdot_X$ . Le résultat suivant, qui est conséquence facile de 2.1 a), est important pour la comparaison de la cohomologie cristalline à l'hypercohomologie du complexe de DR-Witt :

<u>Proposition</u> 2.6.1. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 0$ , <u>l'homomorphisme de complexes</u>

(2.6.1.1) $$\underline{p}^n : \Omega^\cdot_X \to gr^n W\Omega^\cdot_X ,$$

<u>induit par la multiplication par</u> $p^n$ <u>dans</u> $W.\Omega^\cdot_X$ (<u>grâce au fait que</u> $p^n Fil^r W.\Omega^\cdot_X \subset Fil^{n+r} W.\Omega^\cdot_X$ (2.2.1)), <u>est un quasi-isomorphisme</u>.

On en déduit aisément, grâce à 2.1 b) :

<u>Corollaire</u> 2.6.2. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 0$ , <u>la projection naturelle</u>

(2.6.2.1) $$W.\Omega^\cdot_X/p^nW.\Omega^\cdot_X \to W_n\Omega^\cdot_X \quad (\text{resp. } W\Omega^\cdot_X/p^nW\Omega^\cdot_X \to W_n\Omega^\cdot_X)$$

<u>est un quasi-isomorphisme de complexes de pro-objets</u> (<u>resp. de complexes</u>).

Signalons également la variante suivante de 2.6.2.1 pour $n = 1$ (cf. Bloch ([7] III 7.3.1)), qui découle de 2.5.2 :

<u>Proposition</u> 2.6.3. <u>Pour tout</u> $i$ , <u>la projection naturelle de</u> $(W.\underline{O}_X/p \to W.\Omega^1_X/p \to \ldots \to W.\Omega^{i-1}_X/p \to W.\Omega^i_X/V \to 0)$ <u>sur le complexe de</u> DR <u>tronqué</u> $(\underline{O}_X \to \Omega^1_X \to \ldots \to \Omega^i_X)$ <u>est un quasi-isomorphisme de complexes de</u>

pro-objets.

2.6.4. D'après 2.1 a), les $F^nW\Omega^i_X$ (resp. $F^{n-1}dW\Omega^{i-1}_X$) apparaissent comme des relèvements naturels des $Z_n\Omega^i_X$ (resp. $B_n\Omega^i_X$). On peut déduire de 2.6.2 que l'on a $F^nW\Omega^i_X = d^{-1}(p^nW\Omega^{i+1}_X)$ , ce qui concorde avec 2.4.3 .

2.7 Points fixes de $F$ . Il est bien connu et élémentaire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$ , une suite exacte pour la topologie étale (suite d'Artin-Schreier)

(2.7.1) $$0 \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_X \to W_n\underline{O}_X \xrightarrow{1-F} W_n\underline{O}_X \to 0 .$$

L'analogue suivant pour $W.\Omega^1_X$ généralise le résultat de Bloch ([7] II 7.5.1) :

Proposition 2.7.2. *On a une suite exacte de pro-faisceaux pour la topologie étale*

(2.7.2.1) $$0 \to \underline{O}^*_X/\underline{O}^{*p^\cdot}_X \xrightarrow{d\log} W.\Omega^1_X \xrightarrow{1-F} W.\Omega^1_X \to 0 ,$$

*où* $d\log$ *est le système projectif d'applications de* $\underline{O}^*_X/\underline{O}^{*p^n}_X$ *dans* $W_n\Omega^1_X$ *défini par* $x \in \underline{O}^*_X \mapsto \underline{x}^{-1}d\underline{x}$ .

La démonstration est toute pareille à celle de Bloch (loc. cit.).

Il est facile de voir que, pour tout $r \geqslant 1$ et tout $i$ , $1-p^rF$ est un automorphisme du pro-objet $W.\Omega^i_X$ . Il en résulte que 2.7.1 , 2.7.2.1 se raffinent en des suites exactes, pour la topologie étale, de complexes de pro-objets :

(2.7.3) $$0 \to (\mathbb{Z}/p^\cdot\mathbb{Z})_X \to W.\Omega^\cdot_X \xrightarrow{1-\underline{F}} W.\Omega^\cdot_X \to 0 ,$$

(2.7.4) $$0 \to (\underline{O}^*_X/\underline{O}^{*p^\cdot}_X)[-1] \xrightarrow{d\log} W.\Omega^{\geqslant 1}_X \xrightarrow{1-F'} W.\Omega^{\geqslant 1}_X \to 0 ,$$

où $\underline{F}$ est l'endomorphisme de $W.\Omega^\cdot_X$ défini par Frobenius (1.2.1), $W.\Omega^{\geqslant 1}_X$ le tronqué naïf $(0 \to W.\Omega^1_X \xrightarrow{d} W.\Omega^2_X \to \ldots)$ , et $F'$ l'endomorphisme de $W.\Omega_X^{\geq 1}$ défini par $p^{i-1}F$ en degré $i$ .

L'analogue de 2.7.1 , 2.7.2 en degré $\geq 1$ n'est pas encore bien compris. On peut toutefois montrer que, pour tout $i$ , $1-F : W.\Omega_X^i \to W.\Omega_X^i$ est surjectif pour la topologie étale, et que, si $S$ est le spectre d'un corps parfait de car. $p > 2$ et $X$ est de dimension $< p$ , on a une suite exacte de pro-faisceaux pour la topologie étale

$$(2.7.5) \qquad \underline{SK}_{iX}/p^{\cdot}\underline{SK}_{iX} \xrightarrow{d\log} W.\Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W.\Omega_X^i \to 0 ,$$

où $\underline{SK}_{iX}$ est la partie "symbolique" de $\underline{K}_{iX}$ (image de $\underline{O}_X^{*\otimes i}$), et $d\log\{x_1,\dots,x_i\} = (-1)^{i(i+1)/2}\{E(t),x_1,\dots,x_i\}$ (= $d\log \underline{x}_1 \dots d\log \underline{x}_i$ , avec les notations de 1.6.3). L'injectivité de $d\log$ dans 2.7.5 , équivalente à celle de $d\log : \underline{SK}_{iX}/p\underline{SK}_{iX} \to \Omega_X^i$ , n'est, semble-t-il, pas connue.

## 3. Théorèmes de comparaison et de finitude.

3.1 Soient $S$ un schéma parfait de car. $p$ , $W = W(S)$ , $W_n = W_n(S)$ , $\sigma$ l'automorphisme de Frobenius de $W$ . Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini. Notons $(X/W_n)_{cris}$ le topos cristallin de $X$ par rapport à $W_n$ , l'idéal $pW_n\underline{O}_S$ étant muni des puissances divisées standard. Rappelons qu'on a une projection canonique de $(X/W_n)_{cris}$ sur le topos zariskien $X_{zar}$ ([3] III 3.2)

$$u_{X/W_n} : (X/W_n)_{cris} \to X_{zar} ,$$

telle que, pour tout faisceau cristallin $L$ et tout ouvert zariskien $U$ de $X$ , on ait $\Gamma(U,u_{X/W_n *}L) = \Gamma((U/W_n)_{cris},L)$ . Notons $\underline{O}_{X/W_n}$ le faisceau d'anneaux structural de $(X/W_n)_{cris}$ ([3] III 1.1.4) (associant à tout $W_n$-PD-épaississement $(U,T,\delta)$ le faisceau $\underline{O}_T$).

On peut définir une flèche canonique de $D(f^{-1}(W_n\underline{O}_S))$ , (3.1.1) $$Ru_{X/W_n *}(\underline{O}_{X/W_n}) \to W_n\Omega^{\cdot}_X ,$$

compatible aux structures multiplicatives des deux membres, compatible aux flèches de transition $Ru_{X/W_{n+1} *}(\underline{O}_{X/W_{n+1}}) \to Ru_{X/W_n *}(\underline{O}_{X/W_n})$ et $W_{n+1}\Omega^{\cdot}_X \to W_n\Omega^{\cdot}_X$ , et fonctorielle en $X/W_n$ . Par application de $R\Gamma(X_{zar},-)$ on en déduit des flèches ayant des propriétés analogues

(3.1.2) $$R\Gamma(X/W_n) \ (\overset{dfn}{=} R\Gamma((X/W_n)_{cris},\underline{O}_{X/W_n})) \to R\Gamma(X,W_n\Omega^{\cdot}_X) ,$$

(3.1.3) $$H^*(X/W_n) \ (\overset{dfn}{=} H^*R\Gamma(X/W_n)) \to H^*(X,W_n\Omega^{\cdot}_X) .$$

Esquissons la définition de 3.1.1 , en supposant, pour simplifier, qu'il existe une immersion fermée $i$ de $X$ dans un W-schéma formel lisse $Y$ (p-adiquement séparé et complet), muni d'un W-morphisme $F : Y \to Y^{(\sigma)} = Y\times_W(W,\sigma)$ relevant le Frobenius de $Y_1 = Y\times_W S$ . Pour $n \geqslant 1$ , posons $Y_n = Y\times_W W_n$ . D'après ([3] V 2.3.2), on a un isomorphisme canonique de $D(f^{-1}W_n\underline{O}_S)$

(3.1.4) $$Ru_{X/W_n *}(\underline{O}_{X/W_n}) \xrightarrow{\sim} \underline{O}_{\bar{Y}_n} \otimes_{\underline{O}_{Y_n}} \Omega^{\cdot}_{Y_n/W_n} ,$$

où $\bar{Y}_n$ est l'enveloppe à puissances divisées (compatible à celles de $W_n$) de $X$ dans $Y_n$ . D'autre part, la donnée de $F : Y \to Y^{(\sigma)}$ (inutile pour 3.1.4) permet de définir, grâce à Cartier ([16] VII §4), un homomorphisme d'anneaux, compatible à $F$ ,

(3.1.5) $$\underline{O}_Y \to W(\underline{O}_{Y_1}) .$$

Le composé de 3.1.5 avec $W(\underline{O}_{Y_1}) \to i_{1*}W(\underline{O}_X)$ , où $i_1$ est l'immersion de $X$ dans $Y_1$ , donne naissance, grâce aux puissances divisées standard sur l'idéal $VW(\underline{O}_X)$ de $W(\underline{O}_X)$ (cf. par exemple ([7] I p. 216)), à un homomorphisme d'anneaux $\underline{O}_{\bar{Y}_n} \to W_n\underline{O}_X$ , dont on montre qu'il se prolonge (de manière unique) en un homomorphisme de $W_n$-adg

(3.1.6) $$\underline{O}_{\bar{Y}_n} \otimes_{\underline{O}_{Y_n}} \Omega^{\cdot}_{Y_n/W_n} \to W_n\Omega^{\cdot}_X .$$

On vérifie aisément que le composé de 3.1.4 et 3.1.6 est indépendant du choix de $(Y,F)$ : c'est l'homomorphisme 3.1.1 annoncé. La même idée permet de définir 3.1.1 dans le cas général, au moyen d'une descente cohomologique par un recouvrement ouvert affine de $X$.

L'intérêt principal du complexe de DR-Witt réside dans le théorème de comparaison suivant :

<u>Théorème</u> 3.2. <u>Si</u> $X$ <u>est lisse sur</u> $S$, 3.1.1 <u>est un isomorphisme</u>.

Il en est donc de même de 3.1.2 et 3.1.3, autrement dit le complexe de DR-Witt "calcule" la cohomologie cristalline des schémas lisses sur $S$. Par contre, je ne sais rien dire de 3.1.1 quand $X$ n'est pas lisse.

La vérification de 3.2 étant de nature locale sur $X$, on peut supposer qu'on dispose d'un $(Y,F)$ comme ci-dessus qui relève $X$ (avec son Frobenius). Il résulte alors de 2.6.1 que 3.1.6 (où $\bar{Y}_n = Y_n$) est un quasi-isomorphisme.

3.3 Nous supposerons désormais que $S$ est le spectre d'un corps parfait $k$, et nous désignerons par $X$ un schéma <u>propre et lisse</u> sur $k$. Nous poserons comme d'habitude $W = W(k)$, $W_n = W_n(k)$. Si $L$ est un complexe, nous noterons $L^{\langle i} = (\ldots \to L^{i-1} \to L^i \to 0)$, $L^{\rangle i} = (0 \to L^i \to L^{i+1} \to \ldots)$ ses tronqués naïfs. Si $A$ est un complexe de faisceaux abéliens sur $X$, nous écrirons parfois $R\Gamma(A)$, $H^*(A)$ pour $R\Gamma(X,A)$, $H^*(X,A)$.

3.4 Rappelons que la cohomologie cristalline de $X/W$ (à valeurs dans le faisceau structural) est définie par

$$H^*(X/W) = \varprojlim H^*(X/W_n) , \tag{3.4.1}$$

et est la cohomologie d'un complexe parfait de W-modules, en particulier est de type fini sur $W$ ([3] V 1.1.5). Le théorème de comparaison

3.2 permet de retrouver ce résultat. Il résulte en effet de 2.4.2 que les flèches canoniques

(3.4.2) $H^*(X,W\Omega^i_X) \to \varprojlim H^*(X,W_n\Omega^i_X)$ , $H^*(X,W\Omega^\bullet_X) \to \varprojlim H^*(X,W_n\Omega^\bullet_X)$

sont des isomorphismes, donc 3.1.3 fournit un isomorphisme d'anneaux

(3.4.3) $$H^*(X/W) \xrightarrow{\sim} H^*R\Gamma(W\Omega^\bullet_X) .$$

De plus, on déduit de 2.6 :

<u>Proposition</u> 3.4.4. $R\Gamma(W\Omega^\bullet_X)$ <u>est un complexe parfait de</u> W-<u>modules</u>, <u>d'amplitude parfaite contenue dans</u> $[0,2N]$ (SGA 6 I 5.8) <u>si</u> X <u>est de dimension</u> $\leqslant N$ , <u>et</u>, <u>pour tout</u> $n \geqslant 1$ , <u>les flèches canoniques</u>

(3.4.4.1) $$R\Gamma(W\Omega^\bullet_X) \overset{L}{\otimes}_W W_n \to R\Gamma(W\Omega^\bullet_X \otimes W_n) \to R\Gamma(W_n\Omega^\bullet_X)$$

<u>sont des isomorphismes</u>.

L'isomorphisme 3.4.3 , étant fonctoriel en X , est en particulier compatible aux endomorphismes $\underline{F}$ induits par Frobenius sur les deux membres. Compte tenu de 1.2.1 , l'endomorphisme $\underline{F}$ de $H^*(W\Omega^\bullet_X)$ provient de l'endomorphisme $\underline{F}$ de $W\Omega^\bullet_X$ égal à $p^iF$ en degré i .

3.5 <u>Structure des</u> $H^j(W\Omega^i_X)$. Les opérateurs F et V sur $W\Omega^i_X$ munissent les $H^j(W\Omega^i_X)$ d'endomorphismes F et V , respectivement $\sigma$ et $\sigma^{-1}$-linéaires, tels que $FV = VF = p$ . D'autre part, l'isomorphisme 3.4.2 munit les $H^j(W\Omega^i_X)$ d'une topologie, que nous appellerons standard, pour laquelle ils sont séparés et complets. La structure définie par ces données, liée à celle de la "suite spectrale des pentes" du n° 4 , est encore assez mystérieuse. Des travaux en cours de Raynaud [26] laissent espérer cependant une clarification prochaine de la situation. Nous nous contenterons ici d'exposer ce qui est connu pour l'instant.

3.5.1. Les opérateurs $F^n$ et $V^n$ sur les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont continus et d'image fermée. Les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont séparés et complets pour la topologie p-adique, et pour la topologie V-adique (définie par les $V^nH^j(W\Omega_X^i)$) ; la topologie p-adique est plus fine que la topologie V-adique, elle-même plus fine que la topologie standard, et en général ces inclusions sont strictes (voir 5.3).

3.5.2. Quels que soient $i$ et $j$, le sous-module de p-torsion de $H^j(W\Omega_X^i)$ est annulé par une puissance de $p$, et le quotient correspondant est libre de type fini sur $W$. Ce quotient, muni de $F$ et $V$, est donc le module de Cartier d'un groupe formel p-divisible $G_X^{ij}$.

3.5.3. Pour tout $j$, $H^j(W\underline{O}_X)/V$ est de dimension finie sur $k$, en particulier $H^j(W\underline{O}_X)$ est de type fini sur l'anneau de séries formelles non commutatif $W_\sigma[[V]]$ (où $aV = Va^\sigma$). Plus généralement, si, pour $i \geqslant 0$, $V_i$ désigne l'endomorphisme de $\Omega_X^{\leqslant i}$ défini par $p^{i-j}V$ en degré $j$, $V_i$ définit un endomorphisme $V_i$ de $H^j(W\Omega_X^{\leqslant i})$ tel que $H^j(W\Omega_X^{\leqslant i})/V_i$ soit un W-module de longueur finie, et $H^j(W\Omega_X^{\leqslant i})$, considéré comme $W_\sigma[[V]]$-module via $V_i$, est de type fini.

3.5.4. $H^1(W\underline{O}_X)$ est libre de type fini sur $W$ : c'est le module de Cartier du groupe formel p-divisible $(\mathrm{Pic}_{X/k})^\wedge_{red}$.

3.5.5. Pour tout $i$, $H^0(W\Omega_X^i)$ est un W-module libre de type fini.

3.5.6. Si $X$ est purement de dimension $N$, alors, pour tout $i$, $H^i(W\Omega_X^N)$ est un W-module de type fini, dont $F$ est un automorphisme.

3.5.7. Si $X$ est une surface, $H^1(W\Omega_X^1)$ est un W-module de type fini.

Les assertions 3.5.1 résultent du fait que $W_n\Omega^i_X$ est de type fini sur $W_n\underline{O}_X$ (2.4.2). Les résultats 3.5.2 et 3.5.3 généralisent ceux de Bloch ([7] III 2.2 , 2.6), et se démontrent de manière analogue, à partir de 2.6.3 . L'énoncé 3.5.4 est dû à Serre [28] ; pour l'interprétation de $H^1(W\underline{O}_X)$ comme module de Cartier, voir Oda [23] et Fontaine [10]. Les assertions 3.5.5 et 3.5.6 découlent de 2.5 . Le résultat 3.5.7 est dû à Nygaard [22] (voir 4.4.3).

## 4. Suite spectrale des pentes.

On conserve les hypothèses et notations de 3.3 . On note $K$ le corps des fractions de $W$ .

4.1 La filtration de $W\Omega^\bullet_X$ par les $W\Omega^{\geqslant i}_X$ (3.3) fournit, compte tenu de l'isomorphisme 3.4.3 , une suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j(W\Omega^i_X) \Longrightarrow H^*(X/W) , \tag{4.1.1}$$

dite suite spectrale des pentes. On notera

$$P^iH^*(X/W) = \operatorname{Im} H^*(W\Omega^{\geqslant i}_X) \to H^*(W\Omega^\bullet_X) \xrightarrow{\sim} H^*(X/W) \tag{4.1.2}$$

la filtration canonique de l'aboutissement.

L'endomorphisme $\underline{F}$ de $W\Omega^\bullet_X$ (1.2.1), laissant stables les $W\Omega^{\geqslant i}_X$ , induit un endomorphisme $\underline{F}$ de la suite spectrale des pentes, coïncidant, sur l'aboutissement, avec l'endomorphisme de Frobenius de la cohomologie cristalline (cf. 3.4.4). Il est immédiat que l'on a, pour tout $i \geqslant 0$ ,

$$\underline{F}(P^iH^*(X/W)) \subset p^iP^iH^*(X/W) . \tag{4.1.3}$$

Les $E_1^{ij}$ sont en outre munis d'opérateurs $F$ et $V$ vérifiant $FV = VF = p$ (3.5). On a $\underline{F} = p^iF$ sur $E_1^{ij}$ . De plus, la relation $FdV = d$ au niveau de $W\Omega^\bullet_X$ (1.2.1.2) entraîne la relation $Fd_1V = d_1$ .

Enfin, la structure d'algèbre différentielle graduée de $W\Omega^{\bullet}_X$ munit la suite spectrale des pentes d'une structure multiplicative, compatible avec l'opération de $\underline{F}$ .

Les propriétés de cette structure très riche sont loin d'être élucidées (par exemple, la structure multiplicative n'a pas été du tout étudiée !). On ne connait pour le moment que certains énoncés de dégénérescence, inspirés par les résultats de Bloch ([7] III §3). Le plus élémentaire est le suivant :

<u>Théorème</u> 4.2. <u>La suite spectrale des pentes dégénère modulo torsion en</u> $E_1$ , i.e., <u>pour tout</u> $r \geqslant 1$ , $d_r \otimes K = 0$ .

Ce résultat généralise celui de Bloch (loc. cit.). La démonstration, analogue, utilise 3.5.2 et un argument de "pentes" (pour l'action de $\underline{F}$).

On en déduit notamment (compte tenu de 3.5.5) :

$$H^0(W\Omega^i_X) = E_\infty^{i0} = P^i H^i(X/W) \quad \text{pour tout} \quad i \ . \tag{4.2.1}$$

Si $M$ est un F-isocristal sur $k$ ([4] 1.1), et $I$ une partie de $\mathbb{Q}$ , notons $M_I$ la somme des composantes isotypiques de $M$ de pentes $\lambda \in I$ . Il résulte de 4.2 que, pour tout $i$ , les flèches canoniques $H^*(W\Omega^{\geqslant i}_X) \to H^*(X/W)$ , $H^*(X/W) \to H^*(W\Omega^{\langle i}_X)$ induisent des isomorphismes

$$H^*(W\Omega^{\geqslant i}_X) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^*(X/W) \otimes K)_{\geqslant i} \ , \tag{4.2.2}$$

$$(H^*(X/W) \otimes K)_{[0,i[} \to H^*(W\Omega^{\langle i}_X) \otimes K \ . \tag{4.2.3}$$

Le cas particulier $i = 1$ de 4.2.3 avait été obtenu, sous certaines hypothèses restrictives, par Artin-Mazur [2] , à l'aide d'une méthode toute différente. Notons que 4.2.2 et 4.2.3 entraînent des isomorphismes canoniques

$$H^{*-i}(W\Omega^i_X) \otimes K \simeq (H^*(X/W) \otimes K)_{[i,i+1[} \ . \tag{4.2.4}$$

La suite spectrale des pentes ne dégénère pas nécessairement en $E_1$, car il peut arriver que $E_1$ ne soit pas de type fini (cf. 5.3). C'est en fait la seule obstruction :

Théorème 4.3. La suite spectrale des pentes dégénère en $E_1$ si et seulement si $E_1$ est de type fini.

Ce résultat est dû à Nygaard [21] et Bloch (*). En l'absence d'hypothèse de finitude sur le terme $E_1$, on a cependant les phénomènes de dégénérescence partielle suivants :

4.4.1. On a $H^1(W\underline{O}_X) \xleftarrow{\sim} E_\infty^{01}$ (Nygaard [21]). Il en résulte une suite exacte de W-modules libres de type fini

(4.4.1.1) $$0 \to H^0(W\Omega_X^1) \to H^1(X/W) \to H^1(W\underline{O}_X) \to 0 ,$$

qui correspond à la décomposition du groupe p-divisible associé à $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}$ en partie formelle et partie étale (cf. 3.5.4).

4.4.2. Si $X$ est purement de dimension $N$, alors, pour tout $i$, on a $H^i(W\Omega_X^N) = E_1^{Ni} \xrightarrow{\sim} E_\infty^{Ni}$. Cela résulte de 3.5.6 par un argument analogue à ceux de Nygaard [21].

La combinaison de 4.2.1, 4.4.1, 4.4.2 fournit notamment le résultat de Nygaard [22] :

4.4.3. Si $X$ est une surface, la suite spectrale des pentes dégénère en $E_2$, plus précisément, la seule différentielle éventuellement non nulle est $d_1 : H^2(W\underline{O}_X) \to H^2(W\Omega_X^1)$.

5. Applications.

Les hypothèses et notations de 3.3 restent en vigueur ; $K$ désigne le corps des fractions de $W$.

---
(*) (communication personnelle)

5.1 Conjecture de Katz.

5.1.1. Rappelons l'énoncé de cette "conjecture" ([12], [18]), démontrée par Ogus [24] : pour tout $n$, le polygone de Newton du F-cristal $H^n(X/W)$/torsion ([4] 2.1) est au-dessus du polygone défini par les nombres de Hodge $h^{i,n-i} = \dim H^{n-i}(\Omega^i_X)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (i.e. ayant pour pente $i$ avec la multiplicité $h^{i,n-i}$). Sous l'hypothèse que $H^*(X/W)$ est sans torsion et que la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = H^j(\Omega^i_X) \Longrightarrow H^*_{DR}(X/k)$ dégénère en $E_1$, Mazur [19] dans le cas relevable, et Ogus [24] dans le cas général, montrent de plus que les $h^{i,n-i}$ sont les nombres de Hodge "abstraits" du F-cristal $H^n(X/W)$ (multiplicités des $W/p^i$ dans $H^n/\underline{F}(H^n)$), donnant même une caractérisation de la filtration de Hodge $H^n(\Omega^{\geqslant i}_X) \subset H^n_{DR}(X/k)$ comme l'ensemble des $x \in H^n_{DR}(X/k)$ se relevant en $y \in H^n(X/W)$ tel que $\underline{F}y \in p^i H^n(X/W)$.

La théorie de DR-Witt permet, sous certaines hypothèses, de retrouver l'inégalité entre polygones de Newton et de Hodge, avec une précision supplémentaire :

<u>Théorème</u> 5.1.2. <u>Soit</u> $n$ <u>un entier tel que</u> $H^j(W\Omega^i_X)$ <u>soit sans</u> p-torsion <u>quels que soient</u> $i,j$ <u>tels que</u> $i+j=n$ <u>ou</u> $i+j=n+1$. <u>Alors</u> :

a) $H^n(X/W)$ <u>et</u> $H^{n+1}(X/W)$ <u>sont sans torsion</u> ;

b) $\mathrm{rg}\, H^n(X/W) = \dim H^n_{DR}(X/k) = \sum_{i+j=n} h^{ij}$ ;

c) <u>le polygone de</u> Newton $\mathrm{Nwt}_n$ <u>de</u> $H^n(X/W)$ <u>est au-dessus du polygone de</u> Hodge $\mathrm{Hdg}_n$ <u>défini par les nombres de</u> Hodge $h^i = h^{i,n-i}$ ; <u>de plus, si</u> $M_o = 0$, $M_{r+1} = (\sum_{i\leqslant r} h^i, \sum_{i\leqslant r} ih^i)$, $0 \leqslant r \leqslant n$, <u>désignent les sommets de</u> $\mathrm{Hdg}_n$, $\mathrm{Nwt}_n$ <u>passe par les points</u> $A_o = 0$, $A_1, \dots, A_{n+1} = M_{n+1}$ <u>de</u> $\mathrm{Hdg}_n$ <u>définis par</u>

$$A_{i+1} = M_{i+1} + (a'_i, (i+1)a'_i) \in M_{i+1}M_{i+2}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad M_{n+2} = M_{n+1},$$

<u>où</u> $a'_i = \dim H^{n-i}(W\Omega^i_X)/F$ $(a'_n = 0)$, <u>et les pentes de</u> $Nwt_n$ <u>entre</u> $A_i$ <u>et</u> $A_{i+1}$ <u>appartiennent à l'intervalle</u> $[i, i+1[$ .

L'ingrédient essentiel de la démonstration est 2.5.2 , qui fournit des suites exactes (obtenues indépendamment par Bloch et l'auteur)

$$(5.1.3) \qquad 0 \to H^j(W\Omega^i_X)/V \to H^j(\Omega^i_X) \to H^{j+1}(W\Omega^{i-1}_X)/F \to 0$$

pour $i+j=n$ . L'interprétation 5.1.2 c) de 5.1.3 est due à Bloch [8].

Dans la situation de 5.1.2 , j'ignore si les $h^i$ sont les nombres de Hodge abstraits du F-cristal $H^n(X/W)$. Grâce au résultat d'Ogus (5.1.1), il en est ainsi lorsqu'on suppose que $H^j(W\Omega^i_X)$ est sans torsion quels que soient $i$ et $j$ (car 5.1.2 b) implique que la suite spectrale de Hodge dégénère en $E_1$). D'après Katz [15], la propriété de "contact" 5.1.2 c) (qui ne serait pas vraie en général si l'on supposait seulement $H^*(X/W)$ sans torsion et la suite spectrale de Hodge dégénérée en $E_1$) entraîne alors que, pour tout $n$ , $H^n(X/W)$ se scinde en la somme des F-cristaux $H^{n-i}(W\Omega^i_X)$ (où $F$ agit par $\underline{F} = p^iF$ sur $W\Omega^i_X$) ; en particulier, $P^iH^n(X/W)$ est le plus grand sous-F-cristal $M$ de $H^n(X/W)$ tel que $\underline{F}(M) \subset p^iM$ . J'ignore si l'on peut, en général, caractériser la filtration $P^iH^n(X/W)$ en termes de l'action de $\underline{F}$ sur $H^n(X/W)$.

5.2 <u>Comparaison avec la cohomologie plate</u>.

Dans ce numéro et le suivant, k est supposé algébriquement clos.

La suite exacte 2.7.3 fournit, grâce à 3.4.3 , une suite exacte

$$(5.2.1) \qquad 0 \to H^*(X, \mathbb{Z}_p) \to H^*(X/W) \xrightarrow{1-\underline{F}} H^*(X/W) \to 0 \ ,$$

où $H^*(X, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^*(X_{ét}, \mathbb{Z}/p^n)$ est la cohomologie étale de $X$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ . En particulier, le rang de $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ est la dimension de la partie de pente 0 de $H^*(X/W)$, et, si $H^*(X/W)$ est sans torsion, son sous-cristal unité ([14] 2.1) s'identifie canoniquement à

$H^*(X,\mathbb{Z}_p) \otimes W$ .

Rappelons que la cohomologie plate $H^*(X,\mu_{p^n})$ s'identifie canoniquement à la cohomologie étale $H^{*-1}(X,\underline{O}_X^*/\underline{O}_X^{*p^n})$. Nous poserons

$$(5.2.2) \qquad H^*(X,\mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim H^*(X,\mu_{p^n}) = \varprojlim H^{*-1}(X,\underline{O}_X^*/\underline{O}_X^{*p^n}) \ .$$

Les suites 2.7.2.1 et 2.7.4 fournissent des suites exactes

$$(5.2.3) \qquad 0 \to H^*(X,\mathbb{Z}_p(1)) \otimes \mathbb{Q}_p \to H^*(X/W) \otimes K \xrightarrow{p-\underline{F}} H^*(X/W) \otimes K \to 0 \ ,$$

$$(5.2.4) \qquad \dots \to H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_p(1)) \to H^i(W\Omega_X^1) \xrightarrow{1-F} H^i(W\Omega_X^1) \to \dots \ ,$$

$$(5.2.5) \qquad \dots \to H^i(X,\mathbb{Z}_p(1)) \to H^i(W\Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow{1-F'} H^i(W\Omega_X^{\geq 1}) \to \dots \ .$$

Les suites 5.2.3 , 5.2.4 , 5.2.5 généralisent le résultat de Bloch ([7] III 4.1). On a de plus le complément suivant, qui m'a été suggéré par Ogus :

Proposition 5.2.6. *Supposons que* $H^2(X/W)$ *soit sans torsion et que* $H^0(\Omega_X^1) = H^0(Z_1\Omega_X^1)$ *(où* $Z_1\Omega_X^1 = \mathrm{Ker}\ d : \Omega_X^1 \to \Omega_X^2$*) ; alors l'inclusion* $H^2(W\Omega_X^{\geq 1}) \hookrightarrow H^2(X/W)$ (4.4.1) *et la suite* 5.2.5 *fournissent une suite exacte*

$$(5.2.6.1) \qquad 0 \to H^2(X,\mathbb{Z}_p(1)) \to H^2(X/W) \xrightarrow{p-\underline{F}} H^2(X/W) \ .$$

Rappelons d'autre part que la théorie de Kummer donne la suite exacte

$$(5.2.7) \qquad 0 \to NS(X) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^2(X,\mathbb{Z}_p(1)) \to T_pH^2(X,\mathbb{G}_m) \to 0 \ ,$$

où $NS(X) = Pic(X)/Pic^0(X)$ et $T_p = \varprojlim \mathrm{Ker}\ p^n$ . Si $X$ est projectif, les parties de $H^2(X/W) \otimes K$ de pentes $< 1$ et $> 1$ ont même dimension h (Berthelot [5]), de sorte que 5.2.3 et 5.2.7 entraînent la formule

$$(5.2.8) \qquad \rho = b_2 - 2h - rg\ T_pH^2(X,\mathbb{G}_m) \ ,$$

où $\rho = \mathrm{rg}\ NS(X)$ , $b_2 = \mathrm{rg}\ H^2(X/W)$ . En vertu de 4.2.3 , h est aussi la dimension de $H^2(W\underline{O}_X) \otimes K$ , qui, d'après Artin-Mazur [2] , est la hauteur du plus grand quotient p-divisible du groupe de Brauer formel de X . Ainsi, la formule 5.2.8 généralise l'inégalité $\rho \leqslant b_2 - 2h$ établie par Artin-Mazur [2] pour les surfaces relevables vérifiant certaines hypothèses additionnelles.

Signalons également que la théorie développée ici permet de débarrasser le théorème de dualité plate de Milne [20] des restrictions de caractéristique (Berthelot [6]).

5.3 <u>Surfaces</u> K3 .

Rudakov et Shafarevitch [27] ont démontré que si X est une surface K3 , $H^o(\Omega^1_X) = 0$ . Nygaard [22] a obtenu récemment une autre démonstration de ce théorème à l'aide du complexe de DR-Witt : les outils principaux qu'il utilise sont 4.4.3 , 5.2.4 , la structure de la cohomologie plate des K3 supersingulières (Artin [1]), et le fait que, si $\rho = 22$ , le discriminant de la forme d'intersection sur NS(X) n'est pas une unité. La distinction entre les cas $p = 2$ et $p \neq 2$ , importante dans la démonstration de Rudakov-Shafarevitch, est inutile dans celle de Nygaard.

Supposons désormais que X est une surface K3 . Le théorème de Rudakov-Shafarevitch entraîne que la cohomologie cristalline de X est sans torsion : plus précisément, on a $H^o(X/W) \simeq H^4(X/W) \simeq W$ , $H^1(X/W) = H^3(X/W) = 0$ , et $H^2(X/W)$ est un W-module libre de rang 22 . Décrivons, d'après Nygaard [22] , la suite spectrale des pentes de X en supposant X supersingulière, i.e. de groupe de Brauer formel isomorphe à $\hat{\mathbb{G}}_a$ . Le terme $E_1$ est donné par le tableau

$$\begin{array}{ccccc}
 & H^2(W\underline{O}_X) & \xrightarrow{d_1} H^2(W\Omega^1_X) & \xrightarrow{0} H^2(W\Omega^2_X) & \xrightarrow{\sim} W \\
 & 0 & H^1(W\Omega^1_X) & 0 & \\
W \xrightarrow{\sim} & H^0(W\underline{O}_X) & 0 & 0 & .
\end{array}$$

$H^1(W\Omega^1_X)$ , muni de $\underline{F} = pF$ , s'identifie canoniquement à $P^1H^2(X/W)$ , c'est un sous-F-cristal de $H^2(X/W)$ de rang 22 , le plus grand sous-F-cristal $M$ tel que $\underline{F}(M) \subset pM$ ; $F = p^{-1}\underline{F}$ est un automorphisme de $H^1(W\Omega^1_X)$ , et le $\mathbb{Z}_p$-module des points fixes de $F$ s'identifie canoniquement à $H^2(X,\mathbb{Z}_p(1))$ (l'existence de ce sous-F-cristal est le point de départ de la théorie d'Ogus [25]). Le quotient $H^2(X/W)/H^1(W\Omega^1_X) = E_\infty^{o2}$ , canoniquement isomorphe à $E_2^{o2} = \operatorname{Ker} d_1 : H^2(W\underline{O}_X) \to H^2(W\Omega^1_X)$ , est un $k$-espace vectoriel de dimension $\sigma_o$ , où $2\sigma_o$ est la valuation p-adique du discriminant de la forme cup-produit sur $H^2(X,\mathbb{Z}_p(1))$ (ou sur $NS(X)$ quand $\rho = 22$) ; comme $H^2(X/W)$ s'envoie surjectivement sur $H^2(\underline{O}_X) \simeq k$ , on a $\sigma_o \geqslant 1$ . Si $k_\sigma[[t]]$ désigne l'anneau de séries formelles non commutatif où $at = ta^p$ $(a \in k)$ , le complexe $H^2(W\underline{O}_X) \xrightarrow{d_1} H^2(W\Omega^1_X)$ , avec ses opérateurs $F$ et $V$ , s'identifie au complexe $k_\sigma[[x]] \xrightarrow{d} k_\sigma[[y]]$ , où $dx^n = 0$ pour $n < \sigma_o$ , $dx^{\sigma_o+n} = y^n$ , $Vx^n = x^{n+1}$ , $Fx^n = 0$ , $Vy^n = 0$ , $F1 = 0$ et $Fy^n = y^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ . On voit notamment que $H^2(W\underline{O}_X)$ n'est pas de type fini sur $W$ , mais est de type fini sur $W_\sigma[[V]]$ , tandis que $H^2(W\Omega^1_X)$ n'est pas de type fini sur $W_\sigma[[V]]$ .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. ARTIN. Supersingular K3 surfaces. Ann. Sc. ENS, 4ème série, t. 7 (1974), p. 543-568.

[2] M. ARTIN et B. MAZUR. Formal groups arising from algebraic varieties. Ann. Sc. ENS, 4ème série, t. 10 (1977), p. 87-132.

[3] P. BERTHELOT. Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$. Lecture Notes in Math., n° 407, Springer (1974).

[4] P. BERTHELOT. Slopes of Frobenius in crystalline cohomology. Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXIX (1975), p. 315-328.

[5] P. BERTHELOT. Sur le "théorème de Lefschetz faible" en cohomologie cristalline. C. R. Acad. Sc. Paris 277 (12 novembre 1973), série A, p. 955-958.

[6] P. BERTHELOT. Dualité plate, dans Surfaces algébriques, Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay (1976-78), en préparation.

[7] S. BLOCH. Algebraic K-theory and crystalline cohomology. Pub. math. de l'IHES n° 47 (1978), p. 187-268.

[8] S. BLOCH. Lettre à A. Ogus (1976).

[9] P. DELIGNE. V-complexes de de Rham. Notes manuscrites (1975).

[10] J.-M. FONTAINE. Groupes p-divisibles sur les corps locaux. Astérisque 47-48, Société Mathématique de France (1977).

[11] L. ILLUSIE. Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, en préparation.

[12] N. KATZ. On a theorem of Ax. Amer. J. of Math., vol. 93 (1971), p. 485-499.

[13] N. KATZ. Nilpotent Connections and the Monodromy theorem... . Pub. math. de l'IHES n° 39 (1970), p. 175-232.

[14] N. KATZ. Travaux de Dwork. Séminaire Bourbaki n° 409, Lecture Notes in Math. n° 383, Springer (1973).

[15] N. KATZ. Slope filtration of F-crystals, dans ce volume.

[16] M. LAZARD. Commutative Formal Groups. Lecture Notes in Math., n° 443, Springer (1975).

[17] S. LUBKIN. Generalization of p-adic cohomology. Bounded Witt vectors, Compositio math. 34 (1977), p. 225-277.

[18] B. MAZUR. Frobenius and the Hodge filtration. Bull. AMS 78 (1972), p. 653-667.

[19] B. MAZUR. Frobenius and the Hodge filtration, estimates. Ann. of Math. 98 (1973), p. 58-95.

[20] J. MILNE. Duality in the flat cohomology of a surface. Ann. Sc. ENS, 4ème série, t. 9 (1976), p. 171-202.

[21] N. NYGAARD. Closedness of regular 1-forms on algebraic surfaces. A paraître.

[22] N. NYGAARD. A p-adic proof of the Rudakov-Shafarevitch theorem. En préparation.

[23] T. ODA. The first de Rham cohomology group and Dieudonné modules. Ann. Sc. ENS, 3ème série, t. 2 (1969), p. 63-135.

[24] A. OGUS. Frobenius and the Hodge filtration. Dans Notes on crystalline cohomology, by P. Berthelot and A. Ogus, Mathematical Notes n° 21, Princeton U. Press (1978).

[25] A. OGUS. Supersingular K3 crystals. Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque n° 64.

[26] M. RAYNAUD. Papiers secrets.

[27] A.N. RUDAKOV et I.R. SHAFAREVITCH. Inseparable morphisms of algebraic surfaces. Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 40 (1976), p. 1264-1307, et Math. USSR Izv., vol. 10 (1976).

[28] J.-P. SERRE. Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p . Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Mexico (1958), p. 24-53.

SGA 6 P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1966-67), Lecture Notes in Math. n° 225, Springer (1971).

Luc ILLUSIE
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, bât. 425
91405 ORSAY (France)