Astérisque

B. Helffer
Sylvain Gallot
Albert Polombo
Lionel Bérard Bergery
Geneviève Averous
Annie Deschamps
Eugenio Calabi
J.-P. Bourguignon
Shing Tung Yau
J. P. Ezin
J.-P. Bourguignon (réd.)

Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi

Astérisque, tome 58 (1978)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__58__1_0>

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE CLASSE DE CHERN ET COURBURE DE RICCI :
PREUVE DE LA CONJECTURE DE CALABI

Séminaire Palaiseau Printemps 1978

AVANT-PROPOS

Ces notes rendent compte d'une façon détaillée d'un séminaire sur la preuve de la conjecture de Calabi qui s'est tenu à Palaiseau au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 169) de Mars à Juin 1978.

En 1954, dans [3] E. Calabi a écrit :

"Let M^n be a closed, n-dimensional complex manifold. We assume that M^n admits at least one Kähler metric $g_{\alpha\bar\beta}$; its associated closed exterior form $\omega = \sqrt{-1}\, g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ determines a real cohomology class, called the principal class of the metric. Consider the space Ω of all infinitely differentiable Kähler metrics in M^n with the same principal class ; the topology of Ω is defined by the L^2-topology of the tensorial components of metrics in Ω in compact subregions of coordinate domains. If $R_{\alpha\bar\beta}$ is the Ricci tensor of any metric in Ω , then the Ricci form $\sqrt{-1}\, R_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ is closed and its cohomology class is $2\pi c_1$ (the first Chern class of M).

THEOREM 1.- Given in M^n any real, closed infinitely differentiable exterior form Σ of type (1,1) and cohomologous to $2c_1$, there exists exactly one Kähler metric in Ω whose Ricci form equals Σ ."

A cela fait suite un plan de démonstration. Un an plus tard, E. Calabi a ajouté dans [4] :

"While the proof of this result is not complete, we feel justified in assuming the truth of the statement for several concurrent intuitive reasons. This...gap...makes the result...depend on the conjecture that <u>a compact Kähler manifold admits a Kähler metric with any assigned, positive differentiable volume element</u>."

La traduction analytique de la conjecture est une équation de Monge-Ampère complexe, équation elliptique non linéaire. Il me semble important de souligner que l'équation porte sur une fonction, à savoir le potentiel par rapport à la métrique kählérienne donnée de la métrique kählérienne cherchée. Par contraste l'étude plus générale, dans le cadre de la géométrie riemannienne, de l'application qui, à un deux-tenseur métrique, associe son deux-tenseur de Ricci est beaucoup plus difficile car il s'agit alors de résoudre une équation portant sur des champs de deux-tenseurs.

La solution de cette conjecture, obtenue en 1976 par S. T. Yau, pose à nouveau le problème de la place de la géométrie kählérienne en géométrie. Pour certains ce ne serait pas une théorie à part entière, mais seulement un hybride de la théorie des variétés complexes et de la géométrie riemannienne. Pour d'autres, les méthodes transcendantes telles qu'elles se sont développées dans le cadre de la géométrie kählérienne depuis Hodge restent des méthodes privilégiées pour attaquer la géométrie analytique. Il faut bien dire que la preuve de la conjecture de Calabi apporte des arguments aux seconds, puisque les contraintes globales sur la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne se limitent à la condition cohomologique d'être un multiple de la première classe de Chern ; c'est un grand pas dans la compréhension de la géométrie différentielle des variétés kählériennes compactes.

Cette conjecture a intéressé de nombreux analystes et géomètres différentiels. Pourtant, à part les résultats initialement obtenus par E. Calabi dans [4] (résolution au voisinage d'une forme de Ricci d'une métrique kählérienne et unicité à classe de Kähler fixée) repris par T. Ochiai en 1974, il a fallu attendre 1967 pour que T. Aubin établisse dans [1] un cas particulier de la conjecture en supposant de plus que la courbure bisectionnelle holomorphe est positive ou nulle. Ce résultat n'était pas vraiment déterminant pour la conjecture (on pense en effet, et on sait en petites dimensions, que l'espace projectif complexe est la seule variété kählérienne à courbure bisectionnelle holomorphe positive), mais certaines estimées établies dans [1] ont servi par la suite à T. Aubin pour la preuve qu'il a donnée au printemps 1976 d'une conjecture voisine relative à l'existence de métriques de Kähler-Einstein (voir [2] et exposé n° V pour des détails). C'est dans l'automne 1976 que S. T. Yau a prouvé la conjecture de Calabi : il a proposé deux démonstrations, dont la plus directe ne s'applique qu'à la dimension complexe deux, utilisant des idées tout à fait nouvelles pour l'estimée uniforme de la fonction solution (voir [7]). Il prouve aussi la conjecture voisine par des estimées analogues à celles de T. Aubin, ainsi que le cas beaucoup plus délicat où la métrique peut être modérément dégénérée ou singulière. La preuve donnée dans l'exposé n° VII, qui généralise aux dimensions supérieures l'argument le plus direct de S. T. Yau déjà simplifié par J. Kazdan, a été bâtie à partir d'un lemme énoncé par T. Aubin en Novembre 1977 (le lecteur curieux consultera l'article de T. Aubin "Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes" Bull. Sci. Math. 102 (1978) 63-95 en même temps que l'historique détaillé de J. Kazdan dans [5]).

Les exposés se sont efforcés d'être accessibles à un auditoire comprenant à la fois des analystes et des géomètres : ainsi sont repris les outils de base de l'analyse non linéaire que sont les estimées de Schauder aussi bien que les fondements de la géométrie kählérienne. Par contre nous n'avons pas eu le temps (trahis que nous fûmes par un calendrier à trous) de traiter des applications de la conjecture : il semble d'ailleurs que celles-ci n'aient été encore qu'entrevues.

Dans ces notes, sauf en ce qui concerne l'estimée uniforme reprise de la présentation orale de l'exposé 507 du séminaire Bourbaki, nous suivons la preuve donnée par S. T. Yau dans [7] en nous efforçant seulement de la rendre plus intrinsèque . Si l'estimée uniforme apparaît maintenant satisfaisante (bien que de nature non géométrique), il n'en est pas de même des estimées sur les dérivées secondes et troisièmes, pour lesquelles des démonstrations plus géométriques sont encore à trouver. Les estimées du deuxième ordre sont en fait des estimées uniformes sur la vraie inconnue, à savoir la forme de Kähler. De ce point de vue la méthode de continuité qu'utilise S. T. Yau ne donne aucune indication sur la façon de trouver ces estimées, pas plus d'ailleurs que la méthode directe du calcul des variations utilisée par T. Aubin car la fonctionnelle qu'il utilise ne contient pas d'information géométrique. Pour des extensions à des variétés non compactes et aussi pour avoir une construction de la solution, il serait sûrement utile d'avoir une "meilleure" preuve. Nous n'y sommes pas parvenus dans le cadre de ce séminaire.

Les exposés sont présentés dans l'ordre chronologique ; les quatre premiers sont consacrés à des rappels soit d'analyse (exposés n° I et II), soit de géométrie kählérienne (exposés n° III et IV). Le lecteur pressé de contempler la conjecture doit donc se reporter d'emblée aux exposés n° V et VI, où la mise en équation et les résultats sont présentés. Les estimées nécessaires à la preuve de l'existence sont établies dans les exposés n° VII, VIII et XI. Les autres exposés contiennent des compléments soit sur la conjecture voisine (exposé n° X), soit sur des développements récents (exposés n° IX et XII).

La bibliographie essentielle est la suivante :

[1] T. AUBIN, *Métriques riemanniennes et courbure, J. Diff. Geom., 4 (1970), 383-424.*

[2] T. AUBIN, *Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 119-121.*

[3] E. CALABI, *The space of Kähler metrics, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam, Vol. 2 (1954), 206-207.*

[4] E. CALABI, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of Lefschetz, Princeton Univ. Press (1955), 78-89.*

[5] J. KAZDAN, *A remark on the preceding paper of Yau, Comm. Pure and Appl. Math. XXXI (1978), 413-414.*

[6] S. T. YAU, *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. U. S. A. 74 (1977), 1798-1799.*

[7] S. T. YAU, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure and Appl. Math. XXXI (1978), 339-411.*

Pour une vue d'ensemble du sujet, on peut aussi consulter l'exposé n° 507 du Séminaire Bourbaki. Notons enfin que notre bibliographie ne comprend pas de livres d'introduction aux variétés kählériennes ou à l'analyse pour lesquels nous renvoyons aux bibliographies particulières des exposés n° I, II et III.

Les exposés qui suivent ne contenant pas d'applications de la conjecture , je ne peux pas clore cette introduction sans en mentionner deux parmi les plus frappantes, espérant ainsi convaincre le lecteur de l'intérêt du sujet de ce séminaire :

-"toute variété kählérienne compacte à première et deuxième classes de Chern nulles est revêtue par un tore" (même pour les variétés algébriques cette propriété très spéciale du fibré tangent n'était pas soupçonnée);

-"pour $m \geqslant 2$, les hypersurfaces de degré $m+2$ dans $\mathbb{C}P^{m+1}$, en particulier les surfaces complexes K3, admettent des métriques d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci nulle ou ce qui est équivalent à groupe d'holonomie $SU(m)$".

Pour toutes les remarques, questions et autres suggestions, nous remercions les auditeurs du séminaire. Nous savons gré aux professeurs E. Calabi et S. T. Yau d'avoir bien voulu nous faire part des derniers développements du sujet. Enfin pour le soin et la rapidité de la frappe, nous remercions le secrétariat du Centre de Mathématiques et en particulier Michèle Lavallette. Pour terminer nous remercions la revue "Astérisque" d'avoir assuré une diffusion large et rapide à ces notes de séminaire.

Pour les rédacteurs,

J. P. BOURGUIGNON

Palaiseau, le 30 Octobre 1978.

Exposé n° I

RAPPELS SUR LES ESPACES FONCTIONNELS UTILES AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par B. HELFFER
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Palaiseau

RÉFÉRENCES

[1] R. A. ADAMS, Sobolev spaces, Acad. Press (1975).

[2] T. AUBIN, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom., 11 (1976), 573-598.

[3] T. AUBIN, Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, Bulletin des Sciences mathématiques, 100 (1976), 149-173.

[4] J. L. LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Montréal (1965).

[5] J. L. LIONS, J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publications de l'I. H. E. S., n°19 (1969).

On se propose de passer en revue quelques propriétés des espaces de Sobolev et de Hölder. Dans tout l'exposé, sauf mention expresse, Ω désigne un ouvert <u>borné</u>, <u>de bord C^∞</u> dans $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$.

§ 1. <u>ESPACES DE HÖLDER</u>

Tout d'abord quelques définitions. On désigne :

- <u>par</u> $C^o(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues dans Ω ;

- <u>par</u> $C^m(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in C^o(\Omega),\ D^\alpha\varphi \in C^o(\Omega),\ \text{pour } |\alpha| \leq m\}$

où

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_n}$$

et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad ;$$

- <u>par</u> $C^m(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions φ dans $C^m(\Omega)$ telles que $D^\alpha\varphi$ est bornée et uniformément continue sur $\overline{\Omega}$ pour $0 \leq |\alpha| \leq m$

L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \ \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi(x)| \ ;$$

- pour $0 < \lambda < 1$, <u>par</u> $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $C^m(\overline{\Omega})$ constitué des fonctions φ telles que :

$D^\alpha\varphi$ satisfait dans Ω <u>une condition de Hölder d'exposant</u> λ, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que, pour tous x, y dans Ω :

$$|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| \leq C\ |x-y|^\lambda \ .$$

On munit $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \ \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda} \ .$$

Proposition 1.1 : Soit m un entier positif et soit $0<\nu<\lambda\leq 1$. On a les inclusions suivantes :

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m}(\overline{\Omega}) .$$

Toutes ces injections sont compactes si $\lambda<1$.

La démonstration résulte du théorème d'Ascoli - Arzela.

Remarque 1.2 : On a le lemme classique suivant qui relie les résultats d'inclusions compactes à des inégalités.

Lemme : Soient X, Y, Z des espaces de Banach tels que $X\subset Y\subset Z$. On suppose que l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ est une injection compacte et que l'inclusion $Y \hookrightarrow Z$ est une injection continue. Alors

$$\forall \varepsilon,\ \exists C_\varepsilon > 0,\ \forall x\in X,\quad \|x\|_Y \leq \varepsilon\ \|x\|_X + C(\varepsilon)\ \|x\|_Z \quad .$$

Ce lemme permet la comparaison des différentes normes de Hölder. Dans la pratique, il ne permet pas de donner la forme de $C(\varepsilon)$, et des calculs directs donneront de meilleures inégalités (cf. proposition 3.1). Signalons enfin que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans les espaces de Hölder.

§ 2. ESPACES $L^p(\Omega)$

On définit classiquement pour $1\leq p\leq\infty$ l'espace $L^p(\Omega)$, muni de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \qquad \text{pour } p<+\infty$$

et

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| .$$

Rappelons quelques propriétés classiques de ces espaces.

Proposition 2.1 (Inégalités de Hölder)

Si pour un p, $1\leq p<\infty$, u est dans $L^p(\Omega)$ et v dans $L^{p'}(\Omega)$ avec

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, <u>alors</u> $u.v$ <u>est dans</u> $L^1(\Omega)$ <u>et</u>

$$\int_\Omega |u(x).v(x)|\, dx \le \|u\|_p \, \|v\|_{p'} \, .$$

<u>Si</u> u <u>est dans</u> $L^q(\Omega)$, <u>alors</u> $u \in L^p(\Omega)$, <u>pour</u> $1 \le p \le q \le \infty$ <u>et</u>

$$\|u\|_p \le (\mathrm{Vol}\,\Omega)^{(1/p)-(1/q)} \, \|u\|_q \, .$$

<u>Si</u> u <u>est dans</u> $L^\infty(\Omega)$, <u>alors</u> $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$.

<u>Si</u> u <u>est dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>pour tout</u> p <u>tel que</u> $1 \le p < \infty$ <u>et s'il existe une constante</u> K <u>telle que</u>, <u>pour tout</u> p, $\|u\|_p \le K$, <u>alors</u> u <u>est dans</u> $L^\infty(\Omega)$ <u>et</u> $\|u\|_\infty \le K$.

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach (de Hilbert si $p=2$). L'espace $C_o^\infty(\Omega)$ (fonctions C^∞ à support compact dans Ω) est dense dans $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$. Le dual de $L^p(\Omega)$ est $L^{p'}(\Omega)$ pour $1 \le p < \infty$, ainsi L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

§ 3 ESPACES $W^{m,p}(\Omega)$

On commence par leur définition intérieure. On <u>définit</u> $W^{m,p}(\Omega)$ comme $W^{m,p}(\Omega) = \{u \mid u \in L^p(\Omega)\ ,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \le m\}$ et on le munit de la norme

$$\|u\|_{m,p} = \Big\{ \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p \Big\}^{1/p} \quad \text{pour } p \text{ fini} \ ,$$

sinon de la norme

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_\infty \, .$$

Par $W_o^{m,p}(\Omega)$, on désigne la fermeture de $C_o^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif (si $1 < p < \infty$);

si $p=2$, $W^{m,2}(\Omega)$ (<u>noté</u> $H^m(\Omega)$) est un espace de Hilbert.

L'espace $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

L'espace $C_o^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$; en particulier, $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

On note $| \ |_{m,p}$ la semi - norme

$$u \mapsto \left(\sum_{|\alpha| = m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{1/p} .$$

<u>Proposition 3.1</u> : <u>Il existe des constantes</u> K (m,p,n,Ω) <u>et</u> ε_o <u>strictement positives telles que</u>, <u>pour tout</u> j <u>entier</u>, $0 \leq j \leq m-1$, <u>tout</u> ε <u>strictement positif inférieur à</u> ε_o , <u>tout</u> u <u>dans</u> $W^{m,p}(\Omega)$, <u>on ait</u>

$$|u|_{j,p} \leq K\ (\varepsilon\ |u|_{m,p} + \varepsilon^{-j/m-j}\ |u|_{0,p}) . \tag{3.1}$$

<u>Théorèmes de prolongement</u> : Un <u>opérateur de prolongement</u> est un opérateur linéaire continu P de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$Pu \restriction \Omega = u ,$$

$$\|Pu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K\ \|u\|_{m,p,\Omega} .$$

De tels opérateurs permettent, pour étudier les propriétés de $W^{m,p}(\Omega)$, de se ramener à $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. <u>Ces opérateurs existent toujours lorsque</u> Ω <u>est suffisamment régulier</u>. Lorsque le bord de Ω est C^{∞}, on peut même trouver un opérateur de prolongement commun à tous les $W^{m,p}(\Omega)$.

<u>Application</u> : Soit $\widetilde{W}^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$(u \in \widetilde{W}^{m,p}(\Omega)) \Leftrightarrow (\exists\ \tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ \tilde{u} \restriction \Omega = u) .$$

Alors il résulte de l'existence d'un opérateur de prolongement que $\widetilde{W}^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré

L'espace $W_o^{m,p}(\Omega)$ peut être muni de la norme

$$u \mapsto \left(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} .$$

On peut en effet montrer l'inégalité suivante (cf. proposition 3.1) : il existe une constante K telle que, pour tout j entier, $0 \leq j \leq m-1$, tout u dans $W_o^{m,p}(\Omega)$,

$$(3.2) \qquad |u|_{j,p} \leq K|u|_{m,p} .$$

Application : Dans le cas $m = 1$, $p = 2$, écrivons l'inégalité (3.2) sous la forme

$$(3.3) \qquad C(\Omega)\ \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

pour u dans $W_o^{1,2}(\Omega)$.

Soit u une solution du problème de Dirichlet pour le laplacien dans Ω, correspondant à une valeur propre μ dans $\mathbb{R}^+$, i.e. $u \in W_o^{1,2}(\Omega)$ et

$$\Delta u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mu u .$$

Il résulte de (3.3) que

$$\mu \geq C(\Omega) .$$

Théorèmes de Sobolev : Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ régulier, m un entier non négatif et p vérifiant $1 \leq p < \infty$.

i) Si $m/n < 1/p$, alors, pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{p}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) .$$

L'injection est compacte si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < \frac{1}{q}$.

ii) Si $\frac{m}{n} = \frac{1}{p}$ (cas limite des inégalités de Sobolev), pour $p \leq q < \infty$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) .$$

iii) Si $\frac{m-1}{n} < \frac{1}{p} < \frac{m}{n}$, alors, pour $0 \leq \lambda \leq (\frac{m}{n} - \frac{1}{p})n$,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{o,\lambda}(\overline{\Omega}) .$$

L'injection est compacte si $\lambda < (\frac{m}{n} - \frac{1}{p})n$.

Si $\frac{1}{p} = \frac{(m-1)}{n}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{o,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad , \ 0 \leq \lambda < 1 .$$

Corollaire : L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est une algèbre de Banach si $\frac{1}{p} < \frac{m}{n}$ et on a l'inégalité

$$\|u.v\|_{m,p,\Omega} \leq K \ \|u\|_{m,p,\Omega} \ \|v\|_{m,p,\Omega} .$$

Esquisse de certains points de la démonstration

On va montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit Ω un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $\frac{m}{n} > \frac{1}{p}$. Alors, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$, telle que, pour toute fonction f dans $C^\infty(\Omega)$, avec $\operatorname{supp}(f) \subset K$, on ait

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C \, |f|_{m,p} .$$

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$|f(0)| \leq C \, |f|_{m,p} .$$

On passe en coordonnées polaires par l'application

$$\theta : \underset{\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}}{(t,x)} \longmapsto y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} .$$

Soit f dans $C^\infty(\Omega)$, et $g = f \circ \theta$, on a

$$\frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m} = \sum_{|\alpha|=m} q_\alpha\left(\frac{y}{\|y\|}\right) D^\alpha f(y)$$

où les q_α sont des fonctions homogènes de degré m .

Si M est assez grand, on peut écrire

$$f(0) = -\int_0^M \frac{\partial}{\partial t} f(t.x)\, dt = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^M t^{m-1} \frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}\, dt ,$$

$$f(0)\left(\int_{S^{n-1}} \omega\right) = C_m \int_{S^{n-1}} \int_0^M \frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}\, t^{m-1}\, dt \wedge \omega$$

$$f(0) = C'_m \int_0^M \int_{S^{n-1}} t^{m-n} \frac{\partial^m g(t,x)}{\partial t^m}\, t^{n-1}\, dt \wedge \omega$$

$$= C'_m \int_{\|y\| \leq M} t^{m-n}\, g_m(y)\, dy$$

où $g_m = \dfrac{\partial^m g}{\partial t^m}$ et $t = \|y\|$.

On utilise l'inégalité de Hölder

$$|f(0)| \leq C \left(\int_{\|y\| \leq M} t^{(m-n)p'} dy\right)^{1/p'} \left(\int_{\|y\| \leq M} |g_m(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Si $\frac{m}{n} > \frac{1}{p}$, $(m-n)p' + n-1$ est strictement supérieur à -1 de sorte que

la quantité $\left(\int_{\|y\| \leq M} t^{(m-n)p'} \, dy\right)^{1/p'}$ est finie.

L'autre terme est majoré par $|f|_{m,p}$, d'où le lemme.∎

<u>Démonstration du point</u> i) <u>pour</u> $m = 1$.

On va montrer que si $n > p$, on a une injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. On peut se ramener (en utilisant les opérateurs de prolongement) à montrer cette propriété pour $\Omega = \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma = p\,\frac{n-1}{n-p}$, γ est ≥ 1 .

Pour u dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(|u(x_1,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n)|^\gamma) \, . \, dt = -|u(x)|^\gamma \, .$$

On pose pour $x_{\hat{i}} = (x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)$

$$F_i(x_{\hat{i}}) = \sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)|^{p/n-p} \, .$$

Alors

$$|F_i(x_{\hat{i}})|^{n-1} \leq \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\gamma-1} \, |D_i u(x)| \, dx_i \, .$$

Admettons le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> $G(x) = \prod_{i=1}^{n} G_i(x_{\hat{i}})$, <u>où</u>

$G_i(x_{\hat{i}}) = G_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ <u>appartient à</u> $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$.

<u>Alors</u> $G(x)$ <u>appartient à</u> $L^1(\mathbb{R}^n)$ <u>et on a</u>

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x)| \, dx\right)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |G_i(x_{\hat{i}})|^{n-1} \, dx_{\hat{i}} \, .$$

On a alors

$$\|F_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |F_i(x_{\hat{i}})|^{n-1}\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n \leq$$

$$\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\gamma-1}\, |Dx_i\, u|\, dx\ .$$

D'où en utilisant l'inégalité de Hölder, puisque $(\gamma - 1)p' = q$,

$$\|F_i\|^{n-1}_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \gamma\ \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\ \|u\|^{q/p'}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ .$$

On utilise maintenant le lemme, d'où

$$\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{np/n-p}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} F_i(x_{\hat{i}})\, dx$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} \|F_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq (\gamma\ \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\ \|u\|^{q/p'}_{L^q(\mathbb{R}^n)})^{n/n-1}\ ,$$

soit

$$\text{(S)} \qquad \|u\|^{\frac{q(n-1)}{n} - \frac{q}{p'}}_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|u\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Si $\frac{1}{q} > \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, alors l'inégalité précédente est encore vraie pour les ouverts bornés par croissance des normes L^p . ∎

<u>Remarque</u> : T. Aubin a résolu le problème de trouver la meilleure constante pour l'inégalité (S), qui n'est pas obtenu par la méthode exposée ici (cf [2] et [3]). Plutôt que de découper en tranches les intégrales, il procède à une symétrisation sphérique pour se ramener à une variable réelle. L'estimée sur les dérivées utilise alors l'inégalité isopérimétrique classique.

§ 4 INTERPOLATION ET ESPACES FRACTIONNAIRES

Rappels sur l'interpolation réelle

Soient A_o, A_1 deux espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé A, les injections de A_o et A_1 dans A étant continues. On dira alors que (A_o,A_1) est un couple d'interpolation.

Définition 4.1 : Soient (A_o,A_1) un couple d'interpolation, α un paramètre réel, m un entier strictement positif et p, $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par $W^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$ le sous espace des distributions de $\mathcal{D}'(]0,+\infty[, A)$ telles que

$$\text{i)} \quad t^{\alpha} u \in L^p(]0,+\infty[, A_o),$$

$$\text{ii)} \quad t^{\alpha} \frac{d^m u}{dt^m} \in L^p(]0,+\infty[, A_1).$$

Si $0 < \alpha + \frac{1}{p} < m$, on peut montrer que l'application

$$u \to \gamma u = u|_{t=0}$$

est bien définie de $W^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$ dans A.
On définit $T^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$ comme l'image dans A de cette application: $T^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$ est l'espace des traces sur $t=0$ de $W^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$.

On pose $$[A_o,A_1]_{\theta,p} = T^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$$

avec $\theta = \frac{1}{m}(\alpha + \frac{1}{p})$ (on montre d'abord que $T^{(m)}(p,\alpha,A_o,A_1)$ ne dépend que de θ et p).

Ces espaces d'interpolations ont les propriétés suivantes :

Théorème 4.2 (Théorème d'interpolation).
Soient (A_o,A_1) et (B_o,B_1) deux couples d'interpolation. Soit π une application linéaire de A_o+A_1 dans B_o+B_1, dont la restriction à A_i est linéaire continue de A_i dans B_i $(i=0,1)$. Alors, pour tout θ dans $]0,1[$, pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$, la restriction de π à $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ est linéaire continue de $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_o,B_1)_{\theta,p}$.

On utilisera souvent le théorème 4.2 sous la forme suivante.

Théorème 4.2 bis : Soient (A_o,A_1) et (B_o,B_1) deux couples d'interpolation tels que $A_o \hookrightarrow B_o$ et $A_1 \hookrightarrow B_1$, alors on a l'inclusion $(A_o,A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (B_o,B_1)_{\theta,p}$.

On a les résultats suivants qui se déduisent facilement des définitions.

Proposition 4.3 : On a sous les hypothèses habituelles

$$(A_o,A_1)_{\theta,p} = (A_1,A_o)_{1-\theta,p} .$$

Pour $p' > p$, $(A_o,A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (A_o,A_1)_{\theta,p'}$.

Pour $0<\theta<\theta'<1$, $1\leq p\leq\infty$ et $1\leq p'\leq\infty$,

$$(A_o,A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (A_o,A_1)_{\theta',p'} .$$

Ces inclusions suggèrent la définition suivante :

Définition 4.4 : Un espace de Banach A tel que $A_o \cap A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_o + A_1$ est dit de classe $K_\theta(A_o,A_1)$ pour $0<\theta<1$, si on a $(A_o,A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow A \hookrightarrow (A_o,A_1)_{\theta,\infty}$.

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 4.5 (Théorème de réitération).
Soient θ_o,θ_1 deux réels tels que $0<\theta_o<\theta_1<1$; soit (A_o,A_1) un couple d'interpolation; soient X_o,X_1 deux espaces de Banach de classe $K_{\theta_o}(A_o,A_1)$ et $K_{\theta_1}(A_o,A_1)$; alors pour tout θ tel que $\theta_o<\theta<\theta_1$, on a

$$[A_o,A_1]_{\theta,p} = [X_o,X_1]_{\theta',p} \qquad \text{avec } \theta' = \frac{\theta-\theta_o}{\theta_1-\theta_o} .$$

Théorème 4.6(de compacité).

Soient θ_o,θ_1 deux réels tels que $0<\theta_o<\theta_1<1$. Si A_o s'injecte dans A_1, l'injection étant compacte, alors pour tout p_o,p_1 vérifiant

$1 \leq p_o \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq \infty$, <u>l'injection de</u> $[A_o, A_1]_{\theta_o, p}$ <u>dans</u> $[A_o, A_1]_{\theta_1, p_1}$ <u>est compacte.</u>

<u>Première application</u> : <u>Les espaces de Besov</u>

Par s compris entre 0 et m, on pose

$$B^{s,p}(\mathbb{R}^n) = [W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ L^p(\mathbb{R}^n)]_{\theta,p}$$

avec $\theta = 1 - \frac{s}{m}$.

La définition est indépendante de m et θ .

Si s est non entier, $s = [s] + (1-\theta)$, alors

$$B^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \mid u \in W^{[s],p}(\mathbb{R}^n)\ ,\ \forall\alpha\ ,\ |\alpha| = [s],\ \forall j \in [1,\dots n]\ ,$$

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x_1,\dots,x_j+t,\dots,x_n) - D^\alpha u(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)|^p}{t^{1+(1-\theta)p}} dx \right) dt < \infty\} .$$

Pour s entier, $B^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ diffère de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si p est différent de 2 . Lorsque $p=2$, les espaces de Besov $B^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ sont les espaces de Sobolev classiques $H^s(\mathbb{R}^n)$.

On peut alors énoncer un théorème de trace :

<u>Théorème 4.7</u>: <u>Si</u> u <u>appartient à</u> $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, u <u>admet</u> m <u>traces sur</u> $x_n = 0$, $u(0),\dots,u^{(m-1)}(0)$, <u>avec</u> $u^{(j)}(0)$ <u>dans</u> $B^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$.
<u>L'application</u> $u \to \{u^{(j)}(0)\}_{j=0,1,\dots m-1}$ <u>de</u> $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ <u>dans</u>

$\prod_{j=0}^{m-1} B^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ <u>est surjective.</u>

<u>Deuxième application</u> : Les espaces höldériens sont des interpolés entre les espaces de fonctions différentiables.

Soit s un réel non entier, $s=[s]+1-\theta$ avec $0<\theta<1$, m un entier strictement supérieur à s. On pose $1-\alpha=m/s$.
Alors

$$C^{[s],\,1-\theta}(\mathbb{R}^n)=[C^m(\mathbb{R}^n),\,C^o(\mathbb{R}^n)]_{\alpha,\infty}\,.$$

Ces propriétés sont reliées à la caractérisation des espaces d'interpolations lorsqu'on est dans la situation suivante :

i) $A_1 \hookrightarrow A_o$,

ii) A_1 est le domaine d'un opérateur Λ non borné dans A_o, générateur infinitésimal d'un semi-groupe G(t)(dans notre cas le semi-groupe est la translation dans une direction).

Exposé n^{o} II

ESTIMÉES DE SCHAUDER POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

par J. P. EZIN

U. E. R. de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques de Lille
et
Université de Cotonou, République Populaire du Bénin

RÉFÉRENCES

[1] L. BERS, F. JOHN, J. SCHECHTER, Partial differential equations, Lectures in Applied Mathematics, vol. 3, Interscience, ch.II.5, (1974).

[2] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren der Math. Wiss., vol.224, Springer-Verlag, (1977).

[3] O. A. LADYZENSKAYA, N. U. URAL'TSEVA, Equations aux dérivées partielles de type elliptique, Dunod, ch.III, 99-128, (1968).

§ 0. INTRODUCTION

0.1 Au début des années 1930, Schauder a montré que l'existence de solutions de classe de Hölder $C^{\ell,\alpha}$ à un problème de Dirichlet associé à un opérateur elliptique à coefficients de classe de Hölder $C^{\ell-2,\alpha}$ est une conséquence du théorème d'unicité de cette solution.

Pour établir ce résultat (entre autres résultats plus généraux qui ne seront pas mentionnés ici), il a prouvé certaines estimées qui portent son nom depuis lors. Dans ce qui suit, on s'intéresse essentiellement aux "estimées intérieures" que l'on peut présenter ainsi :

0.2 Soit ℓ un entier ≥ 2, α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et M une variété compacte. Nous notons $C^{\ell,\alpha}(M)$ l'espace des fonctions sur M de classe de Hölder $C^{\ell,\alpha}$ défini de façon analogue à l'espace $C^{\ell,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$ (cf. exposé n° I).

0.3 Théorème : Soit L un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 à coefficients dans $C^{\ell-2,\alpha}(M)$. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction v de $C^{\ell,\alpha}(M)$, on ait

$$\|v\|_{C^{\ell,\alpha}(M)} \leq C(\|Lv\|_{C^{\ell-2,\alpha}(M)} + \|v\|_{C^{o}(M)}) . \tag{0.4}$$

La constante C dépend de M, de ℓ et aussi des normes $C^{\ell-2,\alpha}$ des coefficients de L.

0.5 Remarques : i) Le terme $\|v\|_{C^{o}(M)}$ peut être remplacé par une autre norme appropriée de v, notamment par des normes du type L^p ou du type Sobolev $W^{m,p}$.

ii) Il existe une estimée du même type que (0.4) pour des variétés à bord (cf. [1], [2] ou [3] par exemple).

0.6 Nous prendrons dans la suite $\ell = 2$; le cas plus général $\ell > 2$ s'en déduit sans changement fondamental.

§ 1. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Soit M une variété compacte de classe C^∞. Un opérateur différentiel d'ordre 2 sur les fonctions définies sur M admet, dans un système de coordonnées locales (x^i) de domaine Ω dans $\mathbb{R}^n$, l'écriture suivante :

$$L = \sum_{|p|\leq 2} a_p D^p = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + a^o$$

où les (a^{ij}), (a^k) et a^o sont des fonctions sur Ω que nous supposerons de classe $C^{o,\alpha}$.

Les termes de plus haut degré de L sont en fait intrinsèquement définis sur M et forment le symbole principal σ_L de L qui est une fonction sur T*M, l'espace total du fibré cotangent à M ; dans notre cas $\sigma_L(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j$. Une métrique riemannienne étant fixée sur M, on définit la constante d'ellipticité μ_L de L par

$$\mu_L = \inf_{|\xi|=1} |\sigma_L(\xi)|$$

où $|\ |$ désigne la norme sur T*M déduite de la métrique.

Bien entendu L est dit elliptique si $\mu_L > 0$, autrement dit si la matrice (a^{ij}) est définie positive.

1.2 Faisons brièvement quelques rappels d'ordre général. Soit L_o un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Une distribution J sur $\mathbb{R}^n$ est dite solution fondamentale (ou élémentaire) de l'opérateur L_o si elle vérifie $L_o J = \delta$ (δ distribution de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^n$). Il s'en suit alors que, si $*$ désigne la convolution sur $\mathbb{R}^n$, $L_o(J * f) = f$, pour tout f dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Lorsque L_o est un opérateur elliptique d'ordre $m (m \geq 2)$, homogène et à coefficients constants, une solution fondamentale J de l'opérateur L_o est caractérisée par les propriétés suivantes :

i) J a un noyau noté j qui est une fonction C^∞ dans le complémentaire de 0 ;

ii)
$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{\ell(x)}{r^{n-m}} & \text{si n impair ou n pair} > m \\[2ex] \dfrac{\ell(x)}{r^{n-m}} + \ell_o(x)\,\mathrm{Log}\, r & \text{si n pair} \leq m \end{cases}$$

où ℓ est une fonction positivement homogène de degré 0 (i.e. $\ell(tx) = \ell(x)$, pour $t > 0$), ℓ_o un polynôme homogène de degré $m - n$ et $r = |x| = (\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2)^{1/2}$.

Dans le cas particulier du laplacien euclidien Δ , ι est la fonction constante 1 (parce que Δ est invariant par rotation).

1.3 Nous appellerons <u>noyau singulier à l'origine</u> toute fonction k sur $\mathbb{R}^n-\{0\}$ telle que

$$k = \frac{\varkappa}{r^n} \tag{1.4}$$

où $\varkappa$ est une fonction positivement homogène de degré 0, de classe C^∞ en dehors de l'origine, bornée ainsi que ses dérivées et vérifiant

$$\int_{S^{n-1}} \varkappa \, ds = 0 \tag{1.5}$$

où S^{n-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et ds l'élément d'aire sur S^{n-1}.

Pour $|p| = 2$ et J une solution fondamentale de l'opérateur L d'ordre 2 , D^pJ est un noyau singulier à l'origine.

On vérifie facilement que (1.5) est équivalent à

$$\int_{R_1<|x|<R_2} k(x)dx = 0 \ . \tag{1.5'}$$

pour tous réels, R_1 et R_2 tels que $0 < R_1 < R_2$.

En effet

$$\int_{R_1<|x|<R_2} k(x)dx = (\int_{S^{n-1}} \varkappa(r\xi)ds(\xi))(\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1}.r^{-n}dr) = 0 \ .$$

En faisant tendre R_1 vers 0 et R_2 vers $+\infty$ dans (1.5'), nous pouvons écrire au sens de la valeur principale de Cauchy

$$\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx = \lim_{\substack{R_1 \to 0 \\ R_2 \to +\infty}} \int_{R_1 < |x|<R_2} k(x)dx = 0 \ .$$

De la même façon si φ est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit de convolution $K * \varphi$ existe comme valeur principale au sens de Cauchy :

$$(K * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy = \mathrm{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, k(x-y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \varphi(y) k(x-y)\, dy \; .$$

On a alors le lemme :

1.6 Lemme (Inégalité de Korn-Lichtenstein-Giraud).
Soit K la distribution associée à un noyau singulier à l'origine. Alors pour tout α $(0 < \alpha < 1)$, il existe une constante C_1 dépendant de K, n et α telle que, pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|K * \varphi\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\varphi\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \; . \tag{1.6}$$

Preuve : Soit φ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; nous pouvons écrire (au sens de la valeur principale de Cauchy)

$$(K * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(y) - \varphi(x)]\, k(x-y)\, dy \; .$$

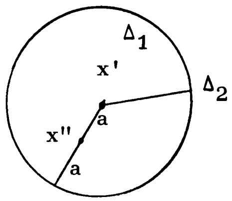
Soient x' et x'' deux points dans $\mathbb{R}^n$. Posons $|x' - x''| = a$. Il vient

$$\begin{aligned}(K * \varphi)(x') - (K * \varphi)(x'') &= \int_{\mathbb{R}^n} \{[\varphi(y) - \varphi(x')]\, k(x'-y) - [\varphi(y) - \varphi(x'')]\, k(x''-y)\}\, dy \\ &= I_1 + I_2 \; ,\end{aligned}$$

en désignant par I_1 et I_2 respectivement l'intégrale étendue aux domaines suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_1 = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \ |x' - y| < 2a\} \; ,$$

$$\Delta_2 = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \ |x' - y| > 2a\} \; .$$



Remarque : Si y est dans Δ_2 et si y' est un point tel que $|y'-x'| < a$, on a

(1.7) $$|x'-y| \leq 2|y'-y| \leq 4|x'-y| ,$$

puisque $|x'-y| \leq 2|y'-y|$ et $|y'-y| \leq |y'-x'| + |x'-y| \leq 2|x'-y|$.

En posant $M_{\alpha,\varphi} = \sup\limits_{x' \neq y} \dfrac{|\varphi(x')-\varphi(y)|}{|x'-y|^{\alpha}}$, on peut écrire

$$|I_1| \leq \int_{\Delta_1} \left\{\frac{|\varphi(x')-\varphi(y)|}{|x'-y|^{\alpha}} |x'-y|^{\alpha} |k(x'-y)| + \frac{|\varphi(x'')-\varphi(y)|}{|x''-y|^{\alpha}} |x''-y|^{\alpha} |k(x''-y)|\right\} dy$$

$$\leq M_{\alpha,\varphi} \int_{\Delta_1} \left[|k(x'-y)| |x'-y|^{\alpha} + |k(x''-y)| |x''-y|^{\alpha}\right] dy ,$$

avec $k(x) = \dfrac{\varkappa(x)}{|x|^n}$.

La fonction $\varkappa$ étant bornée, l'intégrale dans le second membre de la dernière inégalité est finie pourvu que $0 < \alpha$ (ce qui est le cas) ; elle est alors majorée par

$$\sup_{|x|<2a} |\varkappa(x)| \left(\int_{\Delta_1} \frac{dy}{|x'-y|^{n-\alpha}} + \int_{\Delta_1} \frac{dy}{|x''-y|^{n-\alpha}}\right) ;$$

d'où

$$|I_1| \leq A_1 a^{\alpha} M_{\alpha,\varphi} \quad \text{où} \quad A_1 = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha} \omega_{n-1} \left(\sup_{|x|<2a} |\varkappa(x)|\right)$$

où ω_{n-1} est l'aire de S^{n-1} .

De la même façon on peut écrire I_2 sous la forme

$$I_2 = \int_{\Delta_2} [\varphi(x'') - \varphi(x')] k(x'-y) dy$$
$$+ \int_{\Delta_2} [\varphi(y) - \varphi(x'')][k(x'-y) - k(x''-y)] dy .$$

En vertu de (1.5') et compte tenu du fait que l'expression entre crochets dans le premier terme ne dépend pas de y, la première intégrale est nulle.

De plus comme $x \mapsto k(x-y)$ est C^∞ pour y dans Δ_2 et x dans Δ_1, il existe (à cause du théorème des accroissements finis) y' entre x' et x'' tel que

$$|k(x'-y) - k(x''-y)| \leq |x'-x''| \frac{A_2}{|y'-y|^{n+1}} \leq \frac{a\,A_2}{|y'-y|^{n+1}}$$

où A_2 est une constante dépendant de $\varkappa$ et, à cause de (1.7), nous avons

$$\frac{1}{2^{n+1}|x'-y|^{n+1}} \leq \frac{1}{|y'-y|^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{|x'-y|^{n+1}} ;$$

d'où I_2 existe et

$$|I_2| \leq 2^{\alpha+n+1} a.A_2 \, M_{\alpha,\varphi} \int_{\Delta_2} |y-x'|^{\alpha-n-1} dy .$$

L'intégrale dans le second membre est finie parce que $\alpha < 1$. Alors

$$|I_2| \leq A_3 a^\alpha M_{\alpha,\varphi} \quad \text{où} \quad A_3 = \frac{2^{n+2\alpha}}{1-\alpha} A_2 \, \omega_{n-1} .$$

Finalement

$$|(K*\varphi)(x') - (K*\varphi)(x'')| \leq (A_1 + A_3)|x'-x''|^\alpha M_{\alpha,\varphi}$$

et le lemme 1 s'en déduit . ∎

1.8 Corollaire : Soit L_o un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante C_2 dépendant de L_o, n et α, telle que, pour toute fonction φ dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\sum_{|p|=2} \|D^p\varphi\|_{C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|L_o\varphi\|_{C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.9}$$

Preuve : Soit J une solution fondamentale de l'opérateur L_o. Pour toute fonction φ dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$D^p\varphi = D^p(L_o J * \varphi) = D^p J * L_o\varphi .$$

Comme, pour $|p| = 2$, D^pJ est un noyau singulier à l'origine, il existe d'après le lemme 1.6 une constante C_2 telle que

$$\sum_{|p|=2} \|D^p\varphi\|_{C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|p|=2} \|D^pJ * L_o\varphi\|_{C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|L_o\varphi\|_{C^{o,\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \qquad \blacksquare$$

§ 2. ESTIMÉES DE SCHAUDER INTÉRIEURES

2.1 Proposition : Soit L un opérateur différentiel d'ordre deux elliptique (à coefficients variables) sur $\mathbb{R}^n$. Soit B_R la boule centrée à l'origine de rayon R et $C_R^{k,\alpha} = C^{k,\alpha}(B_R)$ muni de sa norme usuelle.

Il existe des constantes C_3 dépendant de L, n et α et C_4 dépendant en plus de R telle que, pour toute fonction u dans $C^\infty_{o,R}$,

(2.2) $$\|u\|_{C_R^{2,\alpha}} \leq C_3(\|Lu\|_{C_R^{o,\alpha}} + R^\alpha \|u\|_{C_R^{2,\alpha}} + C_4 \|u\|_{C_R^o}).$$

Preuve : On note L_o l'opérateur à coefficients constants **égal** à la partie homogène de degré 2 de L dans laquelle on a figé les coefficients à l'origine. Soit u une fonction de classe $C^{2,\alpha}$ à support dans B_R ; d'après le corollaire 1.8,

$$\|u\|_{C_R^{2,\alpha}} = \sum_{|p|=2} \|D^pu\|_{C_R^{o,\alpha}} + \|u\|_{C_R^{1,\alpha}}$$

$$\leq C_2 \|L_ou\|_{C_R^{o,\alpha}} + \|u\|_{C_R^{1,\alpha}} .$$

Mais $L_o = L + (L_o - \bar{L}) - \sum_{0 \leq |p| \leq 1} a_p D^p$ où $\bar{L}$ désigne la partie homogène de degré deux de l'opérateur L.

D'où

$$\|u\|_{C_R^{2,\alpha}} \leq C_2 \Big[\|Lu\|_{C_R^{o,\alpha}} + \|(L_o - \bar{L})u\|_{C_R^{o,\alpha}} + \sum_{0 \leq |p| \leq 1} \|a_pD^pu\|_{C_R^{o,\alpha}}\Big]$$

$$+ \|u\|_{C_R^{1,\alpha}} .$$

On remarque alors que

$$\sum_{o\leq|p|\leq 1} \|a_p D^p u\|_{C_R^{o,\alpha}} \leq \max_{o\leq|p|\leq 1} (\|a_p\|_{C_R^{o,\alpha}})\|u\|_{C_R^{1,\alpha}} ,$$

d'où l'existence d'une constante C_5 dépendant des normes $C^{o,\alpha}$ des coefficients de L , de n et α telle que

$$\|u\|_{C_R^{2,\alpha}} \leq C_5 [\|Lu\|_{C_R^{o,\alpha}} + \|(L_o - \bar{L})u\|_{C_R^{o,\alpha}} + \|u\|_{C_R^{1,\alpha}}] .$$

Pour terminer la preuve, il nous suffit d'avoir des estimées convenables de $\|(L_o - \bar{L})u\|_{C_R^{o,\alpha}}$ et de $\|u\|_{C_R^{1,\alpha}}$.

Prouvons d'abord un lemme technique :

2.3 <u>Lemme</u> : <u>Il existe deux constantes</u> C_5 <u>et</u> C_6 <u>telles que, pour toute fonction</u> u <u>dans</u> $C^{\infty}_{o,R}$, <u>on ait</u>

(2.4) $$\|(L_o-\bar{L})u\|_{C_R^{o,\alpha}} \leq C_5 R^{\alpha}\|u\|_{C_R^{2,\alpha}} + C_6 \|u\|_{C_R^{2}} .$$

<u>Les constantes</u> C_5 <u>et</u> C_6 <u>ne dépendent que des normes dans</u> $C_{R_o}^{o,\alpha}$ <u>des coefficients de</u> $\bar{L}$ (<u>où</u> R_o <u>est un réel fixé assez grand</u>).

<u>Preuve</u> : En effet soit u dans $C^{\infty}_{o,R}$, on a, en posant $b_p = a_p - a_p(0)$,

$$\|(L_o - \bar{L})u\|_{C_R^{o,\alpha}} \leq \sum_{|p|=2} \|b_p D^p u\|_{C_R^{o,\alpha}} .$$

Or

$$\|b_p D^p u\|_{C_R^{o,\alpha}} = \|b_p D^p u\|_{C_R^{o}} + \sup_{\substack{x,y\in B_R\\ x\neq y}} \frac{|(b_p D^p u)(x) - (b_p D^p u)(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$\leq \|b_p\|_{C_R^{o}} \|D^p u\|_{C_R^{o}} + \sup_{\substack{x,y\in B_R\\ x\neq y}} \frac{|b_p(x)(D^p u(x)-D^p u(y))+(b_p(x)-b_p(y))D^p u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$\leq \|b_p\|_{C_R^{o}} [\|D^p u\|_{C_R^{o}} + M_{\alpha,D^p u}] + M_{\alpha,b_p} \|D^p u\|_{C_R^{o}} .$$

Puisque b_p est dans $C_R^{o,\alpha}$ et que $b_p(0) = 0$, il existe pour tout p des constantes $C_{5,p}$ et $C_{6,p}$ telles que

$$\|b_p\|_{C_R^o} \leq C_{5,p} R^\alpha$$

et

$$M_{\alpha, b_p} \leq C_{6,p} .$$

Par suite il existe des constantes C_5 et C_6 telles que

$$\sum_{|p|=2} \|b_p D^p u\|_{C_R^{o,\alpha}} \leq C_5 R^\alpha \|u\|_{C_R^{2,\alpha}} + C_6 \|u\|_{C_R^2} . \qquad \blacksquare$$

2.5 Pour $0 < \alpha < 1$, l'injection de $C_R^{2,\alpha}$ dans C_R^2 est compacte. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout u dans $C_R^{2,\alpha}$, il existe une constante C_ε telle que

$$\|u\|_{C_R^2} \leq \varepsilon \|u\|_{C_R^{2,\alpha}} + C_\varepsilon \|u\|_{C_R^o} .$$

En utilisant le lemme 2.3 et l'inégalité précédente avec ε assez petit dépendant de R, on obtient qu'il existe, R_o étant fixé, une constante C_3 telle que, pour tout R, $0 < R \leq R_o$, et toute fonction u dans $C_o^\infty(B_R)$, il existe C_4 tel que

$$\text{(2.5)} \qquad \|u\|_{C_R^{2,\alpha}} \leq C_3 (\|Lu\|_{C_R^{o,\alpha}} + R^\alpha \|u\|_{C_R^{2,\alpha}} + C_4 \|u\|_{C_R^o}) .$$

Rappelons que C_ε ne dépend que de n, α et des normes $C^{o,\alpha}$ des coefficients de L sur la boule B_{R_o} (les normes $C^{o,\alpha}$ des coefficients de $\bar{L} - L_o$ sont contrôlées par ces dernières).

Remarquons que le rayon R de la boule n'intervient pas dans C_3, mais peut intervenir dans C_4. $\blacksquare$

3. ESTIMÉES DE SCHAUDER SUR LES VARIÉTÉS COMPACTES

3.1 Nous considérons ici une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension n et de classe C^∞. Soit L_M un opérateur différentiel d'ordre deux elliptique défini sur les fonctions.

On se fixe un recouvrement fini $(U_i)_{i=1,\dots,N}$ de M par des boules de rayon R_i centrées aux points (m_i) et une partition de l'unité (η_i) subordonnée à ce recouvrement.

Il sera commode de considérer des cartes exponentielles centrées en ces points m_i. On note L_i l'opérateur L_M lu dans la carte $(U_i, \exp_{m_i}^{-1} \restriction U_i)$. De plus on suppose que les boules du recouvrement sont assez petites pour que sur chaque boule U_i le produit d'une constante ne dépendant que de la norme dans $C^{o,\alpha}(M)$ des coefficients de L_M par R_i^α soit inférieur à 1 (cf. 2.5).

3.2 Théorème : Soit L_M un opérateur elliptique d'ordre deux opérant sur les fonctions d'une variété riemannienne compacte (M,g). Il existe une constante C_7 dépendant de (M,g), de L_M par sa constante d'ellipticité et par les normes $C^{o,\alpha}$ de ses coefficients telle que, pour toute fonction u dans $C^{2,\alpha}(M)$,

$$(3.3) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq C_7 \left[\|L_M u\|_{C^{o,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^o(M)}\right].$$

Preuve : Soit u une fonction de $C^\infty(M)$. En utilisant la partition de l'unité (η_i) mentionnée en 3.1, on se ramène à l'étude de $u_i = \eta_i \cdot u$ qui est C^∞ à support dans U_i. On peut appliquer la proposition 2.1 à u_i lue dans la carte $\exp_{m_i}^{-1} \restriction U_i$. On trouve donc une constante $C_{8,i}$ telle que

$$\|u_i\|_{C^{2,\alpha}_{R_i}} \leq C_{8,i} \left[\|L_i u_i\|_{C^{o,\alpha}_{R_i}} + \|u_i\|_{C^o_{R_i}}\right]$$

(ici nous avons utilisé que R_i était suffisamment petit pour regrouper dans le membre de gauche les termes en $\|u_i\|_{C^{2,\alpha}_{R_i}}$ avec un coefficient positif).

Comme

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{C^{2,\alpha}_{R_i}} \leq N \max_i \|u_i\|_{C^{2,\alpha}_{R_i}} ,$$

il existe une constante C_8 telle que

$$(3.4) \qquad \|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq C_8 \max_i [\|L_i u_i\|_{C^{o,\alpha}_{R_i}} + \|u_i\|_{C^o_{R_i}}] .$$

Il est clair que $\max_i \|u_i\|_{C^o_{R_i}}$ est contrôlé par $\|u\|_{C^o(M)}$, la partition de l'unité (η_i) étant donnée.

Pour l'autre terme il suffit de remarquer que $L_i u_i - \eta_i(L_M u)$ ne fait intervenir que des dérivées d'ordre au plus 1 de u , de telle sorte qu'il existe des constantes $C_{9,i}$ pour lesquelles

$$\|L_i u_i\|_{C^{o,\alpha}_{R_i}} \leq C_{9,i} (\|L_M u\|_{C^{o,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(M)}).$$

En utilisant alors que l'injection de $C^{2,\alpha}(M)$ dans $C^{1,\alpha}(M)$ est compacte, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve une constante C_ε telle que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(M)} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} + C_\varepsilon \|u\|_{C^o(M)} .$$

En reportant cela dans (3.4), on peut trouver une constante C_7 telle que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq C_7 [\|L_M u\|_{C^{o,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^o(M)}] . \blacksquare$$

3.5 Le théorème 0.3 se déduit alors facilement du théorème 3.2 car, si X est un champ de vecteurs sur M , $L_M.(X.u) = X.L_M u + [X,L_M]u$ de telle sorte que l'estimée précédente appliquée à X.u se ramène à une estimée $C^{1,\alpha}$ de $L_M u$ et $C^{2,\alpha}$ de u car $[X,L_M]$ est un opérateur d'ordre deux, mais dont la norme $C^{o,\alpha}$ des coefficients fait intervenir la norme $C^{1,\alpha}$ des coefficients de L . La preuve se termine alors par récurrence. ■

Exposé n° III

INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

par S. GALLOT

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris VII

RÉFÉRENCES

[1] K. KODAIRA, J. MORROW, Complex manifolds, Holt, Rinehart Winston (1971).

[2] A. NEWLANDER, L. NIRENBERG, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math., 65 (1967), 391-404.

[3] R. C. GUNNING, H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, (1965).

§ 1. INTRODUCTION

Soit V un espace vectoriel de dimension 2n sur $\mathbb{R}$ muni d'un endomorphisme J de carré -I (I désigne l'identité de V), de telle sorte que (V,J) peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$. Si (z^i) sont des coordonnées complexes, elles donnent lieu à des coordonnées réelles (x^i,y^i) telles que $z^i = x^i + \sqrt{-1}\, y^i$.

Une fonction f définie sur un ouvert Ω de V à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite holomorphe (ou C^ω) si sa différentielle notée df est $\mathbb{C}$-linéaire (on note $df \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$).

Nous nous intéressons à des fonctions C^∞ à valeurs réelles. Pour une telle fonction f, df est un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}) = V^*$. Sur V^* il y a une structure complexe induite par celle de V : pour u dans V^*, $J^*(u) = u\circ J$. Mais si on se donne un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de V sur V^* (induit par exemple par le choix d'une base (e_i) : $x = \sum_{i=1}^{2n} x^i e_i \to x^* = \sum_{i=1}^{2n} x^i e_i^*$ où (e_i^*) est la base duale de (e_i)) l'isomorphisme induit entre les espaces complexes (V,J) et (V^*,J^*) est $\mathbb{C}$-antilinéaire.

Cela nous amène à considérer des fonctions f C^∞ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de telle sorte que leur différentielle df est un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) = V^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ le complexifié de V^*. A titre d'exemple : pour la fonction z^i, $dz^i = dx^i + \sqrt{-1}\, dy^i$ et pour la fonction $\bar{z}^i$, $d\bar{z}^i = dx^i - \sqrt{-1}\, dy^i$, ce qui suggère pour u dans $V^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ la décomposition $u = u' + u''$ avec $u' = 1/2(u - \sqrt{-1}\, u\circ J)$, $u'' = 1/2(u + \sqrt{-1}\, u\circ J)$ où l'on remarque que u' est $\mathbb{C}$-linéaire et u'' $\mathbb{C}$-antilinéaire. On décompose ainsi la différentielle d en $d = d' + d''$ en posant $d'f = (df)'$ et $d''f = (df)''$.

On peut voir cela directement sur V : on introduit l'espace vectoriel $\bar{V}$ sur $\mathbb{C}$ qui est le même groupe additif que V, mais dont la multiplication par les scalaires complexes est donnée par $(\lambda,v) \to \bar{\lambda}.v$ au sens de V.

On remarque alors que

$$V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = V^{+} \oplus V^{-}$$

où $V^{\pm}$ désigne l'espace propre de $J_{\mathbb{C}}$ (extension $\mathbb{C}$-linéaire de J) pour la valeur propre $\pm\sqrt{-1}$. L'espace V est $\mathbb{C}$-isomorphe à V^{+} par l'isomorphisme $v \to v\otimes 1 - Jv \otimes \sqrt{-1}$ et l'espace $\bar{V}$ $\mathbb{C}$-isomorphe à V^{-} par $v \to v\otimes 1 + Jv \otimes \sqrt{-1}$.

Dans la décomposition de v dans $V_{\mathbb{C}}$ en $v = v^{+} + v^{-}$, v^{+} est dite <u>la composante de type</u> $(1,0)$ de v et v^{-} sa <u>composante de type</u> $(0,1)$.

La conjugaison complexe γ s'étend à l'espace $V_{\mathbb{C}}$ en $I \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \gamma$. Elle échange V^{+} et V^{-}.

On pose par analogie avec les notations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = 1/2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = 1/2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y^i}\right) .$$

On remarque alors que pour une fonction C^{∞} à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i$$

de telle sorte que

$$d'f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i$$

et

$$d''f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i .$$

§ 2. VARIÉTÉS COMPLEXES

On suppose connue la notion de variété C^∞.

Définition 2.1 : Une structure complexe sur une variété C^∞ M de dimension 2n est le choix d'un sous-atlas dont les changements de cartes définis sur les ouverts de $\mathbb{C}^n$ $(=\mathbb{R}^{2n})$ sont C^ω.

Localement toute fonction de M dans $\mathbb{C}$ peut être considérée (du point de vue différentiable) comme une fonction définie sur un ouvert de $V = \mathbb{C}^n$. On définit donc une décomposition de la différentielle d en $d = d' + d''$.

Définition 2.2 : Une variété différentielle M de dimension 2n munie d'un champ J d'applications linéaires telles que pour tout m de M $(J(m))^2 = - I_{T_m M}$ est dite presque complexe.

Il est clair qu'une variété complexe hérite de ses cartes une structure presque complexe. Si la variété est seulement presque complexe, on peut encore en chaque point construire le complexifié de l'espace tangent $V = T_m M$, qui se décompose en $V_{\mathbb{C}} = V^+ + V^-$, mais la structure complexe dépend du point (i.e. pour m et m' dans un ouvert de carte Ω, J_m et $J_{m'}$ ne proviennent pas de la même structure complexe de $\Omega \subset V$).

En particulier pour un système de coordonnées (x^i, y^i) tel qu'en m $J\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$, il n'y aura pas de raison pour que les champs $Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\, J\frac{\partial}{\partial x^i}$ définis comme au § 1 vérifient $[Z_i, Z_j] = 0$.

En fait nous avons le

Théorème 2.3 : Soit (M,J) une variété presque complexe. Cette structure provient d'une structure complexe si et seulement si le crochet de deux champs de vecteurs de type (0,1) est de type (0,1).

DANS TOUTE LA SUITE, M DÉSIGNE UNE VARIÉTÉ COMPLEXE

Les formes différentielles sur M à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont engendrées par des formes de type (1,0) et de type (0,1). L'espace des r-formes différentielles Ω^r se décompose en $\Omega^r = \sum_{p+q=r} \Omega^{p,q}$ où $\Omega^{p,q}$ désigne l'espace des sections du fibré sur M, associé au fibré cotangent, de fibre $\Lambda^p V^{*+} \otimes \Lambda^q V^{*-}$.

Comme $d^2 = 0$, il est clair que si ω est une forme de type (p,q), alors $d\omega$ est une somme d'une forme $d'\omega$ de type (p+1,q) et d'une forme $d''\omega$ de type (p,q+1) (dans un système de coordonnées locales complexes (z^i), si A,B sont des multi-indices,

$$d\left(\sum_{A,B} f_{A,B}\, dz^A \wedge d\bar{z}^B\right) = \sum_{A,B} df_{A,B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$= \sum_{A,B} d'f_{A,B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B + \sum_{A,B} d''f_{A,B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B,$$

cette décomposition est transportée par changement de cartes holomorphes).

Par suite, en examinant les types, il vient $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ et $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$. Remarquons que la conjugaison échange les (p,q)-formes et les (q,p)-formes; de plus $\overline{d'\alpha} = d''\bar{\alpha}$. De là suit le

<u>Lemme</u> : <u>L'opérateur</u> $\sqrt{-1}\, d'd''$ <u>est un opérateur réel</u> (<u>il applique les formes de type</u> (p,p) <u>réelles dans les formes de type</u> (p+1,p+1) <u>réelles</u>).

<u>Preuve</u> : Les formes α de type (p,p) réelles sont caractérisées par la condition $\bar{\alpha} = \alpha$. Or

$$\sqrt{-1}\, d'd''\alpha = \sqrt{-1}\, d'd''\bar{\alpha} = \sqrt{-1}\, d'\overline{d'\alpha} = \sqrt{-1}\,\overline{d''d'\alpha} = -\overline{\sqrt{-1}\, d''d'\alpha} = \overline{\sqrt{-1}\, d'd''\alpha}\,. \blacksquare$$

L'opérateur $\sqrt{-1}\, d'd''$ va jouer un rôle fondamental dans toute la suite.

§ 3. VARIÉTÉS HERMITIENNES

Soit V un espace vectoriel complexe. On appelle <u>métrique hermitienne</u> sur V la donnée d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique définie positive g vérifiant pour tous vecteurs v,w de V

(1) $$g(Jv,Jw) = g(v,w).$$

On note encore g le prolongement $\mathbb{C}$-bilinéaire de g au complexifié $V_{\mathbb{C}}$. Remarquons que $S^2 V^*_{\mathbb{C}}$ se décompose en $S^2(V^*)^+ \oplus ((V^*)^+ \otimes (V^*)^-) \oplus S^2(V^*)^-$ et que g vérifie (1) si et seulement si $g \in (V^*)^+ \otimes (V^*)^-$; en effet nous avons

$$g(v,w) = g(Jv,Jw) = g(\sqrt{-1}\,v, -\sqrt{-1}\,w) = g(v,w) \text{ si } v \in V^+ \text{ et } w \in V^-,$$

$$g(v,w) = g(Jv,Jw) = g(\sqrt{-1}\,v, \sqrt{-1}\,w) = -g(v,w) \text{ si } v \text{ et } w \in V^+,$$

$$g(v,w) = g(Jv,Jw) = g(-\sqrt{-1}\,v, -\sqrt{-1}\,w) = -g(v,w) \text{ si } v \text{ et } w \in V^-.$$

On peut encore remarquer que $(V^*)^+ \otimes (V^*)^-$ est aussi isomorphe au sous-espace de $\Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}}$ formé des formes de type (1,1). Il est donc naturel d'associer à toute métrique hermitienne g la forme réelle de type (1,1) ω définie par l'égalité

$$\omega(v,w) = g(Jv,w).$$

Réciproquement si ω est une forme extérieure réelle de type (1,1), on dit que ω est <u>positive</u> (on note $\omega > 0$) si la forme symétrique g associée est définie positive. Dans ce cas, ω définit une structure hermitienne.

<u>Définition 3.1</u> : <u>Une variété hermitienne</u> est une variété complexe (M,J) munie d'une métrique riemannienne g vérifiant, en tout point m de M et pour tous les vecteurs X et Y de $T_m M$, $g(JX,JY) = g(X,Y)$.

Remarquons que toute structure riemannienne g sur une variété complexe permet de construire une métrique hermitienne g' en posant

$$g'(X,Y) = g(X,Y) + g(JX,JY).$$

Il existe donc toujours des métriques hermitiennes sur une variété complexe.

En coordonnées locales, posons $g_{i\bar{j}} = g(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j})$.

On a alors

$$g = \sum_{i,j} (g_{i\bar{j}}\, dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{\bar{i}j}\, d\bar{z}^i \otimes dz^j) = \sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz^i \circ d\bar{z}^j .$$

Notons que $g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}$, que $dz^i \circ J = \sqrt{-1}\, dz^i$ et que $d\bar{z}^i \circ J = -\sqrt{-1}\, d\bar{z}^i$. Ceci donne

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j .$$

3.2. Codifférentielles δ, δ' et δ''.

On commence par un rappel.

On appelle dérivation covariante une application bilinéaire D de $\mathcal{C}M \times \mathcal{C}M$ dans $\mathcal{C}M$ (où $\mathcal{C}M$ est l'espace des champs de vecteurs sur M) qui à (X,Y) associe $D_X Y$ et qui vérifie les conditions suivantes, pour tous champs de vecteurs X et Y et toute fonction f,

DC i) $\quad D_{fX} Y = f\, D_X Y$,

DC ii) $\quad D_X(fY) = (X.f)\, Y + f\, D_X Y$.

La connexion de Levi-Civita d'une variété riemannienne (M,g) est l'unique dérivation covariante (dont on montre qu'elle existe) vérifiant de plus, pour tous champs de vecteurs X, Y et Z, les conditions

LC i) $\quad Dg = 0$, i.e. $X.g(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$,

LC ii) $\quad D_X Y - D_Y X = [X,Y]$.

Sur une variété riemannienne (M,g) on définit un élément de volume canonique noté v_g. L'opérateur δ agit de l'espace des r-formes différentielles dans l'espace des $(r-1)$-formes. Si M est compacte, δ est l'adjoint de d pour le produit scalaire $\langle\alpha,\beta\rangle = \int_M g(\alpha,\beta).v_g$, c'est-à-dire que $\langle d\gamma,\alpha\rangle = \langle\gamma.\delta\alpha\rangle$ pour toutes les formes différentielles α et γ de degrés r et $r-1$.

En prolongeant par $\mathbb{C}$-linéarité, on définit $\delta : \Omega^r \to \Omega^{r-1}$. Si $\alpha \in \Omega^{p,q}$, alors $\delta\alpha \in \Omega^{p-1,q} \oplus \Omega^{p,q-1}$ et on note $\delta'\alpha$ et $\delta''\alpha$ les composantes de $\delta\alpha$. Remarquons que si g désigne encore l'extension de la structure hermitienne aux formes différentielles complexes et si $<.,.>$ est la forme bilinéaire non dégénérée définie par $<\alpha,\beta> = \int_M g(\alpha,\beta).v_g$, δ' et δ'' sont les adjoints de d' et d'' par rapport à $<.,.>$.

Remarquons que d' et d'' ne dépendent que de la structure complexe de (M,J), tandis que δ' et δ'' dépendent aussi de la structure hermitienne.

En coordonnées locales, nous choisissons la carte (x^i, y^i) de sorte que le repère $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ soit orthonormé au point m (aucune raison pour qu'il en soit de même en un autre point). Nous obtenons

$$\delta\alpha = -\sum_k i_{\frac{\partial}{\partial x^k}} D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\alpha - \sum_k i_{\frac{\partial}{\partial y^k}} D_{\frac{\partial}{\partial y^k}}\alpha$$

$$= -2\sum_k i_{\frac{\partial}{\partial z^k}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}}\alpha - 2\sum_k i_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}} D_{\frac{\partial}{\partial z^k}}\alpha$$

où D est la connexion de Levi-Civita de (M,g) et i_X le produit intérieur par X. Les deux termes de la somme représentent respectivement $\delta'\alpha$ et $\delta''\alpha$. Pour un repère non orthonormé, nous obtenons

$$\delta'\alpha = -\sum_{i,j} g^{i\bar{j}}\, i_{\frac{\partial}{\partial z^i}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}}\alpha$$

et

$$\delta''\alpha = -\sum_{i,j} g^{\bar{i}j}\, i_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} D_{\frac{\partial}{\partial z^j}}\alpha .$$

§ 4. VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

Théorème 4.1 : Soit (M,J,g) une variété hermitienne. Soit ω la forme de type $(1,1)$ associée à g et D la dérivation covariante canonique (de Levi-Civita). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $D_X(JY) = J(D_X Y)$ pour tous les champs de vecteurs X et Y ;

(ii) $D\omega = 0$;

(iii) $d\omega = 0$.

Preuve de 4.1

(i) $\Rightarrow$ (ii) : en effet, pour tous les champs de vecteurs X,Y,Z,

$$\begin{aligned}(D_X\omega)(Y,Z) &= X.g(JY,Z) - g(JD_X Y,Z) - g(JY,D_X Z)\\ &= (D_X g)(JY,Z) + g(D_X JY - JD_X Y,Z) = 0 .\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) car $d\omega(X,Y,Z) = D_X\omega(Y,Z) - D_Y\omega(X,Z) + D_Z\omega(X,Y)$.

(iii)$\Rightarrow$ (i) : en effet, nous venons de voir que

$$(D_X\omega)(Y,Z) = g(D_X JY - JD_X Y,Z),$$

ce qui donne

$$(*)\quad d\omega(X,Y,Z) = g(D_X JY - JD_X Y,Z) - g(D_Y JX - JD_Y X,Z) + g(D_Z JX - JD_Z X,Y).$$

Si X et Y sont de type $(1,0)$, le crochet $[X,Y]$ est également de type $(1,0)$ car $[\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}] = 0$. Nous avons alors

$$JD_X Y - JD_Y X = J[X,Y] = \sqrt{-1}.[X,Y] = D_X JY - D_Y JX .$$

En remplaçant dans l'égalité $(*)$, ceci donne pour tous les vecteurs X,Y de type $(1,0)$

$$g(D_Z JX - JD_Z X,Y) = 0 .$$

Or $D_Z JX - JD_Z X = \sqrt{-1}(D_Z X + \sqrt{-1}\,JD_Z X)$ est de type $(0,1)$, donc $D_Z JX - JD_Z X = 0$ lorsque X est de type $(1,0)$. Si X et Y sont de type $(0,1)$, un raisonnement identique prouve que $D_Z JX = JD_Z X$, ce qui achève la preuve. ∎

Il suit de 4.1 que si (z^i) est un système de coordonnées complexes, alors $D_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} \frac{\partial}{\partial z^j} = 0$.

Définition 4.2 : Soit (M,J,ω) une variété hermitienne. On dit que la variété est kählérienne si ω vérifie une des conditions (i), (ii) ou (iii) du théorème 4.1 .

Lemme 4.3 : Soit ω une forme réelle de type (1,1), ω est fermée si et seulement si pour tout point m de M il existe un ouvert U contenant m et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = \sqrt{-1}\, d'd''f$.

Preuve : La forme réelle ω étant fermée, il existe au voisinage de chaque point une forme réelle β telle que $d\beta = \omega$ (Lemme de Poincaré). Nous avons $\beta = \beta_1 + \bar{\beta}_1$ où β_1 est de type (1,0) et $\bar{\beta}_1$ de type (0,1). Comme $d\beta$ est de type (1,1), nous avons $d'\beta_1 = d''\bar{\beta}_1 = 0$ et $\omega = d''\beta_1 + d'\bar{\beta}_1$. D'après le lemme de Dolbeault (cf.[2]), le fait que $d''\bar{\beta}_1 = 0$ implique l'existence d'une fonction φ définie sur un voisinage du point considéré et telle que $d''\varphi = \bar{\beta}_1$, auquel cas $d'\bar{\varphi} = \beta_1$. Ceci donne

$$\omega = d''\beta_1 + d'\bar{\beta}_1 = d'd''(\varphi - \bar{\varphi}) = \sqrt{-1}\, d'd''f$$

si f est la fonction réelle telle que $\sqrt{-1}.f = \varphi - \bar{\varphi}$.
Réciproquement, si ω est de la forme $\sqrt{-1}\, d'd''f = -\sqrt{-1}\, d''d'f$ au voisinage de chaque point, nous avons $d\omega = \sqrt{-1}\, d'd'd''f - \sqrt{-1}\, d''d''d'f = 0$. ∎

Corollaire 4.4: Soit (M,J) une variété complexe et ω une forme réelle de type (1,1). La variété (M,J,ω) est kählérienne si et seulement si ω est définie positive et si, pour tout point m de M , il existe une fonction f définie sur un voisinage U de m telle que $\omega = \sqrt{-1}\, d'd''f$ sur U .

Ceci donne une méthode pour la construction de structures kählériennes.

Remarques :

i) Une forme de Kähler ω donne une forme volume ω^n. En effet, choisissons la carte locale (x^i, y^i) de sorte que le repère $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i})$ soit orthonormé au point m où sont effectués les calculs.

Nous obtenons au point m

$$\omega = (\sqrt{-1}/2) \sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i ,$$

soit

$$\omega^n = n\,!\,(\sqrt{-1}/2)^n \, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n = n\,!\, v_g$$

où v_g est la forme volume canonique de (M,g).

ii) Sur une variété kählérienne compacte, la forme de Kähler ω ne peut s'écrire sur toute la variété sous la forme $i\,d'd''f$, où f serait une fonction définie partout.

En effet, en posant $\alpha = \sqrt{-1}\,d''f$, on obtiendrait $\omega = d\alpha$, ce qui donnerait $\omega^n = d\alpha \wedge \omega^{n-1} = d(\alpha \wedge \omega^{n-1})$ et par suite $\int_M \omega^n = 0$.
Ceci est impossible d'après la remarque précédente, puisque ω^n est un élément de volume.

4.5 A titre d'illustration de ce qui précède, nous allons construire la structure kählérienne canonique du projectif complexe $\mathbb{C}P^n$. Notons $p : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}P^n$ l'application-quotient canonique. Un élément $p(\xi) \in \mathbb{C}P^n$ sera donné par ses "coordonnées homogènes", c'est-à-dire par le $(n+1)$-uple $(\xi^o, \dots, \xi^n)$ des coordonnées de ξ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

i) <u>La structure analytique</u> de $\mathbb{C}P^n$ est donnée par le recouvrement ouvert $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ défini par $U_i = \{p(\xi^o, \dots \xi^n) \mid \xi^i \neq 0\}$ et par les cartes $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ avec $\varphi_i\Big(p(\xi^o, \dots, \xi^n)\Big) = \left(\frac{\xi^o}{\xi^i}, \dots, \widehat{\frac{\xi^i}{\xi^i}}, \dots, \frac{\xi^n}{\xi^i}\right)$.

ii) <u>La métrique riemannienne</u> canonique de $\mathbb{C}P^n$ est l'unique métrique qui fait de p une submersion riemannienne de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{C}P^n$.

Plus explicitement, pour tout élément $\xi \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, l'application tangente $T_\xi p$ envoie isométriquement l'hyperplan orthogonal à $\mathbb{C}.\xi$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ sur l'espace tangent en $p(\xi)$ à $\mathbb{C}P^n$.

En coordonnées locales, au voisinage du point $m = p(\xi)$, choisissons une base unitaire $\{e_o, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ telle que $e_o = \xi$; nous avons $z^i = \dfrac{\xi^i}{\xi^o}$ où $\xi^o,\dots,\xi^n$ sont les coordonnées dans cette base.

<u>Au point m</u>, $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ est l'image de $\dfrac{\partial}{\partial \xi^i}$ par l'application $T_\xi p$. Nous avons donc

$$g_{i\bar{j}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^j} \right\rangle \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \; . \\ = 1/2 & \text{si } i = j \; . \end{cases}$$

iii) <u>La forme de Kähler</u> peut se définir aussi par les fonctions $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ données par $\omega_i = \sqrt{-1}\, d'd''f_i$, en posant

$$f_i \circ p(\xi^o,\dots,\xi^n) = \mathrm{Log}\, \frac{\|\xi\|^2}{|\xi^i|^2} \; .$$

Pour démontrer que ceci définit une forme de Kähler ω sur M, il suffit de montrer que ω_i et ω_j coïncident sur $U_i \cap U_j$ et que ω est définie positive. Sur $U_i \cap U_j$, nous avons

$$\omega_i - \omega_j = \sqrt{-1}\, d'd''\, \mathrm{Log} \left[\frac{|\xi^j|^2}{|\xi^i|^2} \right] .$$

Il existe une détermination holomorphe de la fonction

h : $(\xi^o,\dots\xi^n) \mapsto \mathrm{Log}\, \dfrac{\xi^j}{\xi^i}$ au voisinage de tout point $U_i \cap U_j$.

Nous avons donc $d''h = 0$ et $d'\bar{h} = \overline{d''h} = 0$. Ceci donne

$$\omega_i - \omega_j = \sqrt{-1}\, d'd''\,(h + \bar{h}) = \sqrt{-1}\, d'd''h - \sqrt{-1}\, d''d'\bar{h} = 0 \; .$$

Remarquons que $p^*\omega = \sqrt{-1}\, d'd''\, [\mathrm{Log}(\|\xi\|^2)]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$. En effet sur $p^{-1}(U_i)$

$$\mathrm{Log}\,\|\xi\|^2 - \mathrm{Log}\left(\frac{\|\xi\|^2}{|\xi^i|^2}\right) = \mathrm{Log}(\xi^i) + \overline{\mathrm{Log}(\xi^i)} \; .$$

La fonction $\mathrm{Log}(\xi^i)$ admettant une détermination holomorphe au voisinage de tout point de $p^{-1}(U_i)$, nous avons comme ci-dessus

$$d'd''\left[\mathrm{Log}\|\xi\|^2 - \mathrm{Log}\left(\frac{\|\xi\|^2}{|\xi^i|^2}\right)\right] = 0 \; .$$

<u>Attention</u> : $p^*\omega$ peut s'écrire globalement sur $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ comme $\sqrt{-1}\, d'd''(\mathrm{Log}\,\|\xi\|^2)$. Il n'en est pas de même pour ω car $\xi \mapsto \mathrm{Log}\,\|\xi\|^2$ ne passe pas au quotient (voir aussi 4.3 remarque 2 et comparer à l'exposé n°IV).

Pour montrer que ω est définie positive, il suffit de remarquer que U(n+1) agit isométriquement sur $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ donc, par passage au quotient, sur $\mathbb{C}P^n$. La forme $p^*\omega$ étant invariante par l'action de U(n+1), la forme ω l'est aussi.

Le tenseur γ défini par $\gamma(X,Y) = \omega(X,JY)$ est invariant par l'action de U(n+1), donc proportionnel à la métrique g de $\mathbb{C}P^n$. Il est donc facile de vérifier que $\gamma = 2g$ et que ω est bien la forme de Kähler correspondant à g .

En coordonnées locales, et en reprenant les notations de ii), si $\{e_o,\dots,e_n\}$ est une base unitaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ et si $m = p(e_o)$, on a

$$\omega = \sqrt{-1}\, d'd''\left[\operatorname{Log}(1+(z^1)^2 + \dots + (z^n)^2)\right] .$$

Au point $m = p(e_o)$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} dz^i \wedge d\bar{z}^i .$$

A une constante près, ω est bien la forme de Kähler correspondant à g .

4.6 Le <u>laplacien réel</u> est défini par $\Delta = d\circ\delta + \delta\circ d$ (cf.3.2). On définit deux autres laplaciens : le <u>laplacien holomorphe</u> $\Delta' = d'\circ\delta' + \delta'\circ d'$ et le <u>laplacien antiholomorphe</u> $\Delta'' = d''\circ\delta'' + \delta''\circ d''$.

<u>Théorème</u> : <u>Sur une variété kählérienne les laplaciens holomorphe et antiholomorphe coïncident avec la moitié du laplacien riemannien (et coïncident donc entre eux)</u>.

<u>Preuve</u> : On considère l'application L de $\Omega^{p,q}$ dans $\Omega^{p+1,q+1}$: $L\alpha = \omega\wedge\alpha$. Choisissons la carte (x^i,y^i) de sorte que le repère $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ soit orthonormé au point considéré. Tous les calculs suivants sont effectués au point m . Pour une forme différentielle α , on a $d''\alpha = \sum_k d\bar{z}^k \wedge D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}}\alpha$.

D'après 3.2 , on obtient

$$[\delta',L]\alpha = -2\sum_k i_{\frac{\partial}{\partial z^k}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^k}} (\omega\wedge\alpha) + 2\sum_k \omega\wedge i_{\frac{\partial}{\partial z^k}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^k}} \alpha \quad ;$$

comme $D\omega = 0$ d'après 4.1 , on a

$$[\delta',L]\alpha = -2\sum_k (i_{\frac{\partial}{\partial z^k}}\omega)\wedge D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^k}}\alpha = -\sqrt{-1}\sum_k d\bar z^k\wedge D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^k}}\alpha$$
$$= -\sqrt{-1}.d''\alpha\ .$$

On montre de même que $[\delta'',L] = \sqrt{-1}\,d'$; il s'ensuit que

$$-\sqrt{-1}(\delta'\,d'' + d''\,\delta') = \delta'\circ[\delta',L] + [\delta',L]\circ\delta' = 0\ .$$

On montre également que $\delta''d'+d'\delta'' = 0$. Ceci implique

$$\Delta = (d'+d'')\circ(\delta'+\delta'') + (\delta'+\delta'')\circ(d'+d'') = \Delta' + \Delta''.$$

D'autre part, en remarquant que $\delta'\delta'' = -\delta''\delta'$, on obtient

$$\sqrt{-1}(\delta'd'+d'\delta') = \delta'\circ[\delta'',L] + [\delta'',L]\circ\delta' = \delta''\circ[L,\delta'] + [L,\delta']\circ\delta''$$
$$= \sqrt{-1}(\delta''d'' + d''\delta''),$$

ce qui achève la preuve . ∎

Le calcul en coordonnées locales donne, pour une fonction f ,

$$\Delta'f = \delta'd'f = -\sum_{i,j} g^{i\bar j}\, D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^j}}\, d'f\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) \quad \text{d'après 3.2 .}$$

Comme la variété est kählérienne, nous avons $D_{\frac{\partial}{\partial \bar z^j}}\dfrac{\partial}{\partial z^i} = 0$,

ce qui donne

$$\Delta f = 2\Delta'f = -2\sum_{i,j} g^{i\bar j}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^i\,\partial \bar z^j}$$

(cette écriture permet aussi de redémontrer que $\Delta'f = \Delta''f$).

Ceci est évidemment particulier aux variétés kählériennes. Sur une variété complexe, nous n'aurions pas $\Delta = \Delta' + \Delta''$ et, dans l'écriture de $\Delta' f$ en coordonnées locales, interviendraient des termes en $g^{i\bar{j}} d'f(D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}} \frac{\partial}{\partial z^i})$.

Il est important de remarquer que , parce que la variété est kählérienne, Λ est un opérateur différentiel homogène de degré 2 dont les coefficients sont donnés par la métrique. Ceci est une propriété tout à fait exceptionnelle puisqu'en général, sur une variété quelconque, le laplacien s'écrit, en notant $G = \det(g_{ij})$,

$$\Lambda f = - \sum_{i,j} g^{ij} . \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{-1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} [g^{ij} \sqrt{G}] ,$$

il y a alors une partie qui est d'ordre 1 en f et dont les coefficients sont des dérivées des g^{ij}.

Lemme 4.7 : Si ω et ω' sont deux formes de Kähler sur une variété complexe M et si ω et ω' appartiennent à la même classe de cohomologie, alors il existe une fonction f définie sur tout M telle que

$$\omega' = \omega + \sqrt{-1}\, d'd''f.$$

Preuve : Il suffit de montrer que, pour toute forme réelle de type (1,1) qui peut s'écrire sous la forme $d\alpha$, il existe une fonction réelle f telle que $d\alpha = \sqrt{-1}\, d'd''f$.

D'après le théorème de décomposition de Hodge, α peut s'écrire sous la forme $\alpha = \overset{o}{\alpha} + \Delta\gamma$ où $\overset{o}{\alpha}$ est harmonique et γ convenablement choisie. La forme α étant réelle, nous avons $\alpha = \beta + \bar{\beta}$ où β est de type (0,1). Donc $\beta = \overset{o}{\beta} + \Delta\tau$ où $\overset{o}{\beta} + \overline{\overset{o}{\beta}} = \overset{o}{\alpha}$ et $\tau + \bar{\tau} = \gamma$. Comme $d\alpha$ est de type (1,1), on a $d''\beta = 0$ (composante de type (0,2) de $d\alpha$). Ceci donne $0 = d''\beta = d''(\Delta\tau)$ car $d''\overset{o}{\beta}$ est nul et $\Delta = 2\Delta''$ commute avec d'' . Ceci implique $\delta(d''\tau) = 0$, donc $\delta''(d''\tau) = 0$.

Or d'après 4.6 ,

$$\Delta\tau = 2(d''\delta''\tau + \delta''d''\tau) = 2\, d''\delta''\tau$$

et

$$\beta = \overset{o}{\beta} + 2\, d''(\delta''\tau).$$

Posons $\varphi = \delta''\tau$, nous obtenons $d\alpha = d\overset{o}{\alpha} + 2\, d'd''(\delta''\tau) + 2\, d''\left[\overline{d''(\delta''\tau)}\right]$ d'où $d\alpha = 2\, d'd''(\varphi - \bar{\varphi}) = \sqrt{-1}\, d'd''f$ si $\sqrt{-1}\, f = 2(\varphi - \bar{\varphi})$. ∎

Exposé n° IV

CLASSES DE CHERN

par A. POLOMBO

Faculté des Sciences de Tours
et
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Palaiseau

RÉFÉRENCES

[1] M. BERGER, A. LASCOUX, Variétés kählériennes compactes, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. 154 (1970).

[2] R. BOTT, S. S. CHERN, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Mathematica, Vol. 144, (1965) 71-112.

[3] J. P. BOURGUIGNON, Géométrie riemannienne et opérateurs différentiels naturels, Cours de troisième cycle, (à paraître).

[4] S. S. CHERN, Complex manifolds without potentiel theory, Van Nostrand Mathematical Studies n°15 (1967).

[5] F. HIRZEBRUCH, Topological methods in algebraic geometry, Springer Verlag (1966).

[6] J. MILNOR, J. STASHEFF, Characteristic classes, Annals of Mathematical studies n°74 (1974), Princeton University Press.

PREMIÈRE PARTIE : POINT DE VUE DE LA TOPOLOGIE

§ 1. FIBRÉS VECTORIELS COMPLEXES

1.1 Définition : Un fibré vectoriel complexe de rang q est un triple $\xi = (E,\pi,B)$, où E et B sont des espaces topologiques et π une surjection continue de E sur B, tel que

i) il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de B pour lequel $\pi^{-1}(U_i)$ est homéomorphe à $U_i \times \mathbb{C}^q$. On note $\Phi_{U_i} : U_i \times \mathbb{C}^q \to \pi^{-1}(U_i)$ cet homéomorphisme et on dit que $\{U_i\}$ est trivialisant;

ii) la fibre $\pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et la restriction de $\Phi_{U_i}^{-1}$ à $\pi^{-1}(x)$, x appartenant à U_i, est un isomorphisme.

1.2 La condition précédente s'énonce encore sous la forme suivante :

ii') Dans l'intersection de deux ouverts U_k, il existe une application C^o notée $k_{U_iU_j}$, ou plus simplement k_{ij}, à valeurs dans $GL(\mathbb{C},q)$ appelée fonction de transition telle que

$$\left(\Phi_{U_i}(x,v) = \Phi_{U_j}(x,v')\right) \Leftrightarrow \left(k_{U_iU_j}(x)\; v=v'\right).$$

Les fonctions k_{ij} satisfont aux conditions de compatibilité

$$\begin{cases} k_{ij}^{-1} = k_{ji} \\ k_{ij}\, k_{j\ell}\, k_{\ell i} = 1 \qquad \text{dans } U_i \cap U_j \cap U_\ell . \end{cases}$$

Ces conditions expriment que $\left(k_{ij}\right)$ est un cocycle à valeurs dans $GL(\mathbb{C},q)$.

1.3 <u>Exemples</u> :

i) Si X est une variété complexe de dimension n, son fibré tangent est un fibré vectoriel complexe de rang n, dont les fonctions de transition sont les matrices jacobiennes des applications de changement de cartes.

ii) Si $\xi = (E,\pi,B)$ est un fibré vectoriel complexe, son fibré dual $\xi^* = (E^*,p,B)$ a pour fonctions de transition les ${}^t k_{ij}^{-1}$.

iii) Pour deux fibrés $\xi' = (E',\pi',B)$ et $\xi'' = (E'',\pi'',B)$ on définit la <u>somme de Whitney</u> $\xi' \oplus \xi'' = (E' \oplus E'', \pi' \oplus \pi'', B)$. La fibre en x est la somme directe $\pi'^{-1}(x) \oplus \pi''^{-1}(x)$. Les fonctions de transition sont données par la matrice $\begin{pmatrix} k'_{ij} & 0 \\ 0 & k''_{ij} \end{pmatrix}$.

iv) Soient $\xi = (E,\pi,B)$, B' un espace topologique, $f : B' \to B$ une application continue. <u>L'image réciproque</u> $f^*(\xi)$ de ξ par f est le fibré vectoriel complexe $f^*(\xi) = (E',\pi',B')$ où E' est défini par

$$E' = \{(x,v) \mid (x,v) \in B'\times E,\ \pi(v) = f(x)\} .$$

v) Pour deux fibrés $\xi' = (E',\pi',B')$ et $\xi'' = (E'',\pi'',B'')$ on définit le fibré produit $\xi' \boxtimes \xi'' = (E, \pi'\otimes\pi'', B'\times B'')$, la fibre en (x',x'') étant donnée par $\pi'^{-1}(x') \otimes \pi''^{-1}(x'')$.

Lorsque $B'=B''=B$, et si Δ est l'application diagonale de B dans $B\times B$, le fibré image réciproque $\Delta^*(\xi'\boxtimes\xi'')$ est appelé <u>produit tensoriel de</u> ξ' et ξ'' et noté $\xi'\otimes\xi''$. Ses fonctions de transition sont les $k'_{ij} \otimes k''_{ij}$.

1.4 <u>Définition</u> : Deux fibrés de rang q sur B sont dits <u>équivalents</u> si, dans un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de B qui les trivialise, il existe une application h_{U_i} de U_i dans $GL(\mathbb{C},q)$ telle que

$$\Phi'_{U_i}(x,h_{U_i}(v)) = \Phi''_{U_i}(x,v) .$$

Ceci s'écrit encore pour les fonctions de transition

$$k'_{ij} = h_{U_i}\, k''_{ij}\, h^{-1}_{U_j}.$$

A équivalence près les fonctions de transition définissent le fibré et par la suite on dira souvent "fibré" pour "classe de fibrés".

1.5 Une situation qui va particulièrement nous intéresser est celle où le rang du fibré est égal à 1. On dit alors que l'on a un <u>fibré en droites</u> (complexes). Remarquons que le produit tensoriel est une opération interne dans les fibrés en droites qui, avec l'opération de passage au dual, munit l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fibrés en droites d'une structure de groupe.

Le modèle de ces fibrés est, comme nous le verrons plus loin si B est compacte, le fibré η_n défini par un hyperplan de $\mathbb{C}P^n$ qui est le dual du <u>fibré tautologique</u> sur $\mathbb{C}P^n$.

Les fonctions de transition de η_n pour le recouvrement (U_i) de $\mathbb{C}P^n$ donné par les ouverts affines en coordonnées homogènes sont les fonctions multiplication par z_i/z_j où (z_k) désignent les coordonnées homogènes de $\mathbb{C}P^n$. Géométriquement, η_n^* est obtenu en mettant au dessus d'un point de $\mathbb{C}P^n$, espace des droites de $\mathbb{C}^{n+1}$, la droite de $\mathbb{C}^{n+1}$ correspondante.

Pour avoir encore une autre vision de η_n donnons la définition suivante.

Soit $Y \hookrightarrow X$ une sous variété complexe de dimension k de la variété complexe X de dimension n. Chaque point y de Y admet un voisinage ouvert dans X dans lequel les coordonnées locales sont $(z_1,\dots,z_n)$ et tel que, dans ce voisinage, Y s'écrive $z_{k+1} = \dots = z_n = 0$.

Soit $j : Y \to X$ le plongement de Y dans X. On a alors, en notant TX le fibré tangent à X,

$$j^*(TX) \simeq TY \oplus NY \qquad \text{(comme fibrés différentiables)}$$

où NY est le fibré normal à Y. Le fibré NY est analytique.

1.6 Lorsque $k = n-1$, on dit que Y est un diviseur de X à cause de la construction suivante : il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X dans lequel Y s'écrit $f_i = 0$ où f_i est une fonction holomorphe. Si U_i ne rencontre pas Y, f_i est inversible.

Le cocycle $(f_j . f_i^{-1})$ est holomorphe non nul sur $U_i \cap U_j$ et définit sur X un fibré en droites souvent noté $\boxed{Y}$ dans la littérature.

1.7 Considérons alors le plongement de $\mathbb{C}P^{n-1}$ dans $\mathbb{C}P^n$ donné par $z_n = 0$. Les fonctions de transition de $\boxed{\mathbb{C}P^{n-1}}$ sont donnés par $z_n/z_j . z_i/z_n = z_i/z_j$ et ne dépendent donc pas du plongement particulier choisi. Alors η_n s'interprète comme $\boxed{\mathbb{C}P^{n-1}}$.

1.8 La structure de groupe des fibrés en droites induit sur l'ensemble des diviseurs associés une structure de groupe, qui n'apparaissait pas au niveau de la géométrie. Du point de vue de la géométrie algébrique cela revient à considérer les diviseurs définis par les puissances de l'équation d'un diviseur donné.

§ 2. DÉFINITION AXIOMATIQUE DES CLASSES DE CHERN

2.1 Soit $\xi = (E,\pi,B)$ un fibré vectoriel complexe. D'après le théorème de décomposition polaire $GL(q,\mathbb{C})$ s'écrit comme produit topologique $\mathbb{R}^{q^2} \times U(q)$ et comme $\mathbb{R}^{q^2}$ est contractile, seule compte la partie $U(q)$ du produit en ce qui concerne les propriétés topologiques. On considèrera donc que le groupe structural, i.e. le groupe qui opère dans la fibre se réduit de $GL(q,\mathbb{C})$ à $U(q)$, sous-groupe compact maximal du groupe linéaire.

2.2 Les classes de Chern sont définies par le système d'axiomes suivant :

CCi) Pour tout i dans $\mathbb{N}$, on se donne un élément $c_i(\xi)$ dans $H^{2i}(B,\mathbb{Z})$ et on demande que $c_o(\xi)$ soit égal à 1.

CCii) Si B' est un autre espace topologique et f une application continue de B' dans B, alors

$$c(f^*(\xi)) = f^*c(\xi),$$

où $c(\xi)$ désigne la classe de Chern totale

$$c(\xi) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i(\xi) .$$

CCiii) Soient ξ_1 et ξ_2 deux fibrés vectoriels complexes sur B. Alors

$$c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1).c(\xi_2) .$$

CCiv) (axiome de normalisation). Notons h_n le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ associé à la 2n-2 classe d'homologie représentée par l'hyperplan $z_o = 0$ de $\mathbb{C}P^n$ (cet hyperplan s'identifie à $\mathbb{C}P^{n-1}$). Alors

$$c(\eta_n) = 1 + h_n .$$

Remarquons que, si $j : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$ est le plongement précédent, on a

$$j^*(h_n) = h_{n-1} \quad , \quad j^* \eta_n = \eta_{n-1} .$$

On peut montrer que ce système d'axiomes définit les classes de Chern de façon unique.
Les classes de Chern "caractérisent" les fibrés complexes et sont obtenues comme image réciproque des classes de cohomologie d'un espace classifiant.

2.3 Proposition : Si $\xi = (E, \pi, B)$ est un fibré en droites sur B compacte, il existe un entier N et une application $f : B \to \mathbb{C}P^N$ tels que

$$\xi = f^*(\eta_N^*) .$$

Démonstration : On va en fait exhiber une application $\bar{f}$ au dessus de f. On va construire une application $\hat{f}$ de E dans $\mathbb{C}^{N+1}$ telle que $\hat{f}$ soit $\mathbb{C}$-linéaire et injective dans chaque fibre de ξ. La fonction f définie pour e dans E par

$$\bar{f}(e) = (\hat{f}(\pi^{-1}(\pi(e))), \hat{f}(e))$$

répond alors à la question.

Soit $\{U_i\}$ $(i=1,\dots,r)$ un recouvrement ouvert fini de B trivialisant ξ. Comme B est normal, il existe des ouverts $V_i (i = 1,\dots,2)$ tels que $\overline{V}_i \subset U_i$, $\bigcup_i V_i = B$. De même il existe $W_1,\dots,W_r$ ouverts tels que $\overline{W}_i \subset V_i$. Soit λ_i une fonction plateau à support dans V_i et valant 1 sur $\overline{W}_i$.

Comme U_i trivialise ξ, il existe une application h_i de $\pi^{-1}(U_i)$ dans $\mathbb{C}$ qui est linéaire sur les fibres.

Définissons $h_i^! : E \to \mathbb{C}$ par

$$h_i^!(e) = 0 \qquad \text{si } \pi(e) \notin V_i$$

et par

$$h_i^!(e) = \lambda_i(\pi(e))\, h_i(e) \qquad \text{si } \pi(e) \in U_i .$$

L'application $h_i^!$ est continue et linéaire dans chaque fibre. On définit $\hat{f} : E \to \mathbb{C} \oplus \dots\dots \oplus \mathbb{C}$ par

$$\hat{f}(e) = (h_1^!(e), \dots, h_r^!(e)) .$$

Alors $\hat{f}$ est continue et est une injection sur chaque fibre. ∎

2.4 <u>Remarque</u> : On a un résultat du même type pour un fibré de rang quelconque comme image réciproque du fibré tautologique sur une grassmannienne.

Par ailleurs ce résultat s'étend aussi au cas où B est paracompacte. La base du fibré servant de modèle est alors la grassmannienne $G_n(\mathbb{C}^\infty)$, ensemble des sous-espaces de dimension n de $\bigoplus_i \mathbb{C}^i$ muni de la topologie limite inductive.

§ 3. UNE PROPRIÉTÉ DES FIBRÉS EN DROITES

On suppose maintenant que la base du fibré ξ est une variété C^∞ notée M.

3.1 <u>Proposition</u> : <u>Les fibrés en droites C^∞ sur</u> M <u>forment un groupe isomorphe à</u> $H^2(M,\mathbb{Z})$.

<u>Démonstration</u> : Soient respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ le faisceau des germes de fonctions C^∞ sur M à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

Les fonctions de transition d'un fibré en droites ξ sur M sont dans $\mathcal{A}^*$ et définissent donc un élément de $H^1(M,\mathcal{A}^*)$, compte-tenu des conditions de compatibilité. Comme le produit tensoriel de deux fibrés en droites ξ' et ξ'' sur B est encore un fibré en droites sur B , dont les fonctions de transition sont obtenues comme produit tensoriel des fonctions de transition de ξ' et ξ'', on a ainsi un isomorphisme de l'ensemble des fibrés en droites sur B sur $H^1(X,\mathcal{A}^*)$.

Considérons alors la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{e} \mathcal{A}^* \to 0$$

où i est l'inclusion et $e(f) = e^{2i\pi f}$ pour f dans $\mathcal{A}$.
On en déduit une suite exacte de cohomologie

$$H^1(M,\mathcal{A}) \xrightarrow{e^1} H^1(M,\mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^2} H^2(M,\mathcal{A}) \;;$$

comme $\mathcal{A}$ est un faisceau fin, on a $H^1(M,\mathcal{A}) = H^2(M,\mathcal{A}) = \{0\}$.

D'où

$$0 \xrightarrow{e^1} H^1(M,\mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

et l'isomorphisme cherché. ∎

3.2 <u>Remarques</u> :

i) On peut montrer que si ξ est un fibré en droites on a

$$c_1(\xi) = \delta(\xi) .$$

ii) Si X est une variété complexe, ses classes de Chern $c_i(X) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ sont par définition celles de son fibré tangent.

3.3 <u>Proposition</u> : <u>Soit θ^{n+1} le fibré vectoriel trivial de rang</u> n+1 <u>sur $\mathbb{C}P^n$. Alors on a la suite exacte</u>

$$0 \to \eta_n^* \to \theta^{n+1} \to \eta_n^* \otimes T\mathbb{C}P^n \to 0\ . \tag{3.4}$$

<u>Démonstration</u> : Soient $(u_o,\dots,u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_n)$ et $(v_o,\dots,v_{j-1},1,v_{j+1},\dots,v_n)$ les coordonnées déduites des coordonnées homogènes des deux cartes affines U_i et U_j de $\mathbb{C}P^n$. On a alors

$$v_o = \frac{u_o}{u_j},\dots,v_i = \frac{1}{u_j},\dots,v_j = 1,\dots,v_n = \frac{u_n}{u_j},$$

d'où la matrice jacobienne, écrite comme une (n+1) × (n+1) matrice dans laquelle on enlève la j-ème ligne et la i-ème colonne.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ (3.5) \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|c}
u_j^{-1} & & & & & & & -u_o u_j^{-2} & \\
 & \ddots & & & & 0 & & \vdots & 0 \\
 & & u_j^{-1} & & & & & -u_{i-1}u_j^{-2} & \\
\hline
 & & & 0 & & & & -u_j^{-2} & \\
\hline
 & & & & u_j^{-1} & & & -u_{i+1}u_j^{-2} & \\
 & 0 & & & & \ddots & & \vdots & 0 \\
 & & & & & & u_j^{-1} & -u_{j-1}u_j^{-2} & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & \\
\hline
 & & & & & & & -u_{j+1}u_j^{-2} & u_j^{-1} \\
 & & & & & 0 & & \vdots & \ddots \\
 & & & & & & & -u_n u_j^{-2} & u_j^{-1}
\end{array}\right)
\end{array}$$

Soient $(\xi_o,\dots,\xi_n)$ et $(\sigma_o,\dots,\sigma_n)$ les coordonnées du fibré trivial θ^{n+1} au-dessus des ouverts U_i et U_j ; on a bien sûr $\xi_k = \sigma_k$. Remarquons alors que les n-uples $(\xi_o-u_o\xi_i,\dots,\underset{\substack{\text{ième}\\ \text{place}}}{0},\dots,\xi_n-u_n\xi_i)$ et

$(\sigma_o-v_o\sigma_j,\dots,\underset{\substack{\text{jème}\\ \text{place}}}{0},\dots,\sigma_n-v_n\sigma_j)$ constituent les coordonnées au-dessus de U_i et U_j d'un fibré puisque, sur $U_i \cap U_j$,

$$\sigma_k-v_k\sigma_j = \xi_k - \frac{u_k}{u_j}\xi_j = (\xi_k-u_k\xi_i) - \frac{u_k}{u_j}(\xi_k-u_j\xi_i)$$

et que

$$\sigma_i-v_i\sigma_j = \xi_i - \frac{1}{u_j}\xi_j = -\frac{1}{u_j}(\xi_j - u_j\xi_i) .$$

Ce fibré n'est autre que $\eta_n^* \otimes T\mathbb{C}P^n$ dont les matrices de transition s'obtiennent par produit par u_j de la matrice jacobienne (3.5) .

Nous venons donc de définir une application fibrée de θ^{n+1} sur $\eta_n^* \otimes T\mathbb{C}P^n$ dont le noyau est un fibré de rang 1 dont les paramètres λ et ρ au-dessus de U_i et U_j sont reliés au-dessus de $U_i \cap U_j$ par $(\lambda u_o,\dots,\lambda u_{i-1},\lambda,\lambda u_{i+1},\dots,\lambda u) = (\rho v_o,\dots,\rho v_{j-1}, \rho,\rho v_{j+1},\dots,\rho v_n)$.
En particulier $\rho = \lambda . u_j$. Ce fibré est donc η_n^*. ■

3.6 <u>Proposition</u> : <u>La classe de Chern totale de</u> $\mathbb{C}P^n$ <u>est</u> $(1+h_n)^{n+1}$ <u>où</u> h_n <u>est la classe de Chern du fibré</u> η_n .

<u>Démonstration</u> : Par produit tensoriel avec η_n de la suite exacte (3.4), on obtient

$$0 \to \eta_n \otimes \eta_n^* \to \bigotimes_{i=1}^{n+1} \eta_n \to T\mathbb{C}P^n \to 0 .$$

D'après les axiomes des classes de Chern, nous avons prouvé le résultat, puisque le fibré de rang un $\eta_n \otimes \eta_n^*$ est trivial (il a une section non nulle). ■

3.7 La connaissance de la classe de Chern de $\mathbb{C}P^n$ va nous permettre de calculer la classe de Chern d'une hypersurface complexe de $\mathbb{C}P^n$.

Remarquons tout d'abord que si S est une hypersurface de degré k de $\mathbb{C}P^n$, le fibré en droites associé $\lceil S \rceil$ est équivalent à la puissance tensorielle k-ième du fibré η_n.

En effet, une hypersurface S de degré k de $\mathbb{C}P^n$ est défini par un polynôme homogène F de degré k. Sur un ouvert affine U_i, S est définie par $f_i(\frac{z_o}{z_i},\ldots,1,\ldots,\frac{z_n}{z_i}) = \frac{F(z_o,\ldots,z_n)}{z_i^k}$. Alors les fonctions de transition de $\lceil S \rceil$ s'écrivent comme puissance k-ième de celles de η_n.

On a donc $c_1(\lceil S \rceil) = k\, c_1(\eta_n)$.

On a par ailleurs, si j est le plongement de S dans $\mathbb{C}P^n$,

$$j^*(T\mathbb{C}P^n) = TS \oplus j^*(\lceil S \rceil),$$

d'où

$$c(S) = j^*(c(T\mathbb{C}P^n)) \,.\, j^*(c(\lceil S \rceil))^{-1}.$$

Si h est la classe de cohomologie duale de la classe d'homologie de $\mathbb{C}P^{n-1}$ dans $\mathbb{C}P^n$, et si $\widetilde{h} = j^*(h)$ on peut écrire

$$c(S) = (1+\widetilde{h})^{n+1}(1+k\widetilde{h})^{-1} \,.$$

En particulier si S est une surface K3, quartique de $\mathbb{C}P^3$, on obtient

$$c(S) = 1+6\widetilde{h}^2 \,,$$

d'où

$$c_1(S) = 0 \,.$$

DEUXIÈME PARTIE : POINT DE VUE DE LA GÉOMÉTRIE

§ 4. CONNEXION SUR UN FIBRÉ VECTORIEL COMPLEXE

4.1 Dans ce paragraphe $\xi = (E,\pi,M)$ est un fibré vectoriel complexe sur une variété complexe M (par convenance pour la suite).

On note $\mathcal{E}$ l'espace de ses sections. On a donc

$$\mathcal{E} = \{ f \mid f:M \to E \, , \pi \circ f = Id_M \} .$$

Le complexifié du fibré tangent TM de M est noté $T_{\mathbb{C}}M$. On a $T_{\mathbb{C}}M = TM \oplus \overline{TM}$, où $\overline{TM}$ est le fibré vectoriel complexe conjugué de TM. De même on notera $T^*_{\mathbb{C}}M$ le $\mathbb{C}$-dual de $T_{\mathbb{C}}M$.

4.2 Définition : Une connexion sur ξ est une application ∇ , $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{T}^*_{\mathbb{C}}M \otimes \mathcal{E}$ (où $\mathcal{T}^*_{\mathbb{C}}M$ est l'espace des sections de $T^*_{\mathbb{C}}M \to M$) telle que :

C i) $\nabla(e_1+e_2) = \nabla e_1 + \nabla e_2 \, , \quad \forall e_1,e_2 \in \mathcal{E}$;

C ii) $\nabla(fe) = df \otimes e + f \, \nabla e \, , \quad \forall \, e \in \mathcal{E} \, , \forall f \in \mathcal{a}$.

On remarquera que la différence de deux connexions est un élément de $\mathcal{T}^*_{\mathbb{C}}M \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ et que, par suite, l'addition d'un tenseur de ce type à une connexion donnée permet d'obtenir une autre connexion.

4.3 La donnée d'une connexion ∇ sur ξ induit une unique connexion ∇^* sur ξ^*, qui commute à la contraction, définie pour X dans $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M$, e dans $\mathcal{E}$ et t dans $\mathcal{E}^*$, par

$$X.\langle t,e\rangle = \langle \nabla^* t(X),e\rangle + \langle t,\nabla e(X)\rangle .$$

On notera souvent $\nabla_X s$ pour $\nabla s(X)$.

On a aussi une unique connexion, encore notée ∇, sur $\xi^* \otimes \xi = \mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ définie par

$$\nabla(t\otimes e) = \nabla^* t\otimes e + t\otimes\nabla e \ .$$

4.4 Par partition de l'unité on a le résultat suivant :

Proposition : Si M est paracompacte, ξ admet une connexion (et donc beaucoup).

4.5 Définition : Soit $\xi = (E,\pi,M)$ un fibré complexe holomorphe sur M. Une connexion sur ξ est de type (1,0) si, pour toute section holomorphe s de ξ et pour tout $\overline{X}$ dans $\overline{\mathcal{T}M}$, on a

$$\nabla s(\overline{X}) = 0 \ .$$

4.6 Proposition : Si ξ est un fibré holomorphe hermitien (i.e. muni d'une métrique hermitienne dans les fibres), il existe sur ξ une unique connexion, dite canonique et notée D, qui préserve la métrique hermitienne et soit de type (1,0).

Démonstration : Si $<,>$ désigne le produit hermitien, pour deux sections s_1 et s_2 de ξ et pour X dans $\mathcal{T}M$, on a nécessairement

$$X.<s_1,s_2> = <D_X s_1, s_2> \ ,$$

car

$$<s_1, D_{\overline{X}} s_2> = 0 \ .$$

On peut vérifier que l'opérateur ainsi construit satisfait aux axiomes définissant une connexion. ∎

4.7 Remarque : Si ξ est un fibré en droites holomorphe muni de la métrique hermitienne a, on a pour une section locale s de ξ et un champ de vecteurs X

$$D_X s = [s^*(d'\mathrm{Log}\ a)(X)]s \ .$$

En effet $s^*(d'\mathrm{Log}\ a)$ représente localement une forme de type (1,0), et l'égalité découle de l'unicité de la connexion canonique sur ξ muni de a .

La forme différentielle d'Log a définie sur l'espace total E du fibré privé de sa section nulle est appelée <u>la forme de connexion</u>. Pour les fibrés vectoriels de rang supérieur à 1 la définition de la forme de connexion nécessite l'introduction d'un autre objet appelé fibré principal.

4.8 La donnée d'une connexion ∇ sur le fibré ξ permet de définir une différentielle extérieure d^∇ sur les formes différentielles sur M à valeurs dans ξ. On pose, pour θ dans $\Omega^k(M)$ et s dans $\mathcal{E}$,

$$d^\nabla(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s + (-1)^k\ \theta \wedge \nabla s \ .$$

Le produit extérieur correspond à l'antisymétrisation des k variables de forme de θ avec la variable de forme de ∇s .

On notera $\Omega^k(M,\xi)$ l'espace des k-formes à valeurs dans ξ .

4.9 <u>Lemme</u> : <u>Soient</u> θ <u>dans</u> $\Omega^p(M)$ <u>et</u> ω <u>dans</u> $\Omega^q(M,\xi)$. <u>Alors on a</u>

$$d^\nabla(\theta \wedge \omega) = d\,\theta \wedge \omega + (-1)^p\ \theta \wedge d^\nabla \omega \ .$$

<u>Démonstration</u> : Utilisant la linéarité il suffit d'établir la formule pour ω de la forme $\alpha \otimes s$. On a alors

$$\begin{aligned} d^\nabla(\theta \wedge (\alpha \otimes s)) &= d^\nabla((\theta \wedge \alpha) \otimes s) \\ &= d(\theta \wedge \alpha) \otimes s + (-1)^{p+q}\ \theta \wedge \alpha \wedge d^\nabla s \\ &= d\theta \wedge \omega + (-1)^p\ \theta \wedge d\,\alpha \otimes s + (-1)^{p+q}\ \theta \wedge \alpha \wedge d^\nabla s \\ &= d\theta \wedge \omega + (-1)^p\ \theta \wedge d^\nabla \omega \ . \blacksquare \end{aligned}$$

4.10 Définition : La deux-forme R^{∇} à valeurs dans $\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ définie pour X et Y dans $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M$ et s dans $\mathcal{E}$ par

$$R^{\nabla}(X,Y)s = (d^{\nabla}(d^{\nabla}(s)))(X,Y)$$

est appelée la courbure de ∇ .

Compte-tenu de la définition de d^{∇} on a encore

$$R(X,Y)s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]}s \ .$$

4.11 Proposition : Sur un fibré vectoriel holomorphe hermitien ξ la courbure R^D de la connexion canonique D est de type (1,1).

Démonstration : Soient X et Y dans $\mathcal{T}M$ et s dans $\mathcal{E}$. On note $<,>$ le produit hermitien. On a

$$\begin{aligned} <R(X,Y)s,s> &= <D_X(D_Y s) - D_Y(D_X s) - D_{[X,Y]}s,s> \\ &= X.Y.<s,s> - Y.X.<s,s> - [X,Y].<s,s> \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Remplaçant X et Y par $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, on montre de même que

$$<R(\overline{X},\overline{Y})s,s> = 0 \ . \blacksquare$$

4.12 Lemme : Soit ω une k-forme sur M à valeurs dans ξ . Alors on a, pour X,Y dans $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M$,

$$R^{\nabla}(X,Y) \underset{\smile}{\wedge} \omega = (d^{\nabla}(d^{\nabla}\omega))(X,Y) \ ,$$

où $\underset{\smile}{\wedge}$ est le produit extérieur des formes différentielles suivi de la contraction (1,3) $\xi^* \otimes \xi \otimes \xi \to \xi$.

Démonstration : Posons $\omega = \theta \otimes s$ avec $\theta \in \Omega^k(M)$ et $s \in \mathcal{E}$;
on a

$$d^\nabla(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s + (-1)^k \theta \wedge d^\nabla s .$$

$$d^\nabla(d^\nabla(\theta \otimes s)) = (-1)^{k+1} d\theta \wedge d^\nabla s + (-1)^k d\theta \wedge d^\nabla s - (-1)^{2k} \theta \wedge d^\nabla d^\nabla s$$
$$= \theta \wedge d^\nabla d^\nabla s ,$$

d'où

$$d^\nabla(d^\nabla(\omega))(X,Y) = R(X,Y) \underset{\smile}{\wedge} \omega . \blacksquare$$

4.13 Proposition (Deuxième identité de Bianchi): La deux-forme de courbure R^∇ de la connexion ∇ est fermée pour la différentielle extérieure d^∇.

Démonstration : On a

$$(d^\nabla R^\nabla)(s) = d^\nabla(R^\nabla(s)) - R^\nabla \underset{\smile}{\wedge} d^\nabla s$$
$$= d^\nabla d^\nabla d^\nabla s - d^\nabla d^\nabla d^\nabla s = 0 . \blacksquare$$

4.14 Proposition : Soit $\xi = (E,\pi,M)$ un fibré en droites holomorphe hermitien. On note a la métrique et D la connexion canonique. Alors on a, pour une section locale s ,

$$R^D(s) = -s^*(d''d' \operatorname{Log} a) \otimes s .$$

Démonstration : Comme la connexion canonique est de type (1,0) et que $[X,\overline{Y}] = 0$, on a

$$R^D(X,\overline{Y})s = -D_{\overline{Y}}(D_X s) .$$

Utilisant l'expression

$$D_X s = [s^*(d'\mathrm{Log}\ a)(X)]s ,$$

on obtient

$$D_{\overline{Y}}(D_X s) = d[s^*(d'\mathrm{Log}\ a)(X)](\overline{Y})s + [s^*(d'\mathrm{Log}\ a)(X)]\ D_{\overline{Y}} s .$$

Le dernier terme est nul car D est de type (1,0). La différentielle extérieure commute à l'image réciproque et comme pour une fonction f , $df(\overline{Y}) = d''f(\overline{Y})$, on a

$$R^D(X,\overline{Y})s = -[s^*(d''d'\mathrm{Log}\ a)(X,\overline{Y})]s . \blacksquare$$

4.15 <u>Proposition</u> : <u>Soient ∇ et ∇' deux connexions sur le fibré $\xi = (E,\pi,M)$. Alors, si Δ désigne la différence $\nabla - \nabla'$, on a</u>

$$R^\nabla - R^{\nabla'} = d^\nabla\Delta - \Delta \overset{\wedge}{\smile} \Delta ,$$

<u>où $\Delta \overset{\wedge}{\smile} \Delta$ désigne le produit extérieur suivi de la contraction $(\xi^* \otimes \xi) \otimes (\xi^* \otimes \xi) \to \xi^* \otimes \xi$.</u>

<u>Démonstration</u> : Pour s dans $\mathcal{E}$ et Y,X dans $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M$ on a

$$\begin{aligned} R^\nabla(X,Y)s - R^{\nabla'}(X,Y)s &= (d^\nabla d^\nabla s)(X,Y) - (d^{\nabla'} d^{\nabla'} s)(X,Y) \\ &= ((d^\nabla - d^{\nabla'}) \circ d^\nabla s)(X,Y) - (d^{\nabla'} \circ (d^{\nabla'} - d^\nabla)s)(X,Y) \\ &= \Delta(X)\ d^\nabla s(Y) - \Delta(Y)\ d^\nabla s(X) + \\ &\quad + d^\nabla(\Delta(s))(X,Y) - \Delta(X)(\Delta(Y)(s)) + \Delta(Y)(\Delta(X)(s)) . \end{aligned}$$

Utilisant l'identité

$$d^\nabla(\Delta(s))(X,Y) = (d^\nabla\Delta(X,Y))s + \Delta(Y)d^\nabla s(X) - \Delta(X)d^\nabla s(Y) ,$$

on obtient

$$R^{\nabla}(X,Y)s-R^{\nabla'}(X,Y)s = d^{\nabla}\Delta(X,Y)s - (\Delta(X)\circ\Delta(Y))s + (\Delta(Y)\circ\Delta(X))s\ . \blacksquare$$

§ 5. LA CLASSE c_1

5.1 Soit $\xi = (E,\pi,M)$ un fibré vectoriel complexe muni d'une connexion ∇. On va maintenant construire à partir de ∇ une forme différentielle sur M représentant la classe $c_1(\xi)$.

5.2 Proposition : La deux-forme $\frac{1}{2i\pi}\, r^{\nabla}$ (où r^{∇} = trace R^{∇}) est fermée et définit une classe de cohomologie sur M au sens de Rham. Cette classe ne dépend pas de la connexion sur ξ et coïncide avec l'image de $c_1(\xi)$ dans $H^2(M,\mathbb{R})$.

Démonstration : Compte tenu de la définition de la connexion sur $\xi^* \otimes \xi$ on a

$$dr^{\nabla} = d \text{ trace } R^{\nabla} = \text{trace } d^{\nabla} R^{\nabla},$$

d'où, comme R^{∇} vérifie l'identité de Bianchi,

$$dr^{\nabla} = 0\ .$$

Si ∇' est une autre connexion sur ξ, on a

$$R^{\nabla} - R^{\nabla'} = d^{\nabla}\Delta - \Delta \curlywedge \Delta\ ,$$

c'est-à-dire

$$R^{\nabla}(X,Y)s - R^{\nabla'}(X,Y)s = d^{\nabla}\Delta(X,Y)s - (\Delta(X)\circ\Delta(Y))s + (\Delta(Y)\circ\Delta(X))s\ ;$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{trace }(R^{\nabla}(X,Y) - R^{\nabla'}(X,Y)) &= \text{trace } d^{\nabla}\,\Delta(X,Y)\\ &= d \text{ trace } \Delta(X,Y).\end{aligned}$$

Les formes r^{∇} et $r^{\nabla'}$ ne diffèrent donc que par un cobord.
Montrons maintenant que r satisfait aux axiomes des classes de Chern.

Comme $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, les classes $c_1(\eta_n)$ et $[r]$ sont proportionnelles. Pour trouver le coefficient de proportionnalité il suffit de les évaluer sur un cycle, par exemple $\mathbb{C}P^1$.

Considérons le fibré tangent $T\mathbb{C}P^1$ de $\mathbb{C}P^1$. Sur $\mathbb{C}P^1$ on a les deux cartes

$$\phi_o : (z_o, z_1) \longmapsto z_1/z_o \qquad (z_o \neq 0),$$

$$\phi_1 : (z_o, z_1) \longmapsto z_o/z_1 \qquad (z_1 \neq 0).$$

On a pour les applications de changement de carte

$$z \xmapsto{\psi_1^{-1}} (z,1) \xmapsto{\psi_o} \frac{1}{z} .$$

Les fonctions de transition sont en $-1/z^2$ et donc en $-z^2$ pour le fibré cotangent T^*M . On a par suite

$$2\, c_1(\eta_1) = c_1(T^*M) .$$

D'autre part

$$[r]\,[\mathbb{C}P^1] = [ir][S^2] = 4i\pi ,$$

et

$$c_1(\eta_1)[\mathbb{C}P^1] = 1 ;$$

d'où

$$[r] = (2i\pi)\ c_1(\eta_1)\ .$$

Les connexions se comportant de façon naturelle par image réciproque, il en est de même pour $[r]$.

Enfin si $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, la donnée d'une connexion sur chaque ξ_i munit ξ d'une connexion pour laquelle $r = r_1 + r_2$, donc $[r]=[r_1]+[r_2]$, condition à laquelle se réduit pour c_1 l'axiome sur les sommes de Whitney. ∎

5.3 <u>Définition</u> : La forme $\frac{1}{2i\pi} r^{\nabla}$ est appelée <u>première forme de Chern</u> de (ξ,∇) et <u>notée</u> $\gamma_1(\xi,\nabla)$ ou $\gamma_1(\xi)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la connexion choisie. C'est une forme de type (1,1).

5.4 <u>Remarques</u> : i) Si TM est le fibré tangent d'une variété kählérienne M et si ∇ est une connexion sur TM , alors la <u>courbure de Ricci</u> ρ^{∇} de ∇ est définie pour X,Y,T dans $T_{\mathbb{C}}M$ comme la trace de l'endomorphisme

$$Y \to R^{\nabla}(X,Y)T\ .$$

Lorsque l'on choisit sur TM la connexion canonique D , la courbure R^D vérifie la première identité de Bianchi qui s'écrit

$$R^D(X,\overline{Y})\overline{T} = R^D(X,\overline{T})\overline{Y}$$

et

$$R^D(X,\overline{Y})T = R^D(T,\overline{Y})X\ .$$

La courbure de Ricci est alors aussi la trace de l'endomorphisme

$$\overline{T} \to R(X,\overline{Y})\overline{T}$$

et on a donc $\gamma_1(TM,D) = \frac{1}{2i\pi}\ \rho^D$.

ii) On peut aussi construire, au moyen de la courbure, des formes de Chern représentant les classes de Chern de degré supérieur à un.

5.5 **Lemme**: Soit $\xi = (E,\pi,M)$ un fibré holomorphe hermitien de rang q. Le fibré $\Lambda^q\xi$ est de façon naturelle un fibré en droites holomorphe hermitien. Alors, si R^Λ est la courbure de la connexion canonique sur $\Lambda^q\xi$, on a

$$r^D = R^\Lambda = \text{trace } R^D .$$

Démonstration : Soit (s_i) une base locale de sections de ξ. Alors $\sigma = s_1\wedge \dots \wedge s_q$ est une section locale de $\Lambda^q\xi$. Pour $X,\overline{Y}$ dans $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M$ on a

$$<R^\Lambda(X,\overline{Y})\sigma,\sigma> = <d^D d^D\sigma(X,\overline{Y}),\sigma> ,$$

le crochet désignant la métrique hermitienne sur $\Lambda^q\xi$ induite par la métrique de ξ.

D'où

$$<d^D d^D\sigma(X,\overline{Y}),\sigma> = \sum_{i,j} <s_1\wedge\dots\wedge d^D s_i\wedge\dots\wedge d^D s_j\wedge\dots\wedge s_q(X,\overline{Y}),\sigma>$$

$$= \sum_i <s_1\wedge\dots\wedge d^D d^D s_i(X,\overline{Y})\wedge\dots\wedge s_q,\sigma> ,$$

car $d^D s_i(\overline{Y}) = 0$.

Comme

$$<s_1\wedge\dots\wedge s_q, s'_1\wedge\dots\wedge s'_q> = \det(<s_i,s'_j>) ,$$

on obtient en un point où (s_i) est une base unitaire

$$<d^D d^D\sigma(X,\overline{Y}),\sigma> = \sum_i <d^D d^D s_i(X,\overline{Y}),s_i> ,$$

où cette fois le crochet est la métrique de ξ. On a donc

$$\operatorname{trace} R^D(X,\overline{Y}) = \sum_i \langle R^D(X,\overline{Y})\, s_i, s_i\rangle$$
$$= \langle R^\Lambda(X,\overline{Y})\, \sigma,\sigma\rangle . \blacksquare$$

5.6 Proposition : Soit $\xi = (E,\pi,M)$ un fibré holomorphe hermitien de rang q. Alors si a est la métrique hermitienne induite sur $\Lambda^q\xi$ et si σ est une section (éventuellement locale) de Λ^q ne s'annulant pas, on a

$$\gamma_1(\xi,D) = \frac{1}{2i\pi}\, \sigma^*(d'd'' \operatorname{Log} a) .$$

Démonstration : Suivant la proposition 4.14 on a pour une section σ de $\Lambda^q\xi$

$$R^\Lambda(\sigma) = -\sigma^*(d''d' \operatorname{Log} a) \otimes \sigma .$$

Utilisant le lemme précédent on peut écrire, pour une base locale (s_i) de sections de ξ et pour $\sigma = s_1 \wedge \ldots \wedge s_q$,

$$\sum_i \langle R^D\, s_i, s_i\rangle = a(R^\Lambda\sigma,\sigma) = -\sigma^*(d''d' \operatorname{Log} a)\; a(\sigma,\sigma).$$

Par la proposition 5.2, $\gamma_1(\xi,D) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{trace} R^D$. D'où si $a(\sigma,\sigma) = 1$ au point x de M, on obtient

$$\gamma_1(\xi,D) = -\frac{1}{2i\pi}\, \sigma^*(d''d' \operatorname{Log} a) .$$

Comme $d''d' = -d'd''$, la proposition est démontrée. $\blacksquare$

5.7 Sur ce cas particulier (fibré holomorphe), il est maintenant clair que la première classe de Chern d'un fibré hermitien (donc avec des fonctions de transition dans $U(q)$) est l'obstruction au choix global d'un élément de volume complexe, i.e. une section partout non nulle de $\Lambda^q E$. On peut encore dire que c_1 est l'obstruction à ce que les fonctions de transition du fibré soient dans SU(q).

§ 6. UNE APPLICATION

6.1 Proposition : Soient X une variété complexe de dimension n et Y une sous-variété complexe de X de dimension n-1 . Alors si h est la classe de cohomologie associée par dualité à $[Y]$, on a

$$c_1(\lceil Y \rceil) = h \;.$$

Démonstration : Comme $\lceil Y \rceil$ est trivial hors de Y , on peut choisir sur $\lceil Y \rceil$ une métrique qui soit plate dans le complémentaire d'un voisinage tubulaire V_η de Y . La première forme de Chern est alors à support dans V_η . Si α est une (n-1,n-1)-forme fermée, on a donc

$$([\alpha] \cup c_1(\lceil Y \rceil))\,[X] = \int_X \alpha \wedge \gamma_1(\lceil Y \rceil) = \int_{V_\eta} \alpha \wedge \gamma_1(\lceil Y \rceil) \;.$$

Si a est la métrique hermitienne sur $\lceil Y \rceil$, on peut écrire

$$\int_{\text{fibre}} d \operatorname{Log} a = \int_{\text{fibre}} d' \operatorname{Log} z\bar{z} = \int_{\text{fibre}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \;.$$

Alors, notant SNY l'espace total du fibré en cercles du fibré normal à Y et π_S la projection, on a

$$\int_Y \alpha = -\frac{i}{2\pi} \int_{SNY} \pi_S^* \,\alpha \wedge d' \operatorname{Log} a \;.$$

Pour un voisinage tubulaire assez petit, l'exponentielle du fibré normal est un difféomorphisme. D'où

$$\int_{V_\eta} \alpha \wedge \gamma_1(\lceil Y \rceil) = \int_{NY} \exp^* \alpha \wedge \exp^* \gamma_1(\lceil Y \rceil) \;.$$

Notons ζ_t le flot géodésique. Alors comme $\exp^* = \zeta_1^* \circ \pi^*$, $\exp^*\alpha$ et $\pi^*\alpha$ sont cohomologues. Il en est de même pour $\exp^* \gamma_1(\,Y\,)$ et $\pi^*\gamma_1(\lceil Y \rceil)$.

On peut donc écrire

$$\int_{NY} \exp^*\alpha \wedge \exp^*\gamma_1(\lceil Y \rceil) = \int_{NY} \pi^*\alpha \wedge \pi^*\gamma_1(\lceil Y \rceil) + \int_{NY} d\omega \ ,$$

où

$$\omega = \exp^*\alpha \wedge \beta' + \exp^*\gamma_1(\lceil Y \rceil) \wedge \beta + \beta \wedge d\beta'$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} d\beta = \exp^*\alpha - \pi^*\alpha \ , \\ d\beta' = \exp^* \gamma_1(\lceil Y \rceil) - \pi^* \gamma_1(\lceil Y \rceil). \end{array} \right.$$

Comme $\pi^* \gamma_1(\lceil Y \rceil)$ est homogène de degré 0 en dehors de la section nulle et que $\gamma_1(\lceil Y \rceil)$ est à support compact, on peut écrire

$$d\omega = d\omega_o + d\omega_1 \ ,$$

où ω_o est à support compact et ω_1 homogène de degré 0 .
On a alors

$$\int_{NY} d\omega = \int_{NY} d\omega_1 = \int_{N^*Y} d\omega_1 \ ,$$

où N^*Y désigne le fibré normal privé de sa section nulle.

Comme ω_1 est homogène de degré 0, $\omega_1 = p^*\omega_1'$ où ω_1' est définie sur SNY et où p est la projection de N^*Y sur SNY ; on a

$$\int_{NY} d\omega = \int_{N^*Y} p^*d\omega_1 = \int_{SNY} dp^*\omega_1 = 0 \ .$$

Notons N_ε^*Y le fibré normal privé des points à distance plus petite que ε de la section nulle. On a

$$\int_{NY} \pi^*\alpha \wedge \pi^*\gamma_1(\lceil Y\rceil) = \int_{N^*Y} \pi^*\alpha \wedge \pi^*\gamma_1(\lceil Y\rceil)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o} \int_{N^*_\varepsilon Y} \pi^*\alpha \wedge \frac{i}{2\pi}\, dd'\mathrm{Log}\, a \;.$$

On utilise le théorème de Stokes

$$\int_{NY} \pi^*\alpha \wedge \pi^*\gamma_1(\lceil Y\rceil) = \lim_{\varepsilon \to o} \int_{\partial N^*_\varepsilon Y} \pi^*\alpha \wedge \left(-\frac{i}{2\pi}\right) d'\mathrm{Log}\, a$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \int_{SNY} p^*\, \pi^*\alpha \wedge d'\mathrm{Log}\, a \;;$$

comme $\pi \circ p = \pi_S$, on obtient

$$\int_{NY} \pi^*\alpha \wedge \pi^*\gamma_1(\lceil Y\rceil) = \int_Y \alpha$$

$$=([\alpha] \cup h)[X] \,.$$

D'où $\quad c_1(\lceil Y\rceil) = h \,.$ ∎

Exposé n° V

ÉNONCÉ DES THÉORÈMES ET MISE EN ÉQUATION

par L. BÉRARD BERGERY

Institut Elie Cartan
Université Nancy I

RÉFÉRENCES

[1] S. T. YAU, On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I , Comm. Pure and Appl. Math. XXXI (1978), 339-411.

§ 1. INTRODUCTION ET RAPPELS

1.1 Dorénavant, on se fixe une variété M complexe, compacte, connexe de dimension (complexe) $m \geq 2$, et on supposera que M admet des métriques kählériennes compatibles avec cette structure complexe.

On insiste sur le fait que la structure complexe (et en particulier l'opérateur J) est fixée (et n'est pas donnée à automorphisme près), et que toutes les métriques kählériennes considérées sont compatibles à cette structure complexe.

1.2 Soit g une telle métrique kählérienne ($g(JX,JY) = g(X,Y)$). On lui associe canoniquement (cf. exposé n°III) une 2-forme réelle ω de type (1,1), qui est fermée puisque g est kählérienne. La classe de cohomologie $[\omega]$ de ω dans $H^2(M,\mathbb{R})$ n'est pas un invariant de la structure complexe. En général, l'ensemble des classes $[\omega]$ pour toutes les métriques kählériennes compatibles est un cône convexe de $H^2(M,\mathbb{R})$. Par exemple, si g est une métrique kählérienne et t un nombre réel positif, tg est encore une métrique kählérienne compatible dont la forme est $t\omega$ et la classe $t[\omega]$.

1.3 On rappelle que g est déterminée par la forme ω. On appellera dorénavant ω la forme de Kähler de la métrique considérée. On remarque qu'une 2-forme fermée réelle de type (1,1) n'est pas forcément une forme de Kähler. Il faut en plus (et il suffit) que le tenseur symétrique $g(X,Y) = \omega(JX,Y)$ soit défini positif. On dira dans ce cas que ω elle-même est définie positive.

1.4 Si g est une métrique kählérienne, sa connexion de Levi-Civita D est en même temps une connexion "complexe" c'est à dire D vérifie $DJ = 0$ ou encore (étendue à $T_{\mathbb{C}} M$ par linéarité) : si X est de type (1,0), alors $D_Z X$ est de type (1,0) (cf 4.1 de l'exposé n°III). On associe à D sa courbure R par $R(X,Y) = D_{[X,Y]} - [D_X,D_Y]$ et son tenseur de courbure de Ricci ρ défini par $\rho(X,Y) = \operatorname{trace}(Z \mapsto R(X,Z)Y)$. Alors ρ est un 2-tenseur symétrique, qui satisfait $\rho(JX,JY) = \rho(X,Y)$ (cela suit de 4.11 de l'exposé n°IV). De la même façon qu'à g on a associé ω, à ρ on associe canoniquement la <u>forme de Ricci</u> γ définie par

$$\gamma(X,Y) = \rho(X,JY) .$$

On rappelle que γ est une 2-forme réelle de type (1,1) <u>fermée</u> (pour la deuxième identité de Bianchi (voir exposé n^o IV) et que la classe de cohomologie $[\gamma]$ de γ dans $H^2(M,\mathbb{R})$ satisfait $[\gamma] = 2\pi\, c_1(M)$. En particulier, $[\gamma]$ ne dépend <u>que</u> de la structure complexe considérée (et pas de g).

1.5 On aura besoin de l'expression de ces quantités en <u>coordonnées locales complexes</u> (z^α). On a

$$g = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta,$$

$$\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta,$$

$$\rho = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \rho_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta,$$

$$\gamma = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \rho_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$$

et γ se calcule à partir des coefficients de g (ou de ω) par la formule

$$\gamma = -id'd'' \operatorname{Log} \det(g_{\alpha\bar\beta}) .$$

On remarque que cette expression fait intervenir l'élément de volume de M. En effet ω^m est la forme volume de M associée à g et s'écrit en coordonnées locales

$$\omega^m = (i^m) \quad (\det(g_{\alpha\bar\beta}))\, dz^1 \wedge d\bar z^1 \wedge \dots \wedge dz^m \wedge d\bar z^m.$$

On rappelle enfin un lemme important sur les 2-formes fermées réelles de type (1,1), qui nous servira souvent dans la suite :

1.6 Lemme (cf. exposé n°III) : Si α et β sont deux 2-formes fermées réelles de type (1,1) dans la même classe de cohomologie, alors il existe une fonction réelle φ définie à une constante près telle que

$$\beta = \alpha + id'd''\varphi .$$

§ 2. ÉNONCÉ DU PREMIER THÉORÈME

2.1 On énonce d'abord le théorème de Calabi-Yau, solution de la première conjecture de Calabi.

Soit M une variété complexe, compacte, connexe, de dimension complexe $m \geq 2$. Soit c une classe de cohomologie dans $H^2(M,\mathbb{R})$ contenant au moins une forme de Kähler compatible avec la structure complexe. On considère : l'ensemble $\mathcal{E}$ des formes de Kähler ω sur M (compatibles avec la structure complexe) telles que $[\omega] = c$ (c'est à dire $\mathcal{E}$ est l'ensemble des formes de Kähler dans la classe c) ; l'ensemble $\mathfrak{F}$ des 2-formes γ fermées réelles de type (1,1) telles que $[\gamma] = 2\pi\, c_1(M)$. On forme l'application Cal : $\mathcal{E} \to \mathfrak{F}$ définie par $\mathrm{Cal}(\omega) = \gamma_\omega$ où γ_ω est la forme de Ricci de la métrique kählérienne définie par ω. Alors :

Théorème I . L'application Cal est bijective.

Autrement dit, pour toute classe de cohomologie c de $H^2(M,\mathbb{R})$ dans laquelle il existe une forme de Kähler et pour toute 2-forme γ fermée réelle de type (1,1) avec $[\gamma] = 2\pi\, c_1(M)$, il existe une unique forme de Kähler ω telle que $[\omega] = c$ et $\gamma_\omega = \gamma$.

2.2 Exemple - motivation

Lorsqu'il a proposé cette conjecture, Calabi s'était intéressé spécialement aux variétés kählériennes vérifiant $c_1(M) = 0$, qu'il appelle variétés kählériennes spéciales.

Un corollaire immédiat du théorème I est la proposition suivante :

2.3 Corollaire : Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension $m \geq 2$ et vérifiant $c_1(M) = 0$. Alors, dans toute classe de cohomologie de $H^2(M,\mathbb{R})$ contenant une forme de Kähler, il existe une et une seule forme de Kähler telle que la courbure de Ricci de la métrique kählérienne correspondante soit identiquement nulle.

L'intérêt de cette construction (du moins pour les géomètres riemanniens) est de fournir les premiers exemples de variétés riémanniennes à courbure de Ricci nulle et non plates.
Par exemple les "surfaces K3" vérifient $c_1(M) = 0$ et sont simplement connexes, donc n'admettent aucune métrique riémannienne plate.

2.4 Remarque : Cela résoud en particulier un problème d'holonomie : le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne irréductible non symétrique est "en général" SO(n). Il est U(m) (n = 2m) précisément pour les variétés kählériennes à courbure de Ricci non identiquement nulle et SU(m) pour les variétés kählériennes à courbure de Ricci identiquement nulle (d'où le nom de variété kählériennes spéciales). Les exemples obtenus montrent que le groupe SU(m) est réalisé. (Il reste encore quelques groupes d'holonomie qui sont possibles, mais pour lesquels on n'a pas d'exemple : $Sp(\frac{n}{4})$ $(n \geq 8)$, G_2 et Spin 7 resp. en dimension 7 et 8).

2.5 Remarque : Le théorème peut se concevoir comme un résultat d'obstruction : il dit que la seule obstruction sur une 2-forme fermée réelle γ de type (1,1) pour qu'elle soit la forme de Ricci d'une métrique kählérienne est la condition cohomologique $[\gamma] = 2\pi\, c_1(M)$. Ceci paraît a priori optimiste, mais on transformera bientôt l'énoncé pour le rendre plus "crédible".

§ 3. CONJECTURES VOISINES

3.1 Les variétés riemanniennes à courbure de Ricci nulle sont un cas particulier de ce qu'on appelle les variétés d'Einstein, c'est à dire les variétés riemanniennes vérifiant $\rho = \lambda g$, où λ est une constante. On remarque que si on remplace g par tg, où t est une constante positive, ρ ne change pas (car la connexion de Levi-Civita est la même pour g et tg), donc seul le signe de λ importe réellement.

On va essayer de construire des métriques kählériennes d'Einstein avec les constantes +1 ou -1 (le cas $\lambda = 0$ étant résolu par le théorème I).

3.2 On constate tout d'abord qu'il apparaît une nouvelle obstruction à ce problème. En effet, si $\rho = \pm g$, on a $\gamma = \pm \omega$ donc la classe de cohomologie $c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[\gamma]$ contient une 2-forme fermée réelle de type (1,1) "définie" (positive ou négative respectivement) au sens où la forme hermitienne canoniquement associée l'est. On est donc conduit à la

Définition : La classe $c_1(M)$ est dite positive (respectivement négative) si elle contient une 2-forme fermée réelle de type (1,1) dont la forme hermitienne associée est définie positive (respectivement négative).

On a donc "démontré" la

3.3 Proposition : Si M admet une métrique kählérienne d'Einstein avec la constante + 1 (respectivement - 1), alors $c_1(M)$ est positive (respectivement négative).

La réciproque à cette proposition a un statut différent suivant la valeur de la constante. On a d'une part le théorème (T. Aubin, S.T. Yau) :

3.4 Théorème II^- : Soit M une variété complexe compacte connexe de dimension $m \geq 2$ avec $c_1(M)$ négative. Alors il existe une unique métrique kählérienne d'Einstein avec la constante -1, compatible avec la structure complexe.

3.5 On peut aussi se poser la

Question II^+ : Si M vérifie $c_1(M)$ positive, existe - t - il une et une seule métrique kählérienne d'Einstein avec la constante $+1$?

mais la réponse est négative pour plusieurs raisons :

a) il existe des variétés (par exemple $\mathbb{C}P^2$ avec un ou deux points éclatés) admettant des métriques kählériennes à $c_1(M)$ positive, mais n'admettant pas de métrique kählérienne d'Einstein ;

b) même s'il y a existence, il peut ne pas y avoir unicité (voir exposé n° X).

3.6 Les questions II^- et II^+ sont parfois appelées 2ème conjecture de Calabi, mais à tort, Calabi connaissant semble-t-il les contre-exemples cités en a). Dans l'article original sur la question, il pose une conjecture plus générale, qui sera reprise dans un exposé ultérieur et qui implique le théorème II^-.

§ 4. MISE EN ÉQUATION DU THÉORÈME I

4.1 On va remplacer le problème posé sur les formes par un problème sur les fonctions, énoncé en termes de formes volumes.

Sous les hypothèses du théorème I, on choisit une fois pour toutes une métrique kählérienne g dont la forme de Kähler ω est dans la classe choisie ($[\omega] = c$).

4.2 On notera γ_ω sa forme de Ricci. Soit maintenant $\tilde{\gamma}$ une autre 2-forme fermée réelle de type (1,1) avec

$$[\tilde{\gamma}] = 2\pi\, c_1(M) = [\gamma_\omega] .$$

D'après le lemme 1.6, il existe une fonction f réelle sur M telle que

$$\tilde{\gamma} = \gamma_{\omega} - id'd''f$$

et f est unique à une constante près.
Pour lever cette indétermination, on choisit f telle que

$$\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m \quad (= \text{vol } M) \ .$$

4.3 Pour démontrer le théorème I, on cherche donc $\tilde{\omega}$ forme de Kähler telle que $[\tilde{\omega}] = [\omega]$ et $[\gamma_{\tilde{\omega}}] = [\tilde{\gamma}]$.

Toujours par le lemme 1.6, $\tilde{\omega}$ peut s'écrire $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$ où φ est une fonction réelle sur M , unique à une constante près.

Pour lever l'indétermination, on choisira

$$\int_M \varphi \, \omega^m = 0 \ .$$

On exprime alors $\gamma_{\tilde{\omega}}$ en fonction de $\tilde{g}$; on a

$$\gamma_{\tilde{\omega}} = -id'd'' \operatorname{Log} \det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}})$$

et on veut résoudre $\tilde{\gamma} = \gamma_{\tilde{\omega}}$, soit

$$-id'd'' \operatorname{Log} \det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}) = -id'd'' \operatorname{Log} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) - id'd'' f \ .$$

Puisque les trois fonctions sont réelles, on obtient

$$\operatorname{Log} \det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}) = \operatorname{Log} \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) + f + C$$

(où C est une constante) ou encore

$$\frac{\det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}})}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}})} = e^{f+C}.$$

4.4 On introduit alors les formes volumes : $\frac{\det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}})}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}})}$ est exactement le rapport des formes volumes $\tilde{\omega}^m$ et ω^m. On obtient donc

$$\tilde{\omega}^m = e^{f+C}\,\omega^m.$$

Puisque ω et $\tilde{\omega}$ sont cohomologues, ω^m et $\tilde{\omega}^m$ le sont également, donc $\int_M \omega^m = \int_M \tilde{\omega}^m = \int_M e^{f+C}\,\omega^m = e^C \int_M e^f\,\omega^m = e^C \int_M \omega^m$, d'où $\underline{C = 0}$.

4.5 On est donc ramené à résoudre l'

<u>Equation I</u> : Etant données <u>une forme de Kähler</u> ω <u>et une fonction réelle</u> f <u>sur</u> M <u>vérifiant</u> $\int_M e^f\,\omega^m = \int_M \omega^m$, <u>montrer qu'il existe une et une seule fonction réelle</u> φ <u>telle que</u> :

i) <u>la forme hermitienne canoniquement associée à</u> $\omega + id'd''\varphi$ <u>est définie positive</u>;

ii) $\int_M \varphi\,\omega^m = 0$;

iii) $(\omega + id'd''\varphi)^m = e^f\,\omega^m$. (*)

§ 5. MISE EN ÉQUATION DU THÉORÈME II^- ET DE LA QUESTION II^+

5.1 On traitera dans le texte le cas II^- avec le cas II^+ entre parenthèses.

Par définition, si $c_1(M)$ est <u>négative</u> (resp. <u>positive</u>), il existe une <u>forme de Kähler</u> ω sur M telle que $[\omega] = -2\pi\, c_1(M)$ (resp. $[\omega] = +2\pi\, c_1(M)$).

Si maintenant on cherche $\tilde{\omega}$ forme de Kähler sur M telle que $\gamma_{\tilde{\omega}} = -\tilde{\omega}$ (resp. $\gamma_{\tilde{\omega}} = +\tilde{\omega}$), on <u>doit</u> donc avoir

$$[\tilde{\omega}] = -[\gamma_{\tilde{\omega}}] = -2\pi\ c_1(M) = [\omega]$$

$$(\text{resp. } [\tilde{\omega}] = +[\gamma_{\tilde{\omega}}] = +2\pi\ c_1(M) = [\omega]),$$

et donc on doit chercher, d'après le lemme 1.6, $\tilde{\omega}$ sous la forme $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\ \varphi$ (avec toujours φ fonction réelle, unique à une constante près).

5.2 On rappelle que $[\gamma_\omega] = 2\pi\ c_1(M)$, donc que par hypothèse $[\gamma_\omega] = -[\omega]$ (resp. $+ [\omega]$), ce qui peut s'écrire, via le lemme 1.6 ,

$$\gamma_\omega = -\omega + id'd''f \ (\text{resp.} +\omega+id'd''f)$$

où f est une fonction réelle unique si on impose, comme au paragraphe précédent,

$$\int_M e^f\ \omega^m = \int_M \omega^m.$$

On peut donc écrire

$$\gamma_{\tilde{\omega}} - \gamma_\omega = -(\tilde{\omega}-\omega) - id'd''f \qquad (\text{resp.} +(\tilde{\omega}-\omega)-id'd''f),$$

soit

$$-id'd''\text{Log}\ \det(\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}})+id'd''\text{Log}\ \det(g_{\alpha\bar{\beta}})=-id'd''(f+\varphi) \qquad (\text{resp.} -id'd''(f-\varphi)),$$

soit encore, par les mêmes manipulations qu'au paragraphe précédent,

$$\tilde{\omega}^m = e^{f+\varphi+C}\ \omega^m\ (\text{resp. } e^{f-\varphi+C}\ \omega^m)$$

où C est une constante.

Pour lever l'indétermination sur φ (et faire disparaître la constante) on <u>choisira</u> φ telle que

$$\int_M e^{-\varphi}\, \tilde{\omega}^m = \int_M e^f\, \omega^m = \int_M \omega^m$$

$$(\text{resp. } \int_M e^{+\varphi}\, \tilde{\omega}^m = \int_M e^f\, \omega^m = \int_M \omega^m)\ .$$

5.3 Finalement, on est donc ramené à résoudre l'

<u>Equation $II^{\pm}$</u> : Etant donnée <u>une forme de Kähler</u> ω <u>sur</u> M<u>, vérifiant</u> $[\omega] = \pm 2\pi\, c_1(M)$, <u>et une fonction réelle</u> f <u>sur</u> M, <u>satisfaisant</u> $\int_M e^f\, \omega^m = \int_M \omega^m$, <u>déterminer s'il existe une et une seule fonction réelle</u> φ <u>telle que</u> :

i) <u>la forme hermitienne canoniquement associée à</u> $\omega + id'd''\varphi$ <u>soit définie positive</u> ;

ii) $e^{\pm\varphi}\, (\omega + id'd''\varphi)^m = e^f\, \omega^m.$ $\qquad (**^{\pm})$

5.4 On rappelle qu'il s'agit de répondre oui pour le cas II^- et on montrera quelles difficultés apparaissent dans le cas II^+ dans l'exposé n°X.

5.5 <u>Remarque</u> : S.T.Yau résoud également dans [1] des équations plus générales, avec des membres de droite dégénérés ou singuliers.

Exposé n° VI

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES : UNICITÉ, MÉTHODE DE CONTINUITÉ, SCHÉMA DE LA DÉMONSTRATION D'EXISTENCE.

par L. BÉRARD BERGERY

Institut Elie Cartan
Université Nancy I

§ 0. <u>RAPPELS</u>

Cet exposé est la suite directe du précédent, dont il reprend les notations et hypothèses.

0.1 On se <u>fixe</u> donc une variété M complexe compacte connexe de dimension (complexe) $m \geq 2$ et une métrique kählérienne C^∞ g sur M de forme de Kähler ω.

On se donne une fonction f <u>réelle</u> C^∞ sur M vérifiant $\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m$. On va montrer qu'il existe une et une seule fonction C^∞ réelle φ sur M telle que :

i) la forme hermitienne canoniquement associée à $\omega + id'd''\varphi$ est définie positive ;

ii) φ satisfait l'équation du problème I

$$(*) \qquad (\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m \quad ;$$

iii) $\int_M \varphi\omega^m = 0$ (normalisation) .

<u>Respectivement</u>,

ii)$^-$ φ satisfait l'équation du problème II$^-$

$$(**^-) \qquad e^{-\varphi}(\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$$

(sans autre normalisation).

Et on s'intéressera aussi à l'équation du problème II$^+$

$$(**^+) \qquad e^{\varphi}(\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$$

(sans la résoudre).

0.2 Remarque : Signalons ici que Yau résoud plus généralement des équations du type

$$(\omega + id'd''\varphi)^m = e^{F(x,\varphi)}\,\omega^m$$

avec deux conditions sur F :

i) $$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \geq 0 \quad ;$$

ii) $$\exists \psi \ , \ \int_M e^{F(x,\psi)}\,\omega^m = \int_M \omega^m .$$

Il se permet même des deuxièmes membres plus généraux (avec des zéros et singularités). Mais on ne connaît pas encore les applications qu'il tire de ces généralisations. On ne les étudiera donc pas ici.

§ 1. UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION I

1.1 On va donner deux méthodes pour prouver l'unicité : la première est due à Calabi, dans l'article original, et contient des idées intéressantes pour la suite ; la deuxième est celle employée par Yau et est plus courte, mais moins éclairante.

i) Première démonstration

1.2 Soient φ_1 , φ_2 deux solutions de (*). On notera $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ Si $\omega_1 = \omega + id'd''\varphi_1$, alors $\omega_2 = \omega + id'd''\varphi_2 = \omega_1 + id'd''\varphi$ et finalement

$$(\omega_1 + id'd''\varphi)^m = \omega_2^m = e^f\,\omega^m = \omega_1^m .$$

On forme la différence et on développe en utilisant le fait qu'on a des 2-formes (donc des éléments d'une algèbre commutative).
On obtient

$$(id'd''\varphi) \wedge \left[\sum_{k=0}^{m-1} (\omega_1^k \wedge \omega_2^{m-k-1}) \right] = 0 .$$

Le membre entre crochets est une (2m-2)-forme fermée réelle, de type (m-1,m-1), qui s'écrit donc en coordonnées locales (z^α)

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} M^{\alpha\bar\beta}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz^\alpha} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar z^\beta} \wedge \ldots \wedge d\bar z^n .$$

1.3 <u>Lemme</u> : <u>La matrice</u> $(M^{\alpha\bar\beta})$ <u>est définie positive</u>.

<u>Démonstration</u> : Fixons x dans M et choisissons des coordonnées locales (z^α) telle que, <u>au point x</u> , $g^1_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ et $g^2_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\beta}\mu_\alpha$. Nous avons bien sûr μ_α strictement positif pour tout α .

Au point x , on a $\omega_1 = \sum_\alpha dz^\alpha \wedge d\bar z^\alpha$ et $\omega_2 = \sum_\alpha \mu_\alpha\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\alpha$, de telle sorte que $\omega_1^k \wedge \omega_2^{m-k-1}$ a pour coefficient

$$M^{\alpha\bar\beta}_{(k)} = \delta_{\alpha\beta}\Big(\sum_{\substack{1<i_1<\ldots<i_k\leq m \\ i_j\neq\alpha\ \forall j}} \mu_{i_1}\cdots\mu_{i_k}\Big) .$$

Donc seuls les coefficients diagonaux sont non nuls et ils sont tous strictement positifs. ■

1.4 Alors φ est solution de l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} M^{\alpha\bar\beta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\, \partial\bar z^\beta} = 0$$

où la matrice $(M^{\alpha\bar\beta})$ est définie positive.

Donc φ est solution de $M\varphi = 0$, où M est un opérateur elliptique du 2ème ordre à symbole défini positif sur M compacte, et φ doit donc être une constante. Enfin comme on a <u>choisi</u> $\int_M \varphi\, \omega^m = 0$, φ est la constante 0 .

ii) <u>Deuxième démonstration</u>

1.5 On forme de la même façon $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ et $\omega_1 = \omega + id'd''\varphi_1$.

De $(\omega_1 + id'd''\varphi)^m = \omega_1^m$, on tire

1.6 <u>Lemme</u> : $\Delta_{g_1} \varphi \leq 0$.

<u>Démonstration</u> : Fixons x dans M et choisissons des coordonnées locales (z^α) telles que, au point x, $g^1_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ et $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha\, \partial \bar z^\beta} = \delta_{\alpha\beta}\, \lambda_\alpha$.

On a donc, au point x,

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (1+\lambda_\alpha) = 1$$

et chacun des $1+\lambda_\alpha$ est strictement positif, puisque $g^2_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\beta}(1+\lambda_\alpha)$.

Par l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique, on a donc

$$1 = \sqrt[m]{\prod_{\alpha=1}^{m} (1+\lambda_\alpha)} \leq \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^{m} (1+\lambda_\alpha) = \frac{1}{m}\Big(m+ \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha\Big) ,$$

d'où $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \geq 0$.

Enfin, <u>en x</u>, $\Delta_{g_1} \varphi = -\sum_\alpha \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha\, \partial \bar z^\alpha} = -\sum_\alpha \lambda_\alpha$, donc $\Delta_{g_1} \varphi \leq 0$. ■

1.7 Puisque M est compacte, il existe une constante $C > 0$ telle que $\psi = C+\varphi$ soit > 0 partout.

On a $\Delta_{g_1}(\psi^2) = 2\psi(\Delta_{g_1} \psi) - 2|d\psi|^2$ et en intégrant sur M

$$\int_M |d\psi|^2\, \omega_1^m = \int_M \psi(\Delta_{g_1} \psi)\, \omega^m \leq 0$$

puisque $\psi > 0$ et $\Delta_{g_1} \psi \leq 0$.

On en déduit $d\psi = 0$ soit ψ constante, donc φ constante et, comme $\int_M \varphi\omega^m = 0$, $\varphi = 0$. ■

§ 2. UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION II^-

2.1 Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de $(**^-)$; on pose encore $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\omega_1 = \omega + id'd''\varphi_1$, $\omega_2 = \omega + id'd''\varphi_2$ et on a

$$e^{-\varphi_2}\omega_2^m = e^f \omega^m = e^{-\varphi_1}\omega_1^m ,$$

soit

$$e^{-\varphi}(\omega_1 + id'd''\varphi)^m = \omega_1^m .$$

En un point x de M , on peut choisir des coordonnées (z^α) telles que, au point x ,

$$g^1_{\alpha\overline{\beta}} = \delta_{\alpha\overline{\beta}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} = \delta_{\alpha\overline{\beta}}\lambda_\alpha .$$

On a donc , au point x ,

$$e^{-\varphi(x)} \prod_{\alpha=1}^{m} (1+\lambda_\alpha) = 1 .$$

Si x est un maximum de φ, on a $\lambda_\alpha \leq 0$ pour tout α, donc $e^{\varphi(x)} \leq 1$ et $\varphi(x) \leq 0$.
Si x est un minimum de φ, on a $\lambda_\alpha \geq 0$ pour tout α, donc $e^{\varphi(x)} \geq 1$ et $\varphi(x) \geq 0$.
D'où $\varphi \equiv 0$.

2.2 Remarque : On voit que cette méthode (ainsi que les deux précédentes de I) ne donne rien dans le cas II^+. En fait, l'unicité est fausse en général pour cette équation, voir exposé n°X .

§ 3. MÉTHODE DE CONTINUITÉ POUR LA RÉSOLUTION DE I

3.1 Pour trouver une solution de (*), Calabi et Yau emploient la "méthode de continuité". (T. Aubin utilise la méthode directe du calcul des variations).

On va remplacer $(*)$ par une <u>famille à un paramètre</u> d'équations, dont l'une a une solution connue et on obtiendra la solution de $(*)$ par passage à la limite.

3.2 On considère la famille d'équations

$$(*_t)_{t\in[0,1]} \qquad (\omega+id'd''\varphi)^m = e^{tf}\left(\frac{\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m}\right)\omega^m \ ,$$

c'est à dire l'équation $(*)$ dans laquelle on remplace f par $tf + \mathrm{Log}\,(\int_M \omega^m) - \mathrm{Log}(\int_M e^{tf}\omega^m)$.

On fixe une fois pour toutes k entier ≥ 2 et α avec $0<\alpha<1$.

On note $A=\{t \mid t \in [0,1]$, $(*_t)$ a une solution φ <u>dans $C^{k,\alpha}(M)$</u> vérifiant $\int_M \varphi\,\omega^m = 0\}$.

On rappelle que φ est unique. On va montrer que 1 appartient à A pour tout $k \geq 2$ et tout α , $0<\alpha<1$. On obtiendra ainsi une solution φ C^∞ de $(*)$, ce qui terminera la démonstration du Théorème I .
Pour cela, il suffit de démontrer que A est ouvert, fermé et non vide.

3.3 <u>L'ensemble A n'est pas vide</u>, car $\varphi=0$ est solution de $(*_0)$.

3.4 <u>L'ensemble A est ouvert</u> : cela résulte du <u>théorème d'inversion locale</u>, via les estimées de Schauder décrites dans l'exposé n°II .
On considère en effet l'espace E <u>défini par</u>

$$E = \{\ \varphi \mid \varphi \in C^{k,\alpha}(M),\ \int_M \varphi\omega^m = 0\}$$

(c'est un espace de Banach car fermé dans $C^{k,\alpha}(M)$) et l'ouvert Ω de E

$$\Omega = \{\varphi \mid \varphi \in E \quad \text{et} \quad \omega + id'd''\varphi \ \text{ est définie positive}\}\ .$$

On considère aussi $H = \{h \mid h \in C^{k-2,\alpha}(M),\ \int_M h\omega^m = \int_M \omega^m\}$;

c'est un <u>hyperplan affine fermé</u> de $C^{k-2,\alpha}$, dont l'espace tangent est l'hyperplan vectoriel $H_o=\{h \mid h \in C^{k-2,\alpha}(M)\,,\ \int_M h\omega^m = 0\}$.

On considère enfin l'application $\mathcal{C} : \Omega \to M$ définie par

$$\mathcal{C}(\varphi) = \frac{(\omega+id'd''\varphi)^m}{\omega^m} .$$

On a bien $\int_M \mathcal{C}(\varphi)\,\omega^m = \int_M \widetilde{\omega}^m = \int_M \omega^m$ puisque $\widetilde{\omega} = \omega+id'd''\varphi$ et ω sont cohomologues, donc $\mathcal{C}(\varphi)$ est dans H.

On voit facilement que $\mathcal{C}$ est continue et différentiable. On calcule sa différentielle :

3.5 <u>Lemme</u> : $T_\varphi\mathcal{C} = -\mathcal{C}(\varphi)\,\widetilde{\Delta}$ (<u>où</u> $\widetilde{\Delta}$ <u>est le laplacien de la métrique kählerienne</u> $\widetilde{g}$ <u>associée à</u> $\widetilde{\omega} = \omega+id'd''\varphi$).

<u>Démonstration</u> : En coordonnées locales (z^α), on a

$$\mathcal{C}(\varphi) = \frac{\det\left(g_{\alpha\overline{\beta}} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\,\partial \overline{z}^\beta}\right)}{\det(g_{\alpha\overline{\beta}})} ,$$

d'où

$$\mathrm{Log}\,\mathcal{C}(\varphi) = \mathrm{Log}\,\det\left(g_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\,\partial \overline{z}^\beta}\right) - \mathrm{Log}\,\det(g_{\alpha\overline{\beta}})$$

On rappelle que $(\mathrm{Log}\det B)' = \mathrm{trace}\,(B^{-1}B')$, donc

$$\mathcal{C}(\varphi)^{-1}\,T_\varphi\mathcal{C}(h) = \mathrm{trace}\left(\left(g_{\alpha\overline{\beta}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\,\partial \overline{z}^\beta}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^\alpha\,\partial \overline{z}^\beta}\right)\right) = -\widetilde{\Delta}\,h .$$

(voir exposé n°III pour la dernière égalité). ∎

3.6 Soit t un point de A et φ la solution de $(*_t)$, qui est $C^{k,\alpha}$ par hypothèse. La forme de Kähler $\widetilde{\omega} = \omega+id'd''\varphi$ est donc $C^{k-2,\alpha}$. Donc le laplacien $\widetilde{\Delta}$ de $\widetilde{\omega}$ a également des coefficients <u>$C^{k-2,\alpha}$</u> (il suffit de regarder l'expression en coordonnées locales). Puis $\mathcal{C}(\varphi)$ est $C^{k-2,\alpha}$, donc $T_\varphi \mathcal{C}$ est un opérateur à coefficients $\underline{C^{k-2,\alpha}}$.

On note $\widetilde{H}_o = \{h \mid h \in C^{k-2,\alpha}(M), \int_M h\widetilde{\omega}^m = 0\}$.

3.7 Lemme : $h \mapsto \mathcal{C}(\varphi)h$ est un isomorphisme de $\widetilde{H}_o$ sur H_o .

Démonstration :

$$\int_M \mathcal{C}(\varphi)h\omega^m = \int_M h\widetilde{\omega}^m. \blacksquare$$

3.8 Lemme : $\widetilde{\Delta}$ est un isomorphisme de E sur $\widetilde{H}_o$.

Démonstration : Si h est une fonction réelle sur M et si $\widetilde{\Delta}\, h = 0$, h est constante et si de plus $\int_M h\omega^m = 0$ alors $h = 0$, d'où l'injectivité.

Ensuite, la relation $\int \tilde{h}\,\widetilde{\omega}^m = 0$ équivaut à dire que $\tilde{h}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\tilde{g}$ aux constantes, donc que $\tilde{h}$ est dans l'image de $\widetilde{\Delta}$.

Il reste les questions de différentiabilité : si $\tilde{h}$ est dans $\widetilde{H}_o$, alors $\tilde{h}$ est $C^{k-2,\alpha}$.

L'équation $\widetilde{\Delta}\, h = \tilde{h}$ a toujours une solution dans L^2. En appliquant les estimées de Schauder à l'opérateur elliptiques $\widetilde{\Delta}$, dont les coefficients sont $C^{k-2,\alpha}$, on en déduit que la solution h est $C^{k,\alpha}$, donc dans E si on choisit de plus $\int_M h\omega^m = 0$ (ce qui est possible puisque h est définie à une constante près). $\blacksquare$

3.9 On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale puisque $T_\varphi \mathcal{C}$ est un isomorphisme de E sur H_o . On en déduit que pour u suffisamment voisin de t (ce qui implique en particulier que

$e^{uf}\dfrac{\int_M \omega^m}{\int_M e^{uf}\omega^m}$ est voisin de $e^{tf}\dfrac{\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m}$ en norme $C^{k-2,\alpha}$), alors

$$\mathcal{C}(\varphi) = \frac{e^{uf}\int_M \omega^m}{\int_M e^{uf}\omega^m}$$ a une solution $C^{k,\alpha}$, qui est donc solution de $(*_u)$ et u est dans A .∎

3.10 L'ensemble A est fermé : c'est le plus difficile. On va montrer que la norme $C^{k,\alpha}$ d'une solution φ de $(*_t)$ est bornée a priori uniformément en t (en fonction des normes appropriées de ω et f). En supposant ceci démontré, si (t_n) est une suite de A tendant vers t dans $[0,1]$, si φ_n est la solution de $(*_{t_n})$, alors on peut extraire de la suite (φ_n) une sous-suite convergeant dans $C^{k,\alpha'}$ $(\alpha' < \alpha)$ vers un élément φ de $C^{k,\alpha'}$. On sait en effet (voir exposé n° I) que l'injection de $C^{k,\alpha'}$ dans $C^{k,\alpha}$ est compacte. Mais φ est une solution de $(*_t)$ et la démonstration de la régularité $C^{k,\alpha}$ des solutions nous montrera également que φ est de classe $C^{k,\alpha}$.

Enfin la forme hermitienne associée à $\omega+id'd''\varphi$ est non dégénérée puisque $(\omega+id'd''\varphi)^m = e^f\omega^m$. On note $\Omega' = \{\varphi \mid \varphi\in E$ et la forme hermitienne associée à $\omega+id'd''\varphi$ est non dégénérée$\}$. Or Ω est une composante connexe de l'ouvert Ω' dans E, φ_n est dans Ω pour tout n et φ est limite de la suite (φ_n) (dans $C^{k,\alpha'}$ en fait, mais cela suffit), donc φ est dans Ω et donc φ est bien la solution cherchée.

3.11 Pour trouver la "borne a priori" annoncée, on remarque d'abord que $(*_t)$ est l'équation $(*)$ pour la fonction $f_t = tf + \operatorname{Log}\int_M \omega^m - \operatorname{Log}\int_M e^{tf}\omega^m$ et que les normes $C^{\ell,\beta}$ de f_t sont bornées uniformément en t par celles de f. Il suffira donc de regarder le cas $t = 1$.

3.12 On va utiliser l'équation dérivée de $(*)$ qui nous donnera une équation aux dérivées partielles <u>linéaire</u> et <u>elliptique</u> portant sur les dérivées premières de φ . On appliquera à cette équation les estimées de Schauder de l'exposé n^{o}II. Pour cela il faut obtenir au moins une borne $C^{o,\alpha}$ pour les coefficients de l'opérateur elliptique. On verra plus loin que celui-ci dépend de $\tilde{\omega}$. On sera amené à opérer en plusieurs étapes :

i) il y a une borne C^o pour φ [voir exposé n^o VII] ;

ii) une borne C^o pour φ implique une borne C^o pour $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$ (par une estimation des dérivées de φ de la forme $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\, \partial\bar{z}^\beta}$, via une borne C^o de $\Delta\varphi$) [voir exposé n^o VIII];

iii) il y a une borne C^1 pour $\tilde{\omega}$ (par une estimation des dérivées de φ de la forme $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\, \partial\bar{z}^\beta\, \partial z^\gamma}$) [voir exposé n^{o}XI];

iv) il y a une borne $C^{k,\alpha}$ de φ (via l'équation dérivée) [voir paragraphe 5 ci-après].

§ 4. MÉTHODE DE CONTINUITÉ POUR LA RÉSOLUTION DE $II^{\pm}$

4.1 La stratégie est exactement la même que dans le paragraphe précédent, il n'y aura que quelques différences de détails.

On considère la famille d'équations

$$(**_t^{\pm}) \qquad e^{\pm\varphi}(\omega + id'd''\varphi)^m = e^{tf}\left(\frac{\int_M \omega^m}{\int_M e^{tf}\omega^m}\right)\omega^m .$$

On fixe $k \geq 2$, $0<\alpha<1$ et on pose

$$B^{\pm} = \{t \mid t \in [0,1],\ (**_t^{\pm}) \text{ a une solution } C^{k,\alpha}\} .$$

4.2 <u>Le point 0 est dans $B^{\pm}$</u> : 0 est solution de $(**^{\pm})$.

4.3 <u>L'ensemble B^- est ouvert</u> (<u>Attention</u>, on se restreint à II^-).

On considère les espaces de Banach $C^{k,\alpha}(M)$ et $C^{k-2,\alpha}(M)$ et $U = \{\varphi \mid \varphi \in C^{k,\alpha}(M)$ et la forme hermitienne associée à φ est définie positive$\}$ qui est un ouvert de $C^{k,\alpha}(M)$.

On forme $\mathcal{C}^-: U \to C^{k-2,\alpha}(M)$ définie par $\mathcal{C}^-(\varphi) = e^{-\varphi}\dfrac{(\omega+id'd''\varphi)^m}{\omega^m}$.

L'application $\mathcal{C}^-$ est continue et différentiable.

4.4 Lemme : $T_\varphi\mathcal{C}^- = -\mathcal{C}^-(\varphi)(\tilde{\Delta} + Id)$.

Démonstration : c'est le même calcul qu'au paragraphe précédent, à ceci près que le terme $e^{-\varphi}$ fournit dans la dérivée logarithmique le terme $-Id$. ∎

4.5 Lemme : $\tilde{\Delta} + Id$ est un isomorphisme de $C^{k,\alpha}(M)$ sur $C^{k-2,\alpha}(M)$.

Démonstration : L'opérateur $\tilde{\Delta}$ est positif, donc $\tilde{\Delta} + Id$ n'a pas de noyau. Pour montrer qu'il est surjectif, on utilise les estimées de Schauder comme au paragraphe précédent. La suite de la démonstration de "B^- est ouvert" est alors la même que celle de "A est ouvert" au paragraphe précédent. ∎

4.6 Remarque : Dans le cas II^+, on peut bien sûr former $\mathcal{C}^+: U \to C^{k-2,\alpha}(M)$ définie par $\mathcal{C}^+(\varphi) = e^{\varphi}\dfrac{(\omega+id'd''\varphi)^m}{\omega^m}$, qui est toujours continue et différentiable, mais sa différentielle est

$$T_\varphi\mathcal{C}^+ = -\mathcal{C}^+(\varphi)\ (\tilde{\Delta} - Id)$$

et elle n'est inversible que si 1 n'est pas valeur propre de $\tilde{\Delta}$. Comme $\tilde{\omega}$ varie avec t, on voit qu'il peut a priori apparaître des "points de bifurcation" sur lesquels on ne sait actuellement rien dire.

4.7 L'ensemble B^- est fermé : c'est la même démonstration qu'au paragraphe précédent. Il suffit de remplacer $(*_t)$, E, M, Ω et Ω' par $(**_t^-)$, $C^{k,\alpha}(M)$, $C^{k-2,\alpha}(M)$, U et $U' = \{\varphi \mid \varphi \in C^{k,\alpha}(M)$ et la forme hermitienne associée à $\omega+id'd''\varphi$ est non dégénérée$\}$.

Pour trouver une borne a priori de la norme $C^{k,\alpha}$, on utilisera également l'équation dérivée de $(\overline{**})$ et on aura les mêmes étapes i), ii), iii) et iv), qui seront traitées aux mêmes endroits que pour (*).

Il y a une petite différence seulement : i) est ici très facile : (voir 1.3 de l'exposé n° VII).

§ 5. UTILISATION DES EQUATIONS DERIVEES DE (*) ET $(\overline{**})$

5.1 Cas I : On va dériver une fois l'équation

$$\det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\,\partial \bar z^\beta}\right) = e^f \det(g_{\alpha\bar\beta}) .$$

On en prend le logarithme et on dérive en $\dfrac{\partial}{\partial z^\gamma}$.

On obtient en notant $(\tilde g^{\alpha\bar\beta})$ la matrice inverse de $(\tilde g_{\alpha\bar\beta}) = (g_{\alpha\bar\beta} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta})$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \tilde g^{\alpha\bar\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^\gamma} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^\alpha\,\partial\bar z^\beta\,\partial z^\gamma}\right) = \frac{\partial f}{\partial z^\gamma} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g^{\alpha\bar\beta}\,\frac{\partial g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^\gamma} ,$$

ce qui peut se réécrire, en utilisant l'expression

$$\tilde\Delta = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\left(\tilde g^{\alpha\bar\beta}\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\,\partial\bar z^\beta}\right),$$

sous la forme

$$(*') \qquad \tilde\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z^\gamma}\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\left((\tilde g^{\alpha\bar\beta} - g^{\alpha\bar\beta})\,\frac{\partial g_{\alpha\bar\beta}}{\partial z^\gamma}\right) - \frac{\partial f}{\partial z^\gamma} .$$

5.2 D'après 3.12 i), ii), iii) (et les exposés n° VII, VIII et XI), $\tilde\omega$ et $\tilde g$ sont bornées uniformément ainsi que leur première dérivée en fonction de ω et f. Vu l'expression de $\tilde\Delta$, on peut donc estimer la norme $C^{0,\alpha}$ de ses coefficients en fonction de ω et f, pour tout α avec $0 \le \alpha \le 1$. On peut donc appliquer (pour $0<\alpha<1$) les estimées de Schauder de l'exposé n° II à (*'), puisque $\tilde\Delta$ est bien sûr elliptique.

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial z^\gamma}\right\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\ \left(\|\tilde{\omega}^{-1}\|_{C^{0,\alpha}} + \|\omega\|_{C^{1,\alpha}} + \|f\|_{C^{1,\alpha}}\right) .$$

On procède de même pour $\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}^\gamma}$ et on en déduit donc une borne de la norme $C^{3,\alpha}$ de φ .

5.3 On procède ensuite par récurrence sur k : si la norme $C^{k,\alpha}$ de φ est bornée ($k \geq 3$), on en déduit une borne pour la norme $C^{k-2,\alpha}$ des coefficients de $\tilde{\Delta}$. On applique de nouveau les estimées de Schauder à (*'), et on en déduit une borne de la norme $C^{k,\alpha}$ de $\frac{\partial\varphi}{\partial z^\gamma}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}^\gamma}$, donc une borne de la norme $C^{k+1,\alpha}$ de φ (dépendant bien sûr des normes $C^{k-1,\alpha}$ de ω et f).

5.4 <u>Cas II$^-$</u> : le procédé est exactement le même. On obtient comme équation dérivée

$$(**'^-) \qquad (\tilde{\Delta} + \mathrm{Id})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z^\gamma}\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left(\left(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} - g^{\alpha\bar{\beta}}\right)\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^\gamma}\right) - \frac{\partial f}{\partial z^\gamma}$$

et $\tilde{\Delta}$ + Id est toujours elliptique et à coefficients bornés en norme C^1 (d'après 3.12 i),ii),iii)). La suite de la démonstration est la même en remplaçant (*') par (**'$^-$).

Exposé n° VII

ESTIMÉES UNIFORMES DES SOLUTIONS

par G. AVEROUS

Conservatoire National des Arts et Métiers

et

A. DESCHAMPS

U. E. R. de Mathématiques
Université d'Orléans

RÉFÉRENCES

[1] J. KAZDAN, F. WARNER, Curvature functions on 2-manifolds, Ann. of Math., 99 (1974), 14-47.

[2] G. de RHAM, Variétés différentiables, Hermann (1960).

[3] F. WARNER, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott, Foresman and Co (1971).

§ 1. ÉNONCÉS DES ESTIMÉES

1.0 Dans cet exposé nous démontrons l'existence d'une borne a priori pour la norme C^0 des solutions des équations $(**^-)$ d'une part et des équations $(*)_t$ d'autre part. Comme le second membre de ces équations parcourt un ensemble compact (pour toute topologie raisonnable) lorsque t parcourt $[0,1]$, il nous suffit d'établir une borne a priori pour $t = 1$ Nous abandonnons donc les indices t .

La démonstration est élémentaire pour les équations $(**^-)$.

Pour les équations $(*)$, S. T. Yau a prouvé en 1976 l'existence d'une telle borne en dimension quelconque par une méthode établissant en même temps la borne C^2. Pour la dimension 2 par contre il a donné une estimée C^0 indépendante qui a été simplifiée par J. Kazdan. Th. Aubin a proposé une généralisation de cette méthode à la dimension quelconque en novembre 1977.La preuve simplifiée que nous expliquons ici est due à J. P. Bourguignon.

1.1 Soit M une variété complexe compacte et connexe qui admet une métrique kählérienne. Nous supposons $\dim_{\mathbb{C}} M = m \geq 2$. Soit g une métrique de Kähler et ω la forme de Kähler associée à g . Dans cet exposé nous ferons la normalisation suivante :

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \omega^m = 1 .$$

Nous fixons une fonction f dans $C^\infty(M)$ (en fait C^3 suffit) telle que

$$\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m = 1 .$$

1.2 Soit φ une solution $C^{k,\alpha}$ $(k \geq 2)$ de $(**^-)$: $e^{-\varphi}(\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$ telle que $\omega + id'd''\varphi > 0$ et $\int_M \varphi\, \omega^m = 0$.

<u>Proposition 1.3</u> : <u>Il existe une constante</u> C (<u>ne dépendant que de</u> M, ω <u>et</u> f) <u>telle que</u>, <u>pour toute solution</u> φ <u>au moins</u> C^2 <u>de</u> $(**^-)$,

$$\|\varphi\|_{C^0} = \sup_{x \in M} |\varphi(x)| \leq C .$$

Preuve : La fonction φ est continue sur la variété compacte M. Il existe donc un point x de M où φ est maximum ; alors $\mathrm{Hess}\,\varphi(x) \leq 0$. Choisissons une carte dont la base naturelle en x diagonalise simultanément g et $\tilde{g}$ (de telles coordonnées seront dites adaptées en x) de telle sorte que

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(x) = \delta_{\alpha\beta}$$

et

$$id'd''\varphi(x) = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha .$$

Comme $(\mathrm{Hess}\,\varphi)(x) \leq 0$, nous en déduisons que $\lambda_\alpha \leq 0$ pour tout α, $1 \leq \alpha \leq m$. Comme l'équation $(**^-)$ s'écrit en x,

$$e^{-\varphi(x)} \prod_{\alpha=1}^{m} (1+\lambda_\alpha) = e^{f(x)} ,$$

nous avons $e^{-\varphi(x)} \geq e^{f(x)}$, soit encore

$$\varphi \leq -\inf_{x \in M} f(x) .$$

Soit maintenant y un point où φ est minimum ; alors $(\mathrm{Hess}\,\varphi)(y) \geq 0$ et en choisissant une carte adaptée en y comme avant, nous avons $\lambda_\alpha \geq 0$ et, en utilisant encore $(**^-)$,

$$\varphi \geq -\sup_{x \in M} f(x) .$$

Si $A \leq f \leq B$ ($A<0$ à cause de 1.1), nous avons donc $A-B < \varphi < B-A$, d'où

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq B-A . \quad \blacksquare$$

1.4 Soit φ une solution $C^{k,\alpha}$ $(k \geq 2)$ de

$$(*) \qquad (\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$$

telle que $\omega + id'd''\varphi > 0$ et $\int_M \varphi\,\omega^m = 0$.

<u>Proposition 1.5</u> : <u>Il existe une constante</u> C (<u>ne dépendant que de</u> M , ω <u>et</u> f) <u>telle que toute solution</u> φ <u>$C^{k,\alpha}$ de</u> (*) <u>vérifie</u>

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq C \ .$$

<u>Preuve</u> : Nous utilisons les lemmes suivants qui seront démontrés plus tard :

<u>Lemme 2.1</u> : <u>Il existe une constante</u> C_1 (<u>ne dépendant que de</u> M <u>et de</u> ω) <u>telle que pour toute fonction</u> φ <u>$C^{k,\alpha}$ vérifiant</u> $\omega + id'd''\varphi > 0$ <u>on ait</u>

i) $\Delta\varphi < m$,

ii) $\sup\limits_M \varphi \leq C_1$.

Nous utiliserons ce lemme en posant $\psi = \varphi - C_1 - 1$; nous aurons alors

i) $\Delta\psi < m$,

ii) $\sup\limits_M \psi \leq -1$.

<u>Lemme 3.3</u> : <u>Il existe deux constantes</u> C_5 <u>et</u> C_6 <u>telles que pour tout</u> p <u>de la forme</u> $(m/m-1)^r$ $(r \in \mathbb{N})$, <u>on ait</u>

$$\|\psi\|_p^p \leq (C_6)^p (C_5 p (\tfrac{m}{m-1})^{m-1})^{-m} \ .$$

La preuve de la proposition se fait alors comme suit : la suite $(\|\psi\|_p)$ est croissante car $-\psi \geq 1$ et vol M = 1 . Par ailleurs la sous-suite $(\|\psi\|_{p_r})$ avec $p_r = (\frac{m}{m-1})^r$ vérifie $\|\psi\|_{p_r} \leq C_6 [C_5 \, p_r (\frac{m}{m-1})^{m-1}]^{-\frac{m}{p_r}}$.
Comme de la suite croissante $(\|\psi\|_n)$ on peut extraire une sous-suite bornée, la suite $(\|\psi\|_n)$ est elle-même bornée. Mais d'après la Proposition 2.1 de l'exposé n° I , comme $\|\psi\|_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} \|\psi\|_n$ et que ψ est continue,

$$\|\psi\|_\infty = \sup_M \psi = \|\psi\|_{C^0} \ .$$

Par suite il existe une constante C (= $C_6 + C_1 + 1$) telle que

$$\|\varphi\|_{C^0} < C \ . \ \blacksquare$$

1.6 Remarque : Il peut paraître surprenant qu'un contrôle de la croissance des normes L^p d'une solution aboutisse à l'estimée uniforme. Cela est dû à la non-linéarité de l'équation, qui se manifeste bien dans les preuves des lemmes du § 3 (voir aussi [1] page 22 pour une autre situation où un tel contrôle donne de bons résultats).

§ 2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POTENTIELS KÄHLÉRIENS

Lemme 2.1 : Il existe une constante C_1 (ne dépendant que de M et de ω) telle que pour toute fonction φ $C^{k,\alpha}$ vérifiant $\omega + id'd''\varphi > 0$, on ait

i) $\Delta\varphi < m$,

ii) $\sup_M \varphi < C_1$,

iii) $\int_M |\varphi| < 2C_1$.

Preuve : i) En prenant des coordonnées adaptées en x, on a

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(x) = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}(1+\lambda_\alpha) .$$

Par suite

$$\operatorname{trace}_g \tilde{g}(x) = \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}}(x) = m - \Delta\varphi(x) > 0 .$$

ii) Nous allons utiliser le noyau de Green, sur lequel nous faisons quelques rappels (voir [2] et [3]).

Nous notons $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions harmoniques sur M (i.e. les constantes). Le théorème de décomposition de Hodge s'écrit pour les fonctions $C^{o,\alpha}$

$$C^{o,\alpha}(M) = \Delta(C^{2,\alpha}(M)) \oplus \mathcal{H} .$$

Si $\mathcal{H}^\perp$ désigne l'orthogonal dans $L^2(M)$ de $\mathcal{H}$, il est clair que $\Delta(C^{2,\alpha}(M)) \subset \mathcal{H}^\perp \cap C^{o,\alpha}(M)$, puisque Δ est auto-adjoint dans $L^2(M)$ (bien sûr $C^{o,\alpha}(M) \subset L^2(M)$). L'inclusion $\mathcal{H}^\perp \cap C^{o,\alpha}(M) \subset \Delta(C^{2,\alpha}(M))$ est obtenue de la façon suivante : on montre l'existence d'un opérateur continu G (dit opérateur de Green) de $C^{o,\alpha}(M)$ dans $\mathcal{H}^\perp \cap C^{2,\alpha}(M)$ tel que Gf est l'unique solution de $\Delta f = f - Hf$ (où H est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$ dans $L^2(M)$). On a les propriétés suivantes :

$$\Delta \circ H = H \circ \Delta = 0 ,$$
$$\Delta \circ G = G \circ \Delta = Id - H ,$$
$$H \circ G = G \circ H = 0 .$$

On peut associer à G un noyau $\mathcal{G}$ tel que

$$Gf(x) = \int_M \mathcal{G}(x,y)(f(y) - H f(y))\omega_y^m .$$

Le noyau $\mathcal{G}$ est donc défini à une constante près. Si (φ_i) est une base de fonctions propres de Δ orthonormale dans $L^2(M)$, (nous les prenons C^∞ ce qui est possible) et si (λ_i) désigne la suite des valeurs propres de Δ, alors ($\lambda_o = 0$ est exclue)

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x)\varphi_i(y) .$$

Le noyau $\mathcal{G}$ défini sur $M \times M$ est C^∞ hors de la diagonale et a une singularité en r^{2-2m} sur la diagonale au sens suivant : si $r(x,y)$ désigne la distance géodésique de x à y, on montre (cf. [3] page 137) que

$$\mathcal{G}(x,y) = (2m-2)^{-1} s_{2m}^{-1} \quad r(x,y)^{2-2m} + O(r^{4-2m})$$

où s_{2m} désigne le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^{2m}$. On remarque que le premier terme est le noyau de Green dans $\mathbb{R}^{2m}$ pour le laplacien ordinaire. Le reste $O(r^{4-2m})$ s'obtient par un développement de la métrique par rapport à r dans une carte exponentielle.

Nous avons alors

$$(\varphi - H\varphi)(x)(x) = \int_M \mathcal{G}(x,y)\, \Delta\varphi(y)\omega_y^m .$$

Venons-en à la preuve de ii). La normalisation $\int_M \varphi\, \omega^m = 0$ (soit $H\varphi = 0$) permet d'écrire

$$\varphi(x) = \int_M (\mathcal{G}(x,y) + K)\, \Delta\varphi(y)\ \omega_y^m .$$

Par ailleurs le noyau $\mathcal{G}$ est borné inférieurement sur M : en effet $\mathcal{G}(x,y)$ tend vers $+\infty$ lorsque (x,y) tend vers la diagonale de $M \times M$, donc il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la diagonale de $M \times M$ où $\mathcal{G}$ est positive. Sur $M \times M - \mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ est C^∞ donc bornée. On peut donc trouver un réel K tel que sur $M\times M$, $\mathcal{G}+K$ soit positif. Alors l'inégalité $\Delta\varphi < m$ entraîne

$$\varphi(x) < m\int_M (\mathcal{G}(x,y) + K)\omega_y^m .$$

On aura donc une majoration de φ si l'on montre que $y\mapsto \mathcal{G}(x,y)$ est intégrable sur M. La convergence au voisinage de $y=x$ est assurée puisque la singularité de $\mathcal{G}(x,y)$ est en $r(x,y)^{2-2m}$. On en déduit donc que pour tout point x de M

$$\varphi(x) < m\int_M (\mathcal{G}(x,y) + K)\omega_y^m = C_1 .$$

iii) Comme $\varphi = \varphi - C_1 + C_1$, $|\varphi| \leq C_1 - \varphi + C_1$ d'où l'inégalité. ∎

2.2 L'estimée ii) du lemme précédent nous permet d'introduire la fonction $\psi = \varphi - C_1 - 1$ qui est telle que $\sup\limits_M \psi < -1$. Il sera ultérieurement plus commode de travailler avec ψ, pour laquelle nous avons aussi $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\psi$.

<u>Lemme 2.3</u> : <u>Pour tout</u> $p > 1$, <u>nous avons</u>

$$\int_M (-\psi)^{p-2}|d\psi|^2\omega^m \leq \int_M \frac{(-\psi)^{p-1}-1}{p-1}(\tilde{\omega}^m - \omega^m) .$$

<u>Preuve</u> : Nous avons

$$\tilde{\omega}^m - \omega^m = id'd''\psi \wedge (\sum_{k=o}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}) .$$

En remarquant que $d'd'' = dd''$ et que $d\omega = d\tilde{\omega} = 0$, on peut écrire

$$\tilde{\omega}^m - \omega^m = d(id''\varphi \wedge (\sum_{k=o}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1})) .$$

Nous considérons pour $p>1$ l'intégrale $I_p = \int_M \frac{(-\psi)^{p-1}-1}{p-1}(\tilde{\omega}^m - \omega^m)$, en remarquant que, lorsque p tend vers 1, I_p tend vers $\int_M \log(-\psi)(\tilde{\omega}^m - \omega^m)$. Nous avons d'après le théorème de Stokes

$$I_p = \int_M d\left(\frac{(-\psi)^{p-1}-1}{p-1}\right) \wedge id''(-\psi) \wedge (\sum_{k=o}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}).$$

En développant et en remarquant que $\omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}$ est de type (m-1, m-1), donc que la seule partie de $d(-\psi)$ qui intervient dans I_p est $d'(-\psi)$, nous obtenons

$$I_p = \int_M (-\psi)^{p-2} i d'\psi \wedge d''\psi \wedge \Big(\sum_{k=o}^{m-1} \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}\Big) .$$

Par définition ω et $\tilde{\omega}$ sont des 2-formes réelles positives ; montrons que $i d'\psi \wedge d''\psi$ est réelle et non-négative. En effet ψ étant réelle $\overline{i d'\psi \wedge d''\psi} = - i d''\psi \wedge d'\psi = i d'\psi \wedge d''\psi$; de plus $d'\psi \wedge d''\psi$ est la partie hermitienne de la forme bilinéaire complexe $d_{\mathbb{C}} \psi \otimes d_{\mathbb{C}}\psi$, donc est positive ou nulle.

L'intégrale I_p se décompose donc en une somme d'intégrales telle que chaque intégrale $\int_M (-\psi)^{p-2} i d'\psi \wedge d''\psi \wedge \omega^k \wedge \tilde{\omega}^{m-k-1}$ est positive, la forme à intégrer étant un produit de formes non-négatives, donc une forme non-négative.

En particulier I_p est supérieur à l'une quelconque des intégrales, par exemple

$$I_p \geq \int_M (-\psi)^{p-2}\, i d'\psi \wedge d''\psi \wedge \omega^{m-1} ,$$

soit encore

$$I_p \geq \int_M (-\psi)^{p-2} (i d'\psi \wedge d''\psi, \omega)\omega^m = \int (-\psi)^{p-2} |d\psi|^2 \omega^m . \quad \blacksquare$$

§ 3. LES LEMMES NON LINÉAIRES

Les lemmes qui suivent utilisent explicitement que ψ est solution de l'équation non linéaire (*).

Lemme 3.1 : Il existe une constante C_3 telle que, pour tout $p > 1$,

$$\int_M (-\psi)^{p-2} |d\psi|^2 \omega^m \leq C_3 \int_M \frac{(-\psi)^{p-1} - 1}{p-1} \omega^m .$$

Preuve : En effet, comme $\tilde{\omega}^m - \omega^m = (e^f - 1)\omega^m$ (où f est une donnée), le lemme est un corollaire immédiat du lemme 2.3 . $\blacksquare$

<u>Lemme 3.2</u> : <u>Il existe une constante</u> C_5 <u>telle que, pour tout</u> $p \geq 1$, <u>on ait</u>

$$\|\psi\|^p_{p\frac{m}{m-1}} \leq C_5\, p\, \|\psi\|^p_p \; .$$

<u>Preuve</u> : On remarque d'abord que pour $p \geq 1$

$$(-\psi)^{p-2}|d\psi|^2 = 4\,p^{-2}\,|d(-\psi)^{\frac{p}{2}}|^2 \; ,$$

de telle sorte que le lemme 3.1 peut s'écrire

$$\int_M |d(-\psi)^{\frac{p}{2}}|^2\,\omega^m \leq \frac{p^2}{4} C_3 \int_M \frac{(-\psi)^{p-1}-1}{p-1}\,\omega^m \; ,$$

soit en ajoutant $\int_M (-\psi)^p\,\omega^m = \int_M ((-\psi)^{\frac{p}{2}})^2\,\omega^m$ aux deux membres

$$(\|-\psi)^{p/2}\|_{W^{1,2}})^2 \leq \int_M \left[\frac{p^2}{4} C_3 \; \frac{(-\psi)^{p-1}-1}{p-1} + (-\psi)^p\right]\omega^m \, .$$

On remarque alors que cette inégalité est encore valable pour $p = 1$. De plus le terme entre crochets est toujours borné par $\frac{C_3}{2}\,p(-\psi)^p$ (on peut supposer $C_3 \geq 4$). En effet la fonction $x \mapsto p^2\,\frac{x^{p-1}-1}{p-1} - (2p-1)x^p$ est majorée par $p\,(p\,\frac{x^{p-1}-1}{p-1} - x^p)$ qui dans le domaine $1 \leq x$, $1 \leq p$, est négative, car elle n'a pas d'extrêmum et prend des valeurs négatives au voisinage du bord ou de l'infini. On obtient donc

$$(\|(-\psi)^{p/2}\|_{W^{1,2}})^2 \leq \frac{C_3}{2}\,p\,\|\psi\|^p_p \; .$$

Le théorème de plongement de Sobolev (cf. exposé n°I) permet d'affirmer que $W^{1,2}$ contient L^q pour $q \leq \frac{2m}{m-1}$ (la dimension réelle est 2m). Il existe donc une constante C_4 telle que

$$\|(-\psi)^{\frac{p}{2}}\|^2_{\frac{2m}{m-1}} \leq C_4 \|(-\psi)^{\frac{p}{2}}\|^2_{W^{1,2}} \leq \frac{C_4 C_3}{2}\|\psi\|^p_p \, ,$$

d'où le lemme 3.2 en posant $C_5 = \frac{C_4 C_3}{2}$ et en remarquant que

$$\|(-\psi)\|^{\frac{p}{2}}_{\frac{2m}{m-1}} = \|\psi\|^p_{p\frac{m}{m-1}} \; . \qquad \blacksquare$$

<u>Lemme 3.3</u> : <u>Il existe une constante</u> C_6 <u>telle que, pour tout</u> p <u>de la forme</u> $(m/m-1)^r$ $(r \in \mathbb{N})$, <u>on ait</u>

$$\|\psi\|_p^p \leq (C_6)^p [C_5\, p\, (m/m-1)^{m-1}]^{-m} .$$

<u>Preuve</u> : La preuve se fait par récurrence. Pour $r = 0$, p vaut 1 et $\|\psi\|_1$ est bornée d'après iii) du lemme 2.1. Si le lemme est vrai jusqu'à r, soit $p = (m/m-1)^r$, on va montrer qu'il est vrai pour $q = (m/m-1)^{r+1}$. Le lemme 3.2 permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|\psi\|^p_{p\frac{m}{m-1}} &\leq C_5 p \|\psi\|_p^p \leq C_5 p (C_6)^p [C_5 p (m/m-1)^{m-1}]^{-m} \\ &\leq (C_5 p)^{-m+1} (C_6)^p (m/m-1)^{-m(m-1)} . \end{aligned}$$

D'où

$$\|\psi\|_q^q \leq (C_5 p)^{-\frac{m(m-1)}{m-1}} (C_6)^{p.\frac{m}{m-1}} (m/m-1)^{-\frac{m^2(m-1)}{m-1}} ,$$

soit

$$\|\psi\|_q^q \leq C_6^q [C_5\, q (m/m-1)^{m-1}]^{-m} . \quad \blacksquare$$

Exposé n° VIII

ESTIMÉES DU SECOND ORDRE*

par B. HELFFER

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Palaiseau

RÉFÉRENCES

[1] T. AUBIN, Métriques riemanniennes et courbure, J. Diff. Geom., 4 (1970), 383-424.

[2] T. AUBIN, Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 119-121.

[3] A. V. POGORELOV, Monge-Ampère equations of elliptic type, Noordhoff, Groningen (1964).

[4] S. T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure and Appl. Math., XXXI (1978), 339-411.

*Notes de J. P. BOURGUIGNON

0. INTRODUCTION. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Le but de cet exposé est de prouver, en suivant [4], le

0.1 Théorème : Soit (M,J,ω) une variété kählérienne compacte. Si $\tilde{\omega}$ est une autre métrique kählérienne dans la même classe que ω, alors il existe des constantes positives C_1 et C_2 dépendant de ω et de la forme de Ricci $\gamma_{\tilde{\omega}}$ de $\tilde{\omega}$ telles que

$$C_1\omega \leq \tilde{\omega} \leq C_2\omega \ . \tag{0.1}$$

Preuve

0.2 Pour trouver la constante C_2, il suffit de majorer $(\tilde{\omega},\omega)$ en fonction de ω et $\gamma_{\tilde{\omega}}$. En effet, dans une base unitaire pour ω diagonalisant $\tilde{\omega}$, nous avons en un point x

$$(\tilde{\omega},\omega) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\omega}_{i\bar{i}}$$

et pour chaque $i, \tilde{\omega}_{i\bar{i}} > 0$ et par suite $\|\tilde{\omega}\|_{C^0} \leq (\tilde{\omega},\omega)$.

Par ailleurs comme il est expliqué dans le paragraphe 4 de l'exposé n°V (en particulier en 4.3 et 4.4), se donner ω et $\gamma_{\tilde{\omega}}$ revient à se donner $\tilde{\omega}^m$. Comme $\tilde{\omega}^m = (\prod_{i=1}^{m} \omega_{i\bar{i}})dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^m$, de la constante C_2 nous déduisons la constante C_1 puisque

$$\inf_i \omega_{i\bar{i}} \geq C_2^{1-m} \prod_{i=1}^{m} \omega_{i\bar{i}} \quad .$$

0.3 Il va être commode de faire intervenir le potentiel kählérien φ tel que $\tilde{\omega} = \omega + id'd''\varphi$. En effet

$$(\tilde{\omega},\omega) = m - \Delta\varphi$$

où Δ désigne le laplacien kählérien $\Delta = - \sum_{i=1}^{m} g_{i\bar{j}} \dfrac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$.

Comme nous savons déjà que $\Delta\varphi < m$, il suffit donc de trouver une borne inférieure pour $\Delta\varphi$ dépendant de ω et de $\gamma_{\tilde{\omega}}$.

Admettons d'abord le lemme suivant dont la preuve fait l'objet du paragraphe 2 :

0.4 Lemme : Il existe une constante c dépendant de ω et des constantes A, B et C (avec $C > 0$) dépendant de ω et γ_{ω} telles que

$$\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)) \leq e^{-c\varphi}(A + B(m-\Delta\varphi) - C(m-\Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}}) \tag{0.5}$$

($\tilde{\Delta}$ désigne bien sûr le laplacien de la métrique $\tilde{\omega}$).

0.6 La preuve se termine alors comme suit. Nous nous plaçons en un point p où la fonction $e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)$ est maximum. Son laplacien pour la métrique $\tilde{\omega}$ est positif et donc $A + B(m-\Delta\varphi(p)) - C(m-\Delta\varphi(p))^{\frac{m}{m-1}} \geq 0$.

La fonction d'une variable réelle $x \mapsto A + Bx - Cx^{\frac{m}{m-1}}$ avec $C > 0$ est négative pour $x \geq x_0$ où x_0 ne dépend que de A, B et C, puisque c'est le terme en $x^{\frac{m}{m-1}}$ qui est dominant. Par suite il existe une constante C_3 dépendant de ω et $\gamma_{\tilde{\omega}}$ telle que $m - \Delta\varphi(p) \leq C_3$.

Comme, sur M, nous avons

$$e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi) \leq e^{-c\varphi(p)}(m-\Delta\varphi(p)),$$

nous en déduisons

$$(m-\Delta\varphi) \leq e^{c(\varphi-\varphi(p))}(m-\Delta\varphi(p)).$$

Comme nous avons montré dans l'exposé n°VII que φ était uniformément bornée en fonction de ω et $\gamma_{\tilde{\omega}}$, nous obtenons donc

$$\Delta\varphi \geq m - C_3 e^{c(\sup_M \varphi - \inf_M \varphi)}. \qquad \blacksquare$$

Remarque : T. Aubin a donné dans [2] une démonstration analogue de l'estimée C^2 pour la solution de l'équation $(**^-)$.

§ 1. QUELQUES FORMULES DE GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE LOCALE

1.1 Dans ce paragraphe nous faisons quelques rappels de géométrie kählérienne locale.

Soit $(g_{i\bar{j}})$ la matrice de la métrique kählérienne dans un système de coordonnées (z^i) et $(g^{i\bar{j}})$ la matrice inverse. Nous rappelons que

$$\overline{g_{i\bar{j}}} = g_{\bar{i}j} = g_{j\bar{i}}$$

et que, la forme de Kähler étant fermée,

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i} .$$

On désigne par J la structure presque complexe définie par la structure complexe.

1.2 Soit D la connexion de Levi-Civita (qui est à la fois hermitienne et holomorphe voir exposé n° III). On pose éventuellement

$$D_i = D_{\frac{\partial}{\partial z^i}} , \quad D_{\bar{i}} = D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}} .$$

Alors D vérifie

$$D \circ J = J \circ D ,$$

$$D\omega = 0 ,$$

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y] .$$

1.3 On définit le tenseur de courbure R par

$$R(X,Y) = D_{[X,Y]} - [D_X, D_Y]$$

(c'est le signe opposé de l'exposé n° IV).

Le tenseur de <u>courbure de Ricci</u> est noté ici ρ .

Nous avons

$$\rho = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j=1}^{m} R_{i\bar{j}}\, dz^i \otimes d\bar{z}^j \quad .$$

Nous rappelons (cf. exposé n° IV) que

$$R_{i\bar{j}} = - \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} (\mathrm{Log} \det(g_{i\bar{j}})).$$

1.4 Nous rappellerons aussi quelques formules locales sur la dérivation covariante; d'abord

$$D_j \frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial z^k}$$

avec

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \sum_{\ell=1}^{m} \left(\frac{\partial g_{j\bar{\ell}}}{\partial z^i} \quad g^{\bar{\ell}k} \right) \tag{1.5}$$

(il n'y a pas de terme en $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ car la connexion est de type (1,0)). Les symboles de Christoffel $\Gamma^k_{i\bar{j}}$, $\Gamma^{\bar{k}}_{i\bar{j}}$, $\Gamma^k_{\bar{i}j}$, $\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\,\bar{j}}$ se définissent de manière analogue et vérifient

$$\overline{\Gamma^k_{ij}} = \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} \ ,$$

$$\Gamma^{\bar{k}}_{ij} = \Gamma^k_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \ ,$$

$$\Gamma^k_{i\bar{j}} = \Gamma^{\bar{k}}_{i\bar{j}} = \Gamma^k_{\bar{i}j} = \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = 0 \quad .$$

La dérivation covariante des champs de formes se définit par dualité par g . A une 1-forme α , on associe $\#\alpha$ définie par $g(\#\alpha, Y) = \alpha(Y)$. Alors

$$D\alpha = \flat(D(\#\alpha))$$

($\flat$ est bien sûr l'isomorphisme inverse de $\#$).

D'où si $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, dz^i + \alpha_{\bar{i}}\, d\bar{z}^i$, et si

$$D\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i;j}\, dz^i \otimes dz^j + \alpha_{i;\bar{j}}\, dz^i \otimes d\bar{z}^j$$
$$+ \alpha_{\bar{i};j}\, dz^i \otimes d\bar{z}^j + \alpha_{\bar{i};\bar{j}}\, d\bar{z}^i \otimes d\bar{z}^j ,$$

nous avons

$$\alpha_{i;j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial z^j} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma_{ij}^{\ell} \alpha_\ell ,$$

$$\alpha_{i;\bar{j}} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{z}^j} , \quad \alpha_{\bar{i};j} = \frac{\partial \alpha_{\bar{i}}}{\partial z^j} ,$$

$$\alpha_{\bar{i};\bar{j}} = \frac{\partial \alpha_{\bar{i}}}{\partial \bar{z}^j} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{\ell}} \alpha_{\bar{\ell}} .$$

La dérivation covariante est étendue aux 2-tenseurs comme une dérivation.

1.6 Pour une fonction f définie sur M, <u>on note</u>

$$f_i = (df)_i = (Df_i) = \frac{\partial f}{\partial z^i}$$

et

$$f_{\bar{i}} = (df)_{\bar{i}} = (Df)_{\bar{i}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} .$$

Les composantes de Ddf sont alors

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial z^i} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma_{ij}^{\ell} \frac{\partial f}{\partial z^\ell} ,$$

$$f_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^j \partial z^i} , = \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = f_{\bar{j}i} ,$$

$$f_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{z}^i} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{\ell}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\ell} .$$

Si f est réelle, alors $f_{i\bar{j}} = f_{\bar{i}j}$ et $\overline{f_{ij}} = f_{\bar{i}\bar{j}}$.

Les composantes de (DDdf) sont alors

(1.8a) $$f_{ijk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial z^k} - \sum_{\ell=1}^{m} (\Gamma^{\ell}_{kj} f_{i\ell} + \Gamma^{\ell}_{ki} f_{\ell k}) ,$$

(1.8b) $$f_{ij\bar{k}} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}^k} ,$$

(1.8c) $$f_{i\bar{j}k} = \frac{\partial f_{i\bar{j}}}{\partial z^k} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma^{\ell}_{ki} f_{\ell\bar{j}} ,$$

(1.8d) $$f_{i\bar{j}\bar{k}} = \frac{\partial f_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma^{\bar{\ell}}_{\bar{k}\bar{j}} f_{i\bar{\ell}} ,$$

(1.8e) $$f_{\bar{i}jk} = \frac{\partial f_{\bar{i}j}}{\partial z^k} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma^{\ell}_{kj} f_{\bar{i}\ell} ,$$

(1.8f) $$f_{\bar{i}j\bar{k}} = \frac{\partial f_{\bar{i}j}}{\partial \bar{z}^k} - \sum_{\ell=1}^{m} \Gamma^{\bar{\ell}}_{\bar{k}\bar{i}} f_{\bar{\ell}j} ,$$

(1.8g) $$f_{\bar{i}\bar{j}k} = \frac{\partial f_{\bar{i}\bar{j}}}{\partial z^k} ,$$

(1.8h) $$f_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \frac{\partial f_{\bar{i}\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} - \sum_{\ell=1}^{m} (\Gamma^{\bar{\ell}}_{\bar{k}\bar{j}} f_{\bar{i}\bar{\ell}} + \Gamma^{\bar{\ell}}_{\bar{k}\bar{i}} f_{\bar{\ell}\bar{j}}) .$$

De plus si f est réelle, alors $f_{i\bar{j}k} = \overline{f_{\bar{i}j\bar{k}}}$ (et toutes les relations analogues).

Il est à remarquer qu'en un point où la métrique est diagonale dans la base naturelle et où $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\ell} = 0$ (en tout point il existe toujours des systèmes de coordonnées complexes dits adaptés vérifiant ces conditions ; ce sont les analogues des coordonnées normales en géométrie riemannienne), alors les composantes de (DDdf) correspondant aux formules (1.8c) à (1.8f) coïncident avec des dérivées troisièmes ordinaires de f .

1.9 Nous en venons maintenant aux expressions en coordonnées de la courbure. Nous posons

$$R^{\ell}_{ki\bar{j}} = \left(R\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \frac{\partial}{\partial z^i}\right)\frac{\partial}{\partial z^k}\right)^{\ell} .$$

Il vient alors aisément que

$$R^{\ell}{}_{ki\bar{j}} = -\frac{\partial \Gamma^{\ell}{}_{ik}}{\partial \bar{z}^{j}}$$

$$= -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2 g_{k\bar{p}}}{\partial \bar{z}^{j}\partial z^{i}}\, g^{\bar{p}\ell} +$$

$$+ \sum_{p,q,r=1}^{m} \left(\frac{\partial g_{k\bar{p}}}{\partial z^{i}}\, \frac{\partial g_{q\bar{r}}}{\partial \bar{z}^{j}}\, g^{\bar{p}q} g^{\ell\bar{r}}\right) .$$

Nous posons encore $R_{k\bar{\ell}i\bar{j}} = \sum_{p=1}^{m} g_{p\bar{\ell}} R^{p}{}_{ki\bar{j}}$, de telle sorte que $R_{k\bar{\ell}i\bar{j}} = -\frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^{k}\partial \bar{z}^{\ell}}$ est symétrique dans ses premier et troisième arguments ainsi qu'en ces deuxième et quatrième arguments.

Nous avons alors $R_{i\bar{j}} = \sum_{\ell=1}^{m} R^{\ell}{}_{\ell i\bar{j}}$.

Nous constatons que

(1.10)
$$f_{ijk} = f_{ikj} , \quad f_{i\bar{j}\bar{k}} = f_{i\bar{k}\bar{j}} ,$$

$$f_{i\bar{k}j} - f_{ij\bar{k}} = -\sum_{\ell=1}^{m} R_{i}{}^{\ell}{}_{j\bar{k}}\, f_{\ell} ,$$

d'où

$$f_{i\bar{j}k} = f_{k\bar{j}i} .$$

§ 2. PREUVE DU LEMME 0.4

2.1 Nous partons de l'expression locale de l'équation (*)

$$(*_{loc}) \qquad \det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{i}\partial \bar{z}^{j}}\right)\det(g_{i\bar{j}}) = e^{f} .$$

En différentiant deux fois par $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\ell}}\left(e^{-f} \frac{\partial}{\partial z^{k}}\right)$ et en utilisant la formule

$$(\det A)' = (\det A) . \sum_{i,j=1}^{m} (A^{-1})_{ij} A'_{ij} ,$$

nous obtenons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} = \sum_{i,j=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}}\left(\frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k \partial \bar{z}^\ell}\right)$$

$$+ \sum_{i,j,p,q=1}^{m} g^{p\bar{j}} g^{i\bar{q}} \frac{\partial g_{p\bar{q}}}{\partial \bar{z}^\ell} \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell}$$

$$- \sum_{i,j,p,q=1}^{m} \tilde{g}^{p\bar{j}} \tilde{g}^{i\bar{q}} \left(\frac{\partial g_{p\bar{q}}}{\partial \bar{z}^\ell} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^p \partial \bar{z}^q \partial \bar{z}^\ell}\right)\left(\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k}\right) .$$

En prenant la trace nous obtenons

$$\Delta f = - \sum_{k,\ell=1}^{m} g^{k\bar{\ell}} \frac{\partial^2 f}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell}$$

dans le développement duquel nous voyons apparaître comme second terme le terme principal de $\tilde{\Delta}\Delta\varphi$.

Avant de passer au calcul de $\tilde{\Delta}\Delta\varphi$, remarquons que si nous choisissons des coordonnées adaptées au point x où nous évaluons Δf (i.e. telles que $(\frac{\partial}{\partial z^i})$ soit une base unitaire en x et que $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\ell} = 0$), l'expression précédente se réduit à

$$\Delta f = - \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}}\left(\frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial z^k \partial \bar{z}^k}\right)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \sum_{i,j,p,q,k=1}^{m} \tilde{g}^{\bar{i}p} \tilde{g}^{j\bar{q}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^j \partial \bar{z}^p \partial \bar{z}^k} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^q \partial z^k} .$$

2.2 Evaluons donc $\tilde{\Delta}(\Delta\varphi)$:

$$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) = \sum_{k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell}\Big(\sum_{i,j=1}^{m} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\Big)$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^4\varphi}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell \partial z^i \partial \bar{z}^j}$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} \frac{\partial^2 g^{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} .$$

La disparition d'un certain nombre de termes dans la formule précédente a tenu compte de ce que,par choix de coordonnées , $\dfrac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \dfrac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = 0$ au point x où nous évaluons $\tilde{\Delta}(\Delta f)$.

Remarquons encore qu'au point x

$$\frac{\partial^2 g^{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} = - \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell}$$

qui n'est rien d'autre, dans ce système de coordonnées, que la composante $R_{k\bar{\ell}i\bar{j}}$ de la courbure d'après les formules de 1.6 .

Nous avons donc

$$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) + \Delta f = - \sum_{i,j,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$$

$$+ \sum_{i,j,p,q,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{p}} \tilde{g}^{j\bar{q}} \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^j \partial \bar{z}^p \partial z^k} \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^q \partial \bar{z}^k}$$

$$- \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} .$$

2.3 Nous remarquons alors que,dans le système de coordonnées où nous sommes,

$$\varphi_{k\bar{p}\bar{j}} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^j \partial \bar{z}^p \partial \bar{z}^k} ,$$

$$\varphi_{k\bar{q}i} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^q \partial z^k} ,$$

$$\varphi_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$$

d'après (1.8 d) , (1.8 c) et (1.7).

Par suite, au point x , nous avons

$$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) + \Delta f = \sum_{i,j,p,q,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{p}}\tilde{g}^{j\bar{q}} \varphi_{j\bar{p}\bar{k}} \varphi_{i\bar{q}k}$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{k}} - \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}}$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \varphi_{i\bar{j}} .$$

Le membre de droite ne dépend maintenant plus du choix de coordonnées. Nous avons donc une égalité entre quantités intrinsèques . Il va être commode de continuer à transformer l'égalité dans une base unitaire où $\tilde{\omega}$ (et par suite $Dd\varphi$) est diagonal au point x .

2.4 Posons

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{k}} - \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} + \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \varphi_{i\bar{j}} .$$

Nous pouvons écrire au point x

$$\mathcal{A} = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{R_{i\bar{i}k\bar{k}}}{(1+\varphi_{i\bar{i}})} - \sum_{i,k=1}^{m} R_{i\bar{i}k\bar{k}} + \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{1}{1+\varphi_{k\bar{k}}} R_{i\bar{j}k\bar{k}} \varphi_{i\bar{j}}$$

$$= - \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} \frac{\varphi_{i\bar{i}}}{1+\varphi_{i\bar{i}}} + \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} \frac{\varphi_{i\bar{i}}}{1+\varphi_{\ell\bar{\ell}}}$$

$$= \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} \varphi_{i\bar{i}} \frac{\varphi_{i\bar{i}} - \varphi_{\ell\bar{\ell}}}{(1+\varphi_{i\bar{i}})(1+\varphi_{\ell\bar{\ell}})} .$$

Nous voyons donc apparaître dans l'expression de $\mathcal{A}$ les composantes $R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}}$ de la courbure, qui ne sont rien d'autre que la courbure bisectionnelle holomorphe $(X,Y) \to g(R(X,JX)Y,JY)$ (c'est à cause de ces termes que T. Aubin dans [1] faisait une hypothèse sur cette courbure bisectionnelle). Nous savons que $R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}}$ est symétrique en i et ℓ de telle sorte que l'expression $\mathcal{A}$ peut se réécrire

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} \frac{(\varphi_{i\bar{i}} - \varphi_{\ell\bar{\ell}})^2}{(1+\varphi_{i\bar{i}})(1+\varphi_{\ell\bar{\ell}})}$$

ou encore

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} \frac{(\tilde{g}_{i\bar{i}} - \tilde{g}_{\ell\bar{\ell}})^2}{\tilde{g}_{i\bar{i}}\tilde{g}_{\ell\bar{\ell}}}$$

et par suite

$$\mathcal{A} \geq (\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}}) \sum_{i,\ell=1}^{m} \frac{(\tilde{g}_{i\bar{i}} - \tilde{g}_{\ell\bar{\ell}})^2}{2\tilde{g}_{i\bar{i}}\tilde{g}_{\ell\bar{\ell}}} .$$

2.5 Par suite nous pouvons obtenir une minoration de $\tilde{\Delta}(\Delta\varphi)$ par

$$(2.6) \qquad \tilde{\Delta}(\Delta\varphi) \geq -\Delta f + \sum_{i,j,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}} \varphi_{\bar{j}\bar{i}\bar{k}}\varphi_{ijk} + (\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}})\left(\sum_{i,\ell=1}^{m} \frac{\tilde{g}_{i\bar{i}}}{\tilde{g}_{\ell\bar{\ell}}} - m^2\right) .$$

Dans le membre de droite précédent, deux termes sont gênants : le terme quadratique en $DDd\varphi$ et le coefficient $(\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}})$ de $(m - \Delta\varphi) \sum_{\ell=1}^{m} \tilde{g}^{\ell\bar{\ell}}$.

2.7 Si, guidé par [3], nous considérons le développement de $\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m - \Delta\varphi))$, où c est une constante positive que nous choisirons ultérieurement, nous voyons apparaître des termes en $DDd\varphi$ et aussi $c(\tilde{\Delta}\varphi)(m-\Delta\varphi)$. Mais

$$(2.8) \qquad \tilde{\Delta}\varphi = - \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\varphi_{\ell\bar{\ell}}}{1+\varphi_{\ell\bar{\ell}}} = - m + \sum_{\ell=1}^{m} \tilde{g}^{\ell\bar{\ell}} .$$

Plus précisément nous avons

$$\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)) = -c\, e^{-c\varphi}\tilde{\Delta}\varphi(m-\Delta\varphi) - c^2 e^{-c\varphi}\tilde{g}(d\varphi,d\varphi)(m-\Delta\varphi)$$

$$- 2\, c e^{-c\varphi}\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\varphi) - e^{-c\varphi}\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) .$$

Comme $m-\Delta\varphi = (\tilde{\omega},\omega) > 0$ et que

$$c^2(m-\Delta\varphi)\tilde{g}(d\varphi,d\varphi) + 2c\,\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\varphi) + (m-\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\Delta\varphi) \geq 0 ,$$

nous pouvons majorer $e^{c\varphi}\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi))$ par

$$e^{c\varphi}\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)) \leq -c\,\tilde{\Delta}\varphi(m-\Delta\varphi) + (m-\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\Delta\varphi) - \tilde{\Delta}(\Delta\varphi). \tag{2.9}$$

Pour poursuivre la majoration nous analysons de plus près $(m-\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\Delta\varphi)$; d'abord par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\Delta\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}} \Big| \sum_{k=1}^{m} (\sqrt{\tilde{g}^{k\bar{k}}}\,\varphi_{k\bar{k}i})\sqrt{\tilde{g}_{k\bar{k}}}\Big|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}} \Big(\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}^{j\bar{j}}\varphi_{j\bar{j}i}\varphi_{\bar{j}j\bar{i}}\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{m}\tilde{g}_{\ell\bar{\ell}}\Big) ,$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}(m-\Delta\varphi)^{-1}\tilde{g}(d\Delta\varphi,d\Delta\varphi) &\leq \sum_{i,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}}\varphi_{j\bar{j}i}\varphi_{\bar{j}j\bar{i}} \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}}\varphi_{j\bar{k}\bar{i}}\varphi_{\bar{j}ki} .\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous remarquons alors (cf. 1.10) que

$$\varphi_{j\bar{k}\bar{i}} = \varphi_{j\bar{i}\bar{k}} \quad , \quad \varphi_{\bar{j}ki} = \varphi_{\bar{j}ik}$$

et que, comme $Dd\varphi$ est symétrique,

$$\varphi_{\bar{j}ik} = \varphi_{i\bar{j}k} .$$

Par suite les termes d'ordre 3 de l'inégalité (2.10) se transforment exactement en ceux de (2.6). Nous avons donc en reprenant l'expression de (2.9)

$$e^{c\varphi}\,\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)) \le -c\,\tilde{\Delta}\varphi(m-\Delta\varphi) + \Delta f - (\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}})(\sum_{i,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{\ell\bar{\ell}}\tilde{g}_{i\bar{i}} - m^2),$$

d'où en utilisant (2.8)

$$\text{(2.11)}\quad \begin{aligned} e^{c\varphi}\,\tilde{\Delta}(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)) &\le (\Delta f + m^2(\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}})) + c\,m(m-\Delta\varphi) - \\ &- (c + \inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}})(m-\Delta\varphi)\sum_{\ell=1}^{m}\tilde{g}^{\ell\bar{\ell}}\,. \end{aligned}$$

Il nous reste à minorer $\sum_{\ell=1}^{m}\tilde{g}^{\ell\bar{\ell}}$. Pour cela nous allons prouver le lemme suivant qui, bien que donnant une minoration grossière, nous suffira :

2.12 <u>Lemme</u> : <u>Soient</u> $a_1,\dots,a_m$ m <u>nombres positifs</u>. <u>Alors</u>

$$\text{(2.13)}\qquad \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i} \ge (\sum_{i=1}^{m} a_i)^{\frac{1}{m-1}}\,(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i})^{\frac{1}{m-1}}\,.$$

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de termes. Pour $m=2$, il y a égalité de façon triviale.

Supposons l'inégalité prouvée pour toute famille de (m-1) nombres positifs avec $m\ge 2$. Soit $(a_1,\dots,a_m)$ une famille de m nombres positifs que nous supposons ordonnée de façon décroissante.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i})^{m-1} &= (\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_m})^{m-1} \\ &\ge (\frac{1}{a_m})^{m-1} + (m-1)\frac{1}{a_m}(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{a_j})^{m-2}\,,\end{aligned}$$

de l'hypothèse de récurrence nous déduisons, comme $m\ge 2$,

$$(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i})^{m-1} \ge (\frac{1}{a_m})^{m-1} + \frac{1}{a_m}(\sum_{j=1}^{m-1} a_j)(\prod_{j=1}^{m-1}\frac{1}{a_j})\,,$$

Or $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i}\right) = \frac{1}{a_m}\left(\sum_{j=1}^{m-1} a_j\right)\left(\prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{a_j}\right) + \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{a_j}$. Le lemme suit donc puisque, la suite ayant été ordonnée de façon décroissante, $\frac{1}{a_m} \geq \frac{1}{a_j}$ pour $1 \leq j \leq m-1$. ∎

2.14 D'après le lemme 2.12, comme $\prod_{i=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}} = e^{f}$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{i}} \geq (m-\Delta\varphi)^{\frac{1}{m-1}}\, e^{-\frac{f}{m-1}} .$$

En utilisant cette minoration dans (2.11) et en choisissant c tel que en chaque point et pour chaque choix de base $c + \inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} > 1$ (un tel choix est possible car l'espace des bases unitaires sur M est compact), nous avons au point x

$$e^{c\varphi}\tilde{\Delta}\left(e^{-c\varphi}(m-\Delta\varphi)\right) \leq A_x + B_x(m-\Delta\varphi) - C_x(m-\Delta\varphi)^{\frac{m}{m-1}} ,$$

avec $A_x = \Delta f + m^2\left(\inf_{i\neq\ell} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}}\right)$,

$B_x = cm$,

$C_x = e^{-\frac{f}{m-1}} > 0$.

Le lemme 0.4 est donc prouvé car les constantes A_x, B_x et C_x sont uniformément bornées par des constantes A , B et C avec $C > 0$. ∎

Exposé n° IX

CONSTRUCTION DE MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN *

par E. CALABI

Department of Mathematics
University of Pennsylvania at Philadelphia
et
I. H. E. S.

RÉFÉRENCES

[1] V. BELINSKII, G. GIBBONS, D. PAGE, C. POPE, Asymptotically euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity, preprint (1978).

[2] E. CALABI, A construction of nonhomogeneous Einstein metrics, Proc. Symp. Pure Math. Stanford, Vol.27 (1975), 17-24.

[3] E. CALABI, Métriques kählériennes et fibrés holomorphes, à paraître aux Ann. Sc. de l'E.N.S.

[4] S. Y. CHENG , S. T. YAU, On the regularity of the Monge -Ampère equation $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math., XXX (1977), 47-68.

[5] T. EGUCHI, A. HANSON, Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity, à paraître aux Physics Letters B.

* Notes de J. P. BOURGUIGNON

1. Cet exposé présente des résultats à paraître dans [3] dont nous donnons seulement un résumé.

Nous nous proposons de construire des métriques d'Einstein-Kähler. Si γ_ω est la forme de Ricci associée à une forme de Kähler ω, l'équation à résoudre est

$$\gamma_\omega = k.\omega \ .$$

En coordonnées locales (z^α), il est bien connu (cf. exposé n°III, Lemme 4.3) qu'il existe une fonction ϕ (dite potentiel de Kähler) telle que

$$g_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \quad \text{et} \quad R_{\alpha\bar\beta} = -\frac{\partial^2 \operatorname{Log}\det(g_{\alpha\bar\beta})}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \ .$$

2. Des solutions explicites de cette équation ont été données en 1973 dans [2] dans des tubes $D_{\mathbb{C}} = D \oplus i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ où D est un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$. Si $\pi : D_{\mathbb{C}} \to D$ est la projection, alors on peut prendre $\phi = \varphi \circ \pi$ où φ est une fonction strictement convexe dans D solution de l'équation de Monge-Ampère réelle

(3) $$\det\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right) = e^{-K\varphi} \ .$$

Lorsque $K < 0$, la preuve de l'existence de solutions à cette équation apparaît dans [4].

Si la solution φ de (3) éclate uniformément au bord, la métrique est complète. Si D est une boule, on peut prendre des fonctions ne dépendant que de la distance, ce qui donne une solution plus élémentaire de (3) sur les variétés.

4. Si l'on veut des exemples non triviaux topologiquement, on peut penser à construire des métriques hermitiennes sur l'espace total d'un fibré.

Dans le cas riemannien la notion qui s'impose est la suivante appelée submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques dans la littérature .

Soit $\pi : E \to (M,g)$ un fibré de groupe structural G où G est un groupe d'isométries de la fibre (F,g_F) et soit Θ une G-connexion sur le fibré. Alors il existe une métrique et une seule g_E sur E telle que

i) g_E induit g_F sur les fibres,

ii) $T_pE = T_pF \oplus H_pE$ où p est un point de E et H_pE l'espace horizontal en p ,

iii) les fibres sont isométriques et leur distance égale à celle de leurs projections dans la base.

5. Nous prenons maintenant des variétés kählériennes (M,g_M) et (F,g_F). Nous voulons faire une construction analogue pour des fibrés holomorphes sur M à fibres F : on ne peut prendre à la fois i), ii) et iii) sinon la théorie est triviale.

Nous nous inspirons du cas particulier suivant : le fibré vectoriel $\pi : L \to M$ est holomorphe de rang m . Nous prenons $G = G\ell(m,\mathbb{C})$ que nous réduisons à $G_0 = U(m)$ par choix d'une métrique hermitienne a dans L .

Nous prenons alors comme définition d'une métrique kählérienne fibrée les conditions i), ii) et on modifie iii) en iii') comme suit :

iii') la métrique induite sur la section nulle coïncide avec g_M .

6. On se sert de la structure kählérienne pour étendre la métrique ailleurs : le potentiel kählérien local sur L est pris égal à $t + \phi_M \circ \pi$ où ϕ_M est un potentiel kählérien local pour g_M et t la forme quadratique associée à a . Nous posons

$$\omega_L = id'd''(\phi_M \circ \pi + t) .$$

Grâce à a et à la connexion canonique Θ nous associons aux coordonnées holomorphes (z,ζ) le repère local $(dz^\alpha, \nabla\zeta^\lambda)$ où

$$\nabla\zeta^\lambda = d\zeta^\lambda + L^\lambda_{\nu\alpha}\zeta^\lambda dz^\alpha \text{ avec } L^\lambda_{\nu\alpha} = a^{\lambda\bar\mu}\frac{\partial a_{\nu\bar\mu}}{\partial z^\alpha} .$$

Alors si nous notons S la courbure du fibré, nous avons

$$id'd''\phi = (g_{\alpha\bar\beta} + \bar\zeta^\mu a_{\lambda\bar\mu} S^\lambda_{\nu\alpha\bar\beta}\zeta^\nu)dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta + a_{\lambda\bar\mu}\nabla\zeta^\lambda \wedge \nabla\zeta^{\bar\mu} .$$

La première partie est définie positive si ζ est assez petit ou encore si la courbure du fibré est "positive". Ceci va marcher pour les fibrés associés à un fibré vectoriel holomorphe de fibre une région $\mathbb{C}^n$ invariante par G_o (les boules, les couronnes, etc...).

7. Nous allons adapter la métrique dans la fibre en prenant $g_F = i\,d'd''\phi_F$ où ϕ_F ne dépend que de la distance t dans un intervalle convenable (t sert à paramétrer les orbites de G_o).

Nous prenons alors $\phi_E = \phi \circ \pi + u(t)$, d'où

$$i\,d'd''\phi_E = (g_{\alpha\bar\beta} + u'(t) S_{\lambda\bar\mu\alpha\bar\beta}\zeta^\lambda \bar\zeta^\mu) dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta + (u'(t) a_{\lambda\bar\mu} + $$
$$+ u''(t) a_{\lambda\bar\varkappa} a_{\nu\bar\mu} \zeta^\nu \bar\zeta^\varkappa) \nabla\zeta^\lambda \wedge \overline{\nabla\zeta}^\mu \ .$$

Il faut maintenant trouver u pour que $i\,d'd''\phi_E$ soit défini positif.

8. Nous faisons maintenant <u>l'hypothèse</u> que (M, g_M) est d'Einstein-Kähler de constante k_o, i.e.

$$g_M = \det(g_{\alpha\bar\beta}) = e^{-k_o \phi_M} \ .$$

Nous nous restreignons d'abord aux <u>fibrés en droites</u>. Nous supposons en outre que ce fibré est un multiple du fibré canonique de telle sorte qu'il existe un entier ℓ avec

$$S_{\lambda\bar\mu\alpha\bar\beta} = \ell\, a_{\lambda\bar\mu}\, g_{\alpha\bar\beta}$$

(remarquons que $t = a_{1\bar 1}|\zeta|^2 = e^{\ell\phi}|\text{holomorphe}|^2$).

Dans ce cas nous avons (en posant $\dim_{\mathbb{C}} M = m-1$)

$$i\,d'd''\phi_E = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m-1} (1+\ell t u') g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta + (u' + tu'') a_{1\bar 1} \nabla'\zeta \wedge \nabla''\zeta$$

et aussi

$$\det(g_E) = \det(g_M)(1+\ell t u')^{n-1}(u' + tu'')\, t\, |\nabla \log \zeta|^2 \ .$$

9. Si la métrique $id'd''\phi_E$ est de Kähler-Einstein de constante k, nous écrivons

$$\det(g_E) = |\text{holomorphe}|^2 e^{-k\phi_E} .$$

Par suite u doit vérifier l'équation

$$e^{-k_o\phi_M}(1+\ell t u')^{m-1}(u'+tu'')t = |\text{holomorphe}|^2 e^{-ku-k\phi_M}$$

qui, en utilisant le relation entre t et $e^{-\phi_M}$, se simplifie si $\ell \neq 0$ (donc si le fibré n'est pas trivial) en

$$t^{(k-k_o+\ell)/\ell}(\ell+\ell t u')^{m-1}(u'+tu'')e^{ku} = |\text{holomorphe}|^2 .$$

Le membre de gauche ne dépendant que de la distance et l'invariant de Lévi des surfaces de niveau étant non nul ($\ell \neq 0$), le membre de droite doit être constant.

10. L'équation admet pour facteur intégrant $(k_o - k - k\ell t u')$. Si nous voulons par ailleurs ne pas avoir de singularité à l'origine, il faut prendre $k = k_o + \ell$.

Le cas $k = 0$ est particulièrement intéressant puisqu'alors l'équation se réduit à

$$1 + \ell t u' = (1 + mc\ell t)^{\frac{1}{m}}$$

qui s'intègre en

$$u = \int_o \frac{(1+mc\ell t)^{\frac{1}{m}} - 1}{\ell t}\, dt .$$

Ces métriques sont asymptotiques à la métrique euclidienne lorsque t tend vers l'infini.

11. Pour $m = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ donc) en prenant $M = S^2$, alors $k_o = 1$. Nous prenons $k = 0$ (et donc $\ell = -1$) : nous construisons dans ce cas une métrique d'Einstein-Kähler à courbure de Ricci nulle sur l'espace total E du fibré en droites canoniques de S^2 (nous avons alors $\phi = \log(1+|z|^2)$, et

$$u = 2c(\sqrt{1+2c\ell t} - \log(1+\sqrt{1+2c\ell t})) .$$

L'espace E est équivalent à un cône quadratique de $\mathbb{C}^3$ avec l'origine éclatée. Cette métrique a été trouvée indépendamment par plusieurs autres personnes (cf. [1], [5]) et aussi N. Hitchin et R. Ward.

12. D'autres applications sont possibles : par exemple sur l'espace total du fibré cotangent de $\mathbb{C}P^n$, il est possible de mettre une métrique complète à groupe d'holonomie Sp(m) (donc automatiquement kählérienne à courbure de Ricci nulle). Pour de telles métriques, le qualitatif d'hyperkählériennes semble le plus approprié.

Exposé n° X

SUR LA DEUXIÈME CONJECTURE DE CALABI

par J. P. BOURGUIGNON

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Palaiseau

RÉFÉRENCES

[1] M. DEMAZURE, Sous-groupes algébriques du groupe de Cremona, Ann. Sci. E. N. S. Paris, 3 (1970), 507-589.

[2] F. HIRZEBRUCH, Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. , 124 (1951), 77-86.

[3] N. HITCHIN, On the curvature of rational surfaces, Proc. of Symp. Pure Math. , XXVII (1975), 65-80.

[4] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Erg. der Math. 70, Springer (1970).

[5] A. LICHNEROWICZ, Géométrie des groupes de transformations, Dunod (1958).

[6] G. de RHAM, Variétés différentiables, Hermann (1955).

[7] S. T. YAU, On the curvature of compact hermitian manifolds, Inv. Math., 25 (1974), 213-239.

0.1 On rappelle (cf. exposé n° V) que les conjectures $II^{\pm}$ s'énoncent :

Etant donné une variété complexe compacte (M,J) à première classe de Chern définie (positive ou négative) existe-t-il une unique métrique d'Einstein-Kähler telle que $\gamma_{\omega} = \pm\,\omega$?

0.2 Analytiquement l'équation à résoudre s'écrit

$$(**^{\pm}) \qquad e^{\pm\varphi}(\omega + id'd''\varphi)^m = e^f \omega^m$$

où ω est une forme de Kähler dans la classe $2\pi c_1(M)$ et où f est une fonction réelle définie par $id'd''f = \gamma_{\omega} - (\pm\,\omega)$ avec la normalisation

$$\int_M e^f \omega^m = \int_M \omega^m .$$

0.3 Dans cet exposé nous nous proposons de donner des exemples de variétés à première classe de Chern définie, spécialement parmi les surfaces complexes, d'examiner le rôle des inégalités isopérimétriques dans l'existence et l'unicité de l'équation $(**^{+})$ ainsi que leur lien avec la taille du groupe des automorphismes complexes. Nous terminons en présentant de façon détaillée la deuxième conjecture due à E. Calabi.

1. LES VARIÉTÉS COMPLEXES A 1ère CLASSE DE CHERN DÉFINIE

1.1 Remarquons d'abord que la classe de Kähler, étant prise à homothétie près dans la première classe de Chern, est entière. D'après le théorème de Kodaira la structure est donc algébrique.

1.2 Commençons par les hypersurfaces de $\mathbb{C}P^{m+1}$. Si $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}P^{m+1}$, où F est un polynôme homogène de degré d, alors nous avons vu dans l'exposé n° IV que la classe duale de $[M]$ par la dualité de Poincaré vérifie $[M]^* = c_1([M])$ et par suite

$$c_1(M) = (m+2-d)[\omega]$$

où $[\omega]$ est la classe de Kähler induite par le plongement. Ainsi

$d < m+2$, $c_1(M)$ est positive ;

$d = m+2$, $c_1(M) = 0$;

$d > m+2$, $c_1(M)$ est négative.

Il est facile de vérifier que la métrique induite n'est pas de Kähler-Einstein.

Voilà donc une première famille de variétés complexes à première classe de Chern définie.

1.3 Les variétés à classe de Chern négative sont celles dont le faisceau canonique K est ample (on rappelle qu'un fibré en droites est dit <u>ample</u> s'il existe un plongement de M dans $\mathbb{C}P^N$ tel qu'une puissance de K soit image réciproque du fibré canonique de $\mathbb{C}P^N$).

La proposition suivante (cf. [4] p.82) est à rapprocher de la proposition

1.4 <u>Proposition</u> : <u>Le groupe des transformations holomorphes d'une variété complexe compacte à première classe de Chern négative est fini</u>.

1.5 Nous considérons maintenant les <u>surfaces complexes</u>. Pour cela il sera commode de disposer du concept général <u>d'éclatement</u> en un point.

Soit (M,J) une variété complexe et $U \subset M$ un ouvert de coordonnées $(z^1,\dots,z^m)$ centré au point p .

Soit $Z \subset U\setminus\{p\} \times \mathbb{C}P^{m-1}$ la sous-variété des droites joignant les points de U à l'origine définie par

$$Z = \{(z,\zeta) \mid z \in U\setminus\{p\},\ \zeta \in \mathbb{C}P^{m-1} \text{ avec } z \in \zeta\} .$$

On considère $\bar{Z}$ l'adhérence de Z dans $U \times \mathbb{C}P^{m-1}$. Il est clair que la rectriction à Z de la projection π de $U \times \mathbb{C}P^{m-1}$ sur U est une transformation biholomorphe sur $U\setminus\{p\}$ qui se prolonge holomorphiquement à Z. De plus $\pi^{-1}(p) = \mathbb{C}P^{m-1}$.

On montre facilement que l'on peut construire une variété complexe $\hat{M}$ appelée <u>éclaté de</u> M <u>en</u> p par recollement par π de Z à $U\setminus\{p\}$. Le choix de l'ouvert de coordonnées U ne modifie la variété $\hat{M}$ que par une transformation biholomorphe.

D'un point de vue topologique la variété $\hat{M}$ peut être considérée comme obtenue à partir de M par somme connexe avec $\overline{\mathbb{C}P^m}$ (la barre signifie que $\mathbb{C}P^m$ est muni de l'orientation opposée) : en effet le complémentaire d'un point dans $\mathbb{C}P^m$ est difféomorphe au fibré normal d'un hyperplan projectif, donc à l'espace total du fibré de Hopf sur $\mathbb{C}P^{m-1}$.

L'opération inverse de l'éclatement est la contraction. Il nous sera plus commode (c'est par ailleurs le cas qui nous intéresse) de ne considérer que le cas des surfaces. Sur les cycles de dimension 2 est alors définie la forme d'intersection : lorsque les cycles sont en position générale, le nombre d'intersections comptées avec leur signe est un invariant d'homologie. Cette forme est duale de la forme d'intersection définie en cohomologie de de Rham par $(\alpha,\beta) \mapsto \int_M \alpha\wedge\beta$. Nous nous intéressons aux cycles qui sont des droites complexes.

Dans une surface complexe N une droite complexe peut être contractée et remplacée par un point p si et seulement si sa self-intersection vaut -1 . La nouvelle variété $\check{N}$ est encore une surface complexe et la variété obtenue en éclatant p n'est rien d'autre que N . En effet le fibré normal à $\pi^{-1}(p)$ est le fibré de Hopf dont la self-intersection de la section nulle vaut +1 , soit -1 si on renverse l'orientation.

Remarquons qu'il est toujours possible de faire une contraction dès que la self-intersection est négative, mais la variété contractée est singulière dès que la self-intersection n'est pas -1 .

1.6 Nous spécialisons l'étude aux surfaces rationnelles, i.e. celles qui peuvent être obtenues à partir de $\mathbb{C}P^2$ par des opérations d'éclatement de points et de contraction de droites. Pour les classifier la notion suivante est utile:une surface S est dite un modèle minimal si S ne contient aucune droite exceptionnelle, i.e. aucune droite complexe de self-intersection -1 .

La classification est alors donnée par le théorème suivant :

1.7 Théorème (cf.[3]) : Les modèles minimaux des surfaces rationnelles sont $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ et les surfaces de Hirzebruch F_n pour $n\geq 2$.

1.8 Rappelons (cf.[2]) que la surface de Hirzebruch F_n est l'espace total du fibré projectif sur $\mathbb{C}P^1$ obtenu en ajoutant un fibré trivial en droites complexes à la puissance tensorielle n-ième du fibré de Hopf. Les surfaces F_{2k} sont difféomorphes à $S^2\times S^2$ et les surfaces F_{2k+1} à la somme connexe $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. Il est clair que F_o est $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$. D'autre part F_1 est $\widehat{\mathbb{C}P^2}$ et n'est donc pas un modèle minimal.

Les surfaces F_n peuvent s'obtenir aussi par la méthode suivante, qui met en évidence qu'elles sont des surfaces rationnelles : on éclate (n+1) points sur une même droite de $\mathbb{C}P^2$ et un point hors de cette droite. En joignant un point sur chacune des (n+1) droites éclatées à un point sur la droite éclatée isolée, on obtient alors (n+1)-droites exceptionnelles. En les contractant, on obtient F_n . Les seules relations entre elles sont les suivantes :

$$\widehat{\mathbb{C}P^2} = F_1 \ , \ \hat{F}_o = \widehat{\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1} = \hat{\hat{\mathbb{C}P^2}} = \hat{F}_1$$

(l'égalité signifie bien sûr un isomorphisme analytique).

Revenons maintenant aux surfaces à première classe de Chern positive.

1.9 Theorème (cf.[3] et [7]) : Les surfaces à première classe de Chern positive sont les surfaces dites de del Pezzo, à savoir

i) $F_o = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$;

ii) les surfaces obtenues à partir de $\mathbb{C}P^2$ en éclatant au plus 8 points en position générale, à savoir pas 3 colinéaires, pas 6 sur une même conique, pas 8 sur une même cubique ayant un point double en l'un d'entre eux.

1.10 Remarques :

i) Les surfaces de del Pezzo ont été originellement définies comme les surfaces de degré d dans $\mathbb{C}P^d$ $(3 \leq d \leq 8)$, d représentant aussi le nombre de droites exceptionnelles (et par suite aussi $9 - c_1^2$).

ii) Les surfaces de del Pezzo sont exactement celles dont le fibré anti-canonique est ample.

2. FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN ET TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES

2.1 Dans l'exposé n° V nous avions constaté que pour résoudre l'équation $(**^+)$ se posait la question de savoir si 1 est une valeur propre du laplacien holomorphe $\delta''d''$ (on rappelle, cf. exposé n° III, que sur une variété kählérienne le laplacien riemannien est le double du laplacien holomorphe et du laplacien antiholomorphe). Cette question se trouve être au cœur du problème.

Nous commençons par rappeler deux inégalités isopérimétriques (cf.[4] et [5] page 150):

2.2 Théorème (A. Lichnerowicz, M. Obata) : Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n telle que $\mathrm{Ric} \geq k.g$. Alors la première valeur propre du laplacien riemannien $\lambda_1^{\mathbb{R}}$ sur les fonctions vérifie $\lambda_1^{\mathbb{R}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot k$. L'égalité est caractéristique de S^n munie de sa métrique standard.

2.3 Théorème (A. Lichnerowicz) : Soit (M,J,ω) une variété kähhlérienne compacte de dimension complexe m, telle que la première forme de Chern vérifie $\gamma_\omega \geq b.\omega$. Alors la première valeur propre du laplacien holomorphe notée λ_1 vérifie $\lambda_1 \geq b$. De plus si l'égalité est atteinte, (M,J,ω) admet une transformation infinitésimale holomorphe non isométrique.

2.4 Preuve de 2.2 : Sur les 1-formes nous considérons les laplaciens $d\delta + \delta d$ et D^*D (où D désigne la dérivation covariante). La formule de Weitzenböck pour $d\delta + \delta d$ s'écrit

$$(d\delta + \delta d)\xi = D^*D\xi + \mathrm{Ric}(\xi) .$$

Ainsi si $\mathrm{Ric} > 0$ il n'y a pas de 1-forme harmonique sur M.

Appliquée à la différentielle df d'une fonction f, la formule précédente donne

$$d\Delta^{\mathbb{R}} f = D^*Ddf + \mathrm{Ric}(df).$$

Après intégration sur M contre df, nous obtenons

$$\int_M (d\Delta^{\mathbb{R}} f, df) = \int_M (D^*Ddf, df) + \int_M \mathrm{Ric}(df,df) ,$$

soit

$$\int_M (\Delta^{\mathbb{R}} f)^2 = \int_M |Ddf|^2 + \int_M \mathrm{Ric}(df,df) .$$

Si nous prenons f telle que $\Delta^{\mathbb{R}} f = \lambda_1 f$, et si nous utilisons $\mathrm{Ric} \geq kg$ ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz $n|Ddf|^2 \geq |\Delta^{\mathbb{R}} f|^2$, nous obtenons le théorème 2.2. ∎

2.5 Remarque : Nous pouvons aussi considérer le laplacien $S^*S - d\delta$ où S est l'opérateur différentiel sur les 1-formes à valeurs dans les champs de 2-tenseurs symétriques défini par

$$(S\xi)(X,Y) = (D_X\xi)(Y) + (D_Y\xi)(X)$$

ou encore $S\xi = \mathcal{L}_{\xi^\#} g$ où $\xi^\#$ est le champ de vecteurs dual de la 1-forme ξ. Le noyau de S est donc formé des isométries infinitésimales et la nullité de $S\xi$ entraîne par trace celle de $\delta\xi$.

La formule de Weitzenböck pour $S^*S-d\delta$ est

$$(S^*S - d\delta)\xi = D^*D\xi - \mathrm{Ric}(\xi),$$

d'où

2.6 Proposition : *Si (M,g) est une variété compacte à courbure de Ricci négative, le groupe des isométries de (M,g) est fini.*

Preuve du théorème 2.3 :

2.7 Dans le cas kählérien nous allons utiliser un autre laplacien pour faire la comparaison : nous travaillons avec des sections de l'espace tangent complexifié et nous notons, pour une 1-forme ζ de type $(0,1)$ $\nabla''\zeta$ la partie de type $(0,2)$ de $\nabla\zeta$ (en coordonnées locales complexes, si $\zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} \zeta_{\bar\alpha}\, d\bar z^\alpha, \nabla''\zeta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \bar z^\beta} d\bar z^\alpha \otimes d\bar z^\beta$).

Nous avons alors

$$(2.8) \qquad (d''\delta'' + \delta''d'')\zeta = \nabla''^*\nabla''\zeta + \mathrm{Ric}(\zeta) ,$$

de telle sorte que, si nous appliquons cette formule de Weitzenböck à $d''f$ avec $\Delta f = \lambda_1 f$, nous obtenons

$$d''\Delta f = \nabla''^*\nabla'' d''f + \mathrm{Ric}(d''f)$$

qui, par produit scalaire hermitien avec $d''f$ et intégration sur M, donne

$$\lambda_1 \geq b$$

puisque $\int_M |\nabla'' d'' f|^2 \geq 0$.

Le cas d'égalité est obtenu si $\nabla'' d'' f = 0$, autrement dit si le champ de vecteurs Z de type (1,0) dual de $d''f$ a des composantes holomorphes, donc définit une transformation infinitésimale holomorphe. Ce champ Z ne peut être une isométrie infinitésimale puisque $\delta d'' f = 2\Delta^{\mathbb{R}} f \neq 0$. ∎

2.9 Nous avons besoin d'informations supplémentaires sur les transformations holomorphes d'une variété complexe.

2.10 Théorème (cf.[4] page 77) : Le groupe H(M) des transformations holomorphes d'une variété complexe M compacte est un groupe de Lie complexe (qui peut avoir une infinité de composantes connexes).

2.11 Nous notons $\mathfrak{h}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes et, si la variété M est kählérienne, Z dans $\mathfrak{h}(M)$ est caractérisé, parmi les champs de vecteurs de type (1,0), par l'équation $\nabla'' Z = 0$. La 1-forme ζ de type (0,1) duale de Z vérifie $\nabla''\zeta = 0$ et par suite est d''-fermée ; nous pouvons donc décomposer ζ , soit $\zeta = \zeta_0 + d''f$, avec ζ_0 harmonique.

En ce qui concerne la relation entre transformation analytique et isométrie, nous avons (cf. [5] page 154).

2.12 Proposition : Sur une variété kählérienne compacte un champ de vecteurs X est une isométrie infinitésimale si et seulement si $Z = X - iJX$ est une transformation holomorphe et si la 1-forme ξ duale de X est cofermée.

Preuve : Nous avons déjà remarqué en 2.5 que $S\xi = 0$ implique $\delta\xi = 0$. Si nous posons $\zeta = \xi + iJ\xi$, ζ est la 1-forme duale pour la métrique hermitienne de $Z = X - iJX$.

D'après la Remarque 2.5 et la preuve du théorème 2.3

$$(S^* S - d\delta)\xi = (d\delta + \delta d)\xi - 2\,\mathrm{Ric}(\xi) ,$$

de telle sorte que si ξ est la 1-forme duale d'une isométrie infinitésimale, ζ vérifie

(2.13) $$(d\delta + \delta d)\xi = 2\,\mathrm{Ric}(\xi) .$$

D'après l'identité 2.8 appliquée à ζ (qui est la partie de type (0,1) de la forme réelle ξ), comme $2(d''\delta'' + \delta''d'') = d\delta + \delta d$, nécessairement

$$\nabla''^{*}\nabla''\zeta = 0 .$$

En intégrant cette identité sur la variété compacte M contre ζ, on trouve que $\nabla''\zeta = 0$, autrement dit que $Z = X - iJX$ est un champ de vecteurs holomorphe.

La réciproque suit des identités précédentes appliquées à ζ et de leurs analogues appliquées à $\bar{\zeta}$. ∎

2.13 <u>Théorème</u> : <u>Soit</u> (M,J,ω) <u>une variété kählérienne compacte à première classe de Chern positive</u>. <u>Si la courbure scalaire de</u> (M,J,ω) <u>est constante</u> (<u>en particulier si</u> (M,J,ω) <u>est de Kähler-Einstein</u>), <u>alors l'algèbre de Lie</u> $\mathcal{J}(M)$ <u>des isométries infinitésimales est une forme réelle de l'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{h}(M)$ <u>des champs de vecteurs holomorphes qui est donc réductive</u>.

<u>Preuve</u> : Soit Z un champ de vecteurs holomorphe. Alors la 1-forme ζ de type (0,1) duale de Z vérifie l'équation

$$(d''\delta'' + \delta''d'')\zeta = \mathrm{Ric}(\zeta) .$$

Comme la 1ère classe de Chern est positive, d'après la première conjecture de Calabi, il existe une métrique kählérienne à courbure de Ricci positive, donc M est à un revêtement fini près simplement connexe et en particulier n'a aucune 1-forme holomorphe.

Donc ζ qui est d''-fermée (puisque $\nabla''\zeta = 0$) est de la forme $d''f$. En séparant les parties réelle et imaginaire de $f = u + iv$, nous obtenons

$$\Delta''d''u - \mathrm{Ric}(d''u) = -i\left[\Delta''d''v - \mathrm{Ric}(d''v)\right] .$$

En appliquant δ'' aux deux membres, nous obtenons

$$\Delta''\Delta''u + (\mathrm{Ric}, id'd''u) = i\left[\Delta''\Delta''v + (\mathrm{Ric}, id'd''v)\right]$$

car d'après la deuxième identité de Bianchi $\delta''\mathrm{Ric} = d'\tau$ (où τ désigne la courbure scalaire).

Les deux membres de l'égalité précédente étant respectivement réel et imaginaire pur sont nuls. Par intégration sur M contre u et contre v respectivement, nous trouvons que d"u et d"v sont duaux de champs de vecteurs holomorphes.

Nous remarquons alors que

$$\delta(d''iv + \overline{d''iv}) = \delta''d''iv - \delta'd'iv = 0$$

puisque $\delta''d'' = \delta'd' = \frac{1}{2}\Delta^{\mathbb{R}}$.

La forme d"iv duale d'une transformation holomorphe a donc une partie réelle ζ qui est cofermée. D'après le théorème 2.13, ζ est la 1-forme duale d'une isométrie infinitésimale. Comme id"u est encore la 1-forme duale d'un champ de vecteurs holomorphe, le théorème est prouvé. ■

2.14 Il ressort de la preuve précédente que sur une variété à première forme de Chern positive et à courbure scalaire constante l'image par J d'une isométrie infinitésimale est la différentielle d'une fonction et est aussi la partie réelle d'une transformation holomorphe.

Cela nous fournit des <u>contrexemples à l'unicité des solutions de l'équation</u> II^+. En effet si $\mathfrak{g}(M) \neq 0$, $\mathfrak{g}(M)$ qui est une algèbre de Lie complexe admet comme sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{J}(M)$. Si $\mathfrak{J}(M)$ n'est pas une algèbre de Lie complexe (c'est le cas si $\mathfrak{J}(M)$ est semi-simple réelle comme pour $M = \mathbb{C}P^m$ par exemple), il existe des champs de vecteurs holomorphes Z dont la partie réelle n'est pas une isométrie infinitésimale. Soit (α_t) le flot d'un tel champ Z. Nous avons, puisque $[\alpha_t^*(\omega)] = [\omega]$, que $\alpha_t^*(\omega)$ est de type (1,1),

$$\alpha_t^*(\omega) = \omega + id'd''\varphi_t \quad ,$$

où $\varphi_t \neq 0$ car Z n'est pas une isométrie infinitésimale. Alors si nous supposons ω de Kähler-Einstein (comme pour $\mathbb{C}P^m$) ; la métrique $\alpha_t^*(\omega)$ est encore de Kähler-Einstein pour la même structure complexe, de telle sorte que nous avons

$$e^{\varphi_t}(\omega + id'd''\varphi_t)^m = \omega^m \ .$$

Le phénomène précédemment décrit est relié à ce que la constante de Kähler-Einstein de g apparaît comme valeur propre du laplacien (cf. Théorème 2.3).

2.15 Corollaire : Les surfaces de Hirzebruch F_n $(n \geq 1)$ n'ont pas de métrique kählérienne à courbure scalaire constante.

Preuve : Dans le théorème 2.13 l'hypothèse que la première forme de Chern soit positive n'était là que pour assurer l'absence de 1-formes holomorphes. Le théorème 2.13 s'applique aux surfaces de Hirzebruch. Leur groupe de transformations holomorphes n'est pas réductif ainsi qu'il est connu (cf. [1] page 508). Par exemple $H(F_1)$ est l'image dans $PG\ell_3(\mathbb{C})$ du groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & G\ell_2(\mathbb{C}) \end{pmatrix}$ qui est une extension non triviale de $G\ell_2(\mathbb{C})$ par $\mathbb{C}^2$, donc non réductif. On peut voir ce fait comme suit : d'abord $H(\mathbb{C}P^m) = PG\ell_{m+1}(\mathbb{C})$ (remarquons que $I(\mathbb{C}P^m) = PU(m+1)$). Lorsqu'on éclate un point de $\mathbb{C}P^m$, la variété $\widehat{\mathbb{C}P}^m$ n'a qu'une hypersurface exceptionnelle à savoir la fibre du point éclaté, qui doit être préservée par une transformation holomorphe. Par suite $H(\widehat{\mathbb{C}P}^m)$ est le sous-groupe de $H(\mathbb{C}P^m)$ qui stabilise un point de $\mathbb{C}P^m$. ∎

2.16 Corollaire : Les surfaces obtenues en éclatant un ou deux points dans $\mathbb{C}P^2$ (en particulier F_1) sont des contre-exemples à l'existence de solutions à l'équation II^+ .

Preuve : Pour un point c'est le corollaire 2.15 . Le cas de 2 points est traité dans [7]. ∎

3. NOUVELLE FORMULATION DE II^+

3.1 Soit (M,J) une variété complexe compacte admettant des métriques kählériennes. Nous fixons une classe de Kähler Ω dans $H^2(M,\mathbb{C})$. Nous considérons alors sur l'espace des métriques kählériennes dans la classe Ω la fonctionnelle Γ définie par

$$\Gamma(\omega) = \int_M (\gamma_\omega,\gamma_\omega)\omega^m .$$

La nouvelle formulation de la conjecture II^+ proposée par Calabi est la suivante :

Conjecture $\widetilde{II}^+$: Si (M,J) a une première classe de Chern définie, la fonctionnelle Γ a des points critiques.

3.2 Par un calcul direct (long, mais élémentaire) utilisant notamment la variation de la courbure de Ricci et la 2ème identité de Bianchi, on peut montrer que l'équation des points critiques est

$$\nabla''d''\mathrm{Scal} = 0$$

où Scal désigne la courbure scalaire (i.e. la trace de la courbure de Ricci).

Les points critiques sont ceux où le gradient complexe de la courbure scalaire définit une transformation holomorphe.

3.3 Si nous décomposons la forme de Ricci γ_ω en $\gamma_\omega = \gamma_\omega^o + \gamma_\omega^1$ où γ_ω^o est le représentant harmonique dans la classe de cohomologie $[\gamma_\omega]$, il est clair, d'après les propriétés des formes harmoniques, que

$$\Gamma(\omega) = \int_M (\gamma_\omega,\gamma_\omega)\omega^m \geq \int_M (\gamma_\omega^o,\gamma_\omega^o)\omega^m .$$

Remarquons alors que $\int_M (\gamma_\omega^o,\gamma_\omega^o)\omega^m$ est indépendant de ω dans sa classe de Kähler. En effet

$$4\pi^2 c_1^2 \cup [\omega]^{m-2}[M] = \int_M \gamma_\omega^o \wedge \gamma_\omega^o \wedge \omega^{m-2} = \int_M (\gamma_\omega^o,\gamma_\omega^o)\omega^m - \int_M (\gamma_\omega^o,\omega)^2\,\omega^m$$

(c'est évident point par point dans une base unitaire diagonalisant γ_ω^o).

Par ailleurs (γ_ω^o,ω) est une constante puisque la multiplication par ω applique l'espace des formes harmoniques sur lui-même et que $(\gamma_\omega^o,\omega)\omega^m = \gamma_\omega^o \wedge \omega^{m-1}$.

Par suite $\int(\gamma_\omega^o,\omega)^2\omega^m = (2\pi\, c_1 \cup [\omega]^{m-1}[M])^2$.

Ainsi

$$\int(\gamma_\omega^o,\gamma_\omega^o)\omega^m = 4\pi^2 c_1^2 \cup [\omega]^{m-2}[M] - (2\pi\, c_1 \cup [\omega]^{m-1}[M])^2.$$

Remarquons que si nous pouvons trouver une métrique kählérienne ω telle que ce minimum absolu soit atteint, alors, d'après l'unicité de la forme harmonique dans sa classe, (cf. [6] chapitre V), nous avons $\gamma_\omega = \gamma^o_\omega$. La métrique kählérienne ω est donc à courbure scalaire constante puisque γ_ω est cofermée d'après la deuxième identité de Bianchi.

3.4 La conjecture affirme donc qu'en l'absence de métrique kählérienne réalisant le minimum absolu de la fonctionnelle Γ (de tels cas existent d'après le corollaire 2.15), il existe d'autres points critiques pour Γ .

Si l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes de la variété complexe est réduite à zéro, la conjecture affirme alors qu'il existe des métriques à courbure scalaire constante, se réduisant presque à l'ancienne conjecture II^+ (soulignons que dans ce cas la valeur limite de λ_1 ne peut se produire).

Remarquons pour terminer que dans le cas où la première classe de Chern est définie négative, la nouvelle formulation de la conjecture se réduit à l'ancienne à cause de la Proposition 1.4 .

Exposé n° XI

ESTIMÉES DU 3ème ORDRE

par L. BÉRARD BERGERY

Institut Elie Cartan
Université Nancy I

RÉFÉRENCES

[1] E. CALABI, Improper affine hyperspheres and a generalization of a theorem of K. Jörgens, Michigan Math. J. 5,(1958) 105-126.

[2] S. T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure and App. Math. XXXI, (1978) 339-411.

§ 1. INTRODUCTION

1.1 D'après VI.3.12 et les exposés n^{os} VII et VIII, il ne nous reste plus, pour terminer la démonstration de la conjecture de Calabi, qu'à obtenir une borne a priori pour la norme C^1 des coefficients de $\tilde{g}$. Pour cela, puisque g est une donnée, il suffit de contrôler la la norme des dérivées de φ de la forme $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial \bar{z}^j\partial z^k}$ et $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial \bar{z}^j\partial \bar{z}^k}$.

On rappelle que $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial \bar{z}^j\partial \bar{z}^k} = \overline{\frac{\partial^3\varphi}{\partial \bar{z}^i\partial z^j\partial z^k}}$ puisque φ est réelle. Il suffit donc de contrôler le premier terme. Pour cela, on va plutôt estimer la dérivée covariante troisième de φ par rapport à D (connexion de Levi-Civita de g). On souligne que D est une donnée. Le rapport entre $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial \bar{z}^j\partial z^k}$ et $\varphi_{i\bar{j}k} = (DDd\varphi)(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \frac{\partial}{\partial z^i})$ est expliqué dans 1.5 de l'exposé n^o VIII.

1.2 Suivant une astuce due à Calabi (cf [1]) on va estimer la norme de cette expression tensorielle par rapport à $\tilde{g}$ (on rappelle que l'on a déjà un contrôle de $\tilde{g}$). En résumé, il nous suffit donc de majorer a priori l'expression

$$(1.3) \qquad S = \sum_{i,j,k,r,s,t=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}}\varphi_{i\bar{j}k}\varphi_{\bar{r}s\bar{t}} .$$

Pour cela, au paragraphe 2,on se ramènera à majorer le laplacien $\tilde{\Delta}$ de S par rapport à $\tilde{g}$ en fonction de S , ce qu'on fera au paragraphe 4 après avoir rappelé quelques lemmes utiles sur la commutation des dérivées covariantes.

§ 2. RÉDUCTION DU PROBLÈME

On démontrera au paragraphe 4 le

2.1 Lemme : Il existe des constantes C_1 et C_2 (ne dépendant que de f et g et de leurs dérivées) telles que

$$(2.2) \qquad \tilde{\Delta} S \le C_1 S + C_2 .$$

On va en déduire ici une majoration de S .

2.3 On rappelle que l'on a déjà calculé dans l'exposé n° VIII § 2 l'expression

$$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) = -\Delta f + \sum_{i,j,k,\ell,r=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{j}}\tilde{g}^{i\bar{r}}\varphi_{k\bar{r}\ell}\varphi_{i\bar{j}\bar{\ell}}$$

$$+ \sum_{i,j,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}\ell\bar{\ell}} - \sum_{i,\ell=1}^{m} R_{i\bar{i}\ell\bar{\ell}} +$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{\ell}} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}\varphi_{i\bar{j}} \ .$$

Puisque Δf et R sont des données et que $\tilde{g}$ et $(\varphi_{i\bar{j}})$ ont déjà été estimées, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

(2.4) $$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) \geq \Big(\sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} g^{k\bar{j}}\, g^{i\bar{r}}\varphi_{k\bar{r}\ell}\,\varphi_{i\bar{j}\bar{\ell}}\Big) - C_3 \ .$$

2.5 Puisque $(\tilde{g}^{i\bar{j}})$ est une matrice définie positive dont la déviation par rapport à g a déjà été uniformément bornée, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j,k,\ell,r=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{j}}\tilde{g}^{i\bar{r}}\varphi_{k\bar{r}\bar{\ell}}\,\varphi_{i\bar{j}\ell} \geq$$

$$C_4 \sum_{i,j,k,\ell,p,q=1}^{m} \tilde{g}^{k\bar{j}}\, \tilde{g}^{i\bar{p}}\tilde{g}^{\ell\bar{q}}\varphi_{k\bar{p}\bar{q}}\,\varphi_{i\bar{j}\ell} = C_4 S$$

et par conséquent

(2.6) $$\tilde{\Delta}(\Delta\varphi) \geq C_4 S - C_3 \ .$$

2.7 On <u>choisit</u> alors une constante $C_5 > 0$ telle que $C_1 - C_4C_5 = -C_6 < 0$ (par exemple $C_5 = C_4^{-1}(C_1 + 1)$). On <u>pose</u> $C_7 = C_6^{-1}(C_2 + C_3C_5)$ et on forme $\tilde{\Delta}(S - C_5\Delta\varphi)$. En appliquant les inégalités (2.2) et (2.6), on a

$$\tilde{\Delta}(S - C_5\Delta\varphi) \leq C_3 S + C_2 - C_5C_4S + C_5C_3 \leq C_6(C_7 - S).$$

2.8 Soit alors x_0 un maximum de $S - C_5 \Delta\varphi$. En x_0, on a $\tilde{\Delta}(S - C_5 \Delta\varphi)(x_0) \geq 0$, donc $S(x_0) \leq C_7$ et $(S - C_5 \Delta\varphi)(x_0) \leq C_7 - C_5 \Delta\varphi(x_0)$. Pour le point courant x de M, on a donc

$$\begin{aligned}(S - C_5 \Delta\varphi)(x) &\leq (S - C_5 \Delta\varphi)(x_0)\\ &\leq C_7 - C_5 \Delta\varphi(x_0) \quad ,\end{aligned}$$

d'où

$$S(x) \leq C_7 + C_5(\Delta\varphi(x) - \Delta\varphi(x_0))$$

et

$$S(x) \leq C_7 + C_5(\sup_M \Delta\varphi - \inf_M \Delta\varphi) .$$

Puisque $\Delta\varphi$ a déjà été borné a priori dans l'exposé n° VIII, on a donc ainsi une majoration a priori de S. ■

§ 3. COMMUTATION DE DÉRIVÉES COVARIANTES

a) Formules générales

3.1 Dans la démonstration du lemme 2.1 qui sera donnée au paragraphe 4, on va avoir besoin de commuter des dérivées covariantes. On rappelle que, contrairement aux dérivées ordinaires, les dérivées covariantes ne commutent pas en général. Cette opération introduit le tenseur de courbure et ses dérivées covariantes. On a précisément :

3.2 Proposition : Soit T un (p,q)-tenseur sur une variété M munie d'une convexion symétrique D (i.e. $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$). Alors, si R est la courbure de D,

$$(DDT)(X,Y,U_1,\dots,U_q) - (DDT)(Y,X,U_1,\dots,U_q) =$$

$$- R(X,Y)T(U_1,\dots,U_q) + T(R(X,Y)U_1,\dots,U_q) + \dots + T(U_1,\dots,R(X,Y)U_q) .$$

3.3 Attention : Ici R(X,Y) est vu à la fois comme endomorphisme de l'espace tangent (appliqué aux U_i) et comme l'endomorphisme induit un des espaces de p-vecteurs (appliqué à $T(U_1,\dots,U_q)$). En particulier, si T est un (0,q)-tenseur, $R(X,Y)T(U_1,\dots,U_q) = 0$.

3.4 Démonstration : Pour simplifier, on fera la démonstration avec $q = 1$, la démonstration générale s'en déduisant facilement. On a

$$(DDT)(X,Y,U) = D_X((DT)(Y,U)) - (DT)(D_XY,U) - (DT)(Y,D_XU)$$
$$= D_X(D_Y(T(U)) - T(D_YU)) - D_{D_XY}(T(U)) + T(D_{D_XY}U) -$$
$$- D_Y(T(D_XU)) - T(D_Y(D_XU)) .$$

D'où

$$(DDT)(X,Y,U) - (DDT)(Y,X,U) = D_X(D_Y(T(U))) - D_Y(D_X(T(U))) -$$
$$- D_{D_XY}(T(U)) + D_{D_YX}(T(U)) + T(D_{D_XY}U) -$$
$$- T(D_{D_YX}U) + T(D_Y(D_XU)) - T(D_X(D_YU))$$
$$= - R(X,Y)T(U) + T(R(X,Y)U). \blacksquare$$

3.5 <u>Proposition</u> : <u>Soit</u> T <u>un</u> (p,q)<u>-tenseur sur une variété</u> M <u>munie d'une connexion symétrique</u> D . <u>Alors</u>

$$(DDDT)(Z,X,Y,U_1,\dots,U_q) - (DDDT)(Z,Y,X,U_1,\dots,U_q) =$$
$$-(DR)(Z,X,Y)T(U_1,\dots,U_q) - R(X,Y)(DT)(Z,U_1,\dots,U_q) + (DT)(Z,R(X,Y)U_1,\dots,U_q) +$$
$$+\dots+(DT)(Z,U_1,\dots,R(X,Y)U_q) + T((DR)(Z,X,Y)U_1,\dots,U_q) +\dots+ T(U_1,\dots,(DR)(Z,X,Y)U_q).$$

3.6 <u>Démonstration</u> : Une dérivation covariante est, comme son nom l'indique, une dérivation et la formule donnée est simplement celle obtenue en appliquant la dérivation (covariante) <u>par Z</u> à la formule de la proposition 3.2 . ■

3.7 <u>Remarque</u> : La formule pour l'expression de

$$(D^{r+2}T)(Z_1,\dots,Z_r,X,Y,U_1,\dots,U_q) - (D^{r+2}T)(Z_1,\dots,Z_r,Y,X,U_1,\dots,U_q)$$

s'obtiendrait de même en appliquant r dérivations (covariantes) en $Z_r,\dots,Z_1$ à la formule de la proposition 3.2 . Le deuxième membre (qu'on ne détaillera pas ici) ferait intervenir $R, DR, \dots, D^rR$ et $T, DT, \dots, D^rT$.

b) <u>Cas kählérien</u>

3.8 Dans le paragraphe 4 , on va avoir besoin d'appliquer ces formules aux dérivées covariantes de la fonction <u>réelle</u> φ sur la variété kählérienne (M,J,ω), pour la dérivée covariante D de Levi-Civita. On utilisera souvent des propriétés spéciales au cas kählérien. On a déjà vu en 1.5 de l'exposé n^0 VIII que

(3.9) $$\varphi_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^j\partial z^i} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j} = \varphi_{\bar{j}i} \ .$$

D'autre part, on déduit facilement de 4.11 de l'exposé n° IV que

(3.10) $$R(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}) = R(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}) = 0 \ .$$

On a en fait plus généralement :

3.11 <u>Proposition</u> : <u>Pour la connexion de Levi-Civita</u> D <u>et la courbure</u> R <u>d'une variété kählérienne</u>, <u>on a</u>, <u>pour tout</u> $X_1,\dots,X_r$ <u>dans</u> $T_{\mathbb{C}}M$,

$$(D^rR)(X_1,\dots,X_r, \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}) = 0 \ ,$$

$$(D^rR)(X_1,\dots,X_r, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^i}, \frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}) = 0 \ .$$

3.12 <u>Démonstration</u> : La quantité $(D^rR)(X_1,\dots,X_1, \frac{\partial}{\partial z^i} , \frac{\partial}{\partial z^j})$ s'exprime à partir des dérivées ordinaires (par les X_i ou leurs dérivées covariantes itérées) d'expressions faisant intervenir R appliqué à des dérivées covariantes itérées des $\frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\frac{\partial}{\partial z^j}$. Mais D est une connexion "complexe" donc, pour tout vecteur X , $D_X\frac{\partial}{\partial z^i}$ est combinaison linéaire des $\frac{\partial}{\partial z^k}$ $(k=1,\dots,m)$ et toute dérivée covariante itérée des $\frac{\partial}{\partial z^i}$ est encore combinaison linéaire des $\frac{\partial}{\partial z^k}$. Il ne reste plus qu'à appliquer (3.10). ∎

3.13 Si on regarde les dérivées covariantes de φ en coordonnées locales complexes (i.e. appliquées à des $\frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}$), on déduit des propositions 3.2 , 3.5 , 3.11 (et de la remarque 3.7) que l'on peut commuter deux dérivées covariantes consécutives <u>si elles sont de même type</u>, c'est-à-dire toutes deux en i et j ($\frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\frac{\partial}{\partial z^j}$) ou toutes deux en $\bar{i}$ et $\bar{j}$ ($\frac{\partial}{\partial\bar{z}^i}$ et $\frac{\partial}{\partial\bar{z}^j}$) . Si elles sont de type différent, leur commutation introduit (en général) de la courbure. En bref

$$\varphi_{\dots ij\dots} = \varphi_{\dots ji\dots}$$

$$\varphi_{\dots\bar{i}\bar{j}\dots} = \varphi_{\dots\bar{j}\bar{i}\dots} \ .$$

3.14 On a déjà vu une autre commutation utile

$$\varphi_{i\bar{j}} = \varphi_{\bar{j}i} .$$

On en déduit par dérivation

$$\varphi_{i\bar{j}k} = \varphi_{\bar{j}ik} ,$$

$$\varphi_{i\bar{j}k\ell} = \varphi_{\bar{j}ik\ell} ,$$

$$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \varphi_{\bar{j}ik\bar{\ell}} ,$$

$$\varphi_{i\bar{j}\bar{k}\ell} = \varphi_{\bar{j}i\bar{k}\ell} , \quad \text{etc...}$$

D'après 3.13 , $\varphi_{\bar{j}ik} = \varphi_{\bar{j}ki}$. On a donc finalement

(3.15) $$\varphi_{i\bar{j}k} = \varphi_{\bar{j}ik} = \varphi_{\bar{j}ki} = \varphi_{k\bar{j}i}$$

et par dérivation

(3.16) $$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \varphi_{\bar{j}ik\bar{\ell}} = \varphi_{\bar{j}ki\bar{\ell}} = \varphi_{k\bar{j}i\bar{\ell}} .$$

De même, on voit facilement que

(3.17) $\varphi_{i\bar{j}k\ell}$ est invariant par permutation de i , k , ℓ.

On aura besoin également de quelques formules précises de commutation :

(3.18) $$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\ell}} - \varphi_{i\bar{\ell}k\bar{j}} = \sum_{a=1}^{m} (R^{a}_{ik\bar{\ell}}\,\varphi_{a\bar{j}} - R^{a}_{ik\bar{j}}\,\varphi_{a\bar{\ell}}) ,$$

(3.19) $$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\ell}} - \varphi_{i\bar{j}\bar{\ell}k} = \sum_{b=1}^{m} R^{b}_{\bar{j}k\bar{\ell}}\,\varphi_{i\bar{b}} + \sum_{a=1}^{m} R^{a}_{ik\bar{\ell}}\,\varphi_{a\bar{j}} ,$$

(3.20) $$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}\alpha} - \varphi_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}k} = \Big(\sum_{b=1}^{m} R^{\bar{b}}_{\bar{j}k\bar{\beta}}\,\varphi_{i\bar{b}} + \sum_{a=1}^{m} R^{a}_{ik\bar{\beta}}\,\varphi_{a\bar{j}} \Big)_{\alpha} + \Big(\sum_{a=1}^{m} R^{a}_{i\bar{j}\alpha}\,\varphi_{a\bar{\beta}} + \sum_{b=1}^{m} R^{b}_{\bar{\beta}\bar{j}\alpha}\,\varphi_{i\bar{b}} \Big)_{k}$$

(3.21) $$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}\alpha} - \varphi_{i\bar{j}k\alpha\bar{\beta}} = \sum_{a=1}^{m} R^{a}_{k\bar{\beta}\alpha}\,\varphi_{i\bar{j}a} + \sum_{b=1}^{m} R^{\bar{b}}_{\bar{j}\bar{\beta}\alpha}\,\varphi_{i\bar{b}k} + \sum_{a=1}^{m} R^{a}_{i\bar{\beta}\alpha}\,\varphi_{a\bar{j}k} .$$

§ 4. DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1

4.1 Cette démonstration est en fait très simple et directe, mais la longueur des expressions en jeu la rend peu compréhensible à la lecture. Pour guider le lecteur, on va d'abord donner ici un résumé de cette démonstration. Le lecteur pressé pourra se référer à l'article original de Yau, où la démonstration ne prend que trois pages ([2] Appendice A). Dans la suite, nous donnerons le détail de la démonstration, en essayant de bien séparer les diverses quantités qui interviennent.

a) Résumé de la démonstration

4.2 On calcule directement $\tilde{\Delta}S$ d'après son expression en coordonnées locales. Cela fait apparaître des termes $\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}$ ainsi que des dérivées covariantes 3^e, 4^e et 5^e de φ (par rapport à D). On élimine les dérivées 5^e et certaines des dérivées 4^e en utilisant les équations déduites de (*) (resp. $(\overline{**})$) après 3 ou 2 dérivées covariantes. C'est à ce stade qu'il est nécessaire de faire permuter certaines dérivées covariantes. Heureusement, les termes qui apparaissent restent contrôlés en fonction des quantités déjà bornées ($\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}$, $\varphi_{\alpha\bar{\beta}}$) et de S lui-même. On termine la démonstration en regroupant les autres termes en la somme de deux carrés précédés du signe moins.

b) Début de la démonstration

4.3 En coordonnées locales, on a

$$S = \sum_{i,j,k,r,s,t=1}^{m} \tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\varphi_{i\bar{j}k}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}}$$

et

$$\tilde{\Delta}S = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2 S}{\partial z^{\alpha}\partial \bar{z}^{\beta}} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} S_{\alpha\bar{\beta}} \,.$$

On rappelle que g est D-parallèle, donc que $g_{\alpha\bar{\beta};\gamma} = 0$. On en déduit aussitôt

$$\tilde{g}_{\alpha\bar{\beta};\gamma} = \varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma}$$

et

$$(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}})_{\gamma} = -\sum_{a,b=1}^{m} \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\varphi_{a\bar{b}\gamma}\, g^{a\bar{\beta}}$$

(grâce à la formule de dérivation d'une matrice inverse : $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$).
En faisant successivement les deux dérivées covariantes en $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}}$ et $\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$
vu l'expression de S , on obtient

(4.4) $$\tilde{\Delta} S = -A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5 - A_6$$

en posant (on utilise à partir de maintenant <u>la convention de sommation sur les indices répétés</u>) :

$$A_1 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} (\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}\alpha} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}} + \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}\alpha}) ,$$

$$A_2 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} \varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha} ,$$

$$A_3 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} \varphi_{i\bar{j}k\alpha} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}} ,$$

$$A_4 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} (\tilde{g}^{i\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{t}}) \times$$
$$\times (\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}} \varphi_{a\bar{b}\alpha} + \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}} \varphi_{a\bar{b}\alpha} + \varphi_{i\bar{j}k\alpha} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}} \varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}} + \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha} \varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}}) ,$$

$$A_5 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} (\tilde{g}^{i\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{t}}) \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}} \varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}\alpha} ,$$

$$A_6 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \varphi_{i\bar{j}k} \varphi_{\bar{r}s\bar{t}} \varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}} \varphi_{c\bar{d}\alpha} (\tilde{g}^{i\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} +$$
$$+ \tilde{g}^{i\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{d}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{r}} \tilde{g}^{c\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} +$$
$$+ \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{t}} +$$
$$+ \tilde{g}^{i\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{t}} +$$
$$+ \tilde{g}^{i\bar{r}} \tilde{g}^{s\bar{j}} \tilde{g}^{k\bar{b}} \tilde{g}^{a\bar{d}} \tilde{g}^{c\bar{t}}) .$$

c) <u>Etude de</u> A_6

4.5 On voit facilement qu'il apparaît dans A_6 des termes identiques sous des écritures différentes. Pour les regrouper plus facilement, on donne un nom aux termes qui apparaissent effectivement. Il n'y en a que quatre, à savoir

$$B_1 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\tilde{g}^{c\bar{d}}\ \varphi_{i\bar{b}k}\ \varphi_{\bar{j}a\bar{\beta}}\ \varphi_{\bar{r}c\bar{t}}\ \varphi_{s\bar{d}\alpha}\ ,$$

$$B_2 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\tilde{g}^{c\bar{d}}\ \varphi_{i\bar{b}k}\ \varphi_{\bar{j}a\bar{t}}\ \varphi_{\bar{r}c\bar{\beta}}\ \varphi_{s\bar{d}\alpha}\ ,$$

$$B_3 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\tilde{g}^{c\bar{d}}\ \varphi_{i\bar{b}\alpha}\ \varphi_{a\bar{j}k}\ \varphi_{\bar{r}c\bar{\beta}}\ \varphi_{\bar{d}s\bar{t}}\ ,$$

$$B_4 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}\,\tilde{g}^{c\bar{d}}\ \varphi_{i\bar{b}\alpha}\ \varphi_{a\bar{j}k}\ \varphi_{\bar{r}c\bar{t}}\ \varphi_{\bar{d}s\bar{\beta}}\ .$$

En utilisant les égalités 3.15 , on vérifie par simple inspection que

(4.6) $$A_6 = B_1 + 2B_2 + 3B_3 + 6B_4\ .$$

d) Etude de A_4

4.7 Comme pour A_6 , on peut regrouper les termes en utilisant (3.15) (3.16) et (3.17). On constate que trois termes seulement apparaissent :

$$E_1 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\ \varphi_{s\bar{b}\alpha}\ \varphi_{\bar{r}a\bar{t}} + \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha}\ \varphi_{\bar{j}a\bar{\beta}}\ \varphi_{i\bar{b}k})\ ,$$

$$E_2 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\ \varphi_{a\bar{r}\alpha}\ \varphi_{\bar{b}s\bar{t}} + \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha}\ \varphi_{\bar{b}i\bar{\beta}}\ \varphi_{a\bar{j}k})\ ,$$

$$E_3 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\,\tilde{g}^{i\bar{r}}\,\tilde{g}^{s\bar{j}}\,\tilde{g}^{k\bar{t}}\,\tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{i\bar{j}k\alpha}\ \varphi_{\bar{r}s\bar{b}}\ \varphi_{\bar{t}a\bar{\beta}} + \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}}\ \varphi_{i\bar{j}a}\ \varphi_{k\bar{b}\alpha})\ .$$

On obtient par inspection

(4.8) $$A_4 = E_1 + 2E_2 + 3E_3\ .$$

e) Dérivées covariantes de $(*)$ et $(\bar{**})$

4.9 En utilisant $\varphi_{\alpha\bar{\beta}} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$, on peut écrire $(*)$ et $(\bar{**})$ en coordonnées locales sous la forme

$(*_{loc})$ $$\operatorname{Log}\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}}) - \operatorname{Log}\det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = f\ ,$$

$(\bar{**}_{loc})$ $$\operatorname{Log}\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \varphi_{\alpha\bar{\beta}}) - \operatorname{Log}\det(g_{\alpha\bar{\beta}}) = f + \varphi\ ,$$

Par dérivation covariante l'équation $(*_{loc})$ devient successivement

(4.10) $\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i} = f_i$,

(4.11) $\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j} = f_{i\bar j} + \tilde{g}^{\alpha\bar b}\tilde{g}^{a\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i}\varphi_{\bar b a\bar j}$,

(4.12) $$\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j k} = f_{i\bar j k} + \tilde{g}^{\alpha\bar b}\tilde{g}^{a\bar\beta}(\varphi_{a\bar b k}\varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j} + \varphi_{\alpha\bar\beta ik}\varphi_{\bar b a\bar j} + \varphi_{\alpha\bar\beta i}\varphi_{\bar b a\bar j k}) - (\tilde{g}^{\alpha\bar d}\tilde{g}^{c\bar b}\tilde{g}^{a\bar\beta} + \tilde{g}^{\alpha\bar b}\tilde{g}^{a\bar d}\tilde{g}^{c\bar\beta})\varphi_{\alpha\bar\beta i}\varphi_{\bar b a\bar j}\varphi_{c\bar d k} .$$

4.13 Pour $(**^-)$, on obtiendrait les mêmes équations en remplaçant f par $f+\varphi$. Dans la suite, on va se contenter d'étudier le cas $(*)$. Pour adapter la démonstration au cas $(**^-)$, il faudra tenir compte des termes $\varphi_{i\bar j}$ et $\varphi_{i\bar j k}$ qui apparaissent lorsque l'on utilisera (4.11) et (4.12). Mais $\varphi_{i\bar j}$ est déjà borné et $\varphi_{i\bar j k}$ se majore à partir de $\sqrt{S}$ et des bornes de $\tilde{g}$.

b) Etude de A_1

4.14 Pour pouvoir utiliser (4.12) dans A_1 , il faut commuter des dérivées covariantes. On ajoute et retranche donc à A_1 le terme

$$\tilde{g}^{i\bar r}\tilde{g}^{s\bar j}\tilde{g}^{k\bar t}(\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j k}\varphi_{\bar r s\bar t} + \tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\bar\beta\alpha\bar r s\bar t}\varphi_{i\bar j k}) .$$

On remplace (une fois) $\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j k}$ par sa valeur dans (4.12) (et $\tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\varphi_{\bar\beta\alpha\bar r s\bar t}$ par l'expression complexe conjuguée) et on identifie les termes à partir des expressions déjà introduites. On obtient finalement, en ajoutant et retranchant E_2

(4.15) $A_1 = F_1 + F_2 + F_3 + 2E_2 + E_3 - 4B_4$,

en posant :

$$F_1 = \tilde{g}^{i\bar r}\tilde{g}^{s\bar j}\tilde{g}^{k\bar t}(f_{i\bar j k}\varphi_{\bar r s\bar t} + f_{\bar r s\bar t}\varphi_{i\bar j k}),$$

$$F_2 = \tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\tilde{g}^{i\bar r}\tilde{g}^{s\bar j}\tilde{g}^{k\bar t}((\varphi_{i\bar j k\bar\beta\alpha} - \varphi_{\alpha\bar\beta i\bar j k})\varphi_{\bar r s\bar t} + (\varphi_{\bar r s\bar t\bar\beta\alpha} - \varphi_{\bar\beta\alpha\bar r s\bar t})\varphi_{i\bar j k}) ,$$

$$F_3 = \tilde{g}^{\alpha\bar\beta}\tilde{g}^{i\bar r}\tilde{g}^{s\bar j}\tilde{g}^{k\bar t}\tilde{g}^{a\bar b}((\varphi_{i\bar\beta k\bar j} - \varphi_{i\bar j k\bar\beta})\varphi_{a\bar r\alpha}\varphi_{\bar b s\bar t} + (\varphi_{\bar r\alpha\bar t s} - \varphi_{\bar r s\bar t\alpha})\varphi_{\bar b i\bar\beta}\varphi_{a\bar j k})$$

g) Etude de A_5

4.16 On va se débarrasser par le même méthode de ces termes du 4e ordre : on ajoute et retranche à A_5 l'expression obtenue en remplaçant dans A_5 $\varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}\alpha}$ par $\varphi_{\alpha\bar{\beta}a\bar{b}}$, puis en remplaçant (une fois) $g^{\alpha\bar{\beta}}\varphi_{\alpha\bar{\beta}a\bar{b}}$ par son expression dans (4.11). On obtient

$$A_5 = F_4 + F_5 + 2B_2 + B_3 \quad , \tag{4.17}$$

en posant

$$F_4 = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}(\tilde{g}^{i\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{t}})\,\varphi_{i\bar{j}k}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}}(\varphi_{a\bar{b}\bar{\beta}\alpha} - \varphi_{\alpha\bar{\beta}a\bar{b}})$$

et

$$F_5 = (\tilde{g}^{i\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}} + \tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{b}}\tilde{g}^{a\bar{t}})\varphi_{i\bar{j}k}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}}\,f_{a\bar{b}} \quad .$$

4.18 Les deux carrés annoncés dans le résumé de démonstration 4.2 sont obtenus en prenant la norme pour $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}})$ des deux tenseurs donnés par les formules suivantes :

$$\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}} - \tilde{g}^{a\bar{b}}\,\varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{\bar{j}a\bar{\beta}}$$

et

$$\varphi_{i\bar{j}k\alpha} - \tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{a\bar{j}k}\,\varphi_{i\bar{b}\alpha} + \varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{a\bar{j}\alpha}) \; .$$

Ce sont donc les deux expressions (<u>positives ou nulles</u>) suivantes :

$$P = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}}\,[\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha} - \tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{i\bar{j}k\bar{\beta}}\,\varphi_{\bar{r}a\bar{t}}\,\varphi_{s\bar{b}\alpha} + \varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{\bar{j}a\bar{\beta}}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}\alpha}) + $$
$$+ \tilde{g}^{a\bar{b}}\tilde{g}^{c\bar{d}}\,\varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{\bar{j}a\bar{\beta}}\,\varphi_{\bar{r}c\bar{t}}\,\varphi_{s\bar{d}\alpha}\,] \; ,$$

$$Q = \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}}\tilde{g}^{i\bar{r}}\tilde{g}^{s\bar{j}}\tilde{g}^{k\bar{t}}\,[\varphi_{i\bar{j}k\alpha}\,\varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}} - \tilde{g}^{a\bar{b}}(\varphi_{i\bar{j}k\alpha}\,\varphi_{\bar{b}s\bar{t}}\,\varphi_{\bar{r}a\bar{\beta}} + \varphi_{i\bar{j}k\alpha}\,\varphi_{\bar{r}a\bar{t}}\,\varphi_{\bar{b}s\bar{\beta}}$$

$$+ \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}}\,\varphi_{a\bar{j}k}\,\varphi_{i\bar{b}\alpha} + \varphi_{\bar{r}s\bar{t}\bar{\beta}}\,\varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{a\bar{j}\alpha}) + \tilde{g}^{a\bar{b}}\tilde{g}^{c\bar{d}}(\varphi_{a\bar{j}k}\,\varphi_{i\bar{b}\alpha}\,\varphi_{\bar{d}s\bar{t}}\,\varphi_{\bar{r}c\bar{\beta}}$$

$$+ \varphi_{a\bar{j}k}\,\varphi_{i\bar{b}\alpha}\,\varphi_{\bar{r}c\bar{t}}\,\varphi_{\bar{d}s\bar{\beta}} + \varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{a\bar{j}\alpha}\,\varphi_{\bar{d}s\bar{t}}\,\varphi_{\bar{r}c\bar{\beta}} + \varphi_{i\bar{b}k}\,\varphi_{a\bar{j}\alpha}\,\varphi_{\bar{r}c\bar{t}}\,\varphi_{\bar{d}s\bar{\beta}})] \;.$$

En utilisant les expressions déjà introduites, on a

$$(4.19) \qquad \begin{cases} P = A_2 - E_1 + B_1 \;, \\ Q = A_3 - 2E_3 + 2B_3 + 2B_4 \;. \end{cases}$$

En rassemblant (4.4), (4.6), (4.8), (4.15), (4.17) et (4.19), on obtient finalement

$$(4.20) \qquad \tilde{\Delta}S = -P - Q - F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_5 \;.$$

Une inspection détaillée des termes F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 montre qu'en utilisant éventuellement les formules de commutation (3.18) et sa conjuguée pour F_3, (3.18) et (3.19) pour F_4, (3.20), sa conjuguée et (3.21) pour F_2, on peut majorer chacun d'eux en norme à partir des bornes déjà obtenues pour $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}})$ et $(\varphi_{\alpha\bar{\beta}})$, ainsi que de S (en utilisant $\sqrt{S}$ pour majorer $\varphi_{i\bar{j}k}$ et $\varphi_{\bar{r}s\bar{t}}$, avec s'il le faut $\sqrt{S} \le S+1$). Puisque d'autre part P et Q sont positifs ou nuls, il existe donc bien deux constantes C_1 et C_2 telles que $\tilde{\Delta}S \le C_1 S + C_2$. Les constantes C_1 et C_2 ne dépendent que de g, f, leurs dérivées et les bornes déjà trouvées, ce qui termine (enfin!) la démonstration du lemme 2.1 et de la conjecture de Calabi. ∎

Exposé n° XII

MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN SUR LES VARIÉTÉS OUVERTES *

par S. T. YAU

Department of Mathematics
Stanford University
et
I. H. E. S.

RÉFÉRENCES

[1] E. CALABI, Improper affine hyperspheres and a generalization of a theorem of K. Jörgens, Mich. J., 5 (1958), 105-126.

[2] S. Y. CHENG, S. T. YAU, On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math., XXX (1977), 47-68.

* Notes de J. P. BOURGUIGNON

1. On va s'intéresser à trouver des métriques de Kähler-Einstein sur des variétés ouvertes (par exemple des domaines bornés de $\mathbb{C}^n$). Calabi a ramené la recherche des telles métriques pour certains domaines à l'étude de l'équation de Monge-Ampère réelle sur $\mathbb{R}^m$

$$(\dagger) \qquad \det \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 1 \quad .$$

L'étude de cette équation est le cadre de la géométrie dite "affine" puisque l'opérateur est invariant sous le groupe $S\ell_m(\mathbb{R})$.

<u>Théorème 2</u> : <u>Si</u> u <u>est une fonction convexe définie sur</u> $\mathbb{R}^m$, <u>la seule solution de</u> $(\dagger)$ <u>est un polynôme quadratique</u>.

Le cas $m = 2$ est dû à Jörgens, le cas $m \leq 5$ à Calabi (cf.[1]) et les généralisations à Pogorelov. Après Pogorelov, Cheng et Yau (cf.[2]) ont donné une preuve analytique différente de celle de Pogorelov.

3. En considérant le graphe de u , on définit une "métrique affine" invariante par $S\ell_{m+1}(\mathbb{R})$ par $\Sigma u_{ij} dx^i \otimes dx^j$ (on note $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$); la formule est plus compliquée si $\det u_{ij} \neq 1$.

On veut montrer que u est un polynôme du second degré, donc que $\sum_{i,j,k=1}^{m} u_{ijk}^2 = 0$. La meilleure méthode consiste à considérer u_{ijk} comme un 3-tenseur sur une variété et à travailler dans la métrique définie par u . On considère donc

$$S = \Sigma\, u^{ir} u^{js} u^{kt} u_{ijk} u_{rst} \quad .$$

(pour le cas complexe on prendra

$$S = \Sigma\, u^{i\bar r} u^{\bar j s} u^{k \bar t} u_{i \bar j k} u_{\bar r s \bar t}) \quad .$$

4. Dans le cas complexe, on considère l'équation sur $\mathbb{C}^n$

$$\det \frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar z^j} = 1 \quad .$$

On s'intéresse à la métrique $\sum \frac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \otimes d\bar{z}^j$.

La question analogue au cas précédent est de décider si la métrique est plate.

Calabi a considéré cette question : sur un domaine convexe D borné de $\mathbb{R}^n$, on construit le tube $D + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. On cherche une métrique kählérienne avec u indépendant de $(y^1, \ldots, y^n)$ (où $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$). On tombe alors sur l'équation de Monge-Ampère réelle avec second membre $e^{(m+1)u}$.

$$(\dagger) \qquad \det \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = e^{(m+1)u} .$$

Pour que la métrique soit complète, on demande que u éclate au bord de D. Lorsque D est la boule, Calabi a résolu l'équation en cherchant u fonction de la distance à l'origine seulement. L'équation $(\dagger)$ peut se résoudre en général (cf. [2]). On trouve des métriques telles que $\mathrm{Ric} \equiv -1$ et que la courbure sectionnelle holomorphe tende vers -1 au bord.

5. Sur une variété M complexe non compacte, nous cherchons des métriques de Kähler-Einstein complètes .

Le cas $\mathrm{Ric} > 0$ est exclu car, d'après le théorème de Myers, M devrait être compacte.

Seuls restent les cas

i) $\mathrm{Ric} \equiv 0$,

ii) $\mathrm{Ric} < 0$ (en fait on prendra $\mathrm{Ric} = -g$) .

__Théorème 6__ : __Si__ M __est une variété kählérienne complète avec__ $\mathrm{Ric} \geq -k_1$ __et__ N __une variété hermitienne dont la courbure bisectionnelle est bornée par__ $-k_2 < 0$, __toute application holomorphe__ $f : M \to N$ __décroit la distance, plus précisément__

$$f^* ds_N^2 \leq \frac{k_1}{k_2} ds_M^2 .$$

C'est une généralisation du théorème d'Ahlfors sur le disque. Si $k_o = 0$, on trouve donc en particulier qu'il n'existe aucune fonction holomorphe sur M . Ainsi tout domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ n'admet aucune métrique avec $\mathrm{Ric} \geq 0$.

On s'intéresse d'abord à ii).

Théorème 7 (S.Y. Cheng, S. T. Yau): Pour tout domaine borné Ω C^2-pseudo-convexe de $\mathbb{C}^m$, il existe une unique métrique complète de Kähler-Einstein. Si Ω est de bord lisse et strictement pseudo-convexe, alors la solution est de classe $C^{m+\frac{3}{2}-\delta}$ au bord pour tout $\delta > 0$. Près du bord la courbure sectionnelle holomorphe tend vers -1.

On cherche la métrique comme avant en posant $v = e^{-u}$. La condition au bord devient : $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

C. Fefferman a considéré l'équation

$$\det \begin{vmatrix} u & u_1 & \cdots\cdots & u_m \\ \bar{u}_1 & & & \\ \vdots & & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} & \\ \bar{u}_m & & & \end{vmatrix} = (-1)^m ,$$

qui est une équation importante pour l'étude au bord du noyau de Bergman. La transformation $v = e^{-u}$ échange les deux équations. C. Fefferman a trouvé une solution formelle près du bord (après $(m+2)$ pas apparaissent des termes en Log).

8. Que peut-on espérer pour une variété complexe générale ?

S'il y a une métrique de Kähler-Einstein avec $\mathrm{Ric} \equiv -1$, il y a une forme volume qui s'écrit $\mathcal{V} = -(\sqrt{-1})^m\, V\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^m$ dont la forme de Ricci satisfait aux conditions

i) $(\sqrt{-1}\, d'd'' \mathrm{Log}\, V)^m = \mathcal{V}$,

ii) $\sqrt{-1}\, d'd'' \mathrm{Log}\, V > 0$.

Si la métrique $\sqrt{-1}\, d'd'' \mathrm{Log}\, V$ est complète et si les dérivées covariantes de la courbure sont bornées, alors ces conditions sont suffisantes.

Un cas où ces conditions sont satisfaites est le suivant : on considère une variété algébrique M de fibré canonique K et un diviseur D de M ayant comme singularités des croisements normaux. On suppose que

$$c_1(K) + c_1([D]) > 0 ,$$

alors M-D est un exemple (en particulier $\mathbb{C}P^m$ - H où H est une hypersurface de degré $> m+2$) .

9. On revient à l'étude de Ric $\equiv 0$.

<u>Conjecture</u> : <u>Soit</u> M <u>une variété riemannienne complète avec</u> Ric $\equiv 0$. <u>Alors il existe une variété complexe compacte telle que</u> $M \subset N$ <u>et</u> $M = N-S$ <u>où</u> S <u>est un sous-espace analytique.</u>

On veut classifier les variétés complètes avec Ric $\equiv 0$. Déjà le cas de dimension 4 est intéressant.

<u>Question</u> : Est-ce que toute métrique complète sur une surface complexe (disons simplement connexe) avec Ric $\equiv 0$ est kählérienne ?

10. Si la conjecture est vraie, alors N est nécessairement une surface rationnelle (il y a des restrictions supplémentaires, car une surface rationnelle moins une courbe n'admet pas de métrique avec Ric $\equiv 0$).

Mais pour un diviseur D non singulier de degré $\leq m+1$ dans $\mathbb{C}P^m$, $\mathbb{C}P^m$-D admet une métrique complète avec Ric $\equiv 0$.

Plus généralement si le fibré anticanonique K^{-1} est ample et à diviseur lisse, Cheng et S. T. Yau savent montrer qu'il existe une métrique avec Ric $\equiv 0$ sur le complémentaire du diviseur. Le problème qui subsiste est celui de la réciproque.

ABSTRACT

These notes from a seminar held in the Spring 1978 at the Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique in Palaiseau detail the proof of the Calabi conjecture given by S. T. Yau in the Fall 1976. The conjecture made in 1954 asserts that on a compact Kähler manifold any closed form of type (1,1) whose cohomology class is a multiple of the first Chern class is the Ricci form of a Kähler metric.

The necessary background material, both in non linear analysis (Schauder estimates, the continuity method) and in Kähler geometry (the differential calculus, special properties of the curvature, the first Chern form), is presented at some length. On the other hand applications of the conjecture are not treated.

The proof given follows basically S. T. Yau's proof except for the uniform estimate, where an extension of an argument which was special to two complex dimensions is presented. Efforts have been made to give a more intrinsic treatment of the whole subject.