JEAN-PIERRE RAMIS

Dévissage Gevrey

Astérisque, tome 59-60 (1978), p. 173-204

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__59-60__173_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 59-60 (1978) p. 173-204

DÉVISSAGE GEVREY

par

J.P. RAMIS

"Ni vu ni connu
Le temps d'un sein nu
Entre deux chemises"
(Paul VALÉRY)

On trouvera ci-dessous la rédaction de l'exposé fait à Dijon, dans le cadre des "Journées Singulières" et quelques compléments.
Une rédaction détaillée contenant les démonstrations qui manquent ici paraîtra ultérieurement (RAMIS [26]).

INTRODUCTION.

Il s'agit d'étudier des opérateurs différentiels de la forme

$$D = a_m(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m + \dots + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i + \dots + a_o(x) \ , \quad \text{où}$$

$a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ ou plus généralement est un genre de fonction méromorphe à l'origine de $\mathbb{C}$.

Diverses "mesures" de l'irrégularité pour un tel opérateur ont été introduites; nous utiliserons essentiellement celles de GÉRARD-LEVELT [10] et MALGRANGE [22] :

Dans le cas de D les indices de GÉRARD-LEVELT se définissent aisément; si $k \in \mathbb{N}$, on écrit, pour $n \in \mathbb{Z}$ et λ inversible convenables,

$$\lambda\, x^n D = \left(x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^m + b_{m-1}(x)\left(x^{k+1}\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \dots + b_o(x) \ , \text{ et}$$

on pose $\rho_k = \sup_{i=0,\dots,m-1} (-v(b_i))$.

On trouvera établi dans GÉRARD-LEVELT [10] que la nullité de ρ_0 (qui implique celle des ρ_k , $k \in \mathbb{N}$) équivaut au fait que D est à points singuliers réguliers.

Par ailleurs MALGRANGE [22] a montré que les opérateurs

$$\mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{D} \mathbb{C}\{x\} \quad \text{et}$$

$$\mathbb{C}[[x]] \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]$$

sont des opérateurs à indice, d'indices respectifs χ' et χ'' ; on a de plus $\chi'' - \chi' = \rho_0$.

Ainsi l'indice ρ_0 de GÉRARD-LEVELT s'interprète comme mesure de la différence entre résolution formelle et résolution analytique, ou dualement [21] comme mesure de la différence entre solutions distributions à support dans $\{0\}$ et solutions hyperfonctions à support dans $\{0\}$ (dérivées holomorphes d'ordre fini ou infini de δ_0) pour l'opérateur adjoint D^* .

Ceci m'a conduit à penser qu'il devait exister le même type d'interprétation pour les indices supérieurs ρ_k dans le cas irrégulier (i.e. $\rho_0 \neq 0$). Considérant les choses du point de vue dual (étude de D^*) divers exemples et l'étude de la régularité de D^* dans le cas à coefficients réels par KOMATSU [17] m'ont convaincu du fait que ρ_k était lié à l'existence de solutions de D^* à croissance exponentielle d'ordre au plus k en $\frac{1}{|x|}$ au voisinage de $\{0\}$; c'est à dire (KOMATSU [17]) aux solutions ultradistributions de D^* d'ordre $s = 1 + \frac{1}{k}$ à support dans $\{0\}$ (dérivées holomorphes d'ordre infini de δ_0). Cela amène par dualité à l'étude des solutions formelles Gevrey d'ordre s de D . C'est à cette étude qu'est consacré l'exposé. Elle permet de répondre à la question initiale : l'interprétation en termes d'Analyse des indices ρ_k et fournit de nombreux autres résultats.

Avant de continuer il est bon d'étudier un exemple simple :

L'opérateur $D = x^2 \frac{d}{dx} + 1$ a été étudié par EULER (1760) [7]. (Cette étude a été reprise ultérieurement par divers auteurs dont LACROIX, BOREL [2], HARDY [13], MALGRANGE [22] ; nous y reviendrons). Posons

$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n!\, x^{n+1}$; EULER a constaté que

$Df = x \in \mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\}$ et que $f \notin \mathbb{C}\{x\}$. On est ici dans le cas irrégulier; on vérifie facilement que $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = 0$; par ailleurs $x' = -1$ et $x'' = 0$, d'où $x' - x'' = 1 = \rho$.

On a $D^* = -x^2 \frac{d}{dx} + 1$ et $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ est solution de $D^*g = 0$; on constate qu'elle a une croissance au plus d'ordre 1 en $\frac{1}{|x|}$ au voisinage de 0.

Enfin $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est solution de $Dh = 0$; cette fonction a une décroissance exponentielle d'ordre 1 dans tout secteur fermé strictement contenu dans $\Re x < 0$, une croissance exponentielle d'ordre 1 (toujours en $\frac{1}{|x|}$) dans tout vecteur strictement contenu dans $\Re x > 0$, les directions $\Re x = 0$ sont des "rayons de Stokes". Nous verrons que ceci est lié au phénomène suivant (analysé en détail par BOREL [2], III page 89) : à la série formelle $f(x) = \sum a_n x^n$ on associe la série formelle $F(n) = \sum \frac{a_n}{n!} x^n$; pour $f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n!\, x^{n+1}$ la série $F(x)$ obtenue est convergente (de rayon de convergence 1).

Nos résultats entrainent la généralisation suivante de ceci à toute équation linéaire analytique :

THÉORÈME 1(*).

(*) Pour D à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$ et "suffisamment général" EVANS donne dans [8] un résultat du même genre (plus facile). Il utilise des méthodes d'équations aux différences et la transformation de Mellin (MILNE-THOMSON [24], p. 500.501).

Soit $f = \Sigma\, b_n\, x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ et $\notin \mathbb{C}\{x\}$ telle que $Df = g \in \mathbb{C}\{x\}$.
Il existe un nombre réel $s > 1$ unique tel que la série $F(x) = \Sigma \frac{b_n}{(n!)^{s-1}} x^n$ soit convergente, de rayon de convergence fini (i.e. non entière); de plus s est rationnel et appartient à un ensemble fini que l'on peut déterminer à partir du polygone de Newton $P^+(D)$ de D (cf. ci-dessous).

THÉORÈME 2 .

On suppose les $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ ou plus généralement $\in \mathbb{C}(x)$ (fonctions rationnelles) ; $i = 0, \ldots, m$. Soit $f = \Sigma\, b_n\, x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ et $\notin \mathbb{C}[x]$, telle que $Df = 0$. Il existe un nombre réel s unique tel que la série $F(x) = \Sigma \frac{b_n}{(n!)^{s-1}}\, x^n$ soit convergente et non entière; de plus s est rationnel et appartient à un ensemble fini que l'on peut déterminer à partir du polygone de Newton $P(D)$ de D (cf. ci-dessous).

Remarque : l'exposé est rédigé dans le cadre d'un opérateur D d'ordre m ; les résultats s'étendent au cas d'un système d'ordre 1 : $\Delta = x \frac{d}{dx} - M$ (M matrice (m,m) à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$ ou plus généralement méromorphes). On utilise la correspondance habituelle entre un tel système et un opérateur D d'ordre m ; pour Δ donné il n'y a pas unicité de D (choix d'un vecteur cyclique; DELIGNE [5] , MALGRANGE [22]) , mais les invariants que nous associerons à D (polygone de Newton) ne dépendent que de Δ (LEVELT [19]) .

POLYGONE DE NEWTON.

Le polygone de Newton de D surgit naturellement d'un argument perturbatif dont je reparlerai plus loin. Le polygone ainsi obtenu est "naturel" et plus commode pour les calculs que le polygone traditionnel connu sous le nom de polygone de Puiseux et employé par divers auteurs (INCE [14] , KOMATSU [16] , LEVELT [19] , EVANS [8] (*) . (On verra que les invariants se lisent facilement

(*) Le polynome de Puiseux est dû, dans le cas général (non linéaire), à BRIOT et BOUQUET [4] .

sur le polygone de Newton.) Nous verrons également que l'on peut prolonger naturellement l'invariant ρ_k de GERARD-LEVELT à toute valeur réelle de k et que la connaissance de la fonction ρ_k est équivalente à celle du polygone de Newton $\mathcal{P}^+(D)$ (modulo une transformation de Legendre convenable).

Soit toujours $D = \sum_{i=o,\dots,m} a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i$. On pose $a_i(x) = \sum a_{ij} x^j$ et $b_i(x) = x^{-i} a_i(x) = \sum b_{ij} x^j$ $(b_{ij} = a_{i(j-i)})$. On associe à D le sous-ensemble $N(D)$ de $[o,m] \times \mathbb{Z}$ défini par $N(D) = \{(i,j)/b_{ij} \neq 0\}$; $N(D)$ est fini si et seulement si $a_i(x) \in C(x)$ $(i = o, \dots, m)$.

On considère ensuite la famille suivante de demi-plans fermés, indexée par $k \in [-\infty, 0^-] \cup [0^+, +\infty]$:

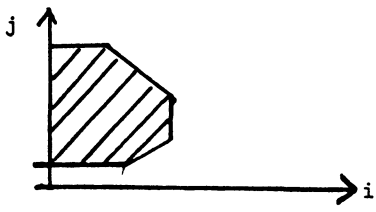
$$H_{k,\mu} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - kx - \mu > 0\} \quad \text{si} \quad k > 0 ,$$

$$H_{k,\mu} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - kx - \mu < 0\} \quad \text{si} \quad k < 0 ,$$

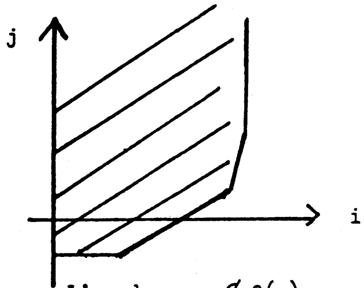
$$H_{\infty,\nu} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - \nu < 0\} \quad \text{si} \quad k = \pm\infty ,$$

$$H_{0+,\mu} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y-\mu > 0\} \quad \text{et} \quad H_{0^-,\mu} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y-\mu < 0\} .$$

On désigne par $\mathcal{P}(D)$ la frontière du convexe fermé $\bigcap_{k,\mu} H_{k,\mu}$ (intersection étendue aux demi-plans $H_{k,\mu} \supset N(D)$) ; on appelle $\mathcal{P}(D)$ polygone de Newton de D.



$a_i \in C(x)$

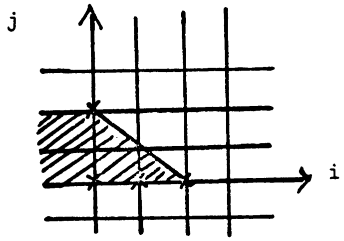


L'un des $a_i \notin C(x)$.

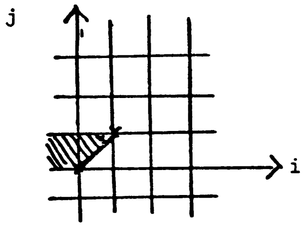
On notera $\rho^+(D)$ la partie de $\rho(D)$ formée des côtés à pente > 0, $\rho^-(D)$ la partie formée des côtés à pente < 0.
Si l'un des $a_i \notin \mathbb{C}(x)$, $\rho^-(D)$ est vide. L'opérateur D est à point singulier régulier si et seulement si $\rho^+(D)$ est vide.

Exemples :

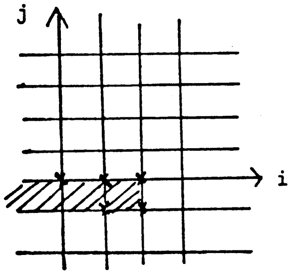
a) $D = x^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \lambda^2)$ (Bessel).



b) $D = x^2 \frac{d}{dx} + 1$ (Euler).



c) $x(1-x)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (c-(a+b+1)x) \frac{d}{dx} - ab$; $ab\,c \neq 0$ (hypergéométrique).



Remarque : notons $v(a_i)$ (resp. $d(a_i)$) la valuation (resp. le degré s'il y a lieu) de a_i ; on constate que $P^+(D)$ est l'"enveloppe" du graphe de $i \to v(a_i) - i$, tandis que $P^-(D)$ est l'"enveloppe" du graphe de $i \to d(a_i) - i$. Si $a_i \in C(x)$ $(i = o, \ldots, m)$ on peut faire le changement de variables $t = \frac{1}{x}$ et on obtient l'équation à l'infini D_1 (en t et $\frac{d}{dt}$) on constate que $P(D_1)$ et $P(D)$ sont symétriques par rapport à l'axe des i.

Pour k fixé l'un des $H_{k,\mu}$ est extrémal (i.e. contient les autres); sa frontière est la droite d'appui (d_k) de pente k, on notera $y - kx - \mu(k) = 0$ son équation ; $P(D) \cap (d_k)$ est l'ensemble d'appui de (d_k) : il est réduit à un point noté $(i(s), v(a_{i(s)}) - i(s))$ ou a un segment d'extrémités notées $(i_1(s), v(a_{i_1(s)}) - i_1(s))$ et $(i_2(s), v(a_{i_2(s)}) - i_2(s))$ (avec $i_1(s) < i_2(s)$) . $(s = 1 + 1/k)$.

Soient $0 < k_1 < \ldots < k_\ell$ les pentes des côtés de $P^+(D)$; on les appellera valeurs exceptionnelles de k. On posera $s_j = 1 + \frac{1}{k_j}$; on appellera les s_j ainsi définis valeurs exceptionnelles de s.
On constate facilement que k_ℓ est l'invariant de Katz de D (cf. DELIGNE [5], GERARD-LEVELT [10]).

Soient, s'il y a lieu $k'_{\ell'} < \ldots < k'_1 < 0$ les pentes des côtés de $P^-(D)$; on les appellera valeurs sous exceptionnelles de k. On posera $s'_{j'} = 1 + \frac{1}{k'_{j'}}$; on appellera les $s'_{j'}$ ainsi obtenus valeurs sous-exceptionnelles de s.

Il est clair que k_j, s_j, $k'_{j'}$, $s'_{j'} \in \mathbb{Q}$. Les ensembles dont il est question dans les théorèmes 1 et 2 sont respectivement $\{s_1, \ldots, s_\ell\}$ et $\{s_1, \ldots, s_\ell, s'_1, \ldots, s'_{\ell'}\} \cup \{1\}$ éventuellement (i.e. si l'ensemble d'appui des verticales n'est pas réduit à un point).

Si $k \in]0,+\infty[\cup]-\infty,0[$, il est également clair que l'ensemble d'appui de (d_k) est réduit à un point si et seulement si k n'est ni exceptionnel ni sous-exceptionnel.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer la relation entre $\mathcal{P}^+(D)$ et les invariants de GERARD-LEVELT $\rho_k(D)$.

Remarquons tout d'abord que si l'on fait un revêtement ramifié à q feuillets : $x = t^q$, D est transformé en un opérateur D_q (en t et $\frac{d}{dt}$) et $\mathcal{P}^+(D_q)$ s'obtient à partir de $\mathcal{P}^+(D)$ par une affinité de rapport q .
On peut étendre la définition de $\rho_k(D)$ à $k \in Q$ de la façon suivante :

$k = \frac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbb{N})$, on pose $\rho_k(D) = \rho_p(D_q)/q$ (le résultat est indépendant du choix de p et q). La fonction $\left| \begin{array}{l} k \to \rho_k(D) \\ Q^+ \to Q^+ \end{array} \right.$

est affine par morceaux, elle se prolonge de façon unique en une fonction continue $\left| \begin{array}{l} k \to \rho_k(D) \\ R^+ \to R^+ \end{array} \right.$.

Cette fonction est monotone décroissante affine par morceaux et convexe.
On vérifie sans difficulté que $\rho_k(D) = v(a_m) - (k+1)m - \mu(k)$.

Définition.

On appellera transformation de Legendre de centre (a,b) la transformation de Legendre sur $(x-a,y-b)$.

Proposition 3 :

La "fonction de GÉRARD-LEVELT" $k \to \rho_k(D)$ est transformée de la fonction dont le graphe est $\mathcal{P}^+(D)$ par transformation de Legendre de centre $(m,v(a_m)-m)$.

Remarque : Cette proposition permet d'obtenir inversement $\mathcal{P}^+(D)$ à partir de

$\rho_k(D)$ en utilisant l'involutivité de la transformation de Legendre (ARNOLD [1]).

Nous donnerons plus loin une interprétation de $\rho^+(D)$ en termes d'Analyse ; la proposition 3 permet d'en déduire une interprétation de $\rho_k(D)$ en termes d'Analyse et donc de répondre à la question initiale.

QUELQUES ESPACES FONCTIONNELS.

Soit $s \in \mathbb{R}$. On note $\varphi_s : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]] \\ \Sigma a_n x^n \mapsto \Sigma \dfrac{a_n}{(n!)^{s-1}} x^n \end{array} \right.$

Définition :

(i) On notera $f \in \mathbb{C}[[x]]_s$, et on appellera Gevrey-Roumieu d'ordre s , les séries formelles $f = \Sigma a_n x^n$ telles que $\varphi_s(f) \in \mathbb{C}\{x\}$, ou , ce qui revient au même, telles qu'il existe $C > 0$ et $A > 0$, avec :

$$|a_n| < C\ (n!)^{s-1}\ A^n .$$

(ii) On notera $f \in \mathbb{C}\ [[x]]_{(s)}$, et on appellera Gevrey-Beurling d'ordre s , les séries formelles $f = \Sigma a_n x^n$ telles que $\varphi_s(f)$ soit une fonction entière, ou, ce qui revient au même, telles que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $C_\alpha > 0$, avec :

$$|a_n| < C_\alpha\ (n!)^{s-1}\ \alpha^n .$$

On vérifie facilement que $\mathbb{C}[[x]]_s$ et $\mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres. On a une injection naturelle $\mathbb{C}[[x]]_{(s)} \hookrightarrow \mathbb{C}[[x]]_s$.
Les algèbres $\mathbb{C}[[x]]_s$ et $\mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ croissent avec s . On a les inclusions $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \subset \mathbb{C}[[x]]_s \subset \mathbb{C}[[x]]$; on remarquera que $\mathbb{C}[x] \neq \bigcap_s \mathbb{C}[[x]]_s = \bigcap_s \mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ et $\mathbb{C}[[x]] \neq \bigcup_s \mathbb{C}[[x]]_s = \bigcup_s \mathbb{C}[[x]]_{(s)}$; on verra toutefois que pour l'étude des solutions des équations linéaires "tout se passe

comme s'il y avait égalité".

Enfin, si $s \geq 1$: $f,g \in \mathbb{C}[[x]]_s$, $g(0) = 0$ entraînent $g \circ f \in \mathbb{C}[[x]]_s$ et plus généralement ceci reste vrai si $f \in \mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}[[x]]_1$. (on a le même résultat avec $\mathbb{C}[[x]]_{(s)}$) .

Les isomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\mathbb{C}[[x]]_s \overset{\varphi_s}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{C}\{x\} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \overset{\varphi_s}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

permettent de transporter respectivement sur $\mathbb{C}[[x]]_s$ et $\mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ les structures DFN et FN de $\mathbb{C}\{x\}$ et $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Pour $s < 1$ on a les caractérisations suivantes $(\mathbb{C}[[x]]_{(s)} \subset \mathbb{C}[[x]]_s \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}))$:

$f \in \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \Leftrightarrow$ Il existe $c > o$ et $a > o$ tels que :

$$|f(x)| < c\, e^{a|x|^{-k}} \quad (x \in \mathbb{C}) .$$

$f \in \mathbb{C}[[x]]_s \Leftrightarrow$ Il existe pour tout réel $\alpha > o$, un $c_\alpha > o$, tel que :

$$|f(x)| < c_\alpha\, e^{\alpha|x|^{-k}} \quad (x \in \mathbb{C}) .$$

On a posé $k = \frac{1}{s-1}$ $(-k=|k|)$. On a ainsi des caractérisations en fonction de la croissance exponentielle à l'infini.

<u>Remarque</u> : la terminologie introduite correspond à celle traditionnelle en Analyse (cf. par exemple KOMATSU [16]) pour $s > 1$. Le cas $s < 1$ nous sera utile pour l'étude des équations à coefficients rationnels.

Ce qui suit fait un grand usage des méthodes de développements asymptotiques. Nous avons donc besoin de l'analogue des filtrations Gevrey en théorie des développements asymptotiques.

Soient V_1 et V_2 des secteurs ouverts de sommet 0 dans $\mathbb{C}$, de rayons respectifs R_1 et R_2 . On dira que V_2 est un sous-secteur strict de V_1 , et on notera $V_2 < V_1$ si : $V_2 \subset V_1$, $R_2 < R_1$ et

$$(V_2 \cap \{|x| = R\}) \subset\subset (V_1 \cap \{|x| = R\}) \quad (0 < R < R_2) .$$

Définition : $s > 1$.

(i) Soit $f \in \mathcal{O}(v)$. On dira que f est Gevrey-Roumieu d'ordre s si, pour tout $W < V$, on a

$$\sup_{x \in W} |f^{(p)}(x)| < c_W (p!)^s A_W^p \quad (\text{pour } c_W > 0 \text{ et } A_W > 0 \text{ convenables,}$$

indépendants de $p \in \mathbb{N}$).

(ii) Soit $f \in \mathcal{O}(v)$. On dira que f est Gevrey-Beurling d'ordre s si, pour tout $W < V$, on a : pour tout $\alpha > o$, il existe $c_{\alpha W}$ tel que :

$$\sup_{x \in W} |f^{(p)}(x)| < c_{\alpha W} (p!)^s \alpha^p \quad (p \in \mathbb{N}) .$$

On note $A(v)$ le sous-espace de $\mathcal{O}(v)$ formé des f admettant un développement asymptotique $\hat{f} \in C[[x]]$ en 0 : $f \sim \hat{f}$ (majorations uniformes sur tout $W < V$). On a un homomorphisme d'algèbres $\begin{matrix} f \to \hat{f} \\ A(V) \to C[[x]] \end{matrix}$ dont on note le noyau $A_o(V) = \{f \in A(V) / \hat{f} = 0\}$.

On note $A_s(V) = A(V) \cap \{f$ Gevrey-Roumieu d'ordre $s\}$.

$A_{s,o}(V) = A_s(V) \cap A_o(V)$.

$A_{(s)}(V) = A(V) \cap \{ f$ Gevrey-Beurling d'ordre $s\}$.

$A_{(s),o}(V) = A_{(s)}(V) \cap A_o(V)$.

Si $f \in A_s(V)$ (resp. $A_{(s)}(V)$) on a $\hat{f} \in C[[x]]_s$ (resp. $C[[x]]_{(s)}$) . On a une réciproque de cette propriété :

THÉORÈME 4 : (BOREL-RITT avec condition de Gevrey) .

(i) Si $\hat{f} \in C[[x]]_s$ et si V est un secteur d'angle θ assez petit, il existe $f \in A_s(V)$ tel que $f \sim \hat{f}$.

(ii) Si $\hat{f} \in C[[x]]_{(s)}$ et si V est un secteur d'angle θ assez petit, il existe $f \in A_{(s)}(V)$ tel que $f \sim \hat{f}$.

On a les caractérisations utiles suivantes de $A_{o,s}(V)$ et $A_{o,(s)}(V)$(*) :

(*) Que l'on comparera aux espaces S_β^α de GUELFAND-CHILOV [11] .

Proposition 5 . Soit $s > 1$.

Soit V un secteur ouvert de sommet 0 dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{O}(V)$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $f \in A_{0,s}(V)$.

(ii) Pour tout secteur $W < V$:

$$\sup_{x \in W} |1/x^q f(x)| < c'_W (q!)^{s-1} B'^q_W \quad (\text{pour } c'_W > 0 \text{ et}$$

$B'_W > 0$ convenables, indépendants de $q \in \mathbb{N}$) .

(iii) Pour tout secteur $W < V$:

$$\sup_{x \in W} |1/x^q f^{(p)}(x)| < C''_W (p!)^s (q!)^{s-1} A^p_W B^q_W \quad (\text{pour } C''_W > 0 ,$$

$A_W > 0$ et $B_W > 0$ convenables, indépendants de $p, q \in \mathbb{N}$).

(iv) Pour tout secteur $W < V$, il existe $a_W > 0$ tel que , pour tout $x \in W$, on ait : $|f(x)| < e^{-a_W/|z|^k}$ $(k = 1/s-1)$.

Proposition 6 . Soit $1 > 1$.

Soit V un secteur ouvert de sommet 0 dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{O}(V)$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $f \in A_{0,(s)}(V)$.

(ii) Pour tout secteur $W < V$, pour tout $\beta > 0$, il existe $C'_{\beta W} > 0$ tel que :

$$\sup_{x \in W} |1/x^q f(x)| < C'_{\beta W} (q!)^{s-1} \beta^q \qquad (q \in \mathbb{N}) .$$

(iii) Pour tout secteur $W < V$, pour tout $\alpha, \beta > 0$, il existe $C''_{\alpha\beta W}$ tel que : $\sup_{x \in W} |1/x^q f^{(p)}(x)| < C''_{\alpha\beta W} (p!)^s (q!)^{s-1} \alpha^p \beta^q \quad (p,q \in \mathbb{N})$.

(iv) Pour tout vecteur $W < V$, pour tout $a > 0$, il existe $k_{\alpha w} > 0$ tel que : $|f(x)| < k_{\alpha w}\ e^{-a/|z|^k}$, pour tout $x \in w$ $(k = 1/s-1)$.

Remarque :

Les caractérisations (iv) (propositions 5 et 6) de $G_{o,s}(v)$ et $G_{o,(s)}(v)$ permettent de trouver des "multiplicateurs" :

Soit $b \in \mathbb{R}$. On suppose que $g(x) \in \mathcal{O}(V)$, avec $|g(x)| < K\ e^{b/|z|^k}$ (par exemple $g(x) = e^{b/z^k}$) .

(i) Soit $f \in A_{o,(s)}(V)$, alors $g\,f \in A_{o,(s)}(V)$.

(ii) Soit $f \in A_{o,s}(V)$. Soit $W < V$. Alors, si b est assez petit $(b < b_o\ ;\ b_o > 0)$: $g\,f \in A_{o,s}(W)$.

LES RÉSULTATS FONDAMENTAUX .

Soient E et F des espaces vectoriels, $E \xrightarrow{L} F$ une application linéaire. On rappelle que L est dit "à indice" ou "d'indice fini" si $\dim \operatorname{Ker} L < +\infty$ et $\dim \operatorname{coker} L < +\infty$; l'indice de L est alors $\chi(L) = \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{coker} L$.

THÉORÈME 7 :

(i) (a) L'opérateur $C[[x]]_s \xrightarrow{D} C[[x]]_s$ est d'indice fini $\chi_s(D)$ pour $s \in [1,+\infty]$.

(b) L'opérateur $C[[x]]_{(s)} \xrightarrow{D} C[[x]]_{(s)}$ est d'indice fini $\chi_{(s)}(D)$ pour $s \in\ ]1,+\infty]$.

(ii) (a) Si $s \neq s_1,\dots,s_\ell$ (valeurs exceptionnelles) , $s \in\ ]1,+\infty]$, on a : $\chi_s(D) = \chi_{(s)}(D) = i(s) - v(a_{i(s)})$.

(b) si $s = s_1,\dots,s_\ell$, on a :
$\chi_s(D) = i_1(s) - v(a_{i_1(s)})$ et $\chi_{(s)}(D) = i_2(s) - v(a_{i_2(s)})$.

(iii) les applications

$$\mathbb{C}[[x]]_s \to \mathbb{C}[[x]]_s \,/\, \mathbb{C}\{x\} \quad (s \in [1,+\infty])$$

et

$$\mathbb{C}[[x]]_{(s)} \to \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \,/\, \mathbb{C}\{x\} \quad (s \in]1,+\infty])$$

sont surjectives.

(On note $\mathbb{C}[[x]]_{(+\infty)} = \mathbb{C}[[x]]_{+\infty} = \mathbb{C}[[x]]$.)

La démonstration de ce théorème utilise divers résultats intermédiaires (d'ailleurs intéressants en eux-mêmes) que nous allons détailler.

Proposition 8 .

Soit $s \in [1,+\infty]$, $s \neq s_1,\ldots,s_\ell$. On pose alors $D_s = \lambda x^{v(a_{i(s)})} \left(\frac{d}{dx}\right)^{i(s)}$ ($\lambda x^{v(a_{i(s)})}$ est le terme de plus bas degré de $a_{i(s)}$; $\lambda \in \mathbb{C}^{(*)}$) .

On a $\chi_{(s)}(D) = \chi_s(D) = \chi(D_s)$.

Ceci se voit en montrant que D est une perturbation "compacte"(*) de D_s . L'indice de D_s est évidemment fini et égal à $i(s) - v(a_{i(s)})$; il en est donc de même de celui de D . Ceci établit le théorème 7 (i) , (ii) dans le cas "générique" $s \neq s_1,\ldots,s_\ell$.

On voit apparaître ici un phénomène "parabolique" : selon les valeurs de s certains "monomes" $a_i\left(\frac{d}{dx}\right)^i$ jouent un rôle prépondérant; les "monomes"

(*) Il n'y a pas vraiment compacité : il faut utiliser un argument de limite inductive dans un cas, projective dans l'autre, d'espaces de Banach. Argument analogue à MALGRANGE [22] ou KOMATSU [16] .

apparaissant effectivement sont ceux correspondants aux sommets du polygone de Newton $\mathcal{P}^+(D)$ (ils jouent en quelque sorte le rôle de "sous-symboles principaux"); les valeurs de s pour lesquelles on "saute" d'un sous-symbole à un autre sont les valeurs exceptionnelles $s_1, \dots, s_\ell$.

Procédant comme MALGRANGE dans [23] on fait un éclatement réel de l'origine dans $C^{(*)}$. On obtient une variété à bord $\tilde{C}$ et une projection π : $\tilde{C} \to C$; $\pi^{-1}(0)$ est un cercle S . Chaque secteur V induit un ouvert de S ; considérant $A_s(V)$, $A_{o,s}(V)$, $A_{(s)}(V)$, $A_{o,(s)}(V)$ comme attachés à ce secteur on fabrique des préfaisceaux sur S et on désigne par $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_{o,s}$, $\mathcal{A}_{(s)}$, $\mathcal{A}_{o,(s)}$ les faisceaux associés.

Le résultat suivant (auquel on peut donner une forme plus précise) est fondamental :

<u>THÉORÈME 9</u> . (Théorème fondamental des développements asymptotiques avec conditions de Gevrey).

Les applications

$\mathcal{A}_{o,s} \xrightarrow{D} \mathcal{A}_{o,s}$ $(s \in [1,+\infty])$

et $\mathcal{A}_{o,(s)} \xrightarrow{D} \mathcal{A}_{o,(s)}$ $(s \in]1,+\infty])$ sont surjectives.

Pour $s = +\infty$ c'est le théorème fondamental des développements asymptotiques. Sa démonstration n'est à ma connaissance écrite nulle part. On trouvera l'étude du cas particulier fondamental dans WASON [31] ; pour le cas général, il s'en déduit en reprenant des arguments développés par MALGRANGE dans [22] .

(*) On passe en coordonnées polaires !

L'étude du cas $s \in]1,+\infty[$ est assez différente : dans le cas particulier traité par WASOW il faut éventuellement modifier le choix des contours d'intégration (pour l'application de la méthode de "variation des constantes") en utilisant des multiplicateurs; pour le passage au cas général on ne peut utiliser la méthode de réduction formelle de MALGRANGE : il faut l'approcher (au sens m-adique) par une "presque-réduction" polynomiale et conclure par un argument explicite de perturbation.

Ce théorème a diverses conséquences; citons le

<u>Corollaire 10</u> .

Si $g \in \mathcal{G}_s$, si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_s$, avec $D\hat{f} = \hat{g}$, il existe $f \sim \hat{f}$, $f \in \mathcal{G}_s$ tel que $Df = g$.(On a un énoncé analogue avec $\mathcal{G}_{(s)}$ au lieu de $\mathcal{G}_s$.)

On a des suites exactes

$$0 \to \mathcal{G}_{o,s,D} \to \mathcal{G}_{o,s} \xrightarrow{D} \mathcal{G}_{o,s} \to 0 \qquad (s \in [1,+\infty])$$

et
$$0 \to \mathcal{G}_{o,(s),D} \to \mathcal{G}_{o,(s)} \xrightarrow{D} \mathcal{G}_{o,(s)} \to 0 \qquad (s \in]1,+\infty]) .$$

Des arguments analogues à ceux de MALGRANGE [23] permettent de montrer qu'il y a des isomorphismes canoniques

$\mathbb{C}[[x]]_s / \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{\sim} H^1(S;\mathcal{G}_{o,s})$ et

$\mathbb{C}[[x]]_{(s)} / \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{\sim} H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s)})$. Tenant compte de ces isomorphismes et du fait que $\dim S = 1$, les suites exactes longues d'homologie des suites exactes courtes ci-dessus s'écrivent :

$$0 \to H^1(S;\mathcal{G}_{o,s,D}) \to \mathbb{C}[[x]]_s / \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_s / \mathbb{C}\{x\} \to 0$$

et
$$0 \to H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s),D}) \to \mathbb{C}[[x]]_{(s)} / \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_{(s)} / \mathbb{C}\{x\} \to 0 .$$

On en déduit le théorème 7 (i) et (iii) . Plus précisément on a le

Théorème 11 .

(i) On a des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{C}[[x]]_s \,/\, \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{\sim} H^1(S;\mathcal{G}_{o,s})$$

$$\mathbb{C}[[x]]_{(s)} \,/\, \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{\sim} H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s)}) \ .$$

(ii) On a des suites exactes

$$0 \to H^1(S;\mathcal{G}_{o,s,D}) \to \mathbb{C}[[x]]_s \,/\, \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_s \,/\, \mathbb{C}\{x\} \to D$$

et $$0 \to H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s),D}) \to \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \,/\, \mathbb{C}\{x\} \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \,/\, \mathbb{C}\{x\} \to 0 \ .$$

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,s,D})$, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s),D})$, $\chi_s(D)$ et $\chi_{(s)}(D)$ sont finis (respectivement pour $s \in [1,+\infty]$ et $s \in]1,+\infty]$) et on a :

$$\chi_s(D) = \chi_1(D) + \dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,s,D}) \quad \text{et} \quad \chi_{(s)}(D) = \chi_1(D) + \dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s),D}) \ .$$

(iv) $$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,s,D}) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Var}\,(S;\, n_s(\theta)) \quad \text{et}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{o,(s),D}) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Var}\,(S; n_{(s)}(\theta)) \ .$$

Si $\theta \in S$, le germe $(\mathcal{G}_{o,s,D})_\theta$ (resp. $(\mathcal{G}_{o,(s),D})_\theta$) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\leq m$; on a noté $n_s(\theta)$ (resp. $n_{(s)}(\theta)$) sa dimension. La fonction $n_s(\theta)$ (resp. $n_{(s)}(\theta)$) a un nombre fini de discontinuités sur S ; $\mathrm{Var}(S;n_s(\theta))$ (resp. $\mathrm{Var}(S;n_{(s)}(\theta))$) est la somme des valeurs absolues de ses sauts : c'est un entier pair; (iv) s'établit en reprenant une remarque de DELIGNE [32] .

Il reste à calculer $\chi_s(D)$ et $\chi_{(s)}(D)$ quand $s = s_1,\ldots,s_\ell$ pour terminer la démonstration du théorème 7 . Il faut pour cela travailler encore un peu.

On associe à D des "polynomes" invariants P (cf. FABRY [9] , INCE [14] , EVANS [8] , LEVELT [19] , JURKAT [15] , ...) :

$P(x) = Q(x^{1/q})$ (Q étant un polynome de degré p ; $p,q \in \mathbb{N}$) .
On dira que P est de degré $^p/_q$. Les valeurs effectivement prises par p/q sont les valeurs exceptionnelles de k : $k_1,\ldots,k_\ell$.
On connaît depuis FABRY [9] un système fondamental de "solutions formelles" de $D\hat{f} = o$, de la forme.
$\hat{f} = e^{P(x)} x^{\alpha}(\hat{g}_o(x) + \ldots + \hat{g}_n(x)\,(\mathrm{Log}\ x)^n)$ (où les $\hat{g}_i(x)$ sont des séries formelles en $x^{1/q}$). Nous noterons $\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_m$ un tel système fondamental.
Nous poserons $d^\circ\,\hat{f}_i = d^\circ\,P(x)$ correspondant et pour $\theta \in S$, $(\hat{f}_i < 0)_\theta$ si la partie réelle du terme de plus haut "degré" de $P(x)$ est négative sur un petit secteur de "centre" θ (i.e. si $e^{P(x)}$ est asymptotique à zéro sur un tel secteur).

Un théorème fondamental de la théorie (POINCARÉ, FABRY, ..., cf. JURKAT [15]) dit qu'il existe des germes $f_1,\ldots,f_m \in \mathcal{G}_{o,D}$ asymptotiques (au sens évident) à $\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_m$.

Notons $I_s(\theta)$ (resp. $I_{(s)}(\theta)) \subset [1,\ldots,m]$ l'ensemble des $i \in [1,\ldots,m]$ tels que $(\hat{f}_i < 0)_\theta$ et $d^\circ\,\hat{f}_i \leq k$ (resp. $< k$) .

<u>THÉORÈME 12</u> .

L'ensemble $\{f_i \,/\, i \in I_s(\theta)\}$ (resp. $I_{(s)}(\theta)$) est une base de $(\mathcal{G}_{o,s,D})_\theta$ (resp. $(\mathcal{G}_{o,(s),D})_\theta$) . On a :

$$n_s(\theta) = \mathrm{Card}\ I_s(\theta) \quad \text{et} \quad n_{(s)}(\theta) = \mathrm{Card}\ I_{(s)}(\theta) .$$

<u>Corollaire 13 .</u>

(i) Les applications

$$\left|\begin{array}{l} [1,+\infty] \to \{\text{faisceaux de } \mathbb{C}\text{-espaces vectoriels sur } S\} \\ \qquad s \mapsto \mathcal{G}_{o,s,D} \end{array}\right.$$

et
$$\begin{cases}]1,+\infty] \to \{\text{faisceaux de } \mathbb{C}\text{-espaces vectoriels sur } S\} \\ s \mapsto \mathcal{G}_{0,(s),D} \end{cases}$$

sont croissantes (les faisceaux étant ordonnés par inclusion) et constantes respectivement sur $[0,s_\ell[, [s_\ell, s_{\ell-1}[, \ldots, [s_1,+\infty]$ et $]0,s_\ell],]s_\ell, s_{\ell-1}], \ldots,]s_1,+\infty]$.

ii) $\mathcal{G}_{0,s,D} = \mathcal{G}_{0,(s),D}$ pour $s \neq s_1, \ldots, s_\ell$; les inclusions $\mathcal{G}_{0,(s),D} \subset \mathcal{G}_{0,s,D}$ pour $s = s_1, \ldots, s_\ell$ sont strictes.

iii) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,s,D})$ et $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,(s),D})$ sont finies et les applications

$$\begin{cases} [1,+\infty] \to \mathbb{N} \\ s \mapsto \dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,s,D}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}]1,+\infty] \to \mathbb{N} \\ s \mapsto \dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,(s),D}) \end{cases}$$

sont croissantes et constantes respectivement sur

$$[0,s_\ell[, \ldots, [s_1,+\infty] \text{ et }]0,s_\ell], \ldots,]s_1,+\infty].$$

iv) Pour $s = s_1, \ldots, s_\ell$ on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,s,D}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S;\mathcal{G}_{0,(s),D}) = i_2(s) - i_1(s) + v(a_{i_1(s)}) - v(a_{i_2(s)}).$$

Le corollaire 13 (i),(ii),(iii) achève la démonstration du théorème 7(ii). L'assertion (iv) permet de retrouver les valeurs "génériques" de χ_s obtenues par perturbation (proposition 8) ; cette assertion s'obtient de la façon suivante : on se ramène par revêtement ramifié ($x = t^q$) au cas où les valeurs exceptionnelles $k_1, \ldots, k_\ell$ sont entières; on remarque ensuite que la contribution de e^{1/x^k} (k entier) à la variation est $2k$.

THÉORÈME 14 .

Supposons D à coefficients rationnels .

(i) (a) L'opérateur $\mathbb{C}[[x]]_s \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_s$ est d'indice fini $\mathcal{X}_s(D)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

(b) L'opérateur $\mathbb{C}[[x]]_{(s)} \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ est d'indice fini $\mathcal{X}_{(s)}(D)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

(ii) On pose $\Sigma(D) = \{s_1,\dots,s_\ell\} \cup \{s'_1,\dots,s'_{\ell'}\} \cup$ éventuellement $\{1\}$ si $P(D)$ a un côté vertical.

(a) Si $s \in \mathbb{R}$ et $\notin \Sigma$ on a

$$\mathcal{X}_s(D) = \mathcal{X}_{(s)}(D) = i(s) - v(a_{i(s)}) \ .$$

(b) Si $s = s_1 , \dots, s_\ell$ on a

$$\mathcal{X}_s(D) = i_1(s) - v(a_{i_1(s)}) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{(s)}(D) = i_2(s) - v(a_{i_2(s)}) \ .$$

(c) Si $s = s'_1 ,\dots, s'_{\ell'}$ on a

$$\mathcal{X}_s(D) = i_2(s) - v(a_{i_2(s)}) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{(s)}(D) = i_1(s) - v(a_{i_1(s)}) \ .$$

(d) Si $s = 1$ (et $1 \in \Sigma$) on a

$$\mathcal{X}_1(D) = m - v(a_m) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{(1)}(D) = m - d(a_m) \ .$$

Ce théorème s'établit par une étude "à l'infini" de D et un argument de dualité que je ne détaillerai pas ici. (On fait opérer D^* sur des espaces convenables d'ultradistributions à support dans $\{0\}$; cf. MALGRANGE [23]) .

Pour terminer citons quelques conséquences des résultats précédents. (Ces conséquences impliquent facilement les théorèmes 1 et 2 (*)) .

Posons : $a_s = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} (\mathbb{C}[[x]]_s \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_s)$,

$b_s = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Coker} (\mathbb{C}[[x]]_s \xrightarrow{D} \mathbb{C}[[x]]_s)$. On définit de façon analogue $a_{(s)}$ et $b_{(s)}$.

Corollaire 15 .

(i) Les fonctions $s \mapsto \chi_s$ et $s \mapsto a_s$ (resp. $\chi_{(s)}$ et $a_{(s)}$) sont des fonctions monotones croissantes sur $[1,+\infty]$ (resp. $]1,+\infty]$) , continues à gauche (resp. à droite), localement constantes sur $[1,+\infty]-\{s_1,\dots,s_\ell\}$ (resp. $]1,+\infty] - \{s_1 ,\dots,s_\ell\}$) .

La fonction $s \mapsto b_s$ (resp. $s \mapsto b_{(s)}$) est monotone décroissante sur $[1, +\infty]$ (resp. $]1, +\infty]$) continue à gauche (resp. à droite), localement constante sur $[1, +\infty] - \{s_1 ,\dots, s_\ell\}$ (resp. $]1,+\infty] - \{s_1,\dots,s_\ell\}$). Les fonctions $s \mapsto \chi_s$ et $s \mapsto \chi_{(s)}$ admettent des discontinuités en $s_1 ,\dots, s_\ell$.

(ii) Soient $\sigma_1 \leq \sigma_2$.

(a) $\sigma_1 , \sigma_2 \in [1, +\infty]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_{\sigma_1} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_{\sigma_1} & \to 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_{\sigma_2} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_{\sigma_2} & \to 0 \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

(*) On peut aussi obtenir des renseignements sur la croissance des séries formelles $\hat{g}_i$ apparaissant dans les solutions de FABRY. Dans le cas des équations algébriques de telles estimations sont données par EVANS [8] : il se reporte à un argument d'équations aux différences de MILNE-THOMSON [24] (utilisant une transformation de Mellin). Son argument n'est correct que dans un cas "assez générique" .

(β) Il existe $i \in [0,\dots,\ell]$ tel que $\sigma_1, \sigma_2 \in [s_{i+1}, s_i[$ ($s_o = +\infty$ et $s_{\ell+1} = 1$).

(γ) $\chi_{\sigma_1}(D) = \chi_{\sigma_2}(D)$.

(b) $\sigma_1, \sigma_2 \in]1, +\infty]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_{(\sigma_1)} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_{(\sigma_1)} & \to 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_{(\sigma_2)} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_{(\sigma_2)} & \to 0 \end{array}$$
est un quasi-isomorphisme.

(β) Il existe $i \in [0,\ell]$ tel que $\sigma_1, \sigma_2 \in]s_{i+1}, s_i]$ ($s_o = +\infty$ et $s_{\ell+1} = 1$).

(γ) $\chi_{(\sigma_1)}(D) = \chi_{(\sigma_2)}(D)$.

(iii) Si $s \in]1, +\infty]$, $s \neq s_1, \dots, s_\ell$, le morphisme
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_{(s)} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_{(s)} & \to 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_s & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_s & \to 0 \end{array}$$
est un quasi-isomorphisme.

(iv) Soit $s \in]1, +\infty]$.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{C}\{x\} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}\{x\} & \to 0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 \to & \mathbb{C}[[x]]_s & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[[x]]_s & \to 0 \end{array}$$
est un quasi-isomorphisme.

(β) $\chi_s(D) = \chi_1(D)$

(γ) L'invariant de Gérard-Levelt $\rho_k(D)$ (avec $k = 1/s-1$) est nul.

(δ) $s_\ell \leq s$.

On dira alors que D est s-corégulier.

(b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}\{x\} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathbb{C}\{x\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \arrow[r, "D"] & \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
est un quasi-isomorphisme.

(β) $\chi_{(s)}(D) = \chi_1(D)$.

(γ) L'invariant de Gérard-Levelt $\rho_k(D)$ est nul pour k variant sur un voisinage de $1/s-1$.

(δ) $s_\ell < s$.

On dira alors que D est (s)-corégulier.

(v) Soit $s \in]1, +\infty]$.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[[x]]_s \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathbb{C}[[x]]_s \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}[[x]] \arrow[r, "D"] & \mathbb{C}[[x]] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
est un quasi-isomorphisme.

(β) $\chi_s(D) = \chi_\infty(D)$.

(γ) $\rho_k(D) \leq \rho_{k_1}(D)$ $(k = 1/s-1)$.

(δ) $s \geq s_1$.

On dira alors que D est s-régulier.

(b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Le morphisme
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[[x]]_{(s)} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathbb{C}[[x]]_s \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}[[x]] \arrow[r, "D"] & \mathbb{C}[[x]] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
est

un quasi-isomorphisme.

$$(\beta)\quad \mathcal{X}_{\{s\}}(D) = \mathcal{X}_{\infty}(D)$$

$$(\gamma)\quad \rho_k(D) < \rho_{k_1}(D) \qquad (k = 1/s-1)\ .$$

$$(\delta)\quad s > s_1\ .$$

EXTENSION D'UN RÉSULTAT D'E. BOREL.

Nous allons voir que l'on peut étendre dans l'esprit des considérations ci-dessus la méthode de sommation exponentielle d'E. BOREL [2] (page 89). (Le cas traité par E. BOREL correspond avec nos notations à $s = 2$; nous allons traiter le cas $1 < s$; **s entier .**)

Le "noyau" utilisé par BOREL est fabriqué à partir de

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} + \dots .$$

Nous allons tout d'abord généraliser ce noyau. On remarque que e^{-t} est la transformée de Mellin inverse de $\Gamma(z)$:

$$e^{-t} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}\, z = c > 0} \Gamma(z)\, t^{-z}\, dz$$; par ailleurs e^{-t} vérifie l'équation différentielle $\left(\frac{d}{dt} + 1\right)(e^{-t}) = 0$. Posons

$$\Phi_s(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}\, z = c > 0} \Gamma(z)^{s-1}\, t^{-z}\, dz \qquad (1 < s)\ ^{(*)}$$; $\Phi_s(t)$ est une fonction entière de t ; on a $\Phi_2(t) = e^{-t}$.

(On vérifie que **la fonction suivante convient également :**

$$\Phi_s(t) = 1 - \frac{t}{(1!)^{s-1}} + \frac{t^2}{(2!)^{s-1}} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^{s-1}} + \dots \qquad (**)\ .)$$

On constate que $\Phi_s(t)$ a une décroissance exponentielle d'ordre $k = 1/s-1$, ainsi que toutes ses dérivées, sur tout secteur assez petit de "centre" la demi-droite $t \in \mathbb{R}^+$, quand $t \to \infty$.

(*) Cette expression de Φ_s sous forme de transformée de Mellin inverse nous a été suggérée par G. SCHIFFMANN.

(**) Cf. SAKS-ZYGMUNG [27] (exercice 1 , page 247).

Par ailleurs si s est entier, $\Phi_s(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$(t^{-1}(t\frac{d}{dt})^{s-1} + 1)\,(\Phi_s(t)) = 0 \,. \qquad (*)$$

Reprenons la transformation introduite au début et à

$$\hat{f}\,(x) = \Sigma\, a_n\, x^n \in \mathbb{C}[[x]] \text{ associons}$$

$$F_s(x) = \varphi_s(\hat{f})(x) = \Sigma \frac{a_n}{(n!)^{s-1}}\, x^n \,.$$

Si $\hat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]_s$, $F_s(x) \in \mathbb{C}\{x\}$. Par analogie avec l'étude d'E. BOREL nous allons imposer à $F_s(x)$ une condition plus forte :

<u>Définition</u> :

Nous dirons que $F_s \in \mathbb{C}\{x\}$ est d'espèce (A'_s) si elle se prolonge analytiquement à un secteur de "centre" la demi-droite $t \in \mathbb{R}^+$ et si, pour tout p , $F_s^{(p)}$ a au plus une croissance exponentielle d'ordre k sur un tel secteur assez petit (pouvant dépendre de p).

<u>Remarque</u> : On comparera avec la condition τ de HARDY [13] (4.12 page 79) (avec $\tau = \Phi_s$, i.e. $p_n = (n!)^{-s+1}$) .

On constate facilement que les fonctions de type (A'_s) forment une $\mathbb{C}$-algèbre.

On vérifie facilement que si F_s est d'espèce (A'_s) l'intégrale $1/z \int_0^{+\infty} F_s(u)\, \Phi_s(u/z)\, du$ existe et définit une fonction analytique f dans un secteur de sommet 0 , asymptotique à f dans ce secteur.

En reprenant la méthode d'E. BOREL on prouve le

(*) Pour $s = 3$ on a : $\Phi_3(t) = \tau(-t)$, où τ est la fonction de Bessel normalisée.

THÉORÈME 16 .

Si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_s$ est solution formelle d'une équation différentielle algébrique (linéaire ou non) , si $\varphi_s(\hat{f}) = F_s$ est d'espèce (A'_s) , f vérifie la même équation différentielle.

On obtient ainsi une assertion d'unicité (sous certaines conditions) de $f \sim \hat{f}$ (dans un certain secteur) si f vérifie une équation différentielle algébrique.

PROBLÈMES A PLUSIEURS VARIABLES.

On rapprochera avec profit ce qui précède de RAMIS [25] . La conception de la régularité dégagée dans cet article peut vraisemblablement s'interpoler : on interpole entre l'anneau des opérateurs différentiels d'ordre fini $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{\infty}$ par deux familles d'anneaux $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_{(s)}$ (cf. par exemple BOUTET DE MONVEL-KREE [3]) ; il y a lieu de définir des "complétés Gevrey" le long d'un sous-ensemble analytique complexe Y du faisceau structural $\mathcal{O}_X$: $\mathcal{O}_{(X\hat{|}Y)s}$ et $\mathcal{O}_{(X\hat{|}Y)(s)}$ (ce qui est non trivial et doit nécessiter des arguments "à la Hörmander" (*)), une cohomologie s ou (s)-modérée à support dans Y . On peut alors écrire diverses conjectures vraisemblablement assez délicates à établir. On peut en tout cas penser qu'à tout $\mathcal{D}$-module cohérent holomorne M on peut associer un nombre fini de valeurs exceptionnelles rationnelles de s généralisant les $s_1 , \dots , s_\ell$. Si $M = \mathcal{D}/J$ il n'est peut-être pas impossible de lire ces valeurs sur un polyèdre de Newton convenable.

Signalons pour finir dans le cas d'un opérateur le travail de TREPREAU [30] .

(*) Il y a vraisemblablement lieu de généraliser un argument de DUFRESNOY [6] .

ÉCLATEMENTS .

L'interpolation par les espaces $\mathbb{C}[[x]]_s$ (ou $\mathbb{C}[[x]]_{(s)}$) joue le rôle d'un "éclatement" dans le plan $(\frac{d}{dx}, x)$:

$$\text{" } x = t\frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad s = \frac{t}{t-1} \text{ " .}$$

Une étude plus approfondie devrait faire intervenir des "éclatements d'ordre supérieur" (i.e. des filtrations convenables par des espaces fonctionnels).

La résolution de D dans $\mathbb{C}[[x]]_{s_i}$, pour s_i exceptionnel, permet de séparer un paquet de "branches" . Une résolution dans des espaces fonctionnels adéquats devrait permettre de séparer ces "branches" entre elles et d'obtenir des renseignements plus précis sur le comportement asymptotique des solutions formelles (compte tenu du fait que l'on a une excellente connaissance du comportement des solutions asymptotiquement nulles dans des secteurs).(*)

(*) Je remercie J.L. VERDIER et N. A'CAMPO de m'avoir suggéré cette remarque.

A PROPOS DES E-FONCTIONS

Rappelons d'abord les définitions données par SIEGEL [28],[29] , puis LANG [18] des E fonctions :

$f(x) = \Sigma\, c_n\, x^n/n!$. On suppose que tous les c_n appartiennent à un même corps algébrique de degré fini sur Q ; on note $|\overline{c_n}|$ la borne supérieure des conjugués de c_n .

Définition (SIEGEL [28] II.1, page 33 ou [29] p.209-241) .

On dit que $f(x)$ est une E-fonction au sens de SIEGEL si :

(i) Pour tout $\epsilon > 0$, $|\overline{c_n}| = O(n^{n\epsilon})$, quand $n \to +\infty$.

(ii) Il existe une suite d'entiers positifs $q_o ,\ldots,q_n,\ldots$ tels que q_n soit un dénominateur pour c_k $(k = o,\ldots,n)$ et $q_n = O(n^{n\epsilon})$, quand $n \to +\infty$.

Définition (LANG [18] VII.1, page 76) .

On dit que $f(x)$ est une E-fonction au sens de LANG si :

(i) $|\overline{c_n}| < A^n$ (pour $A > 0$ convenable).

(ii) Comme précédemment, mais avec $q_n < A^n$.

PROPOSITION 17 .

Soit $f(x) = \Sigma\, c_n\, x^n/n!$ vérifiant $Df = 0$ (où D est à coefficients polynomiaux). Alors si pour tout $\epsilon > 0$ on a $c_n = O(n^{n\epsilon})$, il existe $A > 0$ tel que $c_n < A^n$.

En effet si $c_n = O(n^{n\epsilon})$, il en résulte que

$$c_n < K(n!)^{\epsilon} A^n \quad \text{et} \quad c_n/n! < K(n!)^{\epsilon-1} A^n \quad (\text{pour } K > 0 \text{ , } A > 0$$

convenables). On a donc $f \in C[[x]]_{\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$.

On sait qu'il existe un réel unique s tel que $f \in \mathbb{C}[[x]]_s$ et $f \notin \mathbb{C}[[x]]_{(s)}$ $(s \in \mathbb{Q})$. On a nécessairement $s \leq 0$ donc $f \in \mathbb{C}[[x]]_0$, i.e. $c_n < A^n$ pour $A > 0$ convenable.

On est ainsi conduit à la

Conjecture 18.

Toute E-fonction au sens de SIEGEL vérifiant une équation différentielle linéaire algébrique $Df = 0$ vérifie la condition (i) de LANG.

Ceci va dans le sens de la remarque de LANG ([18] note, page 76). Il ne semble pas malheureusement que l'on puisse raisonnablement conjecturer que la condition (ii) de LANG est automatiquement vérifiée dans les mêmes conditions (*).

Il me reste à remercier V. AVANISSIAN, R. GERARD, B. MALGRANGE, G. SCHIFFMANN des entretiens que j'ai eu avec eux sur les questions évoquées ci-dessus.

Outre à Dijon, le travail que nous venons d'esquisser a été partiellement exposé (entre janvier et septembre 1977) à Strasbourg (séminaire GÉRARD-RAMIS), Paris (Séminaire NORGUET), Bordeaux (Colloquium), Nancy (journées de plusieurs variables complexes), Santiago de Compostelle (Colloque International de Géométrie différentielle).

(*) C'est en tout cas la conclusion tirée par le non spécialiste que je suis d'une correspondance avec D. BERTRAND et de conversations avec M. MIGNOTTE que je remercie ici chaleureusement.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] ARNOLD A. : Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. Editions MIR (Moscou 1976).

[2] BOREL E. : Mémoire sur les Séries Divergentes. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3ème Série, T 16, 1899 (9-136).

[3] BOUTET DE MONVEL L. et KREE P. : Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Instr. Fourier 17 (1967) 295-323.

[4] BRIOT et BOUQUET : Propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Impériale Polytechnique 1856.

[5] DELIGNE P. : Equations Différentielles à points singuliers réguliers . Lecture Notes 163 (Springer-Verlag 1970).

[6] DUFRESNOY : Sur l'opérateur d" et les fonctions différentiables au sens de Whitney. Preprint Université de Grenoble (1978).

[7] EULER L. : De seriebus divergentibus, commentationes analyticae, ad Theoriam Serierum Infinitarum Pertinentes, volumen primum (C. Boehm et G. Faber ed. 1925; p. 601-602).

[8] EVANS R.L. : Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations. Proceedings A.M.S., 5, 1954.

[9] FABRY E. : Thèse (Paris 1885).

[10] GÉRARD R. et LEVELT A.H.M. : Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires. Ann. Inst. Fourier, T XXIII, Fasc. I (1973).

[11] GUELFAND et CHILOV : Les Distributions T. 2 (Dunod - Paris 1964).

[12] GUELFAND et CHILOV : Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées - Journal de Math. Pures et Appl., 35 (1956), p. 383-412.

[13] HARDY G.H.: Divergent Series (Clarendon Press. Oxford 1949).

[14] INCE E.L. : Ordinary Differential Equations - Dover (1956) ; réimpression de l'édition de 1926.

[15] JURKAT W.B.: Meromorphe Differentialgleichungen, Lecture Notes 637 (Springer-Verlag).

[16] KOMATSU H.: Ultradistributions and Hyperfunctions - Proceedings of a Conference at Kataka 1971. Lecture Notes 287 (Springer-Verlag).

[17] KOMATSU H. : On the regularity of hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real coefficients - Journal of the Faculty of Science University of Tokyo - Section 1 A. 20 (1973).

[18] LANG S.: Introduction to Transcendental Numbers . Addison Werley Publ. Comp. 1966.

[19] LEVELT A.H.M. : Formal Theory of Irregular Singular Points. Inédit (1972).

[20] LEVELT A.H.M. : Jordan Decomposition for a class of Singular Differential Operators. Ark. fur Math.

[21] MALGRANGE B.: Remarques sur les points singuliers des équations différentielles - C.R. Acad. Sc., Paris, 273-23 (1971) , 1136-1137.

[22] MALGRANGE B.: Sur les points singuliers des équations différentielles - L'Enseignement Mathématique, t. XX, 1-2 (1974) , 147-176.

[23] MALGRANGE B.: Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers. Séminaire Goulaouic - Schwartz 76-77 ou volume des lectures Notes dirigé par GERARD R. et RAMIS J.P. (à paraître).

[24] MILNE-THOMSON L.M.: The Calculus of finite differences . Macmillan (London, 1933).

[25] RAMIS J.P. : Variations sur le thème "GAGA" . Séminaire Lelong 1976-77.

[26] RAMIS J.P. : Solutions Gevrey des équations différentielles à points singuliers irréguliers (à paraître).

[27] SAKS S. - ZYGMUND A. : Fonctions Analytiques - Masson (Paris 1970).

[28] SIEGEL C.L. : Transcendental Numbers - Annals of Math. Studies , n° 16 (Princeton 1949).

[29] SIEGEL C.L. : Oeuvres complètes.

[30] TREPREAU J.M. : Problème de Cauchy Hyperbolique dans des classes de fonctions ultradifférentiables et d'ultradistributions. Thèse de 3ème cycle (Orsay , avril 1978).

[31] WASOW W. : Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations (Interscience Publishers 1965).

[32] DELIGNE P. : Lettre à B. MALGRANGE (1977).

[33] VALIRON G. : Lectures on the General Theory of Integral Functions. Chelsea Publishing Company (1949).

(*) Les résultats concernant les solutions entières de $Df = 0$ dans le Théorème 2 , page 4, sont établis par VALIRON [33] (IV.II.5. pages 106-109).

Remarque : J.M. KANTOR m'a sigalé (novembre 1978) l'article :

[34] MAHLER K. : On formal power series as intrgrals of algebraic differential equations . Lincei, 36, vol. I, 1971, p. 76-89 .

L'auteur montre que toute solution formelle d'une équation algèbrique (éventuellement non linéaire) est de type Gevrey . Ce résultat est assez étonnant compte tenu de la croissance "sauvage" des solutions d'une équation non linéaire algèbrique (cf. BOREL [2]).

Jean-Pierre RAMIS
Université Louis Pasteur
U.E.R. de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX