PIERRE BERTHELOT
WILLIAM MESSING

Théorie de Dieudonné cristalline I

Astérisque, tome 63 (1979), p. 17-37
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__63__17_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 63 (1979) p. 17-38

THÉORIE DE DIEUDONNÉ CRISTALLINE I

par

Pierre BERTHELOT (Rennes*) et William MESSING (Irvine)

-:-:-:-

Soit S un schéma de caractéristique $p > 0$. Le problème de la "théorie de Dieudonné" consiste, par analogie avec le cas où S est le spectre d'un corps parfait, à associer à certains types de schémas en groupes commutatifs G sur S (ou, plus généralement, de faisceaux abéliens pour la topologie fppf), fonctoriellement en G et en S, une structure algébrique relevant de l'algèbre p-linéaire en un sens assez large, dont l'étude soit en principe plus simple que celle de la catégorie de schémas en groupes initiale, tout en reflétant aussi fidèlement que possible ses propriétés. Moyennant diverses hypothèses sur la base et les groupes considérés, plusieurs constructions ont ainsi été introduites [6], soit par extension de la théorie initiale de Dieudonné, soit à partir de la théorie des courbes typiques de Cartier. Dans le cas des groupes p-divisibles, Grothendieck [8,9], Messing [13], Mazur et Messing [12] ont développé une théorie de ce type sur une base quelconque, associant à tout groupe p-divisible un cristal en modules, munis des endomorphismes F et V habituels. Néanmoins, le problème de la pleine fidélité du foncteur obtenu restait ouvert, et Grothendieck posait en particulier [9] les deux questions suivantes :

1) Le foncteur qui à tout groupe p-divisible associe le cristal correspondant est-il pleinement fidèle ? Quelle est son image essentielle ?

2) Existe-t-il une théorie analogue pour les schémas en groupes finis localement libres ?

Ces questions ont été reprises plus récemment par L. Breen et les deux auteurs [1,2,3], et ce rapport a pour but d'indiquer les grandes lignes de l'état

----

* Equipe de recherches associée n° 451 du C.N.R.S.

actuel de la théorie, en précisant les réponses, encore partielles, qui peuvent être apportées aux questions précédentes.

§ 1. Remarques sur le théorème de Tate en égales caractéristiques p.

Une des motivations intiales qui ont amené au développement de la théorie de Dieudonné sur une "base générale" est la recherche d'une démonstration, en égales caractéristiques p, de l'analogue du théorème de Tate sur les homomorphismes de groupes p-divisibles [16] : si S est un schéma noethérien, intègre, normal, K son corps des fonctions rationnelles, G et H deux groupes p-divisibles sur S, de fibres génériques G_K, H_K, l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_S(G,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(G_K,H_K)$$

est un isomorphisme si car(K) = 0 ; par contre, si car(K) = p, on ignore s'il en est toujours ainsi.

La connaissance d'un "foncteur de Dieudonné" ayant les propriétés de pleine fidélité nécessaires peut permettre de ramener ce problème à un problème algébrique plus simple. Supposons en effet donnés, pour tout schéma S de caractéristique p, une catégorie $\underline{\underline{C}}_S$, et, pour tout $f : S' \longrightarrow S$, un foncteur de changement de base $f^* : \underline{\underline{C}}_S \longrightarrow \underline{\underline{C}}_{S'}$, transitif en f. Supposons de plus construit pour tout S un foncteur

$$\mathbb{D}_S : (p\text{-div}/S)^{\circ} \longrightarrow \underline{\underline{C}}_S$$

commutant au changement de base, i.e. muni pour tout f d'un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}_{S'}(G_{S'}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathbb{D}_S(G)) , \tag{1.1}$$

où $G_{S'}$ est le groupe p-divisible sur S' déduit de G par le changement de base f. Soient k un corps algébriquement clos, A = k[[t]], K = k((t)), $\overline{A}$ et $\overline{K}$ leurs clôtures parfaites. Un dévissage standard montre qu'il suffit de prouver l'analogue du théorème de Tate pour S = Spec(A). De la relation $A = \overline{A} \cap K$, on déduit alors formellement le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 1. *Soient* G, H *deux groupes* p*-divisibles sur* A. *Supposons que :*

(1.2) *les foncteurs* $\mathbb{D}_{\overline{A}}$ *et* $\mathbb{D}_{\overline{K}}$ *sont pleinement fidèles ;*

(1.3) *l'homomorphisme canonique défini par* $i : A \longrightarrow K$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}_A}(\mathbb{D}_A(H),\mathbb{D}_A(G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}_K}(i^*(\mathbb{D}_A(H)),i^*(\mathbb{D}_A(G)))$$

est un isomorphisme.

Alors $\mathrm{Hom}_A(G,H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(G_K,H_K)$.

Il est classique que la condition (1.2) est vérifiée par le foncteur $M_{\overline{K}}$ défini par $M_{\overline{K}}(G) = \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(G,CW)$, où CW est le faisceau des covecteurs de Witt [7]. Il est naturel de se demander si, plus généralement, pour tout anneau parfait Λ, le foncteur $M_\Lambda(G) = \mathrm{Hom}_\Lambda(G, CW)$ est pleinement fidèle sur la catégorie des groupes p-divisibles, ou des p-groupes commutatifs finis localement libres. La réponse n'est pas connue actuellement, sauf dans le cas particulier suivant, qui suffit pour le problème considéré :

Théorème 1. *Soit* Λ *un anneau parfait intègre, dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation. Alors le foncteur* M_Λ *est une équivalence de catégories entre la catégorie des* p-*groupes commutatifs finis localement libres sur* Λ *(resp. des groupes* p-*divisibles sur* Λ*), et la catégorie des modules sur l'anneau de Dieudonné* $D_\Lambda = W(\Lambda)_\sigma[F,V]/(FV-p, VF-p)$, *de présentation finie sur* $W(\Lambda)$ *, tels que* $\mathrm{long}_{W(k(p))}(M \otimes_{W(\Lambda)} W(k(p)))$ *soit finie et constante sur* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ *(resp. libres de rang fini sur* $W(\Lambda)$*).*

Nous renverrons à [1] pour la démonstration de ce résultat ; signalons que le cas des groupes p-divisibles connexes sur un anneau de valuation parfait a également été étudié par Poletti [15]. Pour obtenir (1.2), il suffit donc que soit vérifiée la condition suivante :

(1.2') *Il existe une équivalence de catégories entre* $\underline{\underline{C}}_{\overline{A}}$ *(resp.* $\underline{\underline{C}}_{\overline{K}}$*) et la catégorie des* $D_{\overline{A}}$*-modules de présentation finie sur* $W(\overline{A})$ *(resp.* $D_{\overline{K}}$, $W(\overline{K})$*) identifiant le foncteur* $\mathbb{D}$ *au foncteur* M.

Nous verrons plus bas comment il est possible de satisfaire les conditions (1.1) et (1.2'). En ce qui concerne la condition (1.3), elle est connue dans un cas particulier lorsque $\underline{\underline{C}}_S$ est la catégorie des F-cristaux sur S. Elle se déduit en effet des résultats de Katz sur la filtration par les pentes [11], lorsque les groupes G et H ont des polygones de Newton constants sur Spec(A) ; l'analogue du théorème de Tate est donc vrai dans ce cas. Rappelons qu'en général le polygone de Newton augmente par spécialisation ; la structure des F-cristaux reste alors à peu près complètement inconnue.

Dans le cas général, en prenant pour $\underline{\underline{C}}_S$ la catégorie des F-cristaux sur S, et en utilisant la description de $\underline{\underline{C}}_A$ et $\underline{\underline{C}}_K$ en termes de modules à connexion (voir plus bas), cet énoncé de pleine fidélité résulterait d'une réponse affirmative à la question suivante :

Problème. Soit M un module libre de rang fini sur $A_\infty = W[[t]]$, muni d'une connexion intégrable (quasi-nilpotente) ∇, et d'un homomorphisme horizontal $F : M^\sigma \longrightarrow M$, où $\sigma : W[[t]] \longrightarrow W[[t]]$ est défini par le Frobenius de W sur les coefficients, et $\sigma(t) = t^p$. Soit $K_\infty = W[[t]]\,[1/t]\hat{}$, où l'exposant ^ désigne le séparé complété p-adique. Est-ce que tout élément $m \in M \otimes_{A_\infty} K_\infty$, horizontal et tel que $F(m \otimes 1) = pm$, appartient en fait à M ?

§ 2 - Invariants cristallins associés à un faisceau abélien.

2.1. Pourquoi un cristal ?

Dans le cas classique, où S est le spectre d'un corps parfait k, la théorie de Dieudonné associe à un S-groupe fini un module sur W(k), muni d'endomorphismes F,V. Si on cherche à généraliser cette théorie à une base de la forme S = Spec(A), où A est un anneau quelconque de caractéristique p, la première question qui se pose est de savoir quel anneau jouera le rôle de W(k). Un candidat naturel est fourni par l'anneau W(A), et, pour les groupes p-divisibles connexes, la théorie des courbes typiques de Cartier fournit effectivement des W(A)-modules munis de F,V. Malheureusement, lorsque A n'est pas un corps parfait, l'anneau W(A) n'est pas noethérien, et les modules obtenus se prêtent très mal aux dévissages nécessaires pour en comprendre la structure, et prouver des résultats tels que (1.3).

Considérons le cas particulier où A est une algèbre lisse sur un corps parfait k. Il existe alors une algèbre A_∞ sur W(k), plate et p-adiquement séparée complète, telle que $A_\infty/pA_\infty \simeq A$. Il serait évidemment plus agréable de disposer d'un foncteur "module de Dieudonné" à valeurs dans les A_∞-modules. Comme A_∞ n'est pas canoniquement attaché à A, il faut alors se donner les moyens de comparer les théories relatives à deux relèvements A_∞ et A'_∞ . On devra donc se donner, pour tout relèvement A_∞, un module $\mathbb{D}(G)_{A_\infty}$, et pour tout $\varphi : A_\infty \xrightarrow{\sim} A'_\infty$, induisant l'identité sur A, un isomorphisme

$$\varepsilon_\varphi : \varphi^*(\mathbb{D}(G)_{A_\infty}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G)_{A'_\infty} ,$$

transitif en φ . L'existence de puissances divisées sur l'idéal $p.A_\infty$ entraîne alors qu'il suffit de se donner le A_∞-module $\mathbb{D}(G)_{A_\infty}$, et une connexion intégrable et quasi-nilpotente sur $\mathbb{D}(G)_{A_\infty}$. On obtient de la sorte une catégorie intrinsèquement attachée à A, qui s'interprète comme la catégorie des cristaux sur A.

Si on abandonne l'hypothèse de lissité pour prendre un anneau A quelconque, on ne dispose plus en général d'un relèvement A_∞. Il faut alors remplacer la considération de A_∞ par celle de tous les homomorphismes surjectifs $B \xrightarrow{\pi} A$, munis d'une structure d'idéal à puissances divisées δ sur $\mathrm{Ker}(\pi)$; on doit alors, pour chaque choix de (B,δ), définir un module $\mathbb{D}(G)_{(A,B,\delta)}$, et, pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & B \arrow[dl, "\pi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

où u commute aux puissances divisées, se donner un isomorphisme

$$u^*(\mathbb{D}(G)_{(A,B',\delta')}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G)_{(A,B,\delta)} ,$$

de façon transitive en u.

2.2. Quelques définitions.

Soit S un schéma tel que p soit localement nilpotent sur S. Nous considèrerons les schémas en groupes sur S comme des faisceaux sur la catégorie des S-schémas, ce qui nous amènera à travailler systématiquement avec les "gros sites" au-dessus de S. On pose $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$.

Le gros site cristallin $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ a pour objets les triples (U,T,δ), où U est un S-schéma, $U \hookrightarrow T$ une immersion fermée telle que p soit localement nilpotent sur T, δ une structure d'idéal à puissances divisées sur l'idéal de U dans T. Un morphisme de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & T' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

où u est un S-morphisme, et v un Σ-morphisme commutant aux puissances divisées. La topologie fppf (resp. étale, de Zariski) sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ a pour familles couvrantes les familles

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & T_i \\ {\scriptstyle u_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_i} \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

telles que ces carrés soient cartésiens, et la famille (v_i) couvrante.

Un faisceau F sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ peut alors être décrit comme la donnée pour tout (U,T,δ) d'un faisceau $F_{(U,T)}$ sur T pour la topologie considérée, et, pour tout morphisme (u,v), d'un homomorphisme

$$\rho_{(u,v)} : v^{-1}(F_{(U,T)}) \longrightarrow F_{(U',T')} ,$$

les $\rho_{(u,v)}$ étant astreints à une condition de transivité évidente. De plus, les foncteurs $F \longmapsto F_{(U,T)}$ sont exacts pour les faisceaux abéliens, et forment une famille conservative.

Les trois faisceaux qui jouent le rôle principal en théorie de Dieudonné sont :

$\mathcal{O}_{S/\Sigma}$, défini par $(\mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(U,T)} = \mathcal{O}_T$,

$i_*(\mathcal{O}_S)$, défini par $(i_*(\mathcal{O}_S))_{(U,T)} = \mathcal{O}_U$,

$\mathcal{J}_{S/\Sigma}$, défini par $(\mathcal{J}_{S/\Sigma})_{(U,T)} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_U)$.

Ils sont donc reliés par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{S/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_S) \longrightarrow 0 .$$

Un <u>cristal sur</u> S est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module E sur CRIS(S/Σ) tel que pour tout morphisme (u,v), les homomorphismes

$$\rho_{(u,v)} : v^*(E_{(U,T)}) = v^{-1}(E_{(U,T)}) \otimes_{v^{-1}(\mathcal{O}_T)} \mathcal{O}_{T'} \longrightarrow E_{(U',T')}$$

soient des isomorphismes. Un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module localement libre est un cristal, le conoyau d'un homomorphisme linéaire entre cristaux est un cristal. Lorsque S est le spectre d'un anneau parfait Λ, le foncteur "sections sur CRIS(S/Σ)" induit une équivalence de catégories entre la catégorie des cristaux quasi-cohérents sur S et la catégorie des W(Λ)-modules séparés et complets pour la topologie p-adique [9].

Grothendieck a introduit deux méthodes pour associer un cristal à un groupe p-divisible : l'une utilise l'extension universelle d'un groupe p-divisible par un groupe vectoriel [13], l'autre repose sur la notion de $\natural$-extension d'un groupe lisse, ou d'un groupe p-divisible, par le groupe additif [12]. Si on examine de près cette dernière construction, on s'aperçoit qu'elle possède une interprétation cohomologique très simple, qui amène à la définition servant de point de départ à la théorie exposée ici.

Observons tout d'abord qu'on peut considérer un faisceau E sur S comme un faisceau sur CRIS(S/Σ) en posant

(2.1) $$i_*(E)(U,T,\delta) = E(U) .$$

Le foncteur i_* est exact pour les topologies étale ou de Zariski, mais on ignore s'il en est de même pour la topologie fppf. Néanmoins, si G est un schéma en groupes lisse sur S, ou affine, plat et de présentation finie, ou limite inductive filtrante de sous-faisceaux de ce type (par exemple un groupe p-divisible), alors $R^1 i_*(G) = 0$, de sorte que dans la pratique, le foncteur i_* transformera toujours les suites exactes courtes sur S_{fppf} en suites exactes courtes sur CRIS(S/Σ) pour la topologie fppf. On notera en général $i_*(G)$ par $\underline{G}$.

On notera $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}$ le foncteur Hom interne de la catégorie des faisceaux abéliens sur CRIS(S/Σ) ; on a donc

$$\Gamma((U,T,\delta), \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(E,F)) = \mathrm{Hom}_{CRIS(U/T)} (E|_{CRIS(U/T)} , F|_{CRIS(U/T)}) ,$$

où CRIS(U/T) est le site des objets (U',T',δ') de CRIS(S/Σ) munis d'un morphisme $(U',T',\delta') \longrightarrow (U,T,\delta)$. On notera $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(E,F)$ les dérivés droits du foncteur $F \longmapsto \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(E,F)$. Si G est un faisceau abélien sur S, on peut appliquer ces définitions au faisceau $\underline{G}$; on obtient de la sorte des invariants cohomologiques

$\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G},F)$, qui sont des faisceaux sur le site cristallin. Le rôle principal sera joué par le faisceau

$$\mathbb{D}(G) = \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \ . \tag{2.2}$$

Notons tout de suite une conséquence formelle, mais importante, du caractère local sur le site cristallin de ces définitions. Pour tout (U,T,δ), soit $G_U = G \times_S U$; alors, pour tout faisceau F sur CRIS(S/Σ),

$$\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G},F)_{(U,T)} \simeq \mathcal{E}xt^i_{U/\Sigma}(\underline{G}_U, F|_{CRIS(U/\Sigma)})_{(U,T)} \ .$$

En particulier,

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \simeq \mathbb{D}(G_U)_{(U,T)} \ . \tag{2.3}$$

Dans le cas des groupes finis localement libres, il y a lieu d'introduire un invariant plus fin. Rappelons que, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, et $K^\cdot$ un complexe d'objets de $\mathcal{A}$, on note $t_{n]}\,K^\cdot$ le complexe

$$\ldots \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow Z^n(K^\cdot) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \ ;$$

$t_{n]}\,K^\cdot$ a donc même cohomologie que $K^\cdot$ en degrés $\leqslant n$, et est acyclique en degrés $> n$. Revenant à la situation précédente, on associe à tout p-groupe commutatif fini localement libre G sur S le complexe de longueur 1

$$\Delta(G) = t_{1]}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \ .$$

Par définition,

$$\mathcal{H}^0(\Delta(G)) = \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \ , \ \mathcal{H}^1(\Delta(G)) = \mathbb{D}(G).$$

Remarquons enfin que, par adjonction, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},E)$ peut être considéré, lorsque E est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module, comme un complexe de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules, et les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G},E)$ sont alors des $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules. Pour $E = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$, $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$ ou $i_*(\mathcal{O}_S)$, on montre que les $\mathcal{O}_T$-modules correspondants sont quasi-cohérents pour tout (U,T,δ), et commutent aux localisations plates sur CRIS(S/Σ). Il en résulte qu'ils ne dépendent pas de la topologie considérée.

Les résultats fondamentaux sur la nature cristalline des invariants ainsi définis sont alors :

<u>Théorème</u> 2. *Soit* G *un groupe* p-*divisible de hauteur* h *sur* S. *Alors* $\mathbb{D}(G)$ *est un cristal en* $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$*-modules, localement libre de rang* h.

<u>Théorème</u> 3. *Soit* G *un* p-*groupe commutatif, fini localement libre sur* S. *Alors le complexe* $\Delta(G)$ *est un complexe parfait de* $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$*-modules, d'amplitude parfaite contenue dans* [0,1] [10,I 4.7] .

Corollaire. *Sous les hypothèses précédentes,* $\mathbb{D}(G)$ *est un cristal en* $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$*-modules localement de présentation finie.*

On remarquera en particulier que, compte tenu de (2.3), ces énoncés entraînent que la formation des modules $\mathbb{D}(G)_{(U,T)}$ commute au changement de base : pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & T' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ U & \hookrightarrow & T \end{array}$$

de CRIS(S/Σ), on a les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} v^*(\mathbb{D}(G)_{(U,T)}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}(G)_{(U',T')} \\ \wr\| & & \wr\| \\ v^*(\mathbb{D}(G_U)_{(U,T)}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{D}(G_{U'})_{(U',T')} \end{array} \qquad (2.4)$$

Indiquons enfin, lorsque S est de caractéristique p, la construction des homomorphismes F et V. Pour tout faisceau E sur CRIS(S/Σ), on note E^σ le faisceau défini par

$$E^\sigma\left(\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \\ S & & \end{array}\right) = E\left(\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & T \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \\ S & & \\ {\scriptstyle F_S}\downarrow & & \\ S & & \end{array}\right).$$

En particulier, $\underline{G}^\sigma = \underline{G^{(p/S)}}$. Par fonctorialité, le Frobenius de G définit

$$F : \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G^{(p/S)}}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) .$$

Le caractère local de la définition de $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}$ entraîne formellement que

$$\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}^\sigma, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})^\sigma ,$$

de sorte que F est un homomorphisme de $\mathbb{D}(G)^\sigma$ dans $\mathbb{D}(G)$. On observera que si (U,T,δ) est tel qu'il existe $\sigma : T \longrightarrow T$ relevant le Frobenius de U, le fait que $\mathbb{D}(G)$ soit un cristal fournit un isomorphisme

$$\sigma^* \mathbb{D}(G)_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}(G)^\sigma)_{(U,T)} ,$$

de sorte que F induit un endomorphisme σ-semi-linéaire de $\mathbb{D}(G)_{(U,T)}$, comme dans le cas classique. La définition de V se fait de la même manière, et on procède de façon analogue pour définir F et V sur $\mathbb{\Delta}(G)$.

Nous noterons dans la suite $\underline{\underline{C}}_S$ (resp. $\underline{\underline{D}}_S$) la catégorie des cristaux en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules localement de présentation finie (resp. des complexes parfaits de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules, d'amplitude parfaite contenue dans [0,1]), munis d'homomorphismes

$F : E^{\sigma} \longrightarrow E$, $V : E \longrightarrow E^{\sigma}$, vérifiant $F \circ V = p$, $V \circ F = p$. On pose alors :

Définition. *Soit* G *un groupe* p-*divisible, ou un* p-*groupe commutatif, fini localement libre sur* S. *Le cristal* $\mathbb{D}(G) \in \mathrm{Ob}(\underline{\underline{C}}_S)$ *et le complexe* $\mathbb{\Delta}(G) \in \mathrm{Ob}(\underline{\underline{D}}_S)$ *sont appelés respectivement* cristal de Dieudonné *et* complexe de Dieudonné *de* G.

§ 3 - Relations avec les invariants différentiels usuels.

L'application identique $S \longrightarrow S$ est un objet particulier de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, et tout faisceau E sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ définit donc un faisceau $E_{(S,S)}$ sur S, que nous noterons E_S pour simplifier. Un des points clé de la démonstration des théorèmes 2 et 3 est constitué par les relations entre les faisceaux sur S définis ainsi par les cristaux de Dieudonné (qui généralisent la réduction modulo p du module de Dieudonné lorsque la base est un corps parfait), et les invariants différentiels habituels des schémas en groupes. Le point de départ est le suivant :

Proposition 1. *Soit* G *un groupe commutatif affine lisse sur* S.
(i) *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_S \xrightarrow{\sim} \omega_G \ ;$$

(ii) $\mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_S = 0$.

Pour calculer ces invariants, on utilise une résolution plate canonique de $\underline{G}$ par des faisceaux de la forme $\mathbb{Z}[G^n]$ (voir [SGA 7, exp. VII, 3.5], [5]) ; on relie ainsi les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G},E)_S$ à la cohomologie cristalline relativement à S des produits G^n, à coefficients dans E. Prenons $E = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$; comme G est lisse sur S, la cohomologie cristalline des G^n se calcule alors par la cohomologie de De Rham. Si R est l'algèbre de G, on voit finalement que les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})_S$ sont les faisceaux de cohomologie du complexe simple associé à un bicomplexe commençant en bas degrés par

$$\begin{array}{ccccccc}
R & \xrightarrow{d} & \Omega^1_{R/S} & \xrightarrow{d} & \Omega^2_{R/S} & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle p_1^*+p_2^*-m^*}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R\otimes R & \xrightarrow{d} & \Omega^1_{R\otimes R/S} & \xrightarrow{d} & \Omega^2_{R\otimes R/S} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(R\otimes R)\times(R\otimes R\otimes R) & \longrightarrow & \vdots & \cdots & \vdots & & \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

où les différentielles horizontales sont les différentielles usuelles, et les verticales sont induites par fonctorialité par celles de la résolution canonique. Les $\mathcal{E}xt^{i}_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma})_S$ sont donnés par le premier cran de la filtration de Hodge sur ce bicomplexe, i.e. en remplaçant la première colonne par 0 ; l'assertion (i) en résulte aussitôt, l'assertion (ii) nécessite un peu d'algèbre simpliciale.

Notons au passage que, si G est un groupe fini localement libre sur S, la même technique permet de calculer les $\mathcal{E}xt^{i}_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})_S$ (resp. $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$) par un complexe analogue, en plongeant G comme sous-groupe fermé d'un groupe lisse ; elle s'étend au calcul des $\mathcal{E}xt^{i}_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(U,T,\delta)}$ chaque fois que l'on peut plonger G_U dans un groupe lisse sur T.

Rappelons que le complexe de co-Lie d'un groupe fini localement libre G sur S est le complexe de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\ell_G = \omega_{G^1} \longrightarrow \omega_{G^o} ,$$

où

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow G^o \longrightarrow G^1 \longrightarrow 0$$

est une résolution de G par des groupes lisses ; c'est un complexe parfait d'amplitude contenue dans $[-1,0]$, indépendant dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_S)$ de la résolution lisse choisie. On obtient donc :

<u>Corollaire</u>. *Si* G *est fini localement libre sur* S, *il existe un isomorphisme canonique*

$$\ell_G[-1] \xrightarrow{\sim} t_{1]}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma})_S \ .$$

Pour obtenir des informations sur $\mathbb{D}(G)_S$ et $\Delta(G)_S$, on procède alors à l'analyse de la suite exacte des $\mathcal{E}xt$ relative à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{S/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_S) \longrightarrow 0 \ .$$

Les $\mathcal{E}xt^{i}_{S/\Sigma}(\underline{G},i_*(\mathcal{O}_S))$ s'identifient simplement aux faisceaux $i_*(\mathcal{E}xt^{i}(G,\mathbb{G}_a))$, et sont donc des invariants connus :

a) Si G est un groupe p-divisible,

- $\mathcal{H}om(G,\mathbb{G}_a) = \mathcal{E}xt^2(G,\mathbb{G}_a) = 0$
- il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\mathcal{L}ie(G^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^1(G,\mathbb{G}_a) \ ,$$

où G^* est le groupe p-divisible dual de G.

b) Si G est fini localement libre, il existe un isomorphisme canonique [12, II (14.2)]

$$\ell^{\vee}_{G^*} \xrightarrow{\sim} t_{1]}\, \mathbb{R}\,\mathcal{H}om(G,\mathbb{G}_a)\ .$$

On montre alors :

<u>Proposition</u> 2. *Soit* G *un groupe* p-*divisible sur* S.

(i) $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma}) = \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) = 0$.

(ii) $\mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma}) = \mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) = 0$.

(iii) *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\omega_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma})_S\ .$$

On obtient donc la suite exacte de faisceaux zariskiens sur S

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \mathcal{L}ie(G^*) \longrightarrow 0\ ,$$

qui définit la <u>filtration de Hodge</u> de $\mathbb{D}(G)$. Observons au passage que si $f : A \to S$ est un schéma abélien sur S, et G le groupe p-divisible correspondant, il existe des isomorphismes naturels

$$(3.1)\qquad \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} R^1 f_{cris*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})\ ,$$

et que les isomorphismes de faisceaux zariskiens induits sur S sont compatibles aux filtrations de Hodge.

Cette suite exacte, et la possibilité, pour tout (U,T,δ), de relever G_U en un groupe p-divisible sur T, entraînent le théorème 2. Dans le cas d'un groupe fini, la suite exacte est remplacée par :

<u>Proposition</u> 3. *Soit* G *un groupe fini localement libre sur* S. *Il existe un triangle distingué de* $D(\mathcal{O}_S)$

$$\begin{tikzcd} & \ell^{\vee}_{G^*} \arrow[dl, "+1"'] & \\ \ell_G[-1] \arrow[rr] & & \mathbb{\Delta}(G)_S \arrow[ul] \end{tikzcd}\ ,$$

dont la suite exacte de cohomologie est (avec les notations de Grothendieck)

$$(3.2)\qquad 0 \longrightarrow n_G \longrightarrow \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})_S \longrightarrow \mathcal{L}ie(G^*) \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \nu_{G^*} \longrightarrow 0\ .$$

En particulier, $\mathbb{\Delta}(G)_S$ est un complexe parfait. Un argument algébrique montre qu'il suffit alors de prouver le théorème 3 lorsque S est spectre d'un anneau local A. Un dévissage permet de se ramener au cas où A est noethérien complet, à corps résiduel parfait. On peut alors plonger le groupe fini G dans un groupe p-divisible

G^o, d'où la suite

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow G^o \longrightarrow G^1 \longrightarrow 0 ,$$

où G^1 est encore p-divisible. On déduit alors de la proposition précédente que $\Delta(G)$ s'identifie au complexe

$$\mathbb{D}(G^1) \longrightarrow \mathbb{D}(G^o) ,$$

qui est bien un complexe parfait.

Notons enfin qu'on prouve par le même type d'argument :

Proposition 4. *Soit* $G \hookrightarrow G'$ *un monomorphisme entre groupes finis localement libres ou* p-*divisibles. Alors l'homomorphisme* $\mathbb{D}(G') \longrightarrow \mathbb{D}(G)$ *est surjectif.*

L'exactitude de l'autre côté est par contre fausse dans la catégorie des faisceaux sur $CRIS(S/\Sigma)$. Un exemple dû à Ogus montre que c'est également faux en général dans la catégorie des cristaux. C'est néanmoins vrai dans cette dernière moyennant certaines hypothèses de régularité sur S : par exemple, si S est intersection complète relative sur un anneau ayant une p-base.

§ 4 - Comparaison avec la théorie de Dieudonné classique.

Sur une base S arbitraire, les objets cristallins $\mathbb{D}(G)$, $\Delta(G)$ associés à un groupe G (fini localement libre ou p-divisible) n'admettent pas en général de description terre à terre. Mais, si l'on fait des hypothèses restrictives, soit sur le groupe, soit sur la base, on peut les décrire de façon plus concrète.

4.1. Hypothèses sur le groupe.

a) Si G est étale, notons $G^\vee$ son dual au sens de Pontryagin, défini par

$$G^\vee = \mathcal{H}om(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

(que G soit fini ou p-divisible). Pour tout objet (U,T) de $CRIS(S/\Sigma)$, les espaces sous-jacents à U et T coïncident. Les catégories des schémas étales sur U et T sont donc équivalentes ; notons encore $G^\vee$ le T-groupe étale relevant $G^\vee \times_S U$. Avec ces conventions, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} G^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T .$$

Si G est de type multiplicatif, son dual de Cartier G^* est étale, et on a, avec les mêmes conventions,

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} G^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T .$$

Supposons enfin que G soit un groupe p-divisible, extension d'un groupe p-divisible étale par un groupe p-divisible de type multiplicatif ; il en est ainsi si et seulement si le rang séparable de $G(1)$ est égal à $\dim(G^*)$, et le rang séparable de $G^*(1)$ à $\dim(G)$. Le sous-groupe de type multiplicatif et le quotient étale sont alors uniques, et fonctoriels en G. On obtient une suite exacte de cristaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G^{et}) \longrightarrow \mathbb{D}(G) \longrightarrow \mathbb{D}(G^{tm}) \longrightarrow 0 ,$$

où $\mathbb{D}(G^{et})$ et $\mathbb{D}(G^{tm})$ ont la structure explicitée plus haut.

b) Si (U,T,δ) est un objet de $CRIS(S/\Sigma)$ tel que T soit de caractéristique p, toute section x de l'idéal de U dans T vérifie la relation

$$x^p = p!.\delta_p(x) = 0 .$$

Il existe donc un morphisme $\phi : T \longrightarrow U$, caractérisé par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_U"'] & T \arrow[d, "F_T"] \arrow[dl, "\phi"'] \\ U \arrow[r, hook] & T \end{tikzcd}$$

Soit maintenant G un groupe fini, tel que F_G (resp. V_G) soit nul ; il existe alors un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \simeq \phi^*(\omega_{G_U})$$
$$(\text{resp. } \mathbb{D}(G)_{(U,T)} \simeq \phi^*(\mathcal{L}ie(G_U^*))) .$$

Plus généralement, pour tout groupe fini ou p-divisible G,

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T)}\Big/F(\mathbb{D}(G)^{(p)}_{(U,T)}) \simeq \phi^*(\omega_{G_U}) ,$$
$$\mathbb{D}(G)^{(p)}_{(U,T)}\Big/V(\mathbb{D}(G)_{(U,T)}) \simeq \phi^*(\nu_{G_U^*}) .$$

4.2. <u>L'extension canonique des covecteurs de Witt par $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$</u> .

La comparaison entre la théorie cristalline et la théorie classique repose sur l'existence d'une extension canonique du faisceau des covecteurs de Witt (à un grain de sel près) par le faisceau structural $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ du topos cristallin.

Partons de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{V} CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow 0 .$$

Si $CW(\mathcal{J}_{S/\Sigma})$ est le sous-faisceau abélien de $CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$ formé des sections dont toutes les coordonnées sont dans $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$, la restriction de cette extension à

$CW(\mathcal{J}_{S/\Sigma})$ est munie d'un scindage naturel

$$s : CW(\mathcal{J}_{S/\Sigma}) \longrightarrow CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

défini par

$$s((x_{-i})) = (\ldots, x_{-1}, x_o, -\sum_{n\geqslant 1} (p^n-1)!\, \delta_{p^n}(x_{-n+1}))\ .$$

Par passage au quotient, on obtient la suite exacte

$$(4.1)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})/\mathrm{Im}(s) \longrightarrow CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})/CW(\mathcal{J}_{S/\Sigma}) \longrightarrow 0\ .$$

On pose

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \underline{CW}_{S/\Sigma} = CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})/CW(\mathcal{J}_{S/\Sigma})\ , \\ \mathcal{E}_{S/\Sigma} = CW(\mathcal{O}_{S/\Sigma})/\mathrm{Im}(s)\ . \end{cases}$$

Le faisceau $\underline{CW}_{S/\Sigma}$ est un sous-faisceau du faisceau $CW(i_*(\mathcal{O}_S)) = i_*(CW(\mathcal{O}_S))$ associé au faisceau des covecteurs de Witt sur S par la construction de 2.2. Il contient $i_*(\underset{\rightarrow}{W}(\mathcal{O}_S))$, et est distinct de $i_*(CW(\mathcal{O}_S))$, car il existe des objets (U,T) de CRIS(S/Σ) tels que l'idéal de U dans T soit un nilidéal non nilpotent, et qu'il existe des sections de $CW(\mathcal{O}_U)$ ne se relevant pas dans $CW(\mathcal{O}_T)$. Cette subtilité est sans conséquence pratique, grâce au résultat suivant :

<u>Lemme</u>. *Soit* (U,T,δ) *un objet de* CRIS(S/Σ) *vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) U *est localement noethérien ;*

(ii) U *est localement de présentation finie sur un schéma parfait.*

Alors, si G *est un groupe affine de présentation finie, ou* p-*divisible, sur* S,

$$\Gamma((U,T,\delta),\ \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\underline{CW}_{S/\Sigma})) = \mathrm{Hom}_U(G_U, CW)\ .$$

Par abus de langage, nous appelerons $\mathcal{E}_{S/\Sigma}$ <u>l'extension canonique du faisceau des covecteurs de Witt par</u> $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$. Lorsque S est le spectre d'un anneau parfait Λ, les points de cette extension à valeurs dans l'objet (S,Spec(W(Λ))) redonnent l'extension classique

$$0 \longrightarrow W(\Lambda) \longrightarrow W(\Lambda)[1/p] \longrightarrow \varinjlim_n W_n(\Lambda) \longrightarrow 0\ ,$$

l'isomorphisme $\Gamma((S,\mathrm{Spec}(W(\Lambda))),\mathcal{E}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} W(\Lambda)\,[1/p]$ étant induit par l'application

$$(a_{-n}) \longmapsto \sum_{n\geqslant o} a_{-n}^{p^n}/p^n\ .$$

4.3. <u>Comparaison avec le module de Dieudonné</u>.

Supposons que S soit le spectre d'un anneau parfait Λ. Le cristal de Dieudonné d'un groupe (fini ou p-divisible) G est alors déterminé par le W(Λ)-

module de ses sections globales. Celui-ci est relié au foncteur M_Λ du paragraphe 1 de la façon suivante.

L'extension canonique $\mathcal{E}_{S/\Sigma}$ définit un homomorphisme cobord

$$\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\underline{CW}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \ , \tag{4.3}$$

d'où, en prenant les sections globales,

$$\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\underline{G},\underline{CW}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\Sigma),\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})) \ .$$

Compte tenu du lemme, cet homomorphisme s'identifie à

$$M_\Lambda(G) = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,CW) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\Sigma),\ \mathbb{D}(G)) \ . \tag{4.4}$$

Théorème 4. *Si* Λ *est un anneau parfait intègre, dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation, l'homomorphisme (4.3) est un isomorphisme, commutant à* F *et* V, *pour tout groupe* G *fini localement libre, ou* p*-divisible.*

Remarques.

1) Comme Λ est parfait, $M_\Lambda(G)$ et $\mathbb{D}(G)$ sont munis de structures naturelles de $W(\Lambda)$-modules. On déduit aisément de la construction de $\mathcal{E}_{S/\Sigma}$ que l'homomorphisme (4.3) est semi-linéaire par rapport à σ.

2) L'homomorphisme (4.3) est défini sans hypothèse sur S. Prenant sa restriction à $i_*(\mathbb{G}_a) \hookrightarrow \underline{CW}_{S/\Sigma}$, et tenant compte de la remarque précédente, on obtient pour tout (U,T,δ) où T est de caractéristique p, un homomorphisme $\mathcal{O}_T$-linéaire

$$\phi^*(\mathcal{L}ie(G^*_U)) = \phi^*(\mathcal{H}om(G_U,\mathbb{G}_a)) \longrightarrow \mathbb{D}(G)_{(U,T)} \ .$$

Lorsque G est annulé par V, c'est l'isomorphisme de 4.1.

3) Pour tout anneau parfait Λ, on peut montrer que l'homomorphisme de passage du local au global

$$\mathrm{Ext}^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\Sigma),\ \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}))$$

est un isomorphisme.

4.4. Enfin, pour faire la liaison entre le point de vue exposé ici, et le point de vue initial de [12], on s'appuie sur les faits suivants :

a) Pour tout S, et tout groupe G (fini localement libre, ou p-divisible) sur S, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}(G)_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{\natural}(G,\mathbb{G}_a) \ .$$

b) L'image inverse de l'extension $\mathcal{E}_{S/\Sigma}$ par l'inclusion

$$i_*(W_{n\,S}) \hookrightarrow \underline{CW}_{S/\Sigma}$$

définit une extension de $i_*(W_n)$ par $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$. Via un dictionnaire élémentaire entre $\natural$-extensions et extensions cristallines, celle-ci provient de la $\natural$-extension de $\mathbb{W}_n$ par $\mathbb{G}_a$ définie par $\mathbb{W}_{n+1}$ (cf. [12], II § 15).

§ 5 - Théorèmes de dualité.

5.1. Rappelons d'abord quelques énoncés de dualité "classiques".

a) Soient $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps parfait, $W = W(k)$, $K = \mathrm{Frac}(W)$. Pour tout groupe fini G sur S, on définit, grâce à l'exponentielle de Artin-Hasse, un isomorphisme canonique

$$(5.1) \qquad M_k(G)^{\vee} = \mathrm{Hom}_W(M_k(G),K/W) = \mathrm{Ext}^1_W(M_k(G),W) \xrightarrow{\sim} M_k(G^*) ,$$

où G^* est le dual de Cartier de G ; étant fonctoriel, cet isomorphisme est compatible à F et V.

Si G est un groupe p-divisible, on a de même un isomorphisme canonique

$$(5.2) \qquad M_k(G)^{\vee} = \mathrm{Hom}_W(M_k(G),W) \xrightarrow{\sim} M_k(G^*) .$$

b) Soit $f : A \longrightarrow S$ un schéma abélien, de dual $f' : A' \longrightarrow S$, où $A' = \underline{\mathrm{Pic}}(A)^{\circ}$. En utilisant le diviseur de Poincaré (biextension de Weil dans la terminologie de Grothendieck), on définit un isomorphisme de cristaux sur S :

$$R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}),\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} R^1 f'_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{A'/\Sigma}) ,$$

compatible à la filtration de Hodge.

Si G est le groupe p-divisible associé à A, G^* est le groupe p-divisible associé à A', et l'isomorphisme (3.1) définit un isomorphisme

$$(5.3) \qquad \mathbb{D}(G)^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(\mathbb{D}(G),\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathbb{D}(G^*) .$$

Pour étendre ces résultats dans le contexte général, observons que les deux foncteurs

$$\mathbb{D} : (\text{groupes p-divisibles}/S)^{\circ} \longrightarrow \underline{\underline{C}}'_S ,$$

$$\mathbb{\Delta} : (\text{groupes finis localement libres}/S)^{\circ} \longrightarrow \underline{\underline{D}}_S ,$$

où $\underline{\underline{C}}'_S$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}_S$ formée des cristaux localement libres de rang fini, prennent leurs valeurs dans des catégories possèdant une autodualité : à savoir respectivement

$$M \longmapsto M^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(M,\mathcal{O}_{S/\Sigma}) ,$$

$$L \longmapsto L^{\vee} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(L,\mathcal{O}_{S/\Sigma})[-1] .$$

Les théorèmes de dualité affirment que les foncteurs $\mathbb{D}$ et $\mathbb{\Delta}$ transforment la dualité de Cartier en ces autodualités.

5.2. Les théorèmes de dualité reposent sur l'existence, pour tout groupe fini localement libre G, d'un morphisme canonique dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur CRIS(S/Σ)

(5.4) $$\alpha : \underline{G}^* \longrightarrow \mathbb{\Delta}(G)[1] .$$

Sur CRIS(S/Σ), il existe une extension

$$0 \longrightarrow 1+\mathcal{J}_{S/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{O}^*_{S/\Sigma} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0 .$$

En appliquant l'homomorphisme composé

$$1+\mathcal{J}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\text{Log}} \mathcal{J}_{S/\Sigma} \hookrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} ,$$

on obtient par fonctorialité une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow 0 ,$$

i.e. un morphisme $\underline{\mathbb{G}}_m \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma}[1]$ dans la catégorie dérivée. On en déduit le morphisme cherché

$$\alpha : \underline{G}^* = \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\underline{\mathbb{G}}_m) \longrightarrow (t_{1]}\, \mathbb{R}\, \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma}))[1] .$$

Par "transposition", α définit alors le morphisme de dualité

$$\begin{array}{lccc} & & (t_{1]}\, \mathbb{R}\, \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\mathbb{\Delta}(G),\mathcal{O}_{S/\Sigma}))\ [-1] & \\ & \nearrow & & \searrow \\ (5.5) \quad \phi_G : \mathbb{\Delta}(G)^{\vee}[-1] & & \longrightarrow & \mathbb{\Delta}(G^*) \end{array}$$

On notera que le morphisme α définit en particulier un homomorphisme

(5.6) $$\underline{G}^* \longrightarrow \mathbb{D}(G) .$$

Supposons maintenant que G soit un groupe p-divisible. Il existe une extension canonique

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G) \longrightarrow F \longrightarrow \underline{G}^* \longrightarrow 0 ,$$

qui, sur un objet (U,T,δ) tel que $p^n.\mathcal{O}_T = 0$, se déduit de l'extension

$$0 \longrightarrow \underline{G^*(n)} \longrightarrow \underline{G}^* \xrightarrow{p^n} \underline{G}^* \longrightarrow 0$$

en appliquant le morphisme (5.6) :

$$\underline{G^*(n)} \longrightarrow \mathbb{D}(G(n)) ,$$

et en utilisant le fait que $\mathbb{D}(G)_{(U,T)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G(n))_{(U,T)}$. Cette extension fournit alors l'homomorphisme

(5.7) $$\phi_G : \mathbb{D}(G)^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(\mathbb{D}(G),\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}^*,\mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \mathbb{D}(G^*) .$$

On observera que (5.5) et (5.7) sont fonctoriels en G, donc compatibles à F et V.

Théorème 5.
(i) *Si* G *est un groupe* p-*divisible, l'homomorphisme*

$$\phi_G : \mathbb{D}(G)^\vee \longrightarrow \mathbb{D}(G^*)$$

est un isomorphisme.
(ii) *Si* G *est un* p-*groupe fini localement libre, le morphisme*

$$\phi_G : \Delta(G)^\vee\,[-1] \longrightarrow \Delta(G^*)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 1. *Soit* G *un* p-*groupe fini localement libre. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{D}(G)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}}(\mathbb{D}(G),\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G}^*,\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \ .$$

Supposons que S = Spec(A), où A est une algèbre lisse sur un corps k de caractéristique p. Soit A_∞ un relèvement plat de A sur un anneau de Cohen de k, séparé et complet pour la topologie p-adique. Le cristal $\mathbb{D}(G)$ est défini par le A_∞-module séparé et complet

$$\mathbb{D}(G)_{A_\infty} = \varprojlim_n \Gamma((S,\mathrm{Spec}(A_\infty/p^nA_\infty)),\ \mathbb{D}(G)) \ ,$$

muni d'une connexion (cf. 2.1). En termes de $\mathbb{D}(G)_{A_\infty}$, les théorèmes de dualité s'expriment sous une forme analogue à (5.1) et (5.2) :

Corollaire 2. *Sous les hypothèses précédentes :*
(i) *Si* G *est un groupe* p-*divisible, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathbb{D}(G)_{A_\infty})^\vee = \mathrm{Hom}_{A_\infty}(\mathbb{D}(G)_{A_\infty},A_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G^*)_{A_\infty} \ ,$$

compatible à F, V *et aux connexions ;*
(ii) *Si* G *est un* p-*groupe fini localement libre, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathbb{D}(G)_{A_\infty})^\vee = \mathrm{Hom}_{A_\infty}(\mathbb{D}(G)_{A_\infty},A_\infty[1/p]/A_\infty) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A_\infty}(\mathbb{D}(G)_{A_\infty},A_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G^*)_{A_\infty} \ ,$$

compatible à F, V *et aux connexions.*

Remarque. Comme nous l'avons vu dans la proposition 3, § 3, il existe, pour G fini localement libre sur S, une suite exacte

$$\mathcal{L}ie(G^*) \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \nu_{G^*} \longrightarrow 0 \ .$$

Si l'on regarde la suite analogue pour G^*, et si l'on prend son dual linéaire sur $\mathcal{O}_S$, on obtient une suite (car $\nu_G^\vee \simeq n_G$)

$$0 \longrightarrow n_G \longrightarrow \mathbb{D}(G^*)^\vee_S \longrightarrow \mathcal{L}ie(G^*) \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \nu_{G^*} \longrightarrow 0 .$$

Le corollaire 1 permet d'identifier cette suite à la suite (3.2), ce qui montre en particulier son exactitude (seule l'exactitude en $\mathcal{L}ie(G^*)$ n'étant pas évidente).

L'idée de la démonstration du théorème 5 est la suivante. On démontre d'abord l'assertion (i) en utilisant le fait que ϕ_G est compatible à la filtration de Hodge, et en vérifiant qu'il induit sur le gradué associé les isomorphismes

$$\mathcal{E}xt^1(G,\mathbb{G}_a)^\vee \xrightarrow{\sim} \omega_{G^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^1(\underline{G}^*,\mathcal{J}_{S/\Sigma})_S ,$$

$$\mathcal{E}xt^1(\underline{G},\mathcal{J}_{S/\Sigma})^\vee_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}ie(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^1(G^*,\mathbb{G}_a) .$$

Pour démontrer (ii), on se ramène en utilisant le théorème 3 au cas où le groupe fini G se plonge dans un groupe p-divisible. On achève en utilisant le fait que les homomorphismes ϕ_G, pour G fini localement libre et G p-divisible, vérifient une compatibilité naturelle.

§ 6 - Propriétés de fidélité du foncteur de Dieudonné.

Sur une base S arbitraire, on ne connaît pour le moment d'énoncé intéressant que dans deux cas particuliers. Soit $\underline{\underline{C}}^{et}_S$ (resp. $\underline{\underline{C}}^{tm}_S$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}_S$ dont les objets sont les cristaux M localement annulés par une puissance p, et tels que $F : M^\sigma \xrightarrow{\sim} M$ (resp. $V : M \xrightarrow{\sim} M^\sigma$) soit un isomorphisme.

Théorème 6. *Le foncteur* $\mathbb{D}$ *induit une équivalence entre la catégorie des* p-*groupes finis étales sur* S *(resp. de type multiplicatif), et la catégorie* $\underline{\underline{C}}^{et}_S$ *(resp.* $\underline{\underline{C}}^{tm}_S$ *).*

Corollaire. *Le foncteur* $\mathbb{D}$ *induit une équivalence entre la catégorie des groupes* p-*divisibles étales (resp. toroïdaux), et la sous-catégorie pleine de* $\underline{\underline{C}}_S$ *dont les objets sont les cristaux localement libres de rang fini tels que* F *soit un isomorphisme ("unit root* F-*crystals") (resp.* V *un isomorphisme).*

On peut néanmoins prouver un théorème de pleine fidélité pour le foncteur $\mathbb{D}$, moyennant une hypothèse de régularité sur S.

Théorème 7. *Soit* S *un schéma normal intègre, qui possède localement une* p-*base. Alors le foncteur* $\mathbb{D}$ *est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des* p-*groupes finis localement libres (resp. des groupes* p-*divisibles) dans* $\underline{\underline{C}}_S$.

Remarques.

a) L'hypothèse sur S est vérifiée par exemple si S est lisse sur un corps, ou si S est spectre d'un anneau de séries formelles sur un corps k tel que $[k:k^p] < +\infty$.

Par contre, comme Hochster l'a montré, un anneau de valuation discrète tel que $F_p(X_n)_{n \in \mathbb{N}}[[T]]$ ne possède pas de p-base.

b) En général, on ignore quelle est l'image essentielle du foncteur $\mathbb{D}$. Mais Bloch a montré [4] que, lorsque S est lisse sur un corps parfait, le foncteur $\mathbb{D}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des groupes p-divisibles connexes, et la sous-catégorie pleine de $\underline{\underline{C}}_S$ dont les objets sont les cristaux localement libres tels que F soit topologiquement nilpotent.

c) La démonstration du théorème utilise essentiellement tous les résultats précédents. Outre les théorèmes 1 et 4, le cas clé pour démontrer le théorème 7 est le cas où S = Spec(k), k étant un corps quelconque.

§ 7 - Une application géométrique.

Dans [SGA 7, exp. IX], Grothendieck a émis l'idée que sur une base de caractéristique p (ou plus généralement p-adique), la notion de groupe p-divisible doit être considérée comme un cas particulier de la notion de "système local de coefficients p-adiques". Le résultat suivant est consistant avec ce point de vue.

Théorème 8. *Soit* X *un schéma propre, lisse, et géométriquement connexe sur un corps parfait* k *de caractéristique* p. *Supposons qu'on puisse relever* X *en un schéma propre et lisse* $\mathfrak{X}$ *sur* W(k) *, et que* $\pi_1(\mathfrak{X} \otimes \overline{K}) = 0$, *où* K = Frac(W(k)). *Alors, tout groupe* p-*divisible* G *sur* X *est isogène à un groupe* p-*divisible constant, c'est-à-dire de la forme* $G_o \times_k X$, *où* G_o *est un groupe* p-*divisible sur* k.

Remarques.

a) Les hypothèses sont satisfaites par les espaces projectifs, grassmaniennes et variétés de drapeaux, les intersections complètes de dimension $\geqslant 2$, les surfaces rationnelles, presque toutes les surfaces K3 (voir l'article de Ogus dans ce volume).

b) Ce résultat est l'analogue d'un résultat de Oort [14].

c) On peut facilement construire des exemples de groupes p-divisibles non constants sur $\mathbb{P}^1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTHELOT P. : *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, preprint, Rennes (1977).

[2] BERTHELOT P., BREEN L., MESSING W. : *Théorie de Dieudonné cristalline II*, en préparation.

[3] BERTHELOT P., MESSING W. : *Propriétés de fidélité des foncteurs de Dieudonné cristallins*, en préparation.

[4] BLOCH S. : *Dieudonné crystals associated to* p-*divisible formal groups*, preprint (1974).

[5] BREEN L. : *On a non trivial higher extension of representable abelian sheaves*, Bull. Am. Math. Soc., 75, p. 1249-1253 (1969).

[6] BREEN L. : *Rapport sur les théories de Dieudonné*, dans ce volume.

[7] FONTAINE J.-M. : *Groupes* p-*divisibles sur les corps locaux*, Astérisque n° 47 - 48 (1977).

[8] GROTHENDIECK A. : *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes, Congrès intern. math., 1970, t. 1, p. 431-436.

[9] GROTHENDIECK A. : *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Sém. math. sup., Presses de l'Université de Montréal (1970).

[10] ILLUSIE L. : *Conditions de finitude dans les catégories dérivées*, exposé I, SGA 6, Lecture Notes in Math.225, Springer Verlag (1971).

[11] KATZ N. : *Slope filtration of* F-*crystals*, dans ce volume.

[12] MAZUR B., MESSING W. : *Universal extensions, and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag (1974).

[13] MESSING W : *The crystals associated to Barsotti-Tate groups*, Lectures Notes in Math. 264, Springer Verlag (1972).

[14] OORT F. : *Subvarieties of moduli spaces*, Inventiones Math. 24, 95-119 (1974).

[15] POLETTI M. : *Iperalgebre su schiere valutanti*, Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa 23, 745-770 (1969).

[16] TATE J. : p-*divisible groups*, in Proceedings of a Conference on local fields, 158-183, Springer Verlag (1967).

S.G.A.7 : *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, dirigé par A. Grothendieck, Lectures Notes in Math. 288, Springer Verlag (1972).

Pierre BERTHELOT
U.E.R. de Mathématiques
Université de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 - Rennes-Cedex
FRANCE

William MESSING
Departement of Mathematics
University of California
Irvine, California 92717
U.S.A.