Astérisque

DAVID TROTMAN

Interprétations topologiques des conditions de Whitney

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 233-248

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__233_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 59-60 (1978) p. 233-248

INTERPRÉTATIONS TOPOLOGIQUES DES CONDITIONS DE WHITNEY

David TROTMAN

0. Introduction

L'importance des conditions de régularité locale imposées sur les stratifications, que Whitney a introduites en 1965 ([35], [36]), est bien-connue. Elles se sont montrées utiles dans le théorème de stabilité topologique de Thom et Mather ([3], [14], [23]), aussi dans les théorèmes de Lefschetz démontrés par Lê Dũng Tràng et Hamm [4], dans la construction des classes caractéristiques des variétés singulières par MacPherson, M.-H. Schwartz et Brasselet ([12], [16]), et dans la classification des singularités et des systèmes dynamiques.

Parce qu'elles sont génériques et qu'elles ont des conséquences frappantes — équimultiplicité [5] et trivialité topologique [13] — elles sont importantes dans la théorie de l'équisingularité des variétés analytiques complexes. De plus elles sont naturelles dans une telle théorie, au moins dans le cas des hypersurfaces, pour lesquelles (b) équivaut à μ^*-constant (voir les travaux de Teissier [18], [19] et de Briançon et Speder [1], [17]).

Je vais décrire ici pourquoi elles sont naturelles dans la topologie différentielle : (1) on peut les exprimer d'une manière " géométrique " sans mention de suites, ni de limites de vecteurs ou plans, et (2) la condition

(a) est précisément celle dont on a besoin pour que la transversalité à la stratification soit une propriété stable .

Finalement je parlerai de la relation de la condition (a) avec d'autres conditions qui sont équivalentes à la condition (a) dès qu'on peut utiliser le lemme de sélection des courbes (par exemple pour les stratifications semi- ou sous-analytiques) , cependant plus faibles dans le cas général, mais intéressantes parce qu'elles sont très faciles à visualiser .

1. Évolution historique des conditions d'incidence régulière.

Je veux rappeler les premières parutions des définitions et résultats concernant les conditions d'incidence régulière imposées sur les stratifications.

1957 Whitney [34]	Décomposition de toute variété algébrique réelle en un nombre fini de sous-variétés lisses. On dit qu'on a une " manifold collection " (parfois aussi " sub-manifold complex ") .
1960 Thom [20]	Stratification : une partition d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ en une réunion de sous-variétés connexes différentiables (les strates) , telles que l'adhérence de chaque strate soit la réunion de cette strate et d'un nombre fini d'autres strates (de dimensions plus petites) . Incidence régulière : Pour toute strate Y , il existe une rétraction C^1 $\pi_Y : T_Y \longrightarrow Y$ définie sur un voisinage tubulaire T_Y de Y , telle que si

$Y \subset \partial X$, alors $\pi_Y|_{X \cap T_Y}$ est une submersion.

1964 Thom [21] Dans le cas des ensembles semi-algébriques, l'incidence régulière ci-dessus est remplacée par

(t) Pour toute sous-variété S transverse à Y en y , il existe un voisinage U de y (dans $\mathbb{R}^n$) tel que S soit transverse à X dans U.

1964 Whitney [35] Une stratification est <u>régulière</u> si pour toutes strates adjacentes X , Y , avec $Y \subset \partial X$, et pour tout $y \in Y$, les conditions suivantes sont satisfaites.

(a) Pour toute suite $\{x_i\} \in X$ convergeant vers y , telle que $\{T_{x_i} X\}$ a une limite τ , on a $T_y Y \subset \tau$.

(b') Pour toute suite $\{x_i\} \in X$ convergeant vers y , telle que $\{T_{x_i} X\}$ a une limite τ , et que $\left\{\frac{x_i - \pi_Y(x_i)}{|x_i - \pi_Y(x_i)|}\right\}$ a une limite λ , avec π_Y une rétraction C^1 sur Y , on a $\lambda \subset \tau$.

Whitney remarque que (a) implique (t) , et que (a) et (b') sont préservées par les difféomorphismes de classe C^1 .

1965 Whitney [36] Toute variété analytique complexe (ou réelle) admet une stratification régulière.
Introduction de la condition suivante.

(b) Pour toutes suites $\{x_i\} \in X$, $\{y_i\} \in Y$ convergeant vers y , telles que $\{T_{x_i}X\}$ a une limite τ , et $\left\{\frac{x_i - y_i}{|x_i - y_i|}\right\}$ a une limite λ , on a $\lambda \subset \tau$.

<u>Remarque</u> : (b) <u>est équivalente à la conjonction de</u> (a) <u>et</u> (b') .

Il est évident que (b) implique (b') pour toute π_Y . D'autre part (b) implique (a) parce que pour tout vecteur $v \in T_yY$, et toute suite $\{x_i\} \in X$, on peut choisir $\{y_i\}$ sur Y approchant y dans la direction de v assez lentement pour que $\frac{x_i - y_i}{|x_i - y_i|}$ tende vers v .

Réciproquement, si (a) est vraie, et (b') est vraie pour une π_Y donnée, on trouve (b) en décomposant le vecteur λ (dans la définition de (b)) en la somme de deux vecteurs, l'un dans T_yY , et l'autre dans $T_y(\pi_Y^{-1}(y))$.

1965 Thom [22] La condition (b) sur un couple de strates X , Y avec $Y \subset \partial X$ implique l'invariance topologique locale : près de chaque point y de Y on a un homéomorphisme entre $\overline{X}$ et $Y \times (\pi_Y^{-1}(y) \cap \overline{X})$.

<u>Conditions géométriques.</u>

Soit (U,ϕ) une carte C^1 pour Y en y ,

$$\phi : (U, U\cap Y, y) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times 0^{n-m}, 0) .$$

Nous avons une rétraction C^1 ,

$$\pi_\phi = \phi^{-1} \circ \pi_m \circ \phi \ : U \longrightarrow (Y \cap U) ,$$

et une fonction tubulaire C^1,

$$\rho_\phi = \rho \circ \phi \ : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ ,$$

où $\pi_m(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$ et $\rho(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2$.

Dans l'article [22] de Thom sont démontrées les implications suivantes (page 10) .

La condition (a) pour le couple (X,Y) en y, avec $y \in Y \subset \overline{X} - X$, implique

(a_s) Pour toute carte C^1 (U,ϕ) pour Y en y, il existe un voisinage V de y, $V \subset U$, tel que $\pi_\phi|_{V \cap X}$ soit une submersion.

La condition (b) pour le couple (X,Y) en y implique

(b_s) Pour toute carte C^1 (U,ϕ) pour Y en y, il existe un voisinage V de y, $V \subset U$, tel que $(\pi_\phi, \rho_\phi)|_{V \cap X}$ soit une submersion.

1965 Feldman [2] Les applications différentiables d'une variété N à une variété M, qui sont transverses à chaque strate d'une stratification (a)-régulière d'un fermé de M, forment un ouvert dense de $C^\infty(N,M)$ dans la topologie forte (ou fine). Ceci a des corollaires intéressants en géométrie différentielle.

1965 Lojasiewicz [11] Stratification (b)-régulière des ensembles semi-analytiques.

1971 Kuo [9] Introduction de la condition (r) : " ratio test " .

(r) est strictement plus forte que la condition (b) dans le cas semi-analytique, mais n'est qu'un invariant C^2 : elle n'est pas préservée par les diffeomorphismes C^1 — voir [26] et [27] .

1973 Hironaka [6] Stratification (b)-régulière des ensembles sous-analytiques.

1974 Wall [32] Conjectures : $(a_s) \Longleftrightarrow (a)$, $(b_s) \Longleftrightarrow (b)$.

1976 Verdier [31] Introduction de la condition (w) , qui est une condition générique et implique la trivialité rugeuse locale : on a plus de contrôle sur les homéomorphismes trivialisants que avec (b) .

(w) est strictement plus forte que (r) et donc plus forte que (b) dans le cas semi-analytique (ou sous-analytique). Comme (r) , elle n'est que préservée par les difféomorphismes C^2 et pas par les difféomorphismes C^1 , même pour les strates algébriques (voir [26] et [27]).

1978 Kuo [10] Soit $Y = \overline{X} - X \subset \mathbb{R}^n$ (pas seulement $Y \subset \overline{X} - X$). La condition (a) pour (X,Y) en $y \in Y$ implique

(h^∞) Le type topologique du germe en y de l'intersection avec X d'une sous-variété S de classe C^∞ telle que $y \in S$, $S \pitchfork Y$ en y , et $\dim S = n - \dim Y$, est indépendant du choix de S .

Dans la suite je vais parler de plusieurs résultats démontrés dans ma thèse [27] : les réciproques aux implications $(a) \Longrightarrow (a_s)$ et $(b) \Longrightarrow (b_s)$ de Thom (1965) , la réciproque du théorème de Feldman (1965) , et finalement une réciproque partielle au théorème de Kuo (1978) dans les cas où le lemme de sélection des courbes est utilisable.

2. <u>Détecteurs de (a)- et (b)-défauts.</u>

<u>Langage</u> : Quand une condition d'équisingularité E n'est pas satisfaite en un point d'une stratification il est naturel d'appeler ce point un

E-<u>défaut</u>. Très souvent, pour démontrer qu'une condition E_1 implique une condition E_2, on suppose qu'on a un E_2-défaut et on en déduit qu'on a forcément un E_1-défaut.

Les résultats suivants font partie de ma thèse [27] ; les démonstrations seront publiées dans [29] .

<u>Théorème A</u> : (a) <u>équivaut à</u> (a_s) .

<u>Théorème B</u> : (b) <u>équivaut à</u> (b_s) .

<u>Corollaire</u> : <u>Les conditions</u> (a) <u>et</u> (b) <u>sont invariantes par difféomorphisme</u> C^1 .

<u>Comment démontrer le Théorème A</u> :

On considère une formulation de (a_s) suggérée par Dennis Sullivan. Soient X , Y des sous-variétés C^1 de $\mathbb{R}^n$, et $y \in Y \subset \overline{X} - X$. On dit que (X,Y) est $(\mathcal{F}^k)$-<u>régulier</u> en y si

> $(\mathcal{F}^k)$ Pour tout feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^k transverse à Y en y , il existe un voisinage U de y tel que $\mathcal{F}$ est transverse à X dans U .

(a_s) <u>équivaut à</u> $(\mathcal{F}^1)$.

On remarque d'abord que $\pi_\phi|_{X\cap U}$ est une submersion si et seulement si les fibres de π_ϕ sont transverses à X dans U .

Donc, étant donnée $(\mathcal{F}^1)$, on trouve (a_s) parce que les fibres de la rétraction C^1 π_ϕ sont les feuilles d'un feuilletage C^1 transverse à Y et de codimension égale à la dimension de Y.

Étant donnée (a_s) on trouve $(\mathcal{F}^1)$ en prenant une rétraction dont les fibres sont contenues dans les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$.

<u>($\mathcal{F}^1$) implique (a):</u>

On suppose que (a) n'est pas satisfaite pour le couple (X,Y) en $y \in Y \subset \overline{X} - X$. On construit un feuilletage C^1 transverse à Y en y, mais qui n'est pas transverse à X en chaque point d'une sous-suite de la suite $\{x_i\}$ avec limite y. Le feuilletage sera appelé un <u>détecteur</u> du (a)-défaut. Pour le construire on part d'un feuilletage $\mathcal{F}_o$ par des hyperplans parallèles à $\lim T_{x_i} X$, et autour de chaque point d'une sous-suite $\{x_{i_k}\}$ de $\{x_i\}$ on remplace $\mathcal{F}_o$ par un feuilletage proche — on ajoute des " rides " telles que la tangente en x_{i_k}, à la feuille qui passe par x_{i_k}, contienne $T_{x_{i_k}} X$, et donc ce nouveau feuilletage n'est pas transverse à X près de y: c'est à dire que $(\mathcal{F}^1)$ n'est pas satisfaite.

Par le même genre d'argument on montre que (b_s) implique (b), cette fois en prenant un feuilletage de $\mathbb{R}^n - Y$ par des cylindres (les fibres d'une fonction tubulaire ρ_ϕ).

Pour X, Y semianalytiques on peut se restreindre à des difféomorphismes avec leurs graphes semianalytiques. (Pour voir celà il suffit de lire attentivement [24] et [25].)

Les feuilletages C^2 transverses ne sont pas des détecteurs effectifs pour les (a)-défauts : $(\mathcal{F}^2)$ n'implique pas $(\mathcal{F}^1)$. Un contre-exemple a été construit en collaboration avec Anne Kambouchner (voir [8] et [27]). Le même contre-exemple donne un (b)-défaut qui n'est pas mis en évidence par les voisinages tubulaires C^2 : la condition (b_s^2), qui est simplement la condition (b_s) limitée à des difféomorphismes ϕ de classe C^2, est satisfaite.

3. La condition (a) et la stabilité de la transversalité à une stratification.

Le théorème énoncé ci-dessous explique l'importance de la condition (a) de Whitney si on s'intéresse aux propriétés de stabilité.

Théorème : Soit Σ une stratification localement finie d'un fermé V d'une variété M de classe C^1. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) Σ est (a)-régulière,

(2) pour toute variété N de classe C^1, $\{z \in J^1(N,M) : z \pitchfork \Sigma\}$ est un ouvert de $J^1(N,M)$,

(3) pour toute variété N de classe C^1, $\{f \in C^1(N,M) : f \pitchfork \Sigma\}$ est un ouvert de $C^1(N,M)$ dans la topologie C^1 forte,

(4) il existe une variété N de classe C^1, avec

$$1 \leqslant \dim M - \dim N \leqslant \max (1 , \min_{S \in \Sigma} \dim S)$$

telle que $\{f \in C^1(N,M) : f \pitchfork \Sigma\}$ est un ouvert de $C^1(N,M)$ dans la topologie C^1 forte.

(1) $\Longrightarrow$ (3) a été démontré par Feldman en 1965 (voir §2 ci-dessus). (1) $\Longleftrightarrow$ (2) a été démontré par Wall [33] ; (1) $\Longrightarrow$ (3) en découle parce que (3) est une conséquence immédiate de (2) par la définition même de la topologie C^1 forte (voir [7], [15]).

L'implication (4) $\Longrightarrow$ (1) est nouvelle. Pour les détails de sa démonstration voir [27] ou [28] . La démonstration utilise d'une façon non-triviale le fait qu'un sous-ensemble de $C^k(N,M)$ ($0 \leqslant k \leqslant \infty$) qui est fermé dans la topologie C^k faible , a la propriété de Baire dans la topologie C^k forte : ce théorème est démontré par Morlet [15] et Hirsch [7] .

On a le même théorème en remplaçant partout C^1 par C^k , parce que le problème se réduit à un étude des 1-jets.

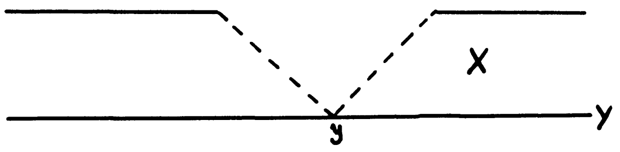
On sait que $\{f \in C^k(N,M) : f \pitchfork \Sigma\}$ est toujours <u>dense</u> dans $C^k(N,M)$ muni de la topologie C^k forte $(1 \leq k \leq \infty)$, par application répétée du théorème de transversalité de Thom (voir [7]). Donc les applications transverses à une stratification forment un ouvert dense si et seulement si la stratification est (a)-régulière.

Avec la topologie C^1 <u>faible</u> les applications transverses à une stratification, même d'un sous-ensemble compact, ne forment un ouvert que si la variété source est compacte (dans ce cas la topologie faible est la même que la topologie forte). En effet un voisinage ouvert dans la topologie faible ne donne aucun contrôle en dehors d'un compact dans la variété source. A ce sujet il faut signaler les erreurs dans chaque partie (a), (b), et (c) de l'exercice 8, page 83 de [7].

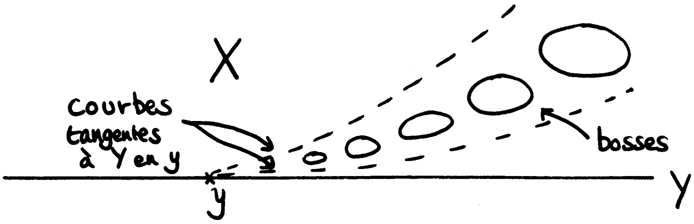
4. <u>Transversales homéomorphes et transversales transverses.</u>

Dans §2 j'ai énoncé le théorème de Kuo : (a) implique (h^∞). En suivant la démonstration de ce résultat [10], on voit que (a) implique (h^2) (dans la définition de (h^∞) on peut prendre des sous-variétés de classe C^2), mais il n'est pas clair que (a) implique (h^1) (c'est à dire qu'on puisse prendre des sous-variétés de classe C^1), parce que la démonstration utilise un champ de vecteurs dans un éclatement.

Il est clair que l'hypothèse $Y = \overline{X} - X$ est nécessaire à cause d'exemples comme



Je me suis posé le problème de considérer une réciproque au théorème de Kuo : est-ce que (h^1) implique (a) ? En effet une telle réciproque n'existe pas en général à cause des exemples que j'ai construit pour montrer que (t) n'implique pas (a) (voir [8], [24], [26], [27]). Dans l'exemple le plus simple ([26], [27]) on construit un (a)-défaut en plaçant une suite de bosses sur une courbe tangente à Y, telle que les sous-variétés transverses à Y en y " ne le voient pas ".



Evidemment on obtient ainsi un (a)-défaut qui satisfait la condition (h^1) — d'avoir les <u>transversales homéomorphes</u>. (Ceci suggère que (t), c'est d'avoir les <u>transversales transverses</u>.)

Maintenant il est naturel de se demander si peut-être (t) et (h^1) sont équivalentes. Je peux montrer que (h^1) implique (t). Plus généralement, soit (h^k_s) la condition que les transversales à Y de classe C^k et de dimension s aient les germes en y de leurs intersections avec X tous homéomorphes, et soit (t^k_s) la condition que ces transversales soient transverses à X près de y ($1 \leq k \leq \infty$, $\operatorname{codim} Y \leq s \leq n$).

<u>Théorème</u> : <u>Soient</u> X, Y <u>sous-variétés disjointes de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>de classe</u> C^k, <u>et</u> $y \in Y$, $1 \leq k \leq \infty$. <u>Alors</u>

$$(h^k_s) \ \underline{\text{implique}} \ (t^k_s) \ \underline{\text{si}} \begin{cases} k = 1 \\ \text{ou} \\ k > 1 \ \text{ et } \ s > \operatorname{codim} X . \end{cases}$$

La restriction sur s quand $k > 1$ est nécessaire ; la raison est essentiellement parce qu'on ne peut pas trouver une petite C^2-perturbation d'une parabole près de son sommet qui l'applique sur sa tangente au sommet.

Les détails de la démonstration du théorème ci-dessus se trouvent dans [27] et vont paraître dans [30] .

Comme corollaire on obtient le résultat suivant.

<u>Théorème</u> : <u>Pour les strates sous-analytiques</u>, (h^1) <u>implique</u> (a) .

<u>Démonstration</u> : On applique le théorème ci-dessus et le fait que (t) implique (a) dans le cas des sous-analytiques (on le montre pour les semi-analytiques dans [24] en utilisant le lemme de sélection des courbes, qui est valable pour les semi-analytiques par [11] , et la même démonstration marche pour les sous-analytiques en citant le lemme de sélection d'Hironaka [6] ; voir [27]) .

Donc pour le cas des ensembles sous-analytiques on a les implications :

$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c} C^1\text{-transversales} \\ \text{transverses} \end{array} \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c} C^1\text{-transversales} \\ \text{homéomorphes} \end{array} \arrow[l, Rightarrow] \\
\begin{array}{c} C^2\text{-transversales} \\ \text{homéomorphes} \end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c} C^2\text{-transversales} \\ \text{transverses} \end{array} &
\end{tikzcd}$$

Il n'est pas difficile à voir qu'il faut (h^1) et pas seulement (h^2) pour obtenir (a) (voir [27, Note 2.8] , ou [30]) .

Je finis avec une conjecture naturelle d'après la discussion ci-dessus.

<u>Conjecture</u> : $(t^k_s) \Longrightarrow (h^k_s)$ — <u>transversales transverses impliquent transversales homéomorphes</u>.

Bibliographie

1. J. Briancon & J.-P. Speder, Les conditions de Whitney impliquent μ^*-constant, Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, 26(2), p. 153-163, 1976 .

2. E. A. Feldman, The geometry of immersions. I , Transactions of the A. M. S. 120, p. 185-224, 1965 .

3. C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A.A. du Plessis, E. J. N. Looijenga, Topological stability of smooth mappings, Springer Lecture Notes 552, Berlin, 1976 .

4. H. A. Hamm et Lê Dũng Tràng, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, tome 6, p. 317-366, 1973 .

5. H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 36, 1969 .

6. H. Hironaka, Subanalytic sets, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, volume in honour of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, p. 453-493, 1973 .

7. M. Hirsch, Differential topology, Springer-Verlag, New York, 1976 .

8. A. Kambouchner & D. J. A. Trotman, Whitney (a)-faults which are hard to detect, à paraître.

9. T.-C. Kuo, The ratio test for analytic Whitney stratifications, Liverpool singularities symposium I, Springer lecture notes 192 Berlin, p. 141-149, 1971 .

10. T.-C. Kuo, On Thom-Whitney stratification theory, Math. Annalen, 234, p. 97-107, 1978.

11. S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, I.H.E.S. notes, 1965.

12. R. MacPherson, Characteristic classes for singular varieties, 1976.

13. J. Mather, Notes on topological stability, Harvard University, 1970.

14. J. Mather, Stratifications and mappings, in Dynamical Systems (edited by M. M. Peixoto), Academic Press, p. 195-223, 1971.

15. C. Morlet, Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney I : les topologies des espaces d'applications, Séminaire Henri Cartan (Topologie différentielle), 1961-62.

16. M.-H. Schwartz, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, tome 260, p. 3262-3264, 3535-3537, 1965.

17. J.-P. Speder, Equisingularité et conditions de Whitney, Thèse d'Etat, Université de Nice, 1976.

18. B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, Astérisque 7-8, Société Mathématique de France, p. 285-362, 1973.

19. B. Teissier, Introduction to equisingularity problems, A. M. S. Algebraic geometry symposium, Arcata 1974, Providence, Rhode Island, p. 593-632, 1975.

20. R. Thom, La stabilité topologique des applications polynomiales, l'Enseignement Math., tome VIII, p. 24-33, 1962.

21. R. Thom, Local topological properties of differentiable mappings, <u>Differential analysis</u>, Oxford University Press, London, p. 191-202, 1964.

22. R. Thom, Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques, <u>Séminaire Bourbaki no. 281</u>, 1964-65.

23. R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, <u>Bulletin of the A. M. S.</u>, <u>75</u>, p. 240-284, 1969.

24. D. J. A. Trotman, A transversality property weaker than Whitney (a)-regularity, <u>Bulletin of the L. M. S., 8</u>, p. 225-228, 1976.

25. D. J. A. Trotman, Geometric versions of Whitney regularity, <u>Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80</u>, p. 99-101, 1976.

26. D. J. A. Trotman, Counterexamples in stratification theory : two discordant horns, <u>Real and complex singularities, ed. P. Holm, Proceedings of the Nordic Summer School/Symposium, Oslo 1976</u>, Sijthoff & Noordhoff, p.679-686, 1977.

27. D. J. A. Trotman, <u>Whitney stratifications : faults and detectors</u>, Thesis, Warwick University, 1977.

28. D. J. A. Trotman, <u>Stability of transversality to a stratification implies Whitney (a)-regularity</u>, à paraître.

29. D. J. A. Trotman, <u>Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications</u>, à paraître.

30. D. J. A. Trotman, <u>Transverse transversals and homeomorphic transversals</u>, à paraître.

31. J.-L. Verdier, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Mathematicae 36, p. 295-312, 1976.

32. C. T. C. Wall, Regular stratifications, Dynamical systems - Warwick 1974, Springer lecture notes 468, p. 332-344, 1975.

33. C. T. C. Wall, Geometric properties of generic differentiable manifolds, Geometry and topology, Rio de Janeiro, July 1976, Springer lecture notes 597, Berlin, p. 707-774, 1977.

34. H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties, Annals of Math. 66, p. 545-556, 1957.

35. H. Whitney, Local properties of analytic varieties, Diff. and Comb. Topology (ed. S. Cairns), Princeton, p. 205-244, 1965.

36. H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Annals of Math. 81, p. 496-549, 1965.

David Trotman,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Faculté des Sciences,
Université de Paris-Sud,
91405 ORSAY,
France.