F. COMBES
C. DELAROCHE
Y. DENIZEAU
M. ENOCH

Représentation des groupes localement compacts et applications aux algèbres d'opérateurs

Astérisque, tome 55 (1978)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__55__R1_0>

INTRODUCTION

Le but de cet ouvrage est de présenter la théorie générale des sous-espaces spectraux d'une représentation continue U d'un groupe localement compact commutatif G (première partie), et de l'appliquer à l'étude des dérivations et des groupes d'automorphismes des C^*-algèbres et des algèbres de von Neumann (deuxième partie).

Soit G un groupe localement compact commutatif. Si on intègre la représentation de G dans $L^\infty(G)$ obtenue par translations, on obtient l'action par convolution de $L^1(G)$ dans $L^\infty(G)$. Le spectre $sp\ f$ de $f \in L^\infty(G)$, considéré depuis longtemps en analyse harmonique (voir [35] par exemple), est le sous-ensemble de $\hat{G}$ annulateur de l'idéal fermé K_f de $L^1(G)$, ensemble des $g \in L^1(G)$ tels que $\hat{g} * f = o$. Le sous-espace spectral associé à une partie fermée F de $\hat{G}$ est le sous-espace vectoriel fermé de $L^\infty(G)$ formé des f tels que $sp\ f \subset F$. Ces définitions furent étendues par F. Forelli [20] au cas où G opère par homéomorphismes dans un espace localement compact X, c'est-à-dire par isomorphismes dans la C^*-algèbre commutative des fonctions continues nulles à l'infini sur X. Enfin W. Arveson [1] les a formulées plus généralement pour les représentations continues de G par automorphismes d'une algèbre de von Neumann ou d'une C^*-algèbre, retrouvant ainsi des résultats classiques (par exemple que toute dérivation d'une algèbre de von Neumann est intérieure) et donnant de nouvelles applications qui montraient l'intérêt de ce nouvel outil. Ces concepts furent aussitôt utilisés par A. Connes [15], [16] pour introduire les invariants S et Γ et classifier les algèbres de von Neumann. Ces invariants apparaissent lorsqu'on applique les concepts précédents aux représentations de $\mathbb{R}$ par les automorphismes modulaires de la théorie de Tomita.

Le spectre d'un vecteur vis-à-vis d'une représentation U de $\mathbb{R}^n$ et le support spectral de U étaient déjà considérés en mécanique et en physique théorique (voir par exemple [3], [4], [5], [6], [43], [44], [45]).

Enfin, si H est un espace de Hilbert, rappelons qu'aux représentations U de G sur H sont associées bijectivement les mesures de Stone E sur $\hat{G}$. Pour toute partie fermée F de $\hat{G}$, le sous-espace de H image de $E(F)$ est alors le sous-espace spectral associé à F. On voit donc que cette théorie des sous-espaces spectraux généralise celle des mesures de Stone sur $\hat{G}$ et en fournit un substitut. En particulier, elle fournit une théorie spectrale pour les opérateurs hermitiens sur un espace de Banach (voir [2]) ou pour les générateurs infinitésimaux des groupes à un paramètre d'isométries d'un espace de Banach.

L'application aux espaces assez divers que nous venons d'évoquer conduit à affaiblir les hypothèses de continuité usuellement considérées. Rappelons qu'une représentation U de G sur un espace vectoriel topologique X est dite équicontinue [10] si

1) $(U_g)_{g \in G}$ est une famille équicontinue sur X ,

2) $g \longmapsto U_g x$ est continue de G dans X pour tout $x \in X$.

Ce sont là les conditions de continuité les plus couramment utilisées dans l'étude des représentations de G , mais cette théorie n'est pas toujours directement applicable aux situations considérées. Par exemple, si X est un espace de Banach, en transposant une telle représentation, la représentation ${}^tU : g \longmapsto {}^tU_g$ du groupe opposé G° sur le dual X' de X , n'est pas toujours équicontinue. En effet, en général $({}^tU_g)_{g \in G}$ est une famille équicontinue pour la topologie normique de X' , mais pour $x' \in X'$ l'application $g \longmapsto {}^tU_g x'$ n'est pas normiquement continue. Par contre cette application est continue pour $\sigma(X',X)$, mais $({}^tU_g)_{g \in G}$ n'est pas équicontinue pour $\sigma(X',X)$.

Ce genre de situation se rencontre notamment dans l'étude des automorphismes d'une algèbre de von Neumann M car M est le dual d'un espace de Banach M_* (prédual de M). Un tel cas a conduit W. Arveson à prendre un point de vue où, en fin de compte, on travaillerait avec deux topologies à la fois, l'une par rapport à laquelle la condition 1 précédente est vérifiée, l'autre pour laquelle la condition 2 est valable. Notons que ce genre de structure vectorielle bitopologique existe en théorie de l'intégration, où elle fut introduite par L. Schwartz pour étudier les mesures et probabilités cylindriques [39].

En se plaçant dans ce cadre de structure vectorielle bitopologique (décrite brièvement au paragraphe 1), on peut définir les représentations continues d'un groupe localement compact G (paragraphe 2). Avec des hypothèses adéquates, une telle représentation se prolonge par intégration à l'algèbre $M^1(G)$ des mesures bornées par G . Au paragraphe 3, on définit les sous-espaces spectraux d'une telle représentation dans le cas où G est commutatif, en utilisant l'analyse de Fourier. Au paragraphe 4 on montre que l'étude s'applique aux couples d'espaces de Banach en dualité métrique. Si (X,Y) est un tel couple, en équipant X de la topologie $\sigma(X,Y)$ et Y de la topologie $\sigma(Y,X)$ on obtient deux espaces vectoriels bitopologiques en dualité. Comme X et Y sont complets et tonnelés, l'étude générale des paragraphes 2 et 3 peut être précisée et poussée plus loin, ce qui est fait aux paragraphes 5 et 6.

Ces paragraphes 1 à 6 peuvent être considérés comme une première partie, développant la théorie générale des représentations continues sur un espace vectoriel bitopologique. Elle est inspirée avant tout de l'article de W. Arveson [1], et au paragraphe 6 de la thèse de A. Connes [15]. Les paragraphes 1,2,4 et 5 sont relativement formels et donnent le cadre général de cette étude. Le lecteur souhaitant prendre connaissance rapidement de cette théorie et de ses principaux résultats se reportera avant tout aux paragraphes 3 et 6.

La deuxième partie est consacrée aux représentations continues par automorphismes sur une algèbre d'opérateurs. Le paragraphe 7 étudie les propriétés de ces représentations dans le cadre plus général des algèbres de Banach bitopologiques. Les paragraphes 8 et 9 donnent les applications aux algèbres de von Neumann et aux C^*-algèbres qui illustraient l'article de W. Arveson déjà cité et qui furent développées et complétées par D. Olesen et G.K. Pedersen [28], [31], [32]. Le paragraphe 8 démontre essentiellement deux résultats : le théorème de Kadison-Sakai affirmant que toute dérivation D d'une algèbre de von Neumann M est intérieure (obtenu ici en étudiant le groupe à un paramètre $t \longmapsto \exp itD$ d'automorphismes de M) , et le théorème de Borchers énonçant que les représentations par automorphismes de $\mathbb{R}^n$ sur M induites par certaines représentations unitaires de $\mathbb{R}^n$ sont intérieures (obtenu à l'aide d'un lemme d'Araki non publié). Ces résultats sont utilisés au paragraphe 9 qui donne des analogues pour une C^*-algèbre. Les invariants S et Γ de A. Connes sont introduits aux paragraphes 7, 10 et 11, mais leur exploitation en vue de la classification des facteurs de von Neumann dépasse le cadre de cette étude (voir [15], [16]).

Chaque paragraphe est suivi de notes indiquant la provenance de ses principaux résultats. Il s'agit de renseignements très succincts qui ne sauraient constituer une bibliographie exhaustive.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DES REPRÉSENTATIONS

§1 LA CATÉGORIE DES ESPACES VECTORIELS BITOPOLOGIQUES

1.1. *Définition* - Nous écrirons e.l.c.s. pour espace vectoriel topologique localement convexe séparé.
Pour les besoins de l'intégration, nous aurons à considérer pour un e.l.c.s. X, la condition (K) suivante :
(K) pour toute partie compacte K de X, l'enveloppe convexe fermée $\overline{\text{Co}}(K)$ de K est compacte.

Rappelons que si X est quasi-complet, la condition (K) est vérifiée ([8], Chap. II, §4, prop. 3 et corollaire).

1.2. *Définition* - Nous appellerons e.l.c.s. bitopologique un couple (X, X_0) où X et X_0 sont deux e.l.c.s. vérifiant les conditions suivantes.

1) X et X_0 ont le même espace vectoriel sous-jacent ,
2) la topologie de X est plus fine que la topologie de X_0 ,
3) il existe dans X un système fondamental de voisinages de zéro qui sont convexes, équilibrés et fermés pour la topologie de X_0. Notons que de tels voisinages sont des tonneaux de X.

1.3. *Remarques* - Soit (X, X_0) un e.l.c.s. bitopologique.

a) Si un voisinage convexe V de zéro dans X est fermé pour la topologie de X_0 , sa jauge j_V est semi-continue inférieurement sur X_0 . Grace au théorème de Hahn-Banach , ceci signifie que j_V est enveloppe supérieure sur X_0 des éléments de X_0' qu'elle majore .

Dans la définition 1-2 la condition 3) signifie donc qu'il existe un système filtrant croissant de semi-normes, définissant la topologie de X semi-continues inférieurement pour la topologie de X_0.

b) La topologie de X étant plus fine que celle de X_0 le dual X_0' de X_0 s'identifie à un sous-espace vectoriel du dual X' de X . Comme X_0 est séparé , on voit par bipolarité que X_0' est partout dense dans X' pour $\sigma(X',X)$.

c) Si A est une partie complète de X_0 , c'est une partie complète de X . Il s'agit en fait, d'une propriété des structures uniformes ([7] , ch II, §3, n°3, prop. 7). Il en résulte que si X_0 est quasi-complet , alors X l'est aussi. En effet, si A est une partie bornée et fermée de X , elle est bornée dans X_0 . Sa fermeture dans X_0 est encore bornée , donc complète dans X_0 . Elle est alors complète dans X et contient la fermeture de A dans X .

d) Les parties bornées de X sont des parties bornées de X_o car la topologie de X_o est moins fine que celle de X . Si X_o est quasi-complet , la réciproque est vraie. En effet, tout voisinage de zéro dans X qui est un tonneau de X_o absorbe toute partie convexe, équilibrée, complète et bornée de X_o ([8], Chap. III, §3, lemme 1).

e) Si B est une partie bornée de X , sa fermeture A dans X_o est encore une partie bornée (et fermée) de X . Pour le prouver , considérons un voisinage de zéro dans X qui soit un tonneau de X_o . Il existe $\lambda > o$ tel que $B \subset \lambda V$. On a alors $A \subset \lambda V$ d'où l'assertion.

f) Si X_o vérifie la condition (K) , alors X la vérifie également. En effet, si K est une partie compacte de X , elle est encore compacte dans X_o dont la topologie est séparée et moins fine que celle de X . Dans X_o , son enveloppe convexe fermée A est compacte grâce à la condition (K), et par suite complète. Mais alors , d'après c) , A est complète dans X et contient l'enveloppe convexe Co(K) de K , et on sait que Co(K) est précompacte dans X ([8], ch II, §4, n° 2, prop. 3).

1.4. *La catégorie des e.l.c.s. bitopologiques*

a - Si (X,X_o) et (Y,Y_o) sont deux e.l.c.s. bitopologiques, on appellera morphisme de (X,X_o) dans (Y,Y_o) toute application linéaire continue de X dans Y qui soit aussi continue de X_o dans Y_o , c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{L}(X_o,Y_o)$. Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi une catégorie. En associant à tout e.l.c.s. X le couple (X,X) on définit un foncteur de la catégorie des e.l.c.s. dans celle des e.l.c.s. bitopologique qui apparait donc comme plus générale. La notion d'isomorphisme se définit comme toujours à partir de celle de morphisme ......

b - Soit (X,X_o) un e.l.c.s. bitopologique et soit Y un sous-espace de X. Notons Y_o ce même sous-espace vectoriel, mais équipé de la topologie induite par celle de X_o. Alors (Y,Y_o) est un e.l.c.s. bitopologique que nous appellerons sous-espace de (X,X_o). Notons que si X_o vérifie la condition (K) (resp. est quasi-complet) et si Y_o est fermé dans X_o, alors Y_o vérifie (K) (resp. est quasi-complet).

c - Soient (X,X_o) et (Y,Y_o) deux e.l.c.s. bitopologiques. Munissons $\mathcal{L}(X,Y)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X , définie par les semi-normes $j_{A,i} : u \longmapsto \sup_{x \in A} p_i[u(x)]$ où A décrit un système fondamental de parties bornées de X et où $(p_i)_{i \in I}$ est un système fondamental de semi-normes de Y. Munissons

$\mathcal{L}(X_0, Y_0)$ de la topologie de la convergence simple sur X_0 . Notons alors L (resp. L_0) l'espace vectoriel $\mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{L}(X_0, Y_0)$ des morphismes de (X,X_0) dans (Y,Y_0) muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{L}(X,Y)$ (resp. par celle de $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$).

Si les semi-normes p_i où $i \in I$ sont s.c.i. sur Y_0 , on voit facilement que les semi-normes $j_{A,i}$ de L sont s.c.i. sur L_0 . On obtient ainsi une structure d'e.l.c.s. bitopologique (L, L_0) canonique sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{L}(X_0,Y_0)$.

Notons que le dual L'_0 de L_0 est l'espace $X \otimes Y'_0$ des formes linéaires du type $\sum_{i=1}^{m} \omega_{x_i, y'_i}$ où pour tout $x \in X_0$, tout $y' \in Y'_0$ et tout $u \in L_0$ on pose $\omega_{x,y}(u) = < u(x), y' >$.

d - Soit (X,X_0) un e.l.c.s. bitopologique. Comme cas particulier de c), si Z_0 désigne le dual de X_0 muni de la topologie $\sigma(X'_0,X_0)$, et si Z désigne ce même dual de X_0 muni de la topologie induite par la topologie forte $\beta(X',X)$ du dual X' de X , alors (Z,Z_0) est un e.l.c.s. bitopologique que nous appellerons dual de (X,X_0) et noterons $(X,X_0)'$.

Si u est un morphisme entre e.l.c.s. bitopologiques, en transposant u , on obtient un morphisme entre objets duaux.

Considérons maintenant le dual de $(X,X_0)' = (Z,Z_0)$. C'est le le couple $(\hat{X},\hat{X}_0)$ où $\hat{X}_0$ est X_0 équipé de la topologie affaiblie $\sigma(X_0,X'_0)$ et où $\hat{X}$ est X equipé de la topologie induite sur X par $\beta(Z',Z)$. Cette topologie de $\hat{X}$ est plus fine que celle de X et moins fine que la topologie induite par $\beta(X'',X')$. Si celle-ci est égale à la topologie de X , c'est-à-dire si X est infratonnelé, alors on aura $\hat{X} = X$. Il en sera donc ainsi en particulier, si X est tonnelé ou bornologique, par exemple si X est un espace vectoriel normé. Dans ce cas le dual de $(\hat{X},\hat{X}_0)$ sera $(X,X_0)'$, autrement dit $(X,X_0)''' = (X,X_0)'$ et on aura $(X,X_0)'' = (X,X_0)$ si et seulement si la topologie de X_0 est égale à $\sigma(X_0,X_0')$.

e) Produits

Soit $(X^i , X_o^i)_{i\in I}$ une famille d'e.l.c.s. bitopologiques. Alors $(\prod_{i\in I} X^i , \prod_{i\in I} X_o^i)$ est un e.l.c.s. bitopologique que nous appellerons produit de la famille donnée.

f) Espaces involutifs

Soit (X,X_o) un e.l.c.s. bitopologique, sur le corps $\mathbb{C}$, et notons (X^c , X_o^c) l'espace imaginaire conjugué obtenu en remplaçant la multiplication par les scalaires $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$ par la loi $(\lambda,x) \longmapsto \bar{\lambda}x$, où $\bar{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de λ .

Nous appellerons involution sur (X,X_o) un élément J de $\mathcal{L}(X,X^c) \cap \mathcal{L}(X_o,X_o^c)$ tel que $J^2 = I$ et (X,X_o) muni de l'involution J sera appelé un e.l.c.s. bitopologique involutif.

Notons que si (Y,Y_o) est un autre e.l.c.s. bitopologique involutif d'involution J' , alors l'application $u \longrightarrow J' u J$ est une involution sur $\mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{L}(X_o, Y_o)$. L'e.l.c.s. bitopologique (L,L_o) canoniquement associé muni de cette involution devient un e.l.c.s. bitopologique involutif.

En particulier, si $(Y,Y_o) = (X,X_o)$, et si J' = J , posons $u^* = J u J$ pour tout $u \in L = \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$. Alors (L,L_o) devient un e.l.c.s. bitopologique et son involution est telle que $(u v)^* = v^* u^*$ pour tous $u, v \in L$.

1.5. *Intégration dans les e.l.c.s. bitopologiques*

Rappelons quelques résultats classiques d'intégration vectorielle.

Soient X un e.l.c.s. , S un espace topologique localement compact , μ une mesure de Radon bornée sur S et F une application de S dans X .

Nous dirons que F possède scalairement une propriété si pour tout $x' \in X'$, l'application $s \longmapsto \langle F(s) , x' \rangle$ la possède. Si F est scalairement μ-intégrable, alors $\int_S \langle F(s) , x' \rangle d\mu(s)$ existe pour tout $x' \in X$. L'application $x' \longmapsto \int_S \langle F(s) , x' \rangle d\mu(s)$ est un élément du dual algébrique $(X')^*$ de X' noté $\int_F F(s)\, d\mu(s)$.

Si cet élément appartient à X lui-même, on dira que F est scalairement μ-intégrable dans X .

<u>Lemme</u> - *Reprenons les données* X , S , μ , F *précédentes et soit* A *l'enveloppe convexe équilibrée fermée de* F(S) *dans* $(X')^*$.

(*i*) *Si* F *est scalairement* μ-*intégrable , alors* $\int_S F(s)\, d\mu(s)$ *est un élément de* $|\mu|$ A .

(*ii*) *Si* S *est compact , si* F *est continue , si* X *vérifie la condition* (K) *, alors* F *est scalairement* μ-*intégrable dans* X . (voir [9] , ch 6 , §1 , n°2 , prop 5 et corol.).

1.6. <u>*Proposition*</u> - *Soient* (X,X_o) *un espace vectoriel bitopologique* , S *un espace localement compact,* μ *une mesure de Radon bornée sur* S , F *une application continue de* S *dans* X_o *et bornée en tant qu'application de* S *dans* X . *On suppose que* X_o *vérifie la condition* (K) *et que* X *est quasi-complet. Alors* F *est scalairement* μ-*intégrable dans* X_o.

Notons A l'enveloppe convexe équilibrée fermée de F(S) dans X_o . Par hypothèse F(S) est une partie bornée de X. D'après la remarque 1-3-e , A est encore une partie bornée de X .

Soit (C_n) une suite croissante de parties compactes de S telle que $|\mu|\ (C_n) \longrightarrow \|\mu\|$. On peut évidemment supposer que $\|\mu\| = 1$. Puisque F est continue de S dans X , pour tout n l'intégrale

$$y_n = \int_{C_n} F(s)\, d\mu\ (s)$$ existe et c'est un élément de A (lemme 1-5).

Vérifions que (y_n) est de Cauchy dans X. Elle aura une limite dans A puisque X est supposé quasi-complet.

Soient V un voisinage de zéro dans X qui soit un tonneau de X_o , puis $\lambda > o$ tel que $A \subset \lambda V$. Notons j la jauge de λV. Comme j est enveloppe supérieure d'éléments de X'_o (rem. 1-3-a), on aura

$$j(y_{n+k} - y_n) < \int_{C_{n+k} \setminus C_n} j\,[F(s)]\, d\mu(s) \qquad \text{pour tous } n,k \quad ,$$

avec $j[F(s)] \leq 1$ pour tout $s \in S$, d'où finalement

$j(y_{n+k} - y_n) \leq |\mu|\ (C_{n+k}) - |\mu|\ (C_n) \longrightarrow o$

Ainsi (y_n) est de Cauchy et admet une limite $y \in A$ dans X.

D'autre part, F(S) est bornée dans X donc dans X_o. Pour tout $\phi \in X'_o$ la fonction $s \longmapsto < F(s), \phi >$ est continue et bornée sur S, et par suite μ-intégrable. Ainsi F est scalairement μ-intégrable et on a :

$$< \int_S F(s)\, d\mu(s)\ ,\ \phi > = \int_S < F(s),\ \phi > d\mu(s) = \lim_{n \to \infty} \int_{C_n} <F(s),\phi> d\mu(s)$$

$$= \lim_{n \to \infty} < y_n\ ,\ \phi > = < y,\ \phi >$$

Cela prouve que $\int_S F(s)\, d\mu(s) = y \in A$, donc que l'intégrale de F est un élément de X_o .

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE .

Les paragraphes 1 et 2 donnant les généralités sur les représentations continues des groupes topologiques sur des e.l.c.s. sont dûs à F. Combes. Ils s'inspirent de l'article de W. Arveson [1] . En particulier, les propositions 1-6 et 2-5 sont de simples transcriptions des propositions 1-2, 1-4 de [1].

La structure d'espace de Banach bitopologique considérée par W. Arveson semble avoir été introduite pour la première fois par L. Schwartz pour étudier les mesures et probabilités cylindriques [39] .

§2 REPRÉSENTATION CONTINUE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT SUR UN e.l.c.s. BITOPOLOGIQUE.

2.1. Notations - Soit G un groupe localement compact. Notons $C^\circ(G)$ (resp. $C^b(G)$) l'espace de Banach des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini sur G (resp. qui sont bornées sur G). Nous noterons $M^1(G)$ l'espace de Banach dual de $C^\circ(G)$, c'est-à-dire l'espace des mesures de Radon bornées sur G. C'est une algèbre de Banach unifère quand on le munit du produit de convolution.

Nous noterons $M^1(G)_o$ l'espace vectoriel topologique obtenue en munissant $M^1(G)$ de la topologie faible $\sigma(M^1(G)\ ,\ C^b(G)\ )$ associée à la dualité naturelle suivante entre $M^1(G)$ et $C^b(G)$:

$$(\mu\ ,\ f) \longmapsto \langle \mu\ ,\ f \rangle = \int_G f(g)\ d\mu(g).$$

Sur les mesures de probabilité sur G, cette topologie induit la topologie de la convergence étroite.

La boule unité fermée de $M^1(G)$ est fermée pour cette topologie puisqu'elle est fermée pour $\sigma(M^1(G), C^\circ(G)\ )$ qui est moins fine. Donc $(M^1(G)\ ,\ M^1(G)_o)$ est un e.l.c.s. bitopologique (plus précisément $M^1(G)$ et $C^b(G)$ sont deux espaces de Banach en dualité métrique au sens du §4).

2.2 Définition - Nous appellerons représentation continue d'un groupe localement compact G sur un e.l.c.s. bitopologique (X,X_o) , un homomorphisme U du groupe G dans le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{L}(X_o)$ vérifiant les conditions suivantes

1) La famille $U(G) = \{\ U_g\ ;\ g \in G\ \}$ est équicontinue sur X .
2) Pour tout $x \in X$, l'application $g \longmapsto U_g x$ est continue de G dans X_o .

Si (X,X_o) est involutif, d'involution J , nous dirons que U est involutive si $J\ U_g\ J = U_g$ pour tout $g \in G$.

Nous appellerons représentation équicontinue de G sur un e.l.c.s. X , une représentation continue de G sur l'e.l.c.s. bitopologique (X,X_o) où $X_o = X$.

2.3. Remarques -

a) D'après la condition 1) , pour tout $g \in G$, on a $U_g \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{L}(X_o)$ et plus précisément, U_g est un isomorphisme de l'e.l.c.s. bitopologique (X,X_o) sur lui-même.

b) Notons (L, L_o) la structure naturelle d'e.l.c.s. bitopologique introduite au paragraphe 1-3-c sur l'algèbre $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$. Alors la condition 2) ci-dessus signifie exactement que $U : g \longmapsto U_g$ est continue de G dans L_o .

c) De la condition 1) il résulte que l'image U(G) de U est une partie bornée de L. En effet, considérons un voisinage V de zéro dans X et une partie bornée A de X. Comme la famille U(G) est équicontinue sur X, il existe un voisinage W de zéro dans X tel que $U_g(W) \subset V$ pour tout $g \in G$. Soit $\lambda > o$ tel que $\lambda A \subset W$. On a alors
$\lambda\ [\bigcup U_g(A)\ ] = \bigcup U_g\ (\lambda A) \subset \bigcup U_g(W) \subset V.$
Ainsi U(G) est bien une partie de $\mathcal{L}(X)$ bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X.

2.4. *Définitions* - Soit U une représentation continue d'un groupe localement compact G sur un e.l.c.s. bitopologique (X,X_o). Notons (L,L_o) la structure bitopologique naturelle sur $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$.

On dira que U est *ponctuellement intégrable* si pour tout $x \in X_o$ et tout $\mu \in M_1(G)$, l'application $g \longmapsto U_g x$ est scalairement μ-intégrable de G dans X_o. Cette application étant continue, elle est scalairement μ-mesurable. La condition signifie donc simplement que pour tout $\mu \in M^1(G)$, l'élément $\int_G U_g x \, d\mu(g)$ du complété faible de X_o est un élément de X_o.

Il est clair que $x \longmapsto \int_G U_g x \, d\mu(x)$ est alors une application linéaire de X_o dans lui-même. Nous la noterons $U(\mu)$.

On dira que U est *intégrable* si l'application U de G dans L_o est scalairement μ-intégrable pour tout $\mu \in M^1(G)$. Comme U est continue de G dans L_o (rem. 2-3-b-) , ici aussi la condition signifie simplement que pour tout $\mu \in M^1(G)$, l'élement $\int_G U_g \, d\mu(g)$ du complété faible de L_o est dans L_o.

Donnons des conditions suffisantes pour que U soit intégrable ou ponctuellement intégrable.

2.5. *Proposition - Conservons les données et notations précédentes.*

(*i*) *Si* X_o *vérifie la condition* (K) *et si* X *est quasi-complet , alors* U *est ponctuellement intégrable.*

(ii) Si L_0 *vérifie la condition* (K) *et si* L *est quasi-complet , alors* U est intégrable.

(i) Pour tout $x \in X$, l'application $F_x : g \longmapsto U_g\, x$ est continue de G dans X_0 et d'après 2-3-c- elle est bornée de G dans X. D'après la proposition 1-6 , pour tout $\mu \in M^1(G)$ cette application est scalairement μ-intégrable de G dans X_0 .

(ii) De même U est continue de G dans L_0 (voir 2-3-b) et bornée de G dans L (voir 2-3-c) , d'où la conclusion.

2.6. <u>*Remarque*</u> - Soit (X,X_0) un e.l.c.s. bitopologique. Si X_0 est quasi-complet, alors il vérifie la condition (K) ([8], ch. II, §4 , n° 2, prop. 3), et X est quasi-complet (rem. 1-3-c-). D'après la proposition 2-6, toute représentation continue d'un groupe localement compact G sur (X,X_0) sera ponctuellement intégrable. Cela s'applique notamment dans les deux cas particuliers suivants

a - Si E est un e.l.c.s. tonnelé, si X_0 est le dual faible de E et X le dual fort de E. Les parties bornées de X_0 sont équicontinues sur E et donc relativement compactes dans X_0 qui est donc quasi-complet.

b - Si $X = X_0$ avec X quasi-complet. Toute représentation équicontinue de G sur un e.l.c.s. quasi-complet est donc ponctuellement intégrable, et même intégrable (voir rem. 2.9.b)).

2.7. <u>*Proposition*</u> - *Soient* G *un groupe localement compact ,* U *une représentation continue de* G, *sur un e.l.c.s. bitopologique* (X,X_0). *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) U *est intégrable.*

(ii) U *est ponctuellement intégrable et* $U(\mu) \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{L}(X_0)$ *pour tout* $\mu \in M^1(G)$.

Si ces conditions sont vérifiées on a alors $\int_G U_g\, d\mu(g) = U(\mu)$.

Soit (L,L_0) la stucture d'e.l.c.s. bitopologique naturelle sur $\mathscr{L}(X) \cap \mathscr{L}(X_0)$. Pour tout $x \in X_0$ et tout $\phi \in X_0'$ notons $\omega_{x,\phi}$ la forme linéaire $u \longmapsto \langle u(x) , \phi \rangle$ sur L_0 . Le dual de L_0 est alors l'espace des formes linéaires sommes d'un nombre fini de telles formes $\omega_{x,\phi}$. (voir 1-4-c-). On voit donc que l'élément

$\int_G U_g \, d\mu(g)$ du complété de L_o est caractérisé par la relation

$$(1) \quad < \int_G U_g \, d\mu(g) \, , \; \omega_{x,\phi} > \; = \int_G < U_g x \, , \; \phi > d\mu(g) \; , \; \forall x \in X_o, \forall \phi \in X'_o \, .$$

Si (ii) est remplie , alors l'élément $U(\mu)$ de L_o vérifie la relation (1) (par définition de $U(\mu)x$ dans X_o). On a donc $\int_G U_g \, d\mu(g) = U(\mu) \in L_o$ pour tout $\mu \in M^1(G)$ et U est intégrable.

Réciproquement, supposons U intégrable. Pour tout $\mu \in M^1(G)$, posons $T_\mu = \int_G U_g \, d\mu(g) \in L_o$. Alors pour tout $x \in X_o$, la relation (1) montre que l'élément $T_\mu \, x$ de X_o est égal à $\int_G U_g x \, d\mu(g)$.

Cela prouve que U est ponctuellement intégrable et que $U(\mu)x = T_\mu x$ pour tout $x \in X$. On a donc $U(\mu) = T_\mu \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$.

2.8. <u>*Proposition*</u> - *Soient* G *un groupe localement compact* , U *une représentation continue et ponctuellement intégrable de* G *sur un e.l.c.s. bitopologique* (X,X_o).

(*i*) *Pour tout* $\mu \in M^1(G)$, *l'application linéaire* $U(\mu)$ *est un élément de* $\mathcal{L}(X)$.

(*ii*) $\mu \longmapsto U(\mu)$ *est un homomorphisme d'algèbres de* $M^1(G)$ *dans* $\mathcal{L}(X)$ *qui prolonge* U *dans le sens suivant :* $U(\delta_g) = U_g$ *pour tout* $g \in G$.

(*iii*) $\mu \longmapsto U(\mu)$ *est continu si on munit* $M^1(G)$ *de la topologie normique et* $\mathcal{L}(X)$ *de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de* X .

(*iv*) $\mu \longmapsto U(\mu)$ *est continue si on munit* $M^1(G)$ *de la topologie* $\sigma(M^1(G), C^b(G))$ *et* $\mathcal{L}(X)$ *de la topologie de la convergence simple sur* X *pour la topologie de* X_o . *En particulier, pour toute unité approchée* (f_i) *dans* $L^1(G)$, *et tout* $x \in X_o$ *on a* $U(f_i)\, x \longrightarrow x$ *dans* X_o .

(*v*) *Si* U *est intégrable,* $\mu \longmapsto U(\mu)$ *est un homomorphisme d'e.l.c.s. bitopologiques de* $(M^1(G) \, , \, M^1(G)_o)$ *dans* (L,L_o) *où* (L,L_o) *désigne la structure d'e.l.c.s. bitopologique naturelle sur* $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$.

(i) Pour vérifier que $U(\mu) \in \mathcal{L}(X)$ on peut supposer $\|\mu\| \leqslant 1$. Soit V un voisinage de zéro de X qui soit convexe équilibré et fermé pour la topologie de X_o. Comme U(G) est équicontinue sur X, il existe un autre voisinage W de zéro dans X tel que $U_g(W) \subset V$ pour tout $g \in G$. Pour tout $x \in W$, l'application $F_x : g \longmapsto U_g x$ prend ses valeurs dans V. D'après 1-5-(i), l'élément $U(\mu)x$ est dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $F_x(G)$ dans X_o, et donc dans V. Cela montre que $U(\mu)(W) \subset V$, d'où la continuité de $U(\mu)$ sur X. On a démontré plus que cela (voir la remarque 2-9)

En vue de l'assertion (iii), notons que si A est une partie bornée de X, il existe $\lambda > o$ tel que $\lambda A \subset W$ et alors on a

(1) $\lambda\, U(\mu)\,(A) = U(\mu)(\lambda A) \subset U(\mu)(W) \subset V$

(ii) On voit facilement que $\mu \longmapsto U(\mu)$ est linéaire et que $U(\delta_g) = U_g$ pour tout $g \in G$. Vérifions que pour tout couple (μ,ν) d'éléments de $M^1(G)$ on a $U(\mu * \nu) = U(\mu)\,U(\nu)$. Soient $x \in X$ et $\phi \in X'_o \subset X'$. On a

$$< U(\mu * \nu)x \;,\; \phi > \; = \; < \int_G U_g x \; d(\mu * \nu)(g) \;,\; \phi >$$

$$\int_G < U_g x \;,\; \phi > \; d(\mu * \nu)(g) \; = \; \iint_{G\times G} < U_{s+t}x, \;\phi > d\mu(s)\, d\nu(t).$$

La fonction $(t,s) \longmapsto U_{s+t}\, x$ est continue de GxG dans X_o et on a $\phi \in X'_o$, donc $(t,s) \longmapsto \; < U_{s+t}x \;,\; \phi >$ est continue. Cette dernière est bornée car $(t,s) \longmapsto U_{s+t}x$ est bornée de GxG dans X (rem. 2-3-c-). On a donc une fonction intégrable pour $\mu * \nu$ et le théorème de Fubini nous donne (compte tenu du fait que $U_s \in \mathcal{L}(X_o)$ pour tout $s \in G$),

$$< U(\mu * \nu)x \;,\; \phi > \; = \int_G d\mu(s) \int_G < U_s U_t x \;,\; \phi > \; d\mu(t)$$

$$\int_G < U(\nu)x \;,\; {}^tU_s\, \phi > d\mu(s) = \int_G < U_s U(\nu) \;,\; \phi > d\mu(s) = < U(\mu)U(\nu)x, \phi >$$

d'où l'assertion (ii).

(iii) Pour toute partie bornée A de X et tout voisinage de zéro de X convexe équilibré et fermé pour la topologie de X_o, on peut considérer l'ensemble $W_{A,V}$ des $u \in \mathcal{L}(X)$ tels que, $u(A) \subset V$. On obtient ainsi un sytème fondamental de voisinages de zéro de la topologie considérée ici sur $\mathcal{L}(X)$. La relation (1) ci-dessus, montre que pour tout voisinage $W_{A,V}$ de ce type il existe $\lambda > o$ tel que la boule fermée centrée en zéro dans $M^1(G)$ de rayon λ ait son image par U incluse dans $W_{A,V}$, d'où la continuité annoncée de l'application linéaire $\mu \longmapsto U(\mu)$.

(iv) Soit j une semi-norme définissant la topologie de X_o. Montrons que pour tout $x \in X_o$ on a $j[U(\mu)x] \longrightarrow o$ quand $\mu \longrightarrow o$ pour la topologie $\sigma(M^1(G), C^b(G))$. Comme j est continue sur X_o on a

$$j[U(\mu)x] = j\left[\int_G U_g x \, d\mu(g)\right] \leq \int_G j[U_g x] \, d\mu(g) = \langle F, \mu \rangle$$

où F désigne la fonction $g \longmapsto j[U_g(x)]$ sur G. Comme $g \longmapsto U_g(x)$ est continue de G dans X_o, et bornée de G dans X, lafonction F est un élément de $C^b(G)$, d'où la conclusion.

Rappelons que si (f_i) est une unité approchée de $L^1(G)$, alors (f_i) tend vers l'unité δ de $M^1(G)$ pour la topologie $\sigma(M^1(G), C^b(G))$ ([10], Chap. 8, §2, corollaire 1), donc $U(f_i)\,x \longrightarrow x$ dans X_o pour tout $x \in X_o$.

(v) résulte de (iii) et (iv), compte tenu de la proposition 2-7.

2.9. *Remarques* -

a) Soit B la boule unité fermée centrée en zéro de $M_1(G)$. Soit V un voisinage de zéro dans X qui soit convexe, équilibré, fermé pour la topologie de X_o. Si W est un autre voisinage de zéro dans dans X tel que $U_g(W) \subset V$ pour tout $g \in G$, nous avons vu en démontrant (i) que pour toute $\mu \in B$ on avait $U(\mu)(W) \subset V$. Cela montre que la famille $U(\mu)$, pour $\mu \in B$, est équicontinue sur X dans les mêmes conditions que la famille U_g pour $g \in G$. En particulier, si X est un espace de Banach de boule unité fermée, fermée pour la topologie de X_o, et si on a $\|U_g\| \leq k$ pour tout $g \in G$, alors on a $\|U(\mu)\| \leq k$ pour toute $\mu \in B$.

b) Toute représentation équicontinue U ponctuellement intégrable de G sur un e.l.c.s. X est intégrable. En effet, il suffit d'appliquer les propositions 2.7 et 2.8 (i) dans le cas particulier où $X = X_o$.

Pour une représentation ponctuellement intégrable U de G sur un e.l.c.s. bitopologique (X, X_o), nous allons voir qu'il suffit d'avoir $X' = X'_o$, (autrement dit que la topologie de X_o soit compatible avec la dualité de X avec X') pour que U soit équicontinue. Mieux, toute représentation ponctuellement intégrable "contient" une représentation équicontinue.

2.10. <u>*Proposition*</u> - *Soient* G *un groupe localement compact*, U *une représentation continue et ponctuellement intégrable de* G *sur un e.l.c.s. bitopologique* (X,X_o). *L'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $g \longmapsto U_g x$ *soit continue de* G *dans* X *est un sous-espace vectoriel fermé de* X, *stable par* U_g *pour tout* $g \in G$, *partout dense dans* X_o.

Il est clair que l'ensemble E considéré est un sous-espace vectoriel de X stable par U_g pour tout $g \in G$. Soit x un élément de la fermeture $\bar{E}$ de E dans X. Soit V un voisinage de zéro dans X. La famille des U_g où $g \in G$ étant équicontinue sur X, il existe un autre voisinage de zéro W dans X tel que $U_g(W) \subset V$ pour tout $g \in G$. Soit $y \in E$ tel que $x-y \in W$; pour tout $g \in G$ on a $U_g x - U_g y \in U_g(W) \subset V$. Cela prouve que l'application $g \longmapsto U_g x$ est limite uniforme sur G des applications $g \longmapsto U_g y$ lorsque $y \in E$ tend vers x dans X. Elle est donc continue et on a $\bar{E} = E$.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une unité approchée de $L^1(G)$ et soit $x \in X$. D'après 2.8 (iv), dans X_o, les éléments $x_i = U(f_i)x$ convergent vers x. Pour tout $i \in I$, on a $x_i \in E$. En effet $g \longmapsto U_g x_i = U(\delta_g * f_i)x$ se compose de $g \longmapsto \delta_g * f_i$ continue de G dans $L^1(G)$ (car la représentation régulière gauche de G sur $L^1(G)$ est équicontinue) et de $\mu \longmapsto U(\mu)x$ qui est continue de $M_1(G)$ dans X (prop. 2-8-(iii)). Ainsi E est partout dense dans X_o.

2.11. <u>*Corollaire*</u> - *Reprenons les données précédentes. Si* X *et* X_o *ont le même dual, alors* U *est une représentation équicontinue de* G *sur* X.

En effet, la topologie de X étant compatible avec la dualité entre X_o et X_o' le sous-espace vectoriel E de X_o fermé dans X est fermé pour $\sigma(X_o, X_o')$ et partout dense dans X_o pour cette topologie. Il est donc égal à X_o.

2.12. <u>*Remarque*</u> - La démonstration de la proposition 2-10 montre que tout $x \in X$ tel qu'il existe $f \in L^1(G)$ vérifiant $U(f)x = x$ est dans le sous-espace E.

Si $U\,[L^1(G)]$ contient l'unité I de $\mathcal{L}(X)$, il existe $f \in L^1(G)$ tel que $U(f) = I$ et alors $g \longmapsto U(\delta_g * f)$ est continue de G dans $\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sous les parties bornées de X, comme composée de $g \longmapsto \delta_g * f$ de G dans $L^1(G)$ et de $\mu \longmapsto U(\mu)$ de $M^1(G)$ dans $\mathcal{L}(X)$ (voir prop. 2-8.(iii)). Plus précisément on a la caractérisation suivante d'une telle continuité de U.

2.13. <u>*Proposition*</u> - *Soient G un groupe localement compact, U une représentation continue et ponctuellement intégrable de G sur un e.l.c.s. bitopologique (X, X_o). Notons (L,L_o) la structure d'e.l.c.s. bitopologique naturelle sur $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$. Pour que U soit continue de G dans L, il faut et il suffit que l'unité I de $\mathcal{L}(X)$ soit adhérente à $U[\,L^1(G)]$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X.*

Pour toute partie bornée A de X et tout voisinage V de zéro dans X notons $W_{A,V}$ l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(X)$ tels que $u(A) \subset V$. C'est un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie de $\mathcal{L}(X)$ envisagée.

Montrons d'abord que la condition est suffisante. Soient A et V comme ci-dessus. La famille (U_g) où $g \in G$ étant équicontinue sur X, il existe un voisinage de zéro V_1 dans X tel que $U_g\,(V_1) \subset V$ pour tout $g \in G$. Soit f un élément de $L^1(G)$ tel que $I - U(f) \in W_{A,V_1}$. Alors pour tout $g \in G$ on a

$$[\,U_g - U_g\,U(f)\,]\,(A) = U_g\,[\,I - U(f)\,]\,(A) \subset U_g\,(V_1) \subset V\ .$$

Autrement dit $U_g - U_g\,U(f) \in W_{A,V}$ pour tout $g \in G$. Cela prouve que $g \longmapsto U_g$ est limite uniforme sur G d'application $g \longmapsto U\,(\delta_g * f)$ où $f \in L^1(G)$. Elle est donc continue de G dans $\mathcal{L}(X)$.

Réciproquement, supposons que U soit continue de G dans $\mathcal{L}(X)$ pour la topologie envisagée. Considérons un voisinage de zéro dans $\mathcal{L}(X)$ du type $W_{A,V}$ avec V convexe équilibré et fermé pour la topologie de X_o. Soit Ω un voisinage de zéro dans G tel que $I - U_g \in W_{A,V}$ pour tout $g \in \Omega$ et soit f une fonction continue positive sur G, à support compact inclus dans Ω et telle que

$\int_G f(g)\, dg = 1$. D'après le lemme 1-5-(i) on aura

$$U(f) - I = \int_G f(g)\,(U_g - I)\, dg \in W_{A,V}$$

Ainsi I est bien adhérent à $U[L^1(G)]$ dans $\mathcal{L}(X)$.

2.14. *Remarques* -

a) *Soient* U *et* V des représentations continues d'un groupe localement compact sur des e.l.c.s. bitopologiques (X,X_0) et (Y,Y_0).

Soit $T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$ qui entrelace U et V et soient $\mu \in M^1(G)$ et $x \in X$. Si $g \longmapsto U_g x$ est scalairement μ-intégrable dans X_0, alors $g \longmapsto V_g T = T U_g$ l'est aussi dans Y_0 et

$\int_G V_g T \, d\mu(g) = T \int_G U_g x \, d\mu(g)$. D'où les conséquences suivantes.

Si T est surjective et si U est ponctuellement intégrable, alors V est ponctuellement intégrable.

Si U et V sont ponctuellement intégrables, alors $TU(\mu) = V(\mu)T$ pour tout $\mu \in M^1(G)$. En particulier, dans le cas où $U = V$, si $T \in \mathcal{L}(X_0)$ commute avec U_g pour tout $g \in G$, alors il commute avec $U(\mu)$ pour tout $\mu \in M^1(G)$.

b) Dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, si T au lieu d'être linéaire est antilinéaire et si U et V sont ponctuellement intégrables, on aura $T\,U(f) = V(\bar{f})\,T$ pour tout $f \in L^1(G)$ (où $\bar{f}$ désigne l'imaginaire conjuguée de f).

c) Soient (X,X_0) et (Y,Y_0) deux e.l.c.s. bitopologiques et soit τ un homomorphisme (resp. un antihomomorphisme) d'algèbres de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_0)$ dans $\mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(Y_0)$ qui soit un morphisme pour les structures d'e.l.c.s. bitopologiques canoniques , et qui applique toute partie équicontinue sur X sur une partie équicontinue sur Y. Si U est une représentation continue d'un groupe localement compact G sur (X,X_0) , alors $V = \tau \circ U$ une représentation continue de G (resp. $G°$ groupe opposé de G) sur (Y,Y_0). Si U est intégrable , alors V l'est aussi et $V(\mu) = \tau\,[U(\mu)]$ pour tout $\mu \in M^1(G)$.

2.15. *Exemples ou cas particuliers de représentations continues.*

Soit U une représentation continue d'un groupe localement compact G sur un e.l.c.s. bitopologique (X,X_o).

a) Sous-représentations .

Soit (Y,Y_o) un sous-espace de (X,X_o) stable par U_g pour tout $g \in G$ (autrement dit $U_g(Y) = Y$ pour tout $g \in G$). Il est clair que $U^Y : g \longmapsto U_g|Y$ est une représentation continue de G sur (Y,Y_o). On l'appellera la sous-représentation de U définie par (Y,Y_o)

Supposons que Y_o soit fermé dans X_o et que U soit ponctuellement intégrable. Alors d'après le lemme 1-5-(i), U^Y est ponctuellement intégrable. Comme l'injection canonique T de Y dans X entrelace U^Y et U, pour tout $\mu \in M^1(G)$ on a $U^Y(\mu) = U(\mu)|Y$ (rem. 2-14-a).

Si U est intégrable alors U^Y est intégrable (d'après 2-14-c où τ sera l'application $u \longmapsto u|Y$ de restriction de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$ dans $\mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(Y_o)$).

b) Représentation transposée de U .

Notons (Y,Y_o) l'e.l.c.s. bitopologique dual de (X,X_o). L'application $\tau : u \longmapsto {}^tu$ est un antihomomorphisme de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_o)$ dans $\mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(Y_o)$ continu pour les structures canoniques d'e.l.c.s. bitopologiques, et $V : g \longmapsto {}^tU_g$ est une représentation continue du groupe opposé G° de G sur (Y,Y_o). Si U est intégrable, V est intégrable et pour tout $\mu \in M^1(G)$ on a $V(\mu) = {}^t[U(\mu)]$.

c) Composition avec un homomorphisme de groupes .

Soient H un autre groupe localement compact et j un homomorphisme continu de H dans G . Alors $V = U \circ j$ est une représentation continue de H sur (X,X_o). Pour tout $\mu \in M^1(H)$, notons $j(\mu)$ la mesure image. C'est un élément de $M^1(G)$ et pour tout $x \in X_o$ et tout $y \in X'_o$ on a

$$\int_H < V_h x , y > d\mu(h) = \int_H < U_{j(h)} x , y > d\mu(h)$$

$$= \int_G < U_g x , y > dj(\mu)(g) = < U(j(\mu)) x , y >$$

Cela prouve que l'élément $\int_H V_h x \, d\mu(h)$ du complété faible de X_o est égal à $U(j(\mu))x$. Si U est ponctuellement intégrable (resp. intégrable) on voit donc que V l'est aussi et que $V(\mu) = U[j(\mu)]$ pour tout $\mu \in M^1(H)$.

<u>NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE</u> .

Voir références données à la fin du paragraphe 1 .

§3 SOUS-ESPACES SPECTRAUX D'UNE REPRÉSENTATION D'UN GROUPE COMMUTATIF

Dans tout ce paragraphe, nous considérerons un groupe localement compact abélien G et une représentation continue, ponctuellement intégrable U, de G sur un e.l.c.s. bitopologique (X, X_o).

Nous noterons additivement la loi de composition interne de G. En particulier, 0 désigne l'élément neutre du groupe. Nous noterons dg la mesure de Haar choisie sur G (normalisée si G est compact ou discret), $\hat{G}$ le groupe dual de G,
$< g, \gamma >$ la valeur en un point g de G d'un élément γ de $\hat{G}$, $\hat{\mu}$ la cotransformée de Fourier $\gamma \longmapsto \int_G < g, \gamma > d\mu(g)$ d'un élément μ de $M^1(G)$.

Rappelons que $\hat{\mu}$ est une fonction continue et bornée sur $\hat{G}$ et que $\mu \longmapsto \hat{\mu}$ est un homomorphisme continu injectif d'algèbres de Banach involutives et unifères de $M^1(G)$ dans $C^b(\hat{G})$.

La restriction à l'idéal $L^1(G)$ de $M^1(G)$ de cette application est la transformation de Gelfand de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ dont le spectre s'identifie à $\hat{G}$.

Pour tout $\mu \in M^1(G)$ on obtient une partie fermée de $\hat{G}$ en posant $Z(\mu) = \{ \gamma \in \hat{G} ; \hat{\mu}(\gamma) = o \}$.
Pour toute partie A de $M^1(G)$ la partie $Z(A) = \bigcap_{\mu \in A} Z(\mu)$ sera fermée dans $\hat{G}$.

Pour toute partie fermée de $\hat{G}$, nous considérerons **les ensembles** : $I_o(E)$ des $f \in L^1(G)$ tels que $\hat{f}$ ait un support compact disjoint de E,
$I(E)$ des $f \in L^1(G)$ telles que $\hat{f}(\gamma) = o$ pour tout $\gamma \in E$.

3.1. *Rappels* - Pour ces résultats d'analyse harmonique voir par exemple [35] ou [11].

1) Pour toute partie fermée E de $\hat{G}$, l'ensemble $I_o(E)$ (resp. $I(E)$) est un idéal de $L^1(G)$ (resp. un idéal fermé) et c'est le plus petit idéal I de $L^1(G)$ (resp. le plus grand idéal I de $L^1(G)$) tel que $Z(I) = E$.

2) Pour tout $\gamma \in \hat{G}$, le seul idéal fermé de I de $L^1(G)$ tel que $Z(I) = \{\gamma\}$ est l'ensemble de $f \in L^1(G)$ telles que $\hat{f}(\gamma) = o$.

3) Pour qu'un idéal I de $L^1(G)$ soit partout dense dans $L^1(G)$, il faut et il suffit que $Z(I) = \emptyset$.

4) Soit I un idéal fermé de $L^1(G)$. Si $\hat{f}$ est nulle sur un voisinage de $Z(I)$ (soit $Z(I) \subset \overline{Z(f)}$) , alors f est un élément de I.

5) Soient K une partie compacte de $\hat{G}$ et Ω un ouvert contenant K. Il existe $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ prenne la valeur 1 sur K et la valeur o sur le complémentaire de Ω.

6) Soit J un idéal de $L^1(G)$ partout dense dans $L^1(G)$. Alors il existe des unités approchées de $L^1(G)$ formées d'éléments de J. (si $(f_i)_{i \in I}$ est une unité approchée de $L^1(G)$, pour tout $i \in I$ et tout entier $n > o$ on peut choisir $h_{i,n} \in J$ telle que $\| h_{i,n} \| \leqslant 1$ et $\| f_i - h_{i,n} \| \leqslant \frac{1}{n}$. On vérifie facilement que $(h_{i,n})$ est encore une unité approchée de $L^1(G)$).

7) Il existe une unité approchée $(f_i)_{i \in I}$ de $L^1(G)$ telle que $\hat{f}_i$ soit pour tout $i \in I$ à support compact dans $\hat{G}$.
(d'après 5) l'idéal J des $f \in L^1(G)$ tels que $\hat{f}$ ait un support compact vérifie $Z(J) = \emptyset$; d'après 3) J est partout dense dans $L^1(G)$ et 6) donne 7)).

3.2. *Définitions et notations* .

a) Pour tout élément x de X posons

$$K_x^U = \{ \mu \in M^1(G) \ ; U(\mu)x = o \} \quad \text{et} \quad J_x^U = K_x^U \cap L^1(G).$$

On obtient ainsi des idéaux de $M^1(G)$ et $L^1(G)$ respectivement. Ces idéaux sont fermés d'après 2-8-(iii)

Il est clair que l'on a $Z(K_x^U) \subset Z(J_x^U)$. Réciproquement, soit $\gamma \in Z(J_x^U)$. Pour tout $\mu \in K_x^U$ et tout $f \in L^1(G)$ on a $f * \mu \in J_x^U$
D'après 3-1-5-, on peut choisir f tel que $\hat{f}(\gamma) \neq o$. On a alors

$$o = (f * \mu)\hat{\ }(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\, \hat{\mu}(\gamma) \qquad \text{d'où} \qquad \hat{\mu}(\gamma) = o .$$

Cela prouve que $Z(J_x^U) = Z(K_x^U)$

b) Nous noterons $sp_U x$ cette partie de $\hat{G}$.

c) Pour toute fonction ϕ sur $\hat{G}$ ou sur G , nous noterons $S(\phi)$ l'ensemble des points où ϕ ne s'annule pas et supp. ϕ le support $\overline{S(\phi)}$ de ϕ .

3.3. ***Proposition*** - (*propriétés de* $\mathrm{sp}_U\, x$) . Soit x *un élément de* X

(*i*) *Pour tout autre élément* y *de* X *on a* $\mathrm{sp}_U(x+y) \subset \mathrm{sp}_V\, x \cup \mathrm{sp}_U\, y$.

(*ii*) *Pour tout scalaire non nul* λ *on a* $\mathrm{sp}_U(\lambda x) = \mathrm{sp}_U\, x$.

(*iii*) *Pour que* $\mathrm{sp}_U\, x = \emptyset$, *il faut et il suffit que* x *soit nul.*

(*iv*) *Soit* V *une autre représentation continue ponctuellement intégrable de* G *sur un autre* e.l.c.s. bitopologique (Y, Y_o) *et soit* $T \in \mathcal{L}(X_o, Y_o)$ *un opérateur qui entrelace* U *et* V . Alors $\mathrm{sp}_V\, Tx \subset \mathrm{sp}_U\, x$. Si T *est injectif, on a* $\mathrm{sp}_V\, Tx = \mathrm{sp}_U\, x$. *De même, si* T *est semi-linéaire continu de* X_o *dans* Y_o *et entrelace* U et V *on a* $\mathrm{sp}_V\, Tx \subset -(\mathrm{sp}_U\, x)$, *et* $\mathrm{sp}_V\, Tx = -(\mathrm{sp}_U\, x)$ *si* T *est injectif.*

(*v*) *Pour tout* $\mu \in M^1(G)$ *on a*

$$\mathrm{sp}_U\, x \cap S(\hat{\mu}) \subset \mathrm{sp}_U\, U(\mu)x \subset \mathrm{sp}_U\, x \cap \mathrm{supp.}\, \hat{\mu}$$

(*vi*) *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux éléments de* $M^1(G)$ *tels que* $\hat{\mu}_1$ *et* $\hat{\mu}_2$ *coincident sur un voisinage de* $\mathrm{sp}_U\, x$ *dans* $\hat{G}$. *Alors on a* $U(\mu_1)x = U(\mu_2)x$. *En particulier, si* $\hat{\mu}_1$ *vaut* 1 *sur un voisinage de* $\mathrm{sp}_U\, x$ *on a* $U(\mu_1)x = x$

(i) résulte de la relation $J_x^U \cap J_y^U \subset J_{x+y}^U$

(ii) est évident. C'est aussi un cas particulier de (*iv*) en considérant l'homothétie T associé à λ .

(iii) On a $J_o^U = L^1(G)$ d'où $\mathrm{sp}_U\, o = \emptyset$ d'après 3.1.5. Réciproquement soit $x \neq o$. D'après 2-8 (*iv*), il existe $f \in L^1(G)$ tel que $U(f)x \neq o$. On a donc $J_x^U \neq L^1(G)$ d'où $\mathrm{sp}_U\, x \neq \emptyset$ (d'après 3-1-3)

(iv) D'après 2-14 pour tout $f \in L^1(G)$ on a $V(f)Tx = T\,U(f)x$ (resp. $V(\bar{f})\, Tx = T\, U(f)x$) si T est linéaire (resp. si T est antilinéaire), d'où l'on déduit $J_x^U \subset J_{Tx}^V$ (resp. $J_x^U \subset (J_{Tx}^V)^-$) ce qui entraine $\mathrm{sp}_V\, Tx \subset \mathrm{sp}_U\, x$ (resp. $\mathrm{sp}_V\, Tx \subset -(\mathrm{sp}_U\, x)$). Si T est injectif on aura visiblement l'égalité.

(v) Notons d'abord que

$$g \in J_{U(\mu)x}^U \Leftrightarrow U(g)\, U(\mu)x = o \Leftrightarrow g * \mu \in J_x^U .$$

Soit γ un élément de $\mathrm{sp}_U\, x$. Pour tout $g \in J_{U(\mu)x}^U$, on a $g * \mu \in J_x^U$, d'où $\hat{g}(\gamma)\, \hat{\mu}(\gamma) = o$. Si en outre $\gamma \in S(\hat{\mu})$, cela implique $\hat{g}(\gamma) = o$ ce qui établit la première inclusion.

Comme $U(\mu)$ commute avec $U(f)$ pour tout $f \in L^1(G)$, on a $J_x^U \subset J_{U(\mu)x}^X$ d'où $sp_U\ U(\mu)x \subset sp_U\ x$. Pour obtenir la deuxième inclusion, il suffit de montrer que $sp_U\ U(\mu)x \subset \text{supp. } \hat{\mu}$. Soit γ un élément du complémentaire $(\text{supp. } \hat{\mu})^c$ de supp. $\hat{\mu}$, et soit Ω un ouvert contenant γ et dont l'adhérence $\overline{\Omega}$ soit compacte, incluse dans $(\text{supp. } \hat{\mu})^c$. D'après 3-1-5, il existe $f \in L^1(G)$ tel que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ et supp. $\hat{f} \subset \Omega$. Alors on a $\hat{f}\,\hat{\mu} = 0$, soit $f * \mu = 0$ dans $L^1(G)$, d'où $U(f)\ U(\mu) = 0$ et $f \in J_{U(\mu)x}^U$. Comme $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, on obtient $\gamma \in (sp_U\ U(\mu)x)^c$ donnant l'inclusion recherchée.

(vi) Posant $\mu = \mu_1 - \mu_2$, la fonction $\hat{\mu}$ est nulle au voisinage de $sp_U\ x$ et on a $sp_U\ x \cap \text{supp. } \hat{\mu} = \emptyset$ d'où $sp_U\ U(\mu)x = \emptyset$ d'après (v) et $U(\mu)x = 0$ d'après (iii)

Prenant pour μ_2 la mesure de Dirac δ à l'élément neutre de G, qui est telle $\hat{\delta}(\gamma) = 1$ pour tout $\gamma \in \hat{G}$, on voit que si $\hat{\mu}_1$ vaut 1 au voisinage de $sp_U\ x$ on a $U(\mu_1)x = U(\delta)x = x$.

3.4. *Définition* Soit P une partie de $\hat{G}$. On notera $X^U(P)$ (ou même $X(P)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur la représentation U considérée) la fermeture dans X_o de l'ensemble des $x \in X$ tels que $sp_U\ x$ soit inclus dans P. On appellera $X^U(P)$ le <u>sous-espace spectral de X associé à U et à la partie P de $\hat{G}$</u>. Il est clair que $X^U(P)$ est croissant avec la partie P de $\hat{G}$.

Si P est réduite à un point γ on notera simplement X_γ^U ou X_γ ce sous-espace de X et on l'appellera le <u>sous-espace propre de X associé à U et au caractère γ de $\hat{G}$</u>.

3.5. *Proposition* Soit P une partie de $\hat{G}$.

(i) $X^U(P)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* X_o *invariant par* U.

(ii) L'ensemble des $x \in X$ *tels que* $sp_U\ x$ *soit compact et inclus dans* P *est un sous-espace vectoriel de* $X^U(P)$ partout dense dans $X^U(P)$ *pour la topologie de* X_o. *On a donc*

$$X^U(P) = \Big[\bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset P}} X^U(K)\Big]^- .$$

(*iii*) *Soit* E *une partie fermée de* $\hat{G}$ *et soit* $(V_i)_{i \in I}$ *une famille de voisinages de* E *telle que* $\bigcap_i \overline{V}_i = E$. *Alors on a*

$$\{x \in X \; ; \; sp_U \, x \subset E\} = X^U(E) = \{x \in X \; ; \; U(f)x = o \; , \forall f \in I_o(E)\} = \bigcap_i X^U(V_i) \; ,$$

En particulier, si $(E_i)_{i \in I}$ *est une famille de fermés de* $\hat{G}$, on a

$$X^U \left(\bigcap_i E_i\right) = \bigcap_i X^U(E_i) \, .$$

(iv) Si P *est réduite à un point* γ *de* G *on a*

$$X^U_\gamma = \{x \in X \; ; \; U_g x = \langle g, \gamma \rangle x \; , \forall g \in G\} \, .$$

(*v*) *Soit* Ω *une partie ouverte de* $\hat{G}$. *Alors* $X^U(\Omega)$ *est le sous-espace vectoriel fermé de* X_o *engendré par les éléments* U(f)x *où* x *décrit* X *et où* f *décrit l'ensemble* $I_o(\Omega^c)$ des $f \in L^1(G)$ *telles que supp* $\hat{f}$ *soit compact inclus dans* Ω .

(*vi*) *Soit* $(\Omega_i)_{i \in I}$ *une famille de parties ouvertes de* $\hat{G}$. *On a*

$$X^U\left[\bigcup_i \Omega_i\right] = \left[\sum_i X^U(\Omega_i)\right]^- \, .$$

(i) Résulte des assertions (*i*), (*ii*), (*iii*) *et* (*iv*) de la proposition 3-3

(ii) L'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel de $X^U(P)$ d'après les assertions (*i*) *et* (*ii*) de la proposition 3.3. D'après 3.1.7 il existe une unité approchée $(f_i)_{i \in I}$ de $L^1(G)$ telle que supp $\hat{f}_i$ soit compact pour tout $i \in I$. D'après 2-8 (iv), tout $x \in X^U(P)$ est limite pour la topologie de X_o de $U(f_i)x$ et d'après 3-3(v) on a $sp\, U(f_i)x \subset sp_U \, x \cap \text{supp}\, \hat{f}_i \subset P \cap \text{supp}\, \hat{f}_i$.

(iii) Pour toute partie E de $\hat{G}$, la définition des sous-espaces spectraux et les assertions (i) et (iii) de la proposition 3.3 donnent

$$\{ x \in X \; ; \; sp_U \, x \subset E \} \subset X^U(E) \subset \{ x \in X \; , \; U(f)x = o \; , \forall f \in I^o(E) \} \, .$$

En supposant E fermée, montrons les inclusions opposées. Soit $x \in X$ tel que $U(f)x = o$ pour tout $f \in I_o(E)$. On a alors d'après 3-1-1, $I_o(E) \subset J^U_x$ d'où $sp_U \, x = Z(J^U_x) \subset Z[I_o(E)] = E$.

Cela prouve que les trois ensembles ci-dessus sont égaux quand E est fermée.

D'autre part on a $X^U(E) \subset \bigcap_i X^U(V_i) \subset \bigcap_i X^U(\overline{V}_i)$ car pour tout $i \in I$ on a

$E \subset V_i \subset \overline{V}_i$, et donc $X^U(E) \subset X^U(V_i) \subset X^U(\overline{V}_i)$. Réciproquement si $x \in X^U(\overline{V}_i)$ pour tout $i \in I$, d'après ce qui précède appliqué à la partie fermée $\overline{V}_i$, on a $sp_U\, x \subset \overline{V}_i$ pour tout $i \in I$, d'où $sp_U\, x \subset \bigcap_i \overline{V}_i = E$ et $x \in X^U(E)$.
Finalement

$$X^U(E) = \bigcap_i X_i^U(V_i) = \bigcap_i X^U(V_i) .$$

La deuxième assertion de (iii) s'en déduit immédiatement.

(iv) Posons $I_\gamma = \{f \in L^1(G) \ , \hat{f}(\gamma) = o\}$. D'après (iii) ci-dessus et 3-1-2, pour $x \neq o$, on a

$$x \in X_\gamma^U \Leftrightarrow sp_U\, x = \{\gamma\} \Leftrightarrow Z(J_x^U) = \{\gamma\} \Leftrightarrow J_x^U = I_\gamma .$$

Soit $x \in X$ tel que $U_g x = \langle g, \gamma \rangle x$ pour tout $g \in G$. Pour tout $f \in L^1(G)$ on a alors

$$U(f)x = \int_G \langle g , \gamma \rangle f(g)\, x\, dg = \hat{f}(\gamma)\, x.$$

Si $x \neq o$, on a alors $J_x^U = I_\gamma$, soit $x \in X_\gamma^U$ (et pour $x = o$, cette relation est évidente).

Réciproquement, soit $x \in X_\gamma^U$ non nul et montrons que $U_g x = \langle g , \gamma \rangle x$ pour tout $g \in G$. D'après 2-8 (iv), il suffit de montrer que pour tout $f \in L^1(G)$ et tout $g \in G$ on a

$$U(f)\ [U_g x - \langle g, \gamma \rangle x] = o$$

Si on pose $h = f * \delta_g - \langle g, \gamma \rangle f$ cela signifie que $U(h)\, x = o$, soit donc $h \in J_x^U = I_\gamma$. Or la fonction $\hat{h}: \gamma' \longmapsto \langle g, \gamma' \rangle \hat{f}(\gamma') - \langle g, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma')$ s'annule en γ et h est bien élément de I_γ , d'où la réciproque.

(v) D'après 3-3(v) pour tout $x \in X$ et tout $f \in I_o(\Omega^c)$ on a $sp_U\ U(f)x \subset \text{supp}\ \hat{f} \subset \Omega$. Le sous-espace vectoriel Y de X engendré par les éléments $U(f)x$ où $x \in X$ et $f \in I_o(\Omega^c)$ est donc inclus dans $X^U(\Omega)$.

Montrons que Y contient tout $x \in X$ tel que $sp_U\, x$ soit compact et inclus dans Ω . Alors d'après (i), Y sera bien partout dense dans $X^U(\Omega)$. D'après 3-1-5, pour un tel élément x on peut choisir un voisinage compact V de $sp_U\, x$, un voisinage compact W de V tel que $W \subset \Omega$ et $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ soit identique à 1 sur V et nulle hors de W . D'après 3-3(vi) on a alors $x = U(f)x$ d'où la conclusion.

(vi) Pour tout $i \in I$ on a $X^U(\Omega_i) \subset X^U(\bigcup_i \Omega_i)$ d'où l'inclusion $[\sum_i X^U(\Omega_i)]^- \subset X^U(\bigcup_i \Omega_i)$. Pour obtenir l'inclusion opposée il suffit de montrer que tout $x \in X$ tel que $sp_U\, x \subset \bigcup_i \Omega_i$ est adhérent à $\sum_i X^U(\Omega_i)$.

Considérons un tel élément x et posons $\Omega_o = (sp_U\, x)^c$ puis $J = I_o\,(\Omega_o^c) + \sum_i I_o(\Omega_i^c)$. Les éléments de cet idéal J de $L^1(G)$ sont de la forme $f = g + \sum_{k=1}^{n} g_k$ avec $\hat{g}$ à support compact inclus dans Ω_o et $g_k \in I_o(\Omega_{i_k}^c)$ tel que supp $\hat{g}_k$ soit compact inclus dans Ω_{i_k} . D'après 3-3(v) on a $sp_U\, U(g)x = \emptyset$, soit $U(g)x = o$, et $sp_U\, U(g_k)x \subset \Omega_{i_k}$. On en déduit que

$$U(f)x = \sum_{k=1}^{n} U(g_k)x \in \sum_i X^U(\Omega_i) \quad \text{pour tout } f \in J \ .$$

Comme $\Omega_o \cup (\bigcup_i \Omega_i) = \hat{G}$, en utilisant 3-1-5 on voit que $Z(J) = \emptyset$ et d'après 3-1-3, J est partout dense dans $L^1(G)$. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une unité approchée de $L^1(G)$ formée d'éléments de J (voir 3-1-6). Alors $x = \lim U(f_\alpha)x$ est adhérent à $\sum_i X^U(\Omega_i)$.

3-6. *Définition* - Il résulte de 3-5(vi) que la réunion de la famille des ouverts Ω de G tels que $X^U(\Omega) = \{0\}$ est un plus grand élément de cette famille. Son complémentaire est appelé le support spectral de U et noté sp U .

D'après 3-5(iii), pour tout ouvert Ω de $\hat{G}$ on a

$$X^U(\Omega^c) = \{\, x \in X \ ; \ U(f)x = o \ , \ \forall f \in I_o(\Omega^c) \,\} \ .$$

Utilisant 3-5 (v) on obtient

$$X^U(\Omega) = o \Longleftrightarrow U(f)x = o \ , \ \forall x \in X \ , \ \forall f \in I_o(\Omega^c) \Longleftrightarrow X^U(\Omega^c) = X \ .$$

Dans ces conditions, sp U apparait aussi comme la plus petite partie fermée E de $\hat{G}$ telle que $X^U(E) = X$.

3.7. *Cas d'une représentation unitaire*

<u>*Proposition*</u> - *Soit* U *une représentation unitaire fortement continue de* G *sur un espace hilbertien* H *et soit* P_U *la mesure de Stone associée à* U . *Alors*

(i) U *est une représentation équicontinue intégrable de* G *sur* H ;

(ii) *Pour toute partie borélienne* B *de* $\hat{G}$, *on a* $H^U(B) = P_U(B)H$;

(iii) sp U *est égal au support de la mesure de Stone* P_U .

(i) résulte de la remarque 2-6 b).

(ii) Rappelons que pour tout $g \in G$, on a

$$U_g = \int_{\hat{G}} < g, \gamma > dP_U(\gamma)$$

d'où pour tout $\mu \in M^1(G)$,

$$U(\mu) = \int_G d\mu(g) \int_{\hat{G}} < g, \gamma > dP_U(\gamma)$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(\gamma) \ dP_U(\gamma) ,$$

d'où , si B est une partie borélienne de $\hat{G}$,

(1) $$U(\mu) \ P_U(B) = P_U(B) \ U(\mu) = \int_B \hat{\mu}(\gamma) \ dP_U(\gamma) .$$

Soit E une partie fermée de $\hat{G}$. Pour tout $f \in I_o(E)$, on déduit de (1) que $U(f) \ P_U(E) = o$, et d'après la proposition 3-5 (iii) cela entraîne que $P_U(E)H$ est inclus dans $H^U(E)$.

Soit Ω un ouvert de $\hat{G}$. D'après (1), pour tout $f \in L^1(G)$ telle que supp $\hat{f}$ soit compact contenu dans Ω , on a $U(f)H \subset P_U(\Omega)H$, et il résulte de 3-5 (v) que $H^U(\Omega)$ est inclus dans $P_U(\Omega)H$.

Alors, si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille de voisinages ouverts dè E telle que $\bigcap_i \overline{V}_i = E$, on a

$$H^U(E) = \bigcap_i H^U(V_i) \qquad \text{d'après 3-5 (iii)}$$

$$\subset \bigcap_i P_U(V_i)H = P_U(E)H \quad ,$$

la dernière égalité provenant de la régularité de la mesure P_U .

Soit B une partie borélienne de $\hat{G}$ et notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes de $\hat{G}$ contenues dans B . On a

$$H^U(B) = \Big[\bigcup_{K \in \mathcal{K}} H^U(K)\Big]^- \qquad \text{d'après 3-5 (ii)}$$

$$= \Big[\bigcup_{K \in \mathcal{K}} P_U(K)H\Big]^-$$

$$= P_U(B)H \qquad \text{d'après la régularité de } P_U \text{ .}$$

(iii) Pour toute partie ouverte Ω de $\hat{G}$, on a $H^U(\Omega) = 0$ si et seulement si $P_U(\Omega) = 0$ d'après (ii) , d'où (iii) .

3.8. Proposition - *Caractérisation de* sp U . *Soient* $\mathcal{V}$ *une base de voisinages de zéro dans* $\hat{G}$ *et* T *un sous-ensemble de* X *total dans* X . *Pour un élément* γ *de* $\hat{G}$, *les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\gamma \in \mathrm{sp}\, U$;

(ii) $X^U(\gamma + V) \neq \{0\}$ *pour tout* $V \in \mathcal{V}$;

(iii) $\gamma \in Z(\mathrm{Ker}\, U)$ *où* U *est considéré comme un morphisme de* $L^1(G)$ *dans* $\mathcal{L}(X_0)$;

(iv) $\gamma \in \Big[\bigcup_{x \in T} \mathrm{sp}_U\, x\Big]^-$;

(i) $\Longrightarrow$ (iv) Soit γ un élément du complémentaire de $E = \Big[\bigcup_{x \in T} \mathrm{sp}_U\, x\Big]^-$ et soit Ω un voisinage ouvert relativement

compact de γ tel que $\overline{\Omega} \subset E^c$. Alors pour tout $f \in I_0(\Omega^c)$, la proposition 3-3 (V) donne $U(f)x = 0$ pour tout $x \in T$, d'où par linéarité et continuité, $U(f)x = 0$ pour tout $x \in X$.
Cela montre que $X^U(\Omega) = \{0\}$ (prop. 3-5 (v)) et par suite que $\gamma \in (\mathrm{sp}\ U)^c$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Comme $U(\mu) \in \mathcal{L}(X)$ pour tout $\mu \in M^1(G)$, on a

$$\mathrm{Ker}\ U = \bigcap_{x \in T} J_x^U \qquad \text{d'où} \quad [\bigcup \mathrm{sp}_U\ x]^- \subset Z(\mathrm{Ker}\ U).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Soit γ dans le complémentaire de la partie de $\hat{G}$ caractérisée par la propriété (ii), c'est-à-dire tel qu'il existe $V \in \mathcal{V}$ vérifiant $X^U(\gamma + V) = \{0\}$. Soit W un voisinage compact de γ inclus dans $\gamma + V$. D'après 3-1-5, il existe $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ prenne la valeur un en γ et la valeur zéro hors de W. Pour tout $x \in X$ on a alors

$$\mathrm{sp}_U\ U(f)x \subset \mathrm{supp}\ \hat{f} \subset W \qquad \text{d'où } U(f)x \in X^U(\gamma + V) = \{0\}.$$

Cela prouve que $U(f) \in \mathrm{Ker}\ U$ avec $\hat{f}(\gamma) = 1$ donc que $\gamma \in [Z(\mathrm{Ker}\ U)]^c$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si $\gamma \notin \mathrm{Sp}\ U$, il existe un ouvert Ω contenant γ et tel que $X^U(\Omega) = \{0\}$. Prenant $V \in \mathcal{V}$ tel que $\gamma + V \subset \Omega$ on obtient $X^U(\gamma + V) = \{0\}$.

3.9. *Remarque* - Quand U est ponctuellement intégrable, on a $U(\mu) \in \mathcal{L}(X)$ pour tout $\mu \in M^1(G)$. Aussi avons nous supposé T totale dans X pour prouver que (iv) $\Longrightarrow$ (iii). Evidemment, si $U(\mu) \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X_0)$ pour tout $\mu \in M^1(G)$ (c'est-à-dire si U est intégrable), alors on peut supposer seulement que T est totale dans X_0 et on aura encore

$$\mathrm{sp}\ U = [\bigcup_{x \in T} \mathrm{sp}_U\ x]^-$$

3.10. *Proposition* - (Cas d'un groupe compact). *Supposons* G *compact*

(*i*) *Tout* $\gamma \in \hat{G}$ *est un élément idempotent de* $L^1(G)$. *Son image* $U(\gamma)$ *est un projecteur continu de* X *sur le sous-espace* $X^U_{-\gamma}$ *de* X. *Pour* $\gamma_1 \neq \gamma_2$ *les projecteurs* $U(\gamma_1)$ *et* $U(\gamma_2)$ *sont orthogonaux.*

(*ii*) *Pour tout partie* P *de* $\hat{G}$ *on a* $X^U(P) = \left[\sum_{\gamma \in P} X^U_\gamma\right]^-$ *En particulier* $\sum_{\gamma \in \hat{G}} X^U_\gamma$ *est partout dense dans* X_o.

(*iii*) sp U *est l'ensemble des* $\gamma \in \hat{G}$ *tels que* $X^U_\gamma \neq \{o\}$

(i) On sait bien que γ est une fonction continue sur G, donc un élément de $L^1(G)$ et que $\gamma * \gamma = \gamma$. On a donc $U(\gamma) = U(\gamma * \gamma) = U(\gamma)\, U(\gamma)$ et $U(\gamma)$ est un projecteur de $\mathcal{L}(X)$. Pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$ on a

$$U_g\, U(\gamma)x = U\,(\delta_g * \gamma)x = \langle g, -\gamma \rangle\, U(\gamma)x.$$

Si $U(\gamma)x = x$ on a donc $U_g x = \langle g, -\gamma \rangle x$ pour tout $g \in G$, soit $x \in X^U_{-\gamma}$.

Réciproquement, si $U_g x = \langle g, -\gamma \rangle x$ pour tout $g \in G$, on obtient

$$U(\gamma)x = \int_G \langle g, \gamma \rangle U_g x \; dg = \int_G x \; dg = x .$$

Donc $X^U_{-\gamma}$ est bien l'image de $U(\gamma)$.

Pour $\gamma_1 \neq \gamma_2$ on a $\gamma_1 * \gamma_2 = 0 = \gamma_2 * \gamma_1$ d'où $U(\gamma_1)\, U(\gamma_2) = 0 = U(\gamma_2)\, U(\gamma_1)$.

(ii) Comme $\hat{G}$ est discret, ses points sont ouverts et 3.5 (vi) s'applique.

(iii) Comme la partie $\{\gamma\}$ est un système fondamental de voisinage de γ, l'assertion résulte de 3-8(ii).

3.11. En prenant pour T l'injection canonique d'un sous-espace (Y, Y_o) de (X, X_o) stable par U, la proposition suivante s'applique aux sous-représentations.

Proposition - *Soient* (Y, Y_o) *un autre e.l.c.s. bitopologique,* V *une autre représentation continue ponctuellement intégrable de*

G *sur* (Y,Y_0) *et* $T \in \mathcal{L}(Y_0, X_0)$ *qui entrelace* V *et* U.

(*i*) *Pour toute partie* P de $\hat{G}$ *on a* $T[Y^V(P)] \subset X^U(P) \cap T(Y)$. *Si* P *est fermée et si* T *est injective on a l'égalité des sous-espaces précédents.*

(*ii*) *Si* T *est injective on a* $\mathrm{sp}\, V \subset \mathrm{sp}\, U$.

(i) D'après 3-3-(iv), pour tout $x \in Y$ on a $\mathrm{sp}_U\, Tx \subset \mathrm{sp}_V\, x$. Si $\mathrm{sp}_V\, x \subset P$ on a donc $Tx \in X^U(P)$. Comme T est continue de Y_0 dans X_0 on en déduit que $T[Y^V(P)] \subset X^U(P)$. Si T est injective $\mathrm{sp}_U\, Tx = \mathrm{sp}_V x$ pour tout $x \in Y$. Si P est fermée, la proposition 3-5-(iii) montre que

$T\,[Y^V(P)] = X^U(P) \cap T(Y)$.

(ii) résulte de la relation $\mathrm{Ker}\, U \subset \mathrm{Ker}\, V$ dans $L^1(G)$.

3.12. *Remarques* -

a) Considérons le cas de la sous-représentation V de U associée à un sous-espace spectral $Y = X^U(P)$ de U où P désigne une partie fermée de $\hat{G}$. Alors on aura $\mathrm{sp}\, V \subset P$ car $Y^V(P) = X^U(P) \cap Y = Y$.

b) Dans la situation semblable à 3-11, où T est anti-linéaire et injective, on aura $T[Y^V(P)] = X^U(-P) \cap T(Y)$ et $\mathrm{sp}\, V \subset -\, \mathrm{sp}\, U$.

3-13. *Proposition* - (représentation transposée). *Supposons* U *intégrable et soit* V *la représentation continue de* G *sur l'e.l.c.s. bitopologique* (Y, Y_0) *dual de* (X, X_0) *obtenue par transposition.*

(*i*) *Pour toute partie fermée* E *de* $\hat{G}$ *on a*

$$Y^V(E) = X^U(E^c)^{\perp} \quad et \quad X^U(E = Y^V(E^c)^{\perp}$$

(*ii*) *On a* $\mathrm{sp}\, U = \mathrm{sp}\, V$.

(i) D'après 2-15-b, V est intégrable et pour tout $f \in L^1(G)$ on a $V(f) = {}^tU(f)$ où $U(f) \in \mathcal{L}(X_0)$. En utilisant les assertions (iii) et (v) de la proposition 3-5, il vient

$$\begin{aligned} y \in Y^V(E) &\Leftrightarrow V(f)y = 0 \ , \ \forall f \in I_0(E). \\ &\Leftrightarrow \ < x \ , \ V(f)y > \ = 0 \ , \ \forall f \in I_0(E) \ , \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow \ < U(f)x, \ y > \ = 0 \ , \forall f \in I_0(E) \ , \forall x \in X \end{aligned}$$

Comme $U(f)x$ décrit une partie totale de $X^U(E^c)$, cela prouve que $Y^V(E) = X^U(E^c)^{\perp}$. On démontre de même l'autre assertion.

(ii) résulte de l'égalité évidente $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} V$ dans $L^1(G)$.

3.14. *Proposition* - (Composition avec un homomorphisme de groupes) *Soient* H *un autre groupe localement compact et* j *un homomorphisme continu de* H *dans* G. *On pose* $V = U\circ j$ *et on note* $\hat{j}$ *l'homomorphisme de* $\hat{G}$ *dans* $\hat{H}$ *transposé de* j.

(i) Pour tout $x \in X$ *on a* $K_x^V = j^{-1}[K_x^U]$ *et* $\operatorname{sp}_V x = [\hat{j}(\operatorname{sp}_U x)]^-$.

(ii) Pour toute partie P *de* $\hat{H}$ *on a* $X^V(P) \subset X^U(\hat{j}^{-1}(P))$ *avec égalité si* P *est fermée.*

(iii) On a $\operatorname{sp} V = [\hat{j}(\operatorname{sp} U)]^-$

Notons d'abord que pour tout $\mu \in M^1(H)$, tout $\alpha \in \hat{G}$ on a

$$(1) \qquad [j(\mu)]^\wedge(\alpha) = \hat{\mu}(\hat{j}(\alpha)) .$$

En effet,

$$\hat{\mu}(\hat{j}(\alpha)) = \int_H \langle t, \hat{j}(\alpha)\rangle d\mu(t) = \int_H \langle j(t), \alpha \rangle d\mu(t)$$

$$= \int_G \langle t, \alpha \rangle dj(\mu)(t) = [j(\mu)]^\wedge(\alpha)$$

(i) D'après 2-15-c si x est un élément de X et μ un élément de $M^1(H)$, on a

$\mu \in K_x^V \Leftrightarrow V(\mu)x = 0 \Leftrightarrow U(j(\mu))x = 0 \Leftrightarrow j(\mu) \in K_x^U$. Cela prouve que $K_x^V = j^{-1}(K_x^U)$.

Soit $\beta \in \hat{G}$ et posons $\alpha = \hat{j}(\beta)$. D'après la relation (1),

$$\alpha \in \operatorname{sp}_V x \Leftrightarrow \hat{\mu}(\alpha) = 0 \ , \ \forall \mu \in K_x^V = j^{-1}(K_x^U) .$$

$$\Leftrightarrow [j(\mu)]^\wedge(\beta) = 0 \ , \forall \mu \in j^{-1}(K_x^U)$$

$$\Leftrightarrow \nu(\beta) = 0 \ , \ \forall \nu \in K_x^U \cap j[M^1(H)] .$$

Si $\beta \in \operatorname{sp}_U x = Z(K_x^U)$ on aura donc $\alpha = \hat{j}(\beta) \in \operatorname{sp}_V x$ ce qui prouve que $[\hat{j}(\operatorname{sp}_U x)]^- \subset \operatorname{sp}_V x$.

Réciproquement, supposons que $\gamma \notin [\hat{j}(\mathrm{sp}_U\, x)]^-$. Soient V_1 et V_2 des voisinages disjoints de γ et $[\hat{j}(\mathrm{sp}_U\, x)]^-$ respectivement et posons $W = \hat{j}^{-1}(V_2)$; c'est un voisinage de $\mathrm{sp}_U\, x$. D'après 3.1.5, il existe $f \in L^1(H)$ telle que $\hat{f}$ prenne la valeur 1 au point γ et la valeur zéro hors de V_1 donc sur V_2 . Soit $\mu = j(f) \in M^1(G)$ la mesure image sur G de $f \in M^1(H)$. D'après la relation (1) et du fait que $\hat{j}(W) \subset V_2$, pour tout $\alpha \in W$ on a

$$\hat{\mu}(\alpha) = j(f)\hat{\ }(\alpha) = \hat{f}(\hat{j}(\alpha)) = 0$$

D'après 3-3(vi) on a $U(\mu)x = 0$, soit $V(f)x = 0$ (voir 2-15-c). On a donc $f \in K_x^V$ et $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, d'où $\gamma \notin \mathrm{sp}_V\, x$ et l'assertion (i).

(ii) Pour toute partie P de $\hat{H}$, la condition $\mathrm{sp}_V\, x \subset P$ entraine la condition $\mathrm{sp}_U\, x \subset \hat{j}^{-1}(P)$ et lui est équivalente si P est fermée. On a donc $X^U(P) \subset X^U(\hat{j}^{-1}(P))$ pour toute partie P de $\hat{H}$ avec égalité si P est fermée.

(iii) Appliquons (ii) en prenant pour P_1 la partie fermée $\mathrm{sp}\, V$ de $\hat{H}$. Il vient $\mathrm{sp}\, U \subset \hat{j}^{-1}(P_1)$, d'où $[\hat{j}(\mathrm{sp}\, U)]^- \subset P_1 = \mathrm{sp}\, V$.
Prenant pour P_2 la partie $[\hat{j}(\mathrm{sp}\, U)]^-$ de $\hat{H}$ on obtient de même $\mathrm{sp}\, U \subset \hat{j}^{-1}(P_2)$ soit $X^U(\hat{j}^{-1}(P_2)) = X$ ou encore $X^V(P_2) = X$. Cela entraine $\mathrm{sp}\, V \subset P_2 = [\hat{j}(\mathrm{sp}\, U)]^-$.

3.15. *Corollaire* - (cas presque périodique). *Soit* B *le compactifié de Bohr du groupe* G . *On suppose qu'il existe une représentation continue* $\overline{U}$ *de* B *sur* (X, X_0) *telle que* $U = \overline{U}|G$. *Alors*

(*i*) *Pour tout* $x \in X$, *l'adhérence de* $\mathrm{sp}_{\overline{U}}\, x$ *dans* $\hat{G}$ *est* $\mathrm{sp}_U\, x$.

(*ii*) *Pour toute partie* P *de* $\hat{G}$ *on a* $X^U(P) = X^{\overline{U}}(P)$.

(*iii*) $\mathrm{sp}\, U$ *est l'adhérence dans* $\hat{G}$ *de* $\mathrm{sp}\, \overline{U}$.

Rappelons que le groupe $\hat{B}$ dual de B s'obtient en munissant $\hat{G}$ de la topologie discrète, l'application canonique de G dans B étant alors la transposée de l'application identique $\hat{j}$ de $\hat{B}$ dans $\hat{G}$. On voit donc que la proposition 3-14 nous donne les assertions (i) et (ii) ainsi que l'inclusion $X^U(P) \subset X^{\overline{U}}(P)$ pour toute partie P de $\hat{G}$.

Il reste à établir l'inclusion opposée. D'après 3-8(ii) on a $X^{\overline{U}}(P) = [\sum_{\gamma\in P} X^{\overline{U}}_{\gamma}]^{-}$. Or pour tout $\gamma\in\hat{G}$ on a

$$x\in X^{\overline{U}}_{\gamma} \Leftrightarrow U_g x = \langle g, \gamma\rangle x \ , \qquad \forall\ g\in B$$
$$\Leftrightarrow U_g x = \langle g, \gamma\rangle x \ , \qquad \forall\ g\in G$$
$$\Leftrightarrow x\in X^{U}_{\gamma} \ .$$

Cela montre que $X^{\overline{U}}_{\gamma} = X^{U}_{\gamma} \subset X^{U}(P)$ pour tout $\gamma\in P$, d'où l'assertion (ii).

3.16. *Proposition* - *Supposons* U *intégrable et soit* $\gamma\in\hat{G}$. *Notons* V *la représentation continue* $g\longmapsto \langle g, \gamma\rangle U_g$ *de* G *sur* (X,X_o). *Alors* V *est intégrable. Pour tout* $x\in X$ *on a* $sp_V x = sp_U x + \gamma$ *et pour toute partie* P *de* G *on a* $X^V(P) = X^U(P-\gamma)$. *Enfin* $sp\ V = (sp\ U) + \gamma$.

Pour tout $\mu\in M^1(G)$ notons $\gamma.\mu$ la mesure $\langle g, \gamma\rangle d\mu(g)$ de densité γ par rapport à μ . On a alors

$$V(\mu) = \int_G \langle g, \gamma\rangle U_g \, d\mu(g) = U(\gamma.\mu) \text{ et } (\gamma.\mu)^{\wedge} = (\hat{\mu})_{+\gamma} \ . \ ,$$

d'où $K^U_x = \gamma.K^V_x$ pour tout $x\in X$ et $sp_V x = (sp_U x) + \gamma$. Les autres assertions s'en déduisent aussitôt.

3.17. *Proposition* - (Représentations involutives). *Supposons que* (X,X_o) *et* U *soient involutifs et notons* $x\longmapsto x^*$ *l'involution de* X .

(*i*) *Pour tout* $x\in X$ *on a* $sp_U\, x^* = -sp_U\, x$.

(*ii*) *Pour toute partie* P *de* $\hat{G}$ *on a* $X^U(P)^* = X^U(-P)$

(*iii*) Sp U *est symétrique par rapport à l'élément neutre zéro de* $\hat{G}$.

(i) était déjà dit en 3-3(iv) et (ii) et (iii) en résultent immédiatement.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Le spectre d'un élément x de $L^\infty(G)$ (où G désigne un groupe localement compact commutatif) est un objet classique de l'analyse harmonique, issu notamment des travaux de A. Beurling, T. Carleman et R. Godement (voir par exemple [35] §7.8) . Il coïncide avec l'ensemble $sp_U x$ lorsque U est la représentation régulière de G dans $L^\infty(G)$.

La définition de $sp_U x$ (pour un élément x d'un espace X sur lequel G opère par U) et ses propriétés, ainsi que celles du sous-espace spectral de X associé à une partie fermée E de $\hat{G}$, sont données dans [20] , reprises et complétées dans ([1], §2) et ([15], §2.1) . La notion de sous-espace spectral associé à une partie ouverte E de $\hat{G}$ remplace ici les parties $R(E)$ de W. Arveson.

Outre ces contributions essentielles de F. Forelli, W. Arveson et A. Connes, certains des résultats de ce paragraphe se trouvent dans [12] (3-10 à 3-15) et [31] .

§4 ESPACES DE BANACH EN DUALITÉ MÉTRIQUE

4.1. *Introduction* - Soit (X, X_o) un e.l.c.s. bitopologique et soit (Z,Z_o) l'objet dual. Dans les applications que nous avons en vue X sera un espace vectoriel normé (et même le plus souvent un espace de Banach). Alors Z est un sous-espace vectoriel de X', muni de la topologie induite par $\beta(X',X)$. On peut donc le normer à l'aide de la norme duale de celle de X qui vérifie pour tout $z \in Z$

$$(1) \qquad \|z\| = \sup \{ \, | < x,z > | \; ; x \in X \, , \|x\| \leqslant 1 \} \, .$$

Puisque (X,X_o) est bitopologique, il existe dans X un voisinage de zéro qui est convexe, équilibré et fermé pour la topologie de X_o. Quitte à remplacer la norme de X par la jauge de V qui est une norme équivalente , on peut supposer que la boule unité fermée de X est fermée pour la topologie de X_o. D'après la remarque 1.3-a), pour tout $x \in X$ on aura alors

$$(2) \qquad \|x\| = \sup \{ \, | < x,z > | \; ; z \in Z \, , \|z\| \leqslant 1 \} \, .$$

Notons enfin que X' étant normé, donc infratonnelé l'objet dual de (Z,Z_o) est $(\tilde{X}, \tilde{X}_o)$ où $\tilde{X} = X$ et où $\tilde{X}_o$ s'obtient en remplaçant la topologie de X_o par $\sigma(X, Z)$ qui est moins fine que celle de X_o (voir rem. 1-4-d). La situation sera parfaitement réflexive si la topologie de X_o est $\sigma(X,Z)$. Alors (X,X_o) et (Z,Z_o) sont entièrement déterminés par la donnée de X et Z, ce qui conduit à la notion suivante.

4.2. *Définitions* - Soient X et Z deux espaces vectoriels normés réels ou complexes. On dira qu'une application bilinéaire $(x,z) \longmapsto < x,z >$ de $X \times Z$ dans le corps de base met X et Z en <u>dualité métrique</u> si pour tout $(x,z) \in X \times Z$, les conditions (1) et (2) ci-dessus sont vérifiées. Notons que X et Z sont alors en dualité séparante.

Nous noterons X_o (resp Z_o) l'espace localement convexe obtenu en remplaçant la topologie de X (resp. de Z) par $\sigma(X,Z)$ (resp. par $\sigma(Z,X)$). Compte tenu de la relation (2) ci-dessus, $x \longmapsto \|x\|$ est une fonction qui est s.c.i. pour $\sigma(X,Z)$. La boule unité fermée de X est donc fermée pour $\sigma(X,Z)$. De même, d'après (1) la boule unité fermée de Z est fermée pour $\sigma(Z,X)$.

On voit donc que (X,X_0) et (Z,Z_0) sont des e.l.c.s. bitopologiques duaux l'un de l'autre. Nous parlerons des structures d'e.l.c.s. bitopologiques canoniquement associées au couple (X,Z) d'espaces vectoriels normés en dualité métrique. Si (Y,T) est un autre couple d'espaces vectoriels normés en dualité métrique, conformément au §1, nous noterons $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$ l'espace des applications linéaires, continues de X muni de la topologie $\sigma(X,Z)$ dans Y muni de $\sigma(Y,T)$.

4.3. *Remarques* -

a) Soient X un espace vectoriel et Z un sous-espace vectoriel du dual algébrique X^* de X . Par bipolarité, on voit que X et Z sont en dualité séparante si et seulement si Z est partout dense dans X^* pour $\sigma(X^*, X)$.

Si X est normé et si Z est un sous-espace vectoriel de X' , par bipolarité, la relation (2) est vérifiée si et seulement si la boule unité de Z est partout dense dans celle de X' pour $\sigma(X',X)$.

b) Soient (X,X_0) et (Y,Y_0) deux e.l.c.s. bitopologiques. Si X est tonnelé, alors on a $\mathcal{L}(X_0,Y_0) \subset \mathcal{L}(X,Y)$. En effet considérons un élément u de $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$ et un voisinage V de zéro dans Y qui soit convexe, équilibré et fermé pour la topologie de Y_0 . Alors $u^{-1}(V)$ est un tonneau de X_0 , donc aussi de X. C'est un voisinage de zéro et u est continue.

Donc si (X,Z) et (Y,T) sont deux couples d'espaces vectoriels normés en dualité métrique et si X est complet alors $\mathcal{L}(X_0,Y_0) \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Si Y est complet, cela résulte aussi du théorème du graphe fermé.

c) Gardons ces données (X,Z) et (Y,T) et supposons X et Z complets. Alors $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X,Y)$. D'après b) c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$ qui converge en norme vers $B \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors, dans $\mathcal{L}(Y',X')$ on a $\| {}^tB - {}^tA_n \| = \| A_n - B \| \to 0$. Donc pour tout $\phi \in T$ on a $\| {}^tB\phi - {}^tA_n\phi \| \longrightarrow 0$, avec ${}^tA_n\phi \in Z$. Si Z est fermé dans X' , on a ${}^tB\phi \in Z$ pour tout $\phi \in T$ et B est bien continu pour les topologies $\sigma(X,Z)$ et $\sigma(Y,T)$.

d) Soit (X,Z) un couple d'espaces vectoriels normés en dualité métrique. Alors Z est un sous-espace de X' et son complété $\hat{Z}$ s'identifie à l'adhérence de Z dans X'. La boule unité de Z étant faiblement dense dans celle de X' (rem. 4-3-a) il en est de même pour celle de $\hat{Z}$. Comme X et son complété $\hat{X}$ ont tous deux X' pour dual, sur la boule unité de X' les deux topologies $\sigma(X', X)$ et $\sigma(X', \hat{X})$ coincident. Tout cela montre que $\hat{X}$ et $\hat{Z}$ sont encore en dualité métrique quand on les identifie aux fermetures de X et Z dans Z' et X' respectivement.

4.4. <u>*Mise en dualité métrique de*</u> $\mathscr{L}(X_o,Y_o)$.

Soient (X,Z) et (Y,T) deux couples d'espaces de Banach en dualité métrique. D'après la remarque 4-3-c, $L = \mathscr{L}(X_o,Y_o)$ est un sous-espace de Banach de $\mathscr{L}(X,Y)$. Soit (L, L_o) la strucure d'e.l.c.s. bitopologique canonique introduite au §1.4.c sur $\mathscr{L}(X_o, Y_o) = \mathscr{L}(X_o, Y_o) \cap \mathscr{L}(X, Y)$. Alors la topologie de L est la topologie donnée par la norme des applications linéaires continues et celle de L_o est la topologie faible $\sigma(L,M)$ de la dualité avec l'espace vectoriel $M = X \otimes T$ des formes linéaires du type $\sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i, t_i}$ où pour $x \in X$ et $t \in T$ on pose pour tout $u \in L$,

$$\omega_{x,t}(u) = < u(x), t > .$$

Ces formes linéaires sont continues et on a $\|\omega_{x,t}\| \leq \|x\| \, \|t\|$.

Vérifions que ce sous espace vectoriel de L' est en dualité métrique avec L. Soit $u \in L$. Alors $\|u\|$ est adhérent à l'ensemble des $u(x)$ où x décrit la boule unité de X et $\|u(x)\|$ est lui-même adhérent à l'ensemble des $| < u(x), t > |$ où t décrit la boule unité de T (du fait que Y et T sont en dualité métrique). On voit donc que u est adhérent aux valeurs $| \omega_{x,t}(u)|$ avec $\omega_{x,t}$ dans la boule unité de M.

Notons que d'après la remarque 4-3-d, L est également de manière naturelle en dualité métrique avec le complété $\hat{M}$ de M. La topologie $\sigma(L, \hat{M})$ n'est plus la topologie de L_o précédente. Mais elle coïncide avec elle sur les parties bornées de L.

Définition - Nous évoquerons la situation précédente en parlant de la dualité métrique canonique de $L = \mathcal{L}(X_0, Y_0)$ avec l'espace vectoriel normé $M = X \otimes T$ ou éventuellement avec son complété $\hat{M}$.

Problème - Identifions Y à un sous-espace de T' (dont la boule unité est faiblement dense dans celle de T'), et $\mathcal{L}(X_0, Y_0) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ à un sous-espace de $\mathcal{L}(X, T')$. La boule unité de $\mathcal{L}(X_0, Y_0)$ est-elle partout dense dans celle de $\mathcal{L}(X, T')$ pour la topologie de la convergence simple sur X , avec T' muni de $\sigma(T', T)$?

Par bipolarité, ceci équivaut à la question suivante : M est-il le produit tensoriel algébrique $X \otimes T$ muni de la norme π de Grothendieck (Rappelons que $X \hat{\otimes}_\pi T$ a justement pour dual $\mathcal{L}(X, T')$ muni de la norme des applications linéaires d'après ([22], scholie, p. 32).

4.5. *Proposition* - *Gardons les données et notations précédentes. Si* Y_0 *et* Z_0 *vérifient la condition* (K), *alors* L_0 *la vérifie également* .

Soit K une partie compacte de L_0 . Pour tout $x \in X_0$ l'ensemble des u(x) où u décrit K est compacte dans $Y_0 \subset T'$ pour $\sigma(T', T)$, et donc bornée en norme dans T' . Comme l'espace de Banach X est tonnelé, on voit que K qui est simplement borné est équicontinue ([21], prop. 5, p. 142), donc bornée dans L .

Dans le dual de l'ensemble C(K) des fonctions continues sur K, notons P l'ensemble des probabilités. Pour la topologie faible de dual, c'est une partie convexe compacte. Dans le complété faible $\hat{L}_0$ de L_0 , l'enveloppe convexe fermée pour $\sigma(\hat{L}_0, L'_0)$ de K est compacte et image de P par l'application $\mu \mapsto r_\mu$ qui associe à tout $\mu \in P$ sa résultante $r_\mu = \int_K u \, d\mu(u)$, c'est-à-dire la forme linéaire $m \mapsto \int_K \langle u, m \rangle \, d\mu(u)$ sur $L'_0 = M$. Il suffit donc de vérifier que pour tout $\mu \in P$, l'élément r_μ de $\hat{L}_0 = (L'_0)^* = M^*$ est dans L_0 .

D'après ([21], prop 2, p. 134) le complété faible $\hat{L}_0$ est un sous-espace (en fait tout l'espace, mais nous ne l'utiliserons pas) de l'espace de toutes les applications linéaires de X dans $\hat{Y}_0 = (Y'_0)^* = T_0^*$. Il suffit donc de vérifier que l'application linéaire r_μ prend ses valeurs dans Y_0 et qu'elle est continue de X_0 dans Y_0 .

Fixons $x \in X_o$ et $t \in T_o$. L'application $u \longmapsto u(x)$ est continue de K dans Y_o . Comme Y_o vérifie la condition (K), elle est scalairement intégrable dans Y_o (lemme 1-5).

Soit $y_u = \int_K u(x)d\mu(u) \in Y_o$ cette intégrale. De même $u \longmapsto {}^t u(t)$ est scalairement intégrable dans T_o . Soit $t_\mu = \int_K {}^t u(t)d\mu(u) \in T_o$ cette intégrale. Alors on a

$$< r_\mu\, x,\ t > = < r_\mu\ ,\ \omega_{x,t} > = \int_K < u,\ \omega_{x,t} > d\mu(u)$$

(1) $$= \int_K < u(x),\ t > \ d\mu(u) \ = \ < y_u,\ t \ >$$

(2) $$= \int_K < x,\ \ {}^t u(t) > d\mu(u) = \ < x\ ,\ t_\mu >$$

D'après (1) on a $r_\mu x = y_u \in Y_o$, donc r_μ prend bien ses valeurs dans Y_o. D'après (2), r_μ est continue de X_o dans Y_o , d'où la proposition.

4.6. <u>*Corollaire*</u> - *Supposons que* Y_o *et* Z_o *vérifient la condition* (K). *Si on met* $L = \mathcal{L}(X_o,Y_o)$ *en dualité avec le complété* $\hat{M}$ *de* M , *alors* L *muni de la topologie* $\sigma(L,\hat{M})$ *vérifie la condition* (K).

Soit K une partie de L compacte pour $\sigma(L,\hat{M})$. Elle est encore compacte pour $\sigma(L,M)$ qui est moins fine que $\sigma(L,\hat{M})$ et séparée. Nous venons de voir que l'enveloppe convexe Co (K) de K , est relativement compacte pour $\sigma(L,M)$, et par suite équicontinue. Son adhérence est donc la même pour $\sigma(L,M)$ et $\sigma(L,\hat{M})$ et sur cette adhérence les deux topologies coïncident. Donc Co (K) est relativement compacte pour $\sigma(L,\hat{M})$.

<u>**NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE**</u> .

Ce paragraphe provient entièrement de [1]

§5 REPRÉSENTATIONS CONTINUES SUR DES ESPACES DE BANACH EN DUALITÉ MÉTRIQUE

Dans tout ce paragraphe on considère un groupe localement compact G , un couple (X, Z) d'espaces de Banach en dualité métrique, les e.l.c.s. bitopologiques (X,X_0) et (Z,Z_0) canoniquement associés à cette dualité et une représentation continue U de G sur (X,X_0). L'équicontinuité de la famille U(G) signifie ici que $k = \sup \|U_g\|$ est fini. La proposition qui suit va montrer que l'on peut supposer $\|U_g\| = 1$ pour tout $g \in G$ (et dans toute la suite nous ferons cette hypothèse). Si U est ponctuellement intégrable, on aura $\|U(\mu)\| \leqslant \|\mu\|$ pour tout $\mu \in M^1(G)$ (voir rem. 2-9-2).

5.1. Proposition - *Il existe sur X une norme q équivalente à la norme donnée sur X telle que Z muni de la norme duale de q soit encore en dualité métrique avec X et telle que* U_g *soit pour tout* $g \in G$ *une isométrie relativement à cette norme.*

Pour tout $x \in X$ soit q(x) la borne supérieure des $\|U_g\, x\|$ où $g \in G$. En notant e l'élément neutre de G on a

$$\|x\| = \|U_e\, x\| \leqslant q(x) \leqslant k\, \|x\| .$$

On en déduit que q est une norme sur X équivalente à la norme initiale. D'autre part, q est s.c.i. sur X pour la topologie $\sigma(X,Z)$ de X_0 , puisque $x \longmapsto \|U_g\, x\|$ l'est pour tout $g \in G$. Donc en munissant Z de la norme duale de q on obtient bien un couple d'espaces de Banach en dualité métrique (la norme de Z étant elle aussi changée en une norme équivalente). On vérifie facilement que pour tout $g \in G$ on a $q(U_g\, x) \leqslant q(x)$ pour tout $x \in X$. Comme G est un groupe , U_g est isométrique.

5.2. Remarque - Pour tout $g \in G$ le spectre de U_g est inclus dans l'ensemble T_1 des nombres complexes de module 1. Quand G est commutatif , nous retrouverons cela en 6-3.

5.3. Proposition - *Soit V la représentation continue du groupe* $G°$ *opposé de G sur* (Z,Z_0) *obtenue par transposition. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) U *est intégrable* .

(*ii*) V *est intégrable* .

(*iii*) U *est ponctuellement intégrable et* $U(\mu) \in \mathcal{L}(X_0)$ *pour tout* $\mu \in M^1(G)$.

(*iv*) U et V *sont ponctuellement intégrables* .

(i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) d'après 2-15-b et 2-7

(i)$\Rightarrow$(iv) puisqu'on sait déjà que i $\Rightarrow$(ii)

(iv)$\Rightarrow$(iii) Si (iv) est vérifié, pour tout $\mu \in M^1(G)$, tout $x \in X$, tout $z \in Z$ on a

$$< U(\mu)x \ , z > = \int_G < U_g x \ , z > d\mu(g) = \int_G <x, V_g z> d\mu(g) =$$

$$< x \ , V(\mu)z > .$$

Cela prouve que $U(\mu)$ est continue de X_o dans X_o pour tout $\mu \in M^1(G)$.

5.4. *Corollaire* - *Supposons que* Z *soit l'espace de Banach* X' *dual de* X *Alors* U est équicontinue , *intégrable, et la représentation transposée* V *est intégrable.*

En effet, X est complet et d'après le théorème de Krein-Šmulian ([19], p. 434) , X_o vérifie la condition (K). Donc U est ponctuellement intégrable (prop. 2-5). De même Z = X' est complet et Z_o vérifie la condition (K) (rem. 2-6-a), donc V est ponctuellement intégrable. Alors la proposition 5-2 montre que U et V sont intégrables, tandis que le corollaire 2-11 prouve que U est une représentation équicontinue.

5.5. *Construction dans certains cas de représentations sur* $\mathcal{L}(X_o, Y_o)$.

Soient (X,Z) et (Y,T) deux couples d'espaces de Banach en dualité métrique, G et H deux groupes localement compacts , U et V des représentations continues de G et H respectivement sur les e.l.c.s. bitopologiques (X,X_o) et (Y,Y_o) associés aux dualités précédentes.

Notons ${}^tU$ et ${}^tV$ les représentations continues des groupes opposés G° et H° sur (Z,Z_o) et (T,T_o) obtenues par transposition. Notons L l'espace de Banach $\mathcal{L}(X_o,Y_o)$ et M l'espace vectoriel normé $X \otimes T$ en dualité métrique avec L . Soit (L,L_o) la structure d'e.l.c.s. bitopologique canoniquement associée à cette dualité. Pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$ on a $U_g \in \mathcal{L}(X_o)$ et $V_h \in \mathcal{L}(Y_o)$, donc pour tout $A \in L$, l'application liné aire $V_h \, A \, U_{-g}$ de X dans Y est un élément $\Psi_{g,h}(A)$ de L et on a

$$(1) \qquad \Psi_{g,h}(A) \leqslant (\sup \|U_g\|) \, (\sup \|V_h\|) \ \|A\| = \|A\| \ .$$

On voit donc que $\Psi_{g,h} : A \longmapsto \Psi_{g,h}(A)$ est un élément de $\mathcal{L}(L)$.

<u>*Proposition*</u> - *Avec ces données et notations, supposons que* U *ou que* ^tV *soit une représentation équicontinue de* G *sur* X ou T .

(i) $\Psi : (g,h) \longmapsto \Psi_{g,h}$ *est une représentation continue de* GxH sur (L,L_o)

(ii) *Si* Y_o et Z_o *vérifient la condition* (K) *alors* Ψ *est ponctuellement intégrable.*

(i) D'abord pour tout $(g,h) \in G \times H$, l'application $\Psi_{g,h}$ est élément de $\mathcal{L}(L_o)$. En effet, pour tout $x \in X$ et tout $t \in T$ on peut écrire en posant $x' = U_{-g}\, x \in X$ et $t' = {}^tV_h\, t \in T$,

$$< \Psi_{g,h}(A) , \omega_{x,t} > =< V_h A U_{-g} x , t > = < A , \omega_{x',t'} >$$

Il est clair que Ψ est un homomorphisme de GxH dans le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(L_o)$. La relation (1) ci-dessus montre que $\Psi_{g,h}$ est une isométrie pour tout $(g,h) \in G \times H$, donc $\Psi(G \times H)$ est équicontinue sur L . Vérifions que pour tout $A \in L$, l'application $(g, h) \longmapsto \Psi_{g,h}(A)$ est continue de GxH dans L_o . Il suffit de faire la vérification à l'élément neutre. Pour tout $x \in X$ et tout $t \in T$ on a

$$|<\Psi_{g,h}(A) - A , \omega_{x,t}>| = |< U_{-g}x-x , {}^tAt >+ <AU_{-g}x , {}^tV_ht-t>|$$

$$\leqslant | < U_{-g}x-x , {}^tAt > | +\|A\|\|x\| \|{}^tV_ht - t\| .$$

Si U est continue et si ^tV est équicontinue , cela prouve que Ψ est une représentation continue sur (L,L_o). Si U est équicontinue, et si ^tV est continue , un calcul voisin conduit à la même conclusion.

(ii) Si Y_o et Z_o vérifient la condition (K) , alors L_o la vérifie aussi(d'après 4-5) Comme L est un espace de Banach , l'assertion résulte de la proposition 2-5-(i).

5.6. <u>*Corollaire*</u> - *Gardons les données précédentes et supposons que* G = H . *Alors* $g \longmapsto \Psi_{g,g}$ *est une représentation continue de* G sur L *(en dualité métrique* avec M). *Si* Y_o et Z_o *vérifient la condition* (K) , *cette représentation est ponctuellement intégrable.*

Il suffit d'appliquer 2-15-c en prenant pour j l'application diagonale $g \longmapsto (g,g)$ de G dans GxG .

5.7. <u>*Corollaire*</u> - *Soit* (X,Z) *un couple d'espaces de Banach en dualité métrique,* U *et* V *deux représentations continues d'un groupe localement compact* G *sur* (X,X_0). *On suppose que* U *ou* ${}^tV$ est équicontinue et que tout *élément de* $U(G)$ *commute avec tout élément de* $V(G)$. *Alors* $g \mapsto U_g\ V_g$ *est une représentation continue de* G *sur* (X,X_0).

Comme $U(G)$ et $V(G)$ commutent, c'est un homomorphisme de groupes. Comme $U_g\ V_g = \Psi_{-g,g}(I)$, on voit que c'est une représentation continue de G.

5.8. <u>*Définitions*</u> - Reprenons les données et notations de la proposition 5.5. La représentation Ψ de $G \times H$ sur (L,L_0) sera dite canoniquement associée à U et V et sera parfois notée $\Psi^{U,V}$.

La représentation $g \mapsto \Psi_{g,g}$ qui s'obtient , dansle cas où $G = H$, en composant Ψ avec l'application diagonale $g \mapsto (g,g)$ sera appelée la représentation de G sur (L,L_0) associée à U et V , et sera notée Φ ou $\Phi^{U,V}$.

Nous allons considérer maintenant le cas où L est mis en dualité métrique avec le complété $\hat{M}$ de l'espace vectoriel normé $M = X \otimes T$. Bien que la topologie $\sigma(L,M)$ de L_0 soit remplacée par $\sigma(L,\hat{M})$, nous appellerons encore Ψ et Φ ou $\Psi^{U,V}$ et $\Phi^{U,V}$ les applications précédentes.

Les propositions qui suivent montrent que dans cette dualité de L avec $\hat{M}$, Ψ et Φ ont essentiellement les mêmes propriétés que précédemment. Aussi, à partir du §6, nous ne donnerons que les énoncés se rapportant à l'un des cas, par exemple la dualité de L avec M, étant bien entendu que ces énoncés sont encore valables pour la dualité de L avec $\hat{M}$.

5.9. *Représentation* Ψ *lorsque* $L = \mathcal{L}(X_0,Y_0)$ *est mis en dualité métrique avec le complété* $\hat{M}$ *de* $M = X \otimes T$

Nous reprenons toutes les données G, H, (X,Z) , (Y,T), $L = \mathcal{L}(X_0,Y_0)$, $M = X \otimes T$, U , V , Ψ du paragraphe 5.5. Mais maintenant nous notons L_0 l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant L de $\sigma(L,\hat{M})$.

<u>*Proposition*</u> - *Supposons que* U *ou que* ${}^tV$ *soit une représentation équicontinue de* G sur X *ou* T

(i) Ψ *est une représentation continue de* $G \times H$ *sur* (L,L_o) .

(ii) *Si* Y_o *et* Z_o *vérifient la condition* (K) , *alors* Ψ *est ponctuellement intégrable.*

(i) Comme en 5-5, on a $\|\Psi_{g,h}\| \leq 1$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$. Pour tout $A \in L$ et tout $\omega \in M$, on a vu en 5-5 que $(g,h) \longmapsto \langle \Psi_{g,h}(A), \omega \rangle$ est continue sur $G \times H$. Comme M est normiquement dense dans $\hat{M}$, on voit que $(g,h) \longmapsto \Psi_{g,h}(A)$ est continue de $G \times H$ dans L_o .

Vérifions que $\Psi_{g,h} \in \mathcal{L}(L_o)$ et pour cela que sa transposée ${}^t\Psi_{g,h}$ sur le dual L' de L applique $\hat{M}$ dans $\hat{M}$. D'après 5-5 , $\Psi_{g,h}$ est continu pour $\sigma(L, M)$, donc ${}^t\Psi_{g,h}$ applique M dans M , d'où le résultat puisque ${}^t\Psi_{g,h}$ est normiquement continu.

(ii) Le corollaire 4-6 prouve que L_o vérifie la condition (K) . Donc Ψ est ponctuellement intégrable sur (L,L_o) (prop. 2-5-(i)).

Notons que pour tout $\mu \in M^1(G)$ l'élément $\Psi(\mu)$ est le même que L soit mis en dualité métrique avec M ou avec $\hat{M}$.

5.10. *Représentation* Φ *Lorsque* L *est en dualité avec le complété* $\hat{M}$ de M .

Conservons les données précédentes, mais supposons que $H = G$, l'espace L étant toujours en dualité métrique avec $\hat{M}$.

<u>*Proposition*</u> - *Supposons que* U *soit une représentation équicontinue de* G *sur* X .

(i) Φ *est une représentation continue de* G *sur* (L,L_o) .

(ii) *Si* Y_o *et* Z_o *vérifient la condition* (K) , *alors* Φ *est ponctuellement intégrable* .

(iii) *Si* Y_o *et* Z_o *vérifient la condition* (K) *et si* ${}^tV$ *est ponctuellement intégrable, alors* Φ *est intégrable* .

(Si au lieu de supposer U équicontinue, on suppose que c'est ${}^tV$ qui l'est, l'énoncé reste valable à condition de supposer dans l'assertion (iii) que U est ponctuellement intégrable au lieu de ${}^tV$).

(i) et (ii) sont des corollaires immédiats de la proposition 5.9 (d'après 2-15-c).

(iii) Montrons que pour tout $\mu \in M^1(G)$ on a $\Phi(\mu) \in \mathscr{L}(L_o)$. Pour cela, il suffit d'établir que pour tout $x \in X$ et tout $t \in T$, la forme linéaire

$$\rho \; : \; A \longmapsto \; < \Phi(\mu)\,(A) \; , \; \omega_{x,t} >$$

est un élément de $\hat{M}$. En effet, on en déduira alors que la transposée ${}^t\Phi(\mu)$ applique la partie $M = X \otimes T$ de L' dans $\hat{M}$. La continuité normique de ${}^t\Phi(\mu)$ donnera alors $[{}^t\Phi(\mu)]\,(\hat{M}) \subset \hat{M}$, soit $\Phi(\mu) \in \mathscr{L}(L_o)$.

Supposons d'abord que μ ait un support compact C dans G . Alors $K = \{U_{-g}\, x \;\; ; \;\; g \in C\}$ est une partie normiquement compacte de X . Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x_1,\dots,x_n$ des éléments en nombre fini de K tels que les boules fermées $B_1,\dots,B_n$ de rayon ε et centrées en ces points recouvrent K . Dans G , considérons les parties fermées

$$E_j = \{g \in G \;\; ; \;\; U_{-g}\, x \in B_j\} \quad , \text{ où } \quad j = 1,\dots,n \; ,$$

Posons alors

$$F_1 = E_1 \quad , \quad F_2 = E_2 \setminus E_1 \quad , \; \dots \; , \quad F_n = E_n \setminus E_1 \cup \dots \cup E_{n-1} \quad .$$

Pour $j = 1, \dots , n$, posons $t_j = \displaystyle\int_{F_j} {}^tV_g\, t \;\; d\mu(g)$. Comme ${}^tV$ est supposée ponctuellement intégrable, ce sont des éléments de T.

On a alors

$$< \Phi(\mu)\,(A) \; , \; \omega_{x,t} > \; - \; < A \; , \; \sum_{j=1}^{n} \omega_{x_j}\, , \, t_j >$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{F_j} < V_g \; A \; U_{-g}\, x \; , \; t > d\mu(g) \; - \; < Ax_j \; , \; t_j > \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{F_j} \left[< V_g \; A \; U_{-g}\, x \; , \; t > \; - \; < Ax_j \; , \; {}^tV_g t > \right] d\mu(g)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{F_j} < U_{-g}x - x_j \; , \; {}^tA \; {}^tV_g \; t > d\mu(g)$$

On en déduit

$$\left\| \rho - \sum_{j=1}^{n} \omega_{x_j, t_j} \right\| \leq \varepsilon \|t\| \|\mu\| .$$

Donc ρ est limite normique d'éléments de M, donc $\rho \in \hat{M}$.

Si μ n'est pas à support compact, il existe une suite croissante (C_n) de parties compactes de G telles que $|\mu| (C_n) \longrightarrow o$.
Si on pose $\mu_n = \mu | C_n$, on a $\| \mu - \mu_n \| \longrightarrow o$ dans $M^1(G)$, d'où $\| \Phi(\mu) - \Phi(\mu_n) \| \longrightarrow o$ (voir 2.8 (iii)) , avec $\Phi(\mu_n) \in \mathcal{L}(L_o)$ pour tout n .
Comme $\mathcal{L}(L_o)$ est normiquement fermé dans $\mathcal{L}(L)$ (voir 4.3.b) on a bien $\Phi(\mu) \in \mathcal{L}(L_o)$.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE .

La proposition 5-1 est prise dans ([2], §2, lemme 7) et le reste du paragraphe dans l'article de W. Arveson.

§6 CAS OÙ LE GROUPE EST COMMUTATIF

Nous gardons les données G , (X,Z), U du paragraphe précédent, et nous supposons en outre que G est commutatif. Nous allons compléter les résultats du paragraphe 3, et notamment la proposition 3-8 caractérisant sp U .

6.1. *Lemme* - *Supposons* U *ponctuellement intégrable. Pour tout élément* γ *de* $\hat{G}$ *, toute partie compacte* C *de* G *et tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe un voisinage compact* V *de* 0 *dans* $\hat{G}$ *tel que l'on ait*

$$\| U_g x - \langle g, \gamma \rangle x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

pour tout $x \in X^U(\gamma + V)$ *et tout* $g \in C$.

Quitte à remplacer U par la représentation $g \longmapsto \overline{\langle g, \gamma \rangle} U_g$, on peut supposer que γ est l'élément neutre 0 de $\hat{G}$(voir 3-16). Soient V_1 un voisinage compact de 0 dans $\hat{G}$ et $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ soit identique à un sur V_1. Pour tout $g \in C$ notons F_g l'élément $f_g - f = \delta_g * f - f$ de $L^1(G)$. On a $\hat{F}_g(0) = 0$, et d'après ([35], th. 2-6-3), il existe $k_g \in L^1(G)$ et un voisinage V_g de o dans $\hat{G}$ tels que $\hat{k}_g(\gamma) = 1$ sur V_g et $\| F_g * k_g \| < \varepsilon$.

Comme $g \longmapsto F_g$ est continue de G dans $L^1(G)$, il existe un voisinage ouvert A_g de g tel que $\|F_s * k_g\| < \varepsilon$ pour tout $s \in A_g$. Comme C est compact, on peut le recouvrir avec une famille finie $\Omega_{g_1}, \dots, \Omega_{g_n}$ de tels ouverts. Posons $V_2 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}$. C'est un voisinage de o dans $\hat{G}$ tel que pour tout $g \in C$ il existe un élément h_g de $L^1(G)$, à savoir l'un des éléments $k_{g_1}, \dots, k_{g_n}$, possédant les propriétés suivantes :

$$\| F_g * h_g \| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \hat{h}_g(\gamma) = 1 \text{ pour tout } \gamma \in V_2 .$$

Soit V un autre voisinage compact de zéro dans $\hat{G}$, inclus dans l'intérieur de $V_1 \cap V_2$. Pour tout $x \in X^U(V)$ et tout $g \in C$ on a alors (d'après 3-3-(vi))

$$\|U_g x - x\| = \|U(f)\ [U_g x - x]\| = \|U(F_g)x\| = \|U(h_g * F_g)x\| \leqslant \varepsilon \|x\| .$$

6.2. <u>*Proposition*</u> - *Supposons* U *ponctuellement intégrable. Pour un élément* γ de $\hat{G}$ *les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) $\gamma \in \operatorname{sp} U$.

(*ii*) *Il existe une suite généralisée* (x_i) *d'éléments de* X *de norme un, telle que* $\|U_g x_i - \langle g, \gamma \rangle x_i\| \longrightarrow 0$ *uniformément sur tout compact de* G .

(*iii*) *On a* $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \|U(\mu)\|$ *pour tout* $\mu \in M^1(G)$.

(*iv*) *on a* $|\hat{f}(\gamma)| \leqslant \|U(f)\|$ *pour tout* $f \in L^1(G)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit I l'ensemble des couples (ε , C) où ε est un nombre > 0 et où C est une partie compacte de G . Pour tout élément $i = (\varepsilon , C)$ de I , le lemme 6-1 montre qu'il existe un voisinage V de O dans $\hat{G}$ tel que $\|U_g x - \langle g , \gamma \rangle x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ pour tout $g \in C$ et tout $x \in X^U(\gamma + V)$. Si $\gamma \in \operatorname{sp} U$, on a $X^U(\gamma + V) \neq \{0\}$ d'après 3-8, et on peut choisir un élément x_i de $X^U(\gamma + V)$ de norme un .

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Soient $\mu \in M^1(G)$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons une partie compacte C de G telle que $|\mu|(C^c) \leqslant \varepsilon/4$ puis $i \in I$ tel que $\|U_g x_i - \langle g , \gamma \rangle x_i\| < \varepsilon/2$ pour tout $g \in C$. On a alors

$$\|U(\mu)x_i - \hat{\mu}(\gamma)\, x_i\| = \left\| \int_G [U_g x_i - \langle g, \gamma \rangle x_i]\, d\mu(g) \right\|$$

$$\leqslant 2 \int_{C^c} d|\mu|(g) + \int_C \|U_g x_i - \langle g, \gamma \rangle x_i\|\, d|\mu|(g) \leqslant \varepsilon ,$$

d'où

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = \|\hat{\mu}(\gamma) x_i\| \leqslant \|U(\mu)x_i\| + \varepsilon \leqslant \|U(\mu)\| + \varepsilon .$$

Comme ε est arbitraire, cela établit (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) est évident .

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si (iv) est vérifié , pour tout $f \in L^1(G)$ telle que $U(f) = 0$, on a $\hat{f}(\gamma) = 0$. Donc γ est un élément de $Z(\operatorname{Ker} U) = \operatorname{sp} U$.

6.3. <u>*Corollaire*</u> - *Pour tout* $g \in G$ *le spectre de* U_g *dans l'algèbre de Banach* $\mathcal{L}(X_0)$ est l'adhérence de $\{ \langle g, \gamma \rangle ; \gamma \in \operatorname{sp} U \}$

Notons S_g l'adhérence de l'ensemble des $< g, \gamma >$ où $\gamma \in \mathrm{Sp}\, U$, et T_1 le groupe des nombres complexes de module 1, dont le dual est le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Si γ est un élément de sp U , la propriété (ii) de la proposition 6-2 montre que l'élément $U_g - < g , \gamma >$ de $B = \mathcal{L}(X_o)$ ne peut pas être inversible. Cela prouve que $S_g \subset \mathrm{sp}_B\, U_g$.

Réciproquement supposons qu'il existe au moins un élément λ dans le complémentaire de S_g dans T_1. Soit V un voisinage ouvert de S_g ne contenant pas λ et ϕ une fonction de classe C^∞ sur T_1 , égale à 1 sur un voisinage de S_g , de support inclus dans V. Alors $f(Z) = \phi(Z)\ (Z - \lambda)^{-1}$ est de classe C^∞ sur T_1 , à support inclus dans V et égale à $(Z - \lambda)^{-1}$ au voisinage de S_g . Comme f est de classe C^1 , son développement en série de Fourier est absolument convergent et on a $f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n$ avec $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Autrement dit f est la cotransformée de Fourier de la mesure $\mu_o = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_n$ de $M^1(\mathbb{Z})$. Notons j l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans G transposé de l'homomorphisme $\gamma \longmapsto < \gamma , g >$ de $\hat{G}$ dans T_1 . D'après 3-14 relation (1), la mesure image $\mu = j(\mu_o)$ de μ_o est telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{\mu}_o (< \gamma, g >) = f(< \gamma , g >)$$

On voit donc que la mesure $\nu = (\delta_g - \lambda\delta_o) * \mu$ a une cotransformée de Fourier identique à 1 sur un voisinage de sp U et on a

$I = U(\nu) = (U_g - \lambda I\ )\ U(\mu)$.

Ainsi $U_g - \lambda I$ est inversible. Cela prouve que $\mathrm{sp}_B\, U_g = S_g$.

6.4. <u>*Corollaire*</u>. *Soit* $A \in \mathcal{L}(X_o)$ *une isométrie de* X *sur* X *et supposons que* U *soit la représentation* $n \longmapsto A^n$ *de* $\mathbb{Z}$ *sur* X . *Alors* sp U *est le spectre de* A . *En particulier, pour que* $A = \lambda I$ *où* λ *est un nombre complexe de module* 1, *Il faut et il suffit que le spectre de* A *soit* $\{\lambda\}$.

Le groupe dual de $\mathbb{Z}$ est le tore T_1 qui est compact. L'application $\gamma \longmapsto < \gamma , 1 >$ de $\mathrm{sp}\, U \subset T_1$ dans sp A est l'application identique , et son image est partout dense dans sp A d'après le corollaire 6-3. On a donc sp U = sp A.

Si sp A = $\{\lambda\}$, on a donc sp U = $\{\lambda\}$ et le sous-espace propre de X associé à ce caractère, soit X_λ^U , sera tout X . Autrement dit $A^n x = \lambda^n x$ pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc $A = \lambda I$. Réciproquement si $A = \lambda I$ il est clair que sp A = $\{\lambda\}$.

6.5. <u>*Corollaire*</u> - *Soit* A *la sous-algèbre de Banach* U $[L^1(G)]^-$ *de* $\mathcal{L}(X)$ *et soit* $\hat{A}$ *son spectre. L'application* h : $\chi \longmapsto \chi \circ U$ *est un homéomorphisme de* $\hat{A}$ *sur* sp U *lorsqu'on identifie* $\hat{G}$ *au spectre de* $L^1(G)$.

Rappelons que tout élément γ de $\hat{G}$ s'identifie au caractère $f \longmapsto \hat{f}(\gamma)$ de $L^1(G)$ (autrement dit $f \longmapsto \hat{f}$ est la transformation de Gelfand de $L^1(G)$).

Comme U est continue de $L^1(G)$ dans $\mathcal{L}(X)$, pour tout $\chi \in \hat{A}$ on obtient un élément γ de $L^1(G)\hat{} = \hat{G}$ en posant $\gamma = \chi \circ U$. Cela signifie que $\hat{f}(\gamma) = \chi\,[\,U(f)\,]$ pour tout $f \in L^1(G)$. La condition (iv) de la proposition 6-2 montre que γ est un élément de sp U . L'application h est évidemment continue de $\hat{A}$ dans $\hat{G}$. Elle est injective car $h(\chi_1) = h(\chi_2)$ signifie que χ_1 et χ_2 coincident sur $U(L^1(G))$ qui est partout dense dans A. Elle est surjective. En effet si $\gamma \in$ sp U , la condition (iv) de la proposition 6-2 montre que l'application $U(f) \longmapsto \hat{f}(\gamma)$ de $U(L^1(G))$ dans $\mathbb{C}$ est bien définie et se prolonge par continuité en un caractère de A.

6.6. <u>*Proposition*</u> - *Supposons* U *ponctuellement intégrable. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) sp U *est une partie compacte de* $\hat{G}$.

(ii) U *est continue de* G *dans* $\mathcal{L}(X)$ *muni de la topologie normique.*

(*iii*) $U[\,M^1(G)\,] = U[\,L^1(G)\,]$.

(*iv*) *l'unité* I de $\mathcal{L}(X)$ *est un élément de* $U(L^1(G))$.

(*v*) *l'unité* I *de* $\mathcal{L}(X)$ *est limite en norme d'éléments de* $U(L^1(G))$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (v) d'après la proposition 2-13.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Si sp U est une partie compacte de $\hat{G}$, d'après 3-1-5 il existe $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ soit identique à un sur un voisinage de sp U. Compte tenu de 3-7-(iv) et 3-3-(vi) on a U(f) = I. Alors pour tout $\mu \in M^1(G)$ on a $\mu * f \in L^1(G)$ et $U(\mu * f) = U(\mu)\,U(f) = U(\mu)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidents

(v) $\Rightarrow$ (i) Si l'algèbre de Banach A du corollaire 6-5 est unifère, son spectre est compact .

6.7. *Proposition* - *Si* $G = \mathbb{R}$, *les conditions ci-dessus sont encore équivalentes à l'existence de* $D \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $U_t = \exp(it\, D)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Dans ces conditions,* D *est unique, hermitien au sens de* ((2), §5) . *C'est un élément de* $U[L^1(G)]^-$ *de spectre égal à* $sp\ U$ *dans cette algèbre de Banach et* D *est limite normique de* $\frac{1}{t}(U_t - I)$ *quand* t *tend vers zéro.*

Donnons une démonstration de ce résultat classique. Supposons d'abord sp U compact. Soit g une fonction de classe C^∞ égale à la fonction cordonnée $\gamma \mapsto \gamma$ au voisinage de $sp\ U$. Sa transformée de Fourier f est élément de $L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} = g$. Posons $D = U(f) \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $U[\exp(it\, f)] = \exp(it\, D)$ et les cotransformées de Fourier de $\exp(it\, f) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\delta_t \in M^1(\mathbb{R})$ sont identiques au voisinage de sp U. On a donc $U_t = U(\delta_t) = \exp(it\, D)$ Comme $z \longmapsto \exp(iz\, D)$ est une fonction entière de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{L}(X)$ pour tout $D \in \mathcal{L}(X)$, on voit que D est sa dérivée à l'origine, d'où

$$D = \lim_{t \to o} \frac{1}{t}\left(U_t - I\right)$$. On en déduit l'unicité de D .

Comme $\|U_t\| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, D est hermitien ([2], §5, lemme 2, p. 46) D'après le corollaire 6-5, le spectre de $D = U(f)$ dans $U[L^1(G)]^-$ est l'ensemble de valeurs que prend $\hat{f} = g$ sur sp U . C'est donc sp U .

Réciproquement s'il existe $D \in \mathcal{L}(X)$ tel que $U_t = \exp(it\, D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, la condition (ii) de la proposition 6-6 est vérifiée et sp U est compact.

6.8. *Remarques* -

a) Si la représentation continue U de G sur (X, X_o) est continue de G dans $L = \mathcal{L}(X_o) \subset \mathcal{L}(X)$ muni de sa topologie normique alors U est intégrable (d'après 1.6 par exemple) et les propositions équivalentes de 6.6 sont vérifiées.

b) Considérons ici une représentation équicontinue U de G dans un espace de Banach X qui soit normiquement continue de G dans $\mathcal{L}(X)$. Par transposition, on obtient une application normiquement continue $U_1 : g \mapsto {}^tU_g$ de G dans $\mathcal{L}(X')$. Il est clair que U_1 est une représentation continue de G sur X' aussi bien pour la dualité métrique avec X que pour la dualité métrique avec X" , et dans les deux cas intégrable. La proposition 3.5 (iii) montre que pour toute partie fermée E de $\hat{G}$, le sous-espace spectral

$(X')^{U_1}(E) = \{x \in X' \; ; \; sp_{U_1} x \subset E\}$ est le même dans l'une ou l'autre des dualités. Pour une partie quelconque P de $\hat{G}$, cela est faux car on prend la fermeture de $\{x \in X' \; ; \; sp_{U_1} x \subset P\}$ d'une part pour $\sigma(X',X)$ et d'autre part pour $\sigma(X',X'')$.

Transposant une nouvelle fois, on obtient une représentation continue U_2 de G sur X'' possédant des propriétés semblables et $U_2(\mu) = {}^t[{}^tU(\mu)]$ pour tout $\mu \in M^1(G)$. Il résulte alors de 3-13 (i) et des remarques ci-dessus concernant $(X')^{U_1}(E)$ que pour tout ouvert Ω de $\hat{G}$, le sous-espace spectral $(X'')^{U_2}(\Omega)$ de U_2 est le biorthogonal, et donc l'adhérence faible de $X^U(\Omega)$, lorsqu'on identifie canoniquement X à un sous-espace de Banach de X''.

6.9. *Sous-espaces spectraux d'une représentation du type* $\Phi^{U,V}$ *sur* $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$.

Soit (Y,T) un autre couple d'espaces de Banach en dualité métrique. Mettons $L = \mathcal{L}(X_0,Y_0)$ en dualité métrique avec $M = X \otimes T$ et supposons que Y_0 et Z_0 vérifient la condition (K).

Soit V une représentation continue de G sur (Y,Y_0) et supposons que U ou ${}^tV$ soit équicontinue. Avec ces hypothèses, V est ponctuellement intégrable (prop. 2-5 (i)), ainsi que la représentation continue Φ de G sur (L,L_0) canoniquement associée à U et V (prop. 5-6). Nous supposons de plus que U est ponctuellement intégrable (ce qui sera réalisé si X_0 vérifie la condition (K)).

<u>*Proposition*</u> - *Outre ces données, considérons une partie fermée* E *de* $\hat{G}$ *et une famille* $(W_i)_{i \in I}$ *de voisinages fermés de zéro dans* $\hat{G}$ *telle que* $E = \bigcap_{i \in I} (E + W_i)^-$.

Pour un élément A *de* L, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(*i*) $A \in L^{\Phi}(E)$.

(*ii*) $AX^U(F) \subset Y^V(\overline{E + F})$ *pour toute partie fermée* F de $\hat{G}$.

(*iii*) $AX^U(P) \subset Y^V(E + P)$ *pour toute partie* P de $\hat{G}$.

(*iv*) $AX^U(\Omega) \subset Y^V(E + \Omega)$ *pour toute partie ouverte* Ω de $\hat{G}$.

(*v*) $AX^U(K) \subset Y^V(E + K)$ *pour toute partie compacte* K de $\hat{G}$.

(*vi*) $AX^U(\gamma + W_i) \subset Y^V(\gamma + W_i + E)$ *pour tout* $i \in I$ et tout $\gamma \in \hat{G}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit $x_o \in X^U(F)$. D'après 3-5(iii), pour montrer que $Ax_o \in Y^V\,(\overline{E+F})$ il suffit de montrer que pour tout voisinage compact W_1 de zéro dans G on a $Ax_o \in Y^V(E+F+W_1)$.

Soit W un voisinage compact de zéro dans $\hat{G}$ tel que $W + W \subset W_1$. D'après 3-3(V), $x_o \in X^U(F) \subset X^U(F+\overset{\circ}{W})$ est limite dans X_o d'éléments $U(g)x$ avec $x \in X$ et $g \in L^1(G)$ tel que supp. $\hat{g}$ soit compact inclus dans $F + \overset{\circ}{W}$. Comme A est élément de $\mathcal{L}(X_o,Y_o)$, il suffit de montrer que l'on a

$$AU(g)x \in Y^V\;(\overline{E+F} + W).$$

Mais de la même façon, A est limite dans L_o d'éléments $\Phi(f)B$ avec $B \in L$ et $f \in L^1(G)$ tel que supp. $\hat{f}$ soit compact inclus dans $E + W$.

En définitive, il suffit de montrer que $y = [\Phi(f)B]\;U(g)x$ est un élément de $Y^V\;(\overline{E+F} + W_1)$ quels que soient $x \in X$, $B \in L$ et $f,g \in L^1(G)$ tels que supp. $\hat{f}$ et supp. $\hat{g}$ soient compacts inclus respectivement dans $E + W$ et $F + W$. Comme Φ prend ses valeurs dans $\mathcal{L}\;(X_o,Y_o)$ on a

$$y = \int_G f(s)\;\Phi_s(B)\;\Big[\int_G g(t)\;U_t\;x\;dt\;\Big]ds = \int_G f(s)\Big[\int_G g(t)\;\Phi_s(B)U_t x\;dt\Big]ds$$

avec $\Phi_s(B)U_t = V_s\;B\;U_{t-s} = V_s\;B\;U_r$ où $r = t-s$.

D'après la proposition 5-5, l'application $(s,r) \longmapsto V_s\;B\;U_r x$ est scalairement intégrable pour toute mesure bornée. Notons g_{-r} l'élément $s \longmapsto g(s+r)$ de $L^1(G)$. Le théorème de Fubini nous donne

$$y = \int_{G\times G} f(s)\;g(s+r)\;V_s\;B\;U_r\;x\;\;dr\;ds = \int_{G\times G} f(s)g_{-r}(s)V_s\;B\;U_r x\;drds$$

Comme $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont continues à support compact, f et g sont dans $L^2(G)$. Il en est de même de g_{-r} donc fg_{-r} est dans $L^1(G)$. Sa cotransformée de Fourier $\hat{f} * \hat{g}_{-r}$ a un support inclus dans

$$\text{supp. } \hat{f} + \text{supp}\big(g_{-r}\big)\hat{} = \text{supp. } \hat{f} + \text{supp. } \hat{g} \subset E + F + W_1 .$$

Il en résulte que pour tout $r \in G$, l'élément $y_r = V(fg_{-r})\;B\;U_r\;x$ est dans $Y^V\;(\overline{E+F} + W_1)$. Comme ce sous-espace de Y_o est fermé on voit que $y = \int_G y_r\;dr$ est bien dans ce sous-espace.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $x \in X$ tel que $sp_U\;x$ soit compact inclus dans P . En prenant $F = sp_U\;x$ la condition (ii) donne $Ax \in Y^V(E + F) \subset Y^V(E + P)$.

On a $A \in \mathscr{Y}(X_o)$ et de tels éléments x de X sont partout denses dans $X^U(P)$ pour la topologie de X_o. Donc (iii) est vérifié

(iii) $\Rightarrow$ (iv) est évident

(iv) $\Rightarrow$ (v) Soit (V_i) une base de voisinages ouverts de zéro dans $\hat{G}$. D'après (iv), pour tout i on a

$AX^U(K) \subset AX^U(K + V_i) \subset Y^V(E + K + V_i)$

D'après 3-5(iii), cela entraine $AX^U(K) \subset Y^V(E + K)$.

(v) $\Rightarrow$ (vi) est évident.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Soit $A \in L = \mathscr{L}(X_o, Y_o)$ tel que pour tout $\gamma \in \hat{G}$ et tout $i \in I$ on ait

$$(1) \quad AX^U(\gamma + W_i) \subset Y^V(\gamma + E + W_i) .$$

Soit $f \in L^1(G)$ tel que supp. $\hat{f} \subset W_i$ et $\hat{f}(o) \neq o$. Notons $\bar{\gamma}f$ l'élément $g \mapsto \overline{<g, \gamma>} f(g)$ de $L^1(G)$. Le support de sa cotransformée de Fourier$(\hat{f})_\gamma$ est inclus dans $\gamma + W_i$ donc $U(\bar{\gamma}f)x$ est un élément de $X^U(\gamma+W_i)$ pour tout $x \in X$, d'où d'après (1),

$$A\,U(\gamma f)x \in Y^V(\gamma + E + W_i) .$$

Pour tout élément h de $I_o(E+W_i)$ on a $\bar{\gamma}h \in I_o(\gamma + E + W_i)$ d'où

$$0 = V(\bar{\gamma}h)\,A\,U(\bar{\gamma}f)x = \int_G \overline{<g, \gamma>}\, h(g) V_g\, A\,U(\bar{\gamma}f)x\, dg$$

$$= \int_G \overline{<g,\gamma>}\, h(g)\, V_g\, A \left[\int_G \overline{<s, \gamma>}\, f(s)\, U_s\, x\, ds\right] dg$$

D'après 5-5 l'application $(g,s) \mapsto V_g\, A\, U_s\, x$ est scalairement intégrable par rapport à la mesure $< g+s, \gamma > f(s)h(g)\, ds\, dg$ qui est un élément de $M^1(G)$. Le théorème de Fubini et le changement de variable $t = g+s$ nous donne

$$(2) \quad 0 = \int_{G\times G} \overline{<t,\gamma>}\, f(s)\, h(t-s)\, V_{t-s}\, A\, U_s x \quad ds\, dt ,$$

ce qui prouve que pour tout $\phi \in T$, l'élément

$$k : t \mapsto \int_G f(s)\, h(t-s) < V_{t-s}\, A\, U_s x\, , \phi > ds$$

de $L^1(G)$ est de transformée de Fourier nulle. On a donc $k = o$ presque partout. Comme $\hat{f}$ et $\hat{h}$ ont des supports compacts, f et h sont dans $L^2(G)$; d'après 5-5 l'application $(s,t) \mapsto < V_t\, A\, U_s x\, , \phi>$ est continue et bornée. On en déduit que k est continue, donc identiquement nulle. En particulier en changeant de variable on obtient

$$0 = k(o) = \int_G f(-g)\, h(g) < V_g\, A\, U_{-g} x\, , \phi > dg .$$

On peut remplacer f par une translatée, sans modifier ses propriétés initiales, on a donc

$$0 = \int_G f(g_0 - g)\ h(g) < \Phi_g\ (A)x,\ - \phi > dg \qquad \text{pour tout } g_0 \in G.$$

Si on pose $1(g) = h(g) < \Phi_g(A)x\ ,\ \phi >$, cela signifie que $f * 1 = 0$.
On en déduit $\hat{f}\ \hat{1} = 0$, puis, vu que $\hat{f}(0) \neq 0$, on obtient $\hat{1}(0) = 0$, soit pour tout $\phi \in T$,

$$0 = \int_G h(g) < \Phi_g(A)x,\ \phi > dg = < \Phi(h)\ Ax\ ,\ \phi > .$$

On a donc $\Phi(h)\ Ax = 0$ pour tout $x \in X$, soit $\Phi(h)A = 0$, et cela pour tout $h \in I_o(E + W_i)$. On a donc $A \in L^{\Phi}(E + W_i)$ pour tout $i \in I$ soit encore $A \in L^{\Phi}(E)$ en utilisant 3-5-(iii).

6.10. <u>*Corollaire*</u> - *Reprenons les données de 6.9. Si* P *et* Q *sont deux parties de* $\hat{G}$, *on a* $L^{\Phi}(P)\ X^U(Q) \subset Y^V(P+Q)$.

Pour tout $A \in L^{\Phi}(P)$ tel que $sp_{\Phi}A = F \subset P$ on a

$$A\ X^U(Q) \subset Y^V(F+Q) \subset Y^V(P+Q)$$

d'après la proposition 6.9. Le corollaire 6.10 en résulte, car tout $A \in L^{\Phi}(P)$ est limite dans L_o d'éléments $B \in L$ tels que $sp_{\Phi}\ B \subset P$ et $Y^V(P+Q)$ est fermé dans Y_o.

6.11. <u>*Corollaire*</u> - *Reprenons les données de 6.9,* $(W_i)_{i \in I}$ *désignant ici une famille de voisinages fermés de* 0 *dans* $\hat{G}$ *telle que* $\{0\} = \bigcap_{i \in I} W_i$.
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $V_g A = A\ U_g$ *pour tout* $g \in G$, *autrement dit* A *entrelace* U *et* V.

(ii) (resp. (iii), (iv) (v)) $A\ X^U(P) \subset Y^V(P)$ *pour toute partie* P *de* $\hat{G}$ *qui est fermée (resp. ouverte, compacte, du type* $\gamma + W_i$*)*

Il suffit de prendre $E = \{0\}$ et d'appliquer les propositions 6-9 et 3-5(iv)

Notons qu'en particulier si $(X,Z) = (Y,T)$ et si $U = V$, ce corollaire caractérise les éléments de $\mathcal{L}(X_o)$ qui commutent aux éléments de $U(G)$ c'est-à-dire les points fixes dans l'algèbre $L = \mathcal{L}(X_o)$ pour les automorphismes de $\Phi(G)$.

6.12. *Corollaire* - *Gardons les données de 6.11 et supposons que* $(X,Z) = (Y,T)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $U = V$;

(ii) *(resp. (iii), (iv), (v))* $X^U(P) \subset Y^V(P)$ *pour toute partie* P *de* $\hat{G}$ *qui est fermée (resp. ouverte, compacte, du type* $\gamma + W_i$ *).*

Il suffit d'appliquer le corollaire 6-11 avec $A = I$.

6.13. *Corollaire* - *Supposons que* $\hat{G}$ *soit ordonné par un semi-groupe fermé* S tel que zéro soit adhérent à l'intérieur S^0 *de* S *dans* $\hat{G}$. *Soit* t *un élément de* $\hat{G}$. *Pour un élément* A *de* $\mathcal{L}(X_0,Y_0)$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in L^{\Phi}(t+S)$;

(ii) $A\, X^U(s+S) \subset Y^V(t+s+S)$ pour tout $s \in \hat{G}$;

(iii) $A\, X^U(s+S^0) \subset Y^V(t+s+S^0)$ pour tout $s \in \hat{G}$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Comme $(t+S) + (s+S^0) = t+s+S^0$, cela résulte de l'équivalence de (i) et (iv) dans la proposition 6.9.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Soit (t_i) une suite généralisée dans S^0 et tendant vers zéro. On a alors $r+S = \bigcap_i (r-t_i + S^0)$ pour tout $r \in \hat{G}$ et (iii) nous donne

$$AX^U(s+S) \subset AX^U(s-t_i+S^0) \subset Y^V(t+s-t_i+S^0)$$

d'où finalement

$$AX^U(s+S) \subset \bigcap_i Y^V(t+s-t_i+S) = Y^V(t+s+S) .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Pour tout $s \in S^0$, posons $W_s = (-s+S) \cap (s-S)$.

Comme W_s contient $(-s+S^0) \cap (s-S^0)$, c'est un voisinage de zéro et en posant $E = t+S$ on a

$$\bigcap_{s \in S^0} (E + W_s) = \bigcap_{s \in S^0} (t-s+S) = E .$$

D'autre part, pour tout $r \in \hat{G}$ on a

$$AX^U(r + W_s) = AX^U\left[(r-s+S) \cap (r+s-S)\right] \subset AX^U(r-s+S) \subset Y^V(t+r-s+S) = Y^V(E+r+W_s).$$

L'équivalence des conditions (vi) et (i) dans la proposition 6-9 nous donne donc l'implication souhaitée .

6.14. *Cas des représentations involutives.*

<u>*Proposition*</u> - *Reprenons les données 6-9 et supposons en outre que* (X,X_0) , (Y,Y_0), U *et* V *soient involutifs. Munissons* (L, L_0) *de l'involution associée aux précédentes. Alors* Φ *est involutive* .

Notons J et J' les involutions respectives de (X,X_0) et (Y,Y_0) et soit $A \longmapsto A^*= J'\ A\ J$ l'involution associée sur (L,L_0) . Alors pour tout $A \in L$ on a

$$\begin{aligned}\Phi_g(A^*) &= V_g \overset{*}{A} U_{-g} = V_g J' AJ U_{-g} = J'V_g A U_{-g} J \\ &= J'\Phi_g(A)J = \Phi_g(A)^* .\end{aligned}$$

6.15. <u>*Corollaire*</u> - *Reprenons toutes les données de 6-14 et soit* A *un élément hermitien de* L . *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(*i*) A *entrelace* U *et* V;

(*ii*) $AX^U(t+S) \subset Y^V(t+S)$ *pour tout* $t \in \hat{G}$;

(*iii*) $AX^U(t+S^0) \subset Y^V(t+S^0)$ *pour tout* $t \in \hat{G}$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Plus généralement si on pose $[-r,r] = (-r+S) \cap (r-S)$ et si on suppose $A \in L^\Phi([-r,r]) \subset L^\Phi(-r,+S)$, alors le corollaire 6-13 nous donne

(1) $$AX^U(t+S) \subset Y^V(-r+t+S) \quad \text{pour tout } t \in \hat{G} .$$

Réciproquement, la condition (1) implique (toujours d'après 6.13) que $A \in L^\Phi(-r+S)$. Comme Φ est involutive (prop. 6.14) on a $A^* \in L^\Phi(r-S)$ (voir 3.17). Si $A = A^*$, la condition (1) implique donc que $A \in L^\Phi([-r,r])$.

En prenant $r = 0$ on voit que (i) équivaut à (ii).

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) se démontre de la même façon .

6.16. *Corollaire* - *Reprenons les données de 6-14 et supposons que* $(X,X_0) = (Y,Y_0)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(*i*) $U = V$.

(*ii*) $X^U(t+S) \subset X^V(t+S)$ *pour tout* $t \in \hat{G}$.

(*iii*) $X^U(t+S^0) \subset X^V(t+S^0)$ *pour tout* $t \in \hat{G}$.

Il suffit d'appliquer le corollaire 6-15 en prenant $A = I$.

6.17. *Spectre d'une représentation du type* $\Psi^{U,V}$ *sur* $\mathscr{L}(X_0,Y_0)$.

Comme dans 6-9 nous considérons un autre couple (Y,T) d'espaces de Banach en dualité métrique, nous mettons $L = \mathscr{L}(X_0,Y_0)$ en dualité métrique avec $M = X \otimes T$, et nous supposons que Y_0 et Z_0 vérifient la condition (K).

Soient H un autre groupe localement compact commutatif et V une représentation continue de H sur (Y,Y_0) . Nous supposons que U ou ${}^tV$ est équicontinue.

Avec ces hypothèses, nous définissons une représentation continue ponctuellement intégrable Ψ de $G \times H$ sur (L,L_0) en posant

$$\Psi_{r,s}(A) = V_s\, A\, U_r \quad \text{pour } A \in L \text{ et } (r,s) \in G \times H .$$

Ce n'est pas exactement la représentation Ψ considérée en 5-5 , mais elle s'en déduit en composant avec l'isomorphisme de groupes $(r,s) \longmapsto (-r,s)$.

En outre, nous supposons que U est ponctuellement intégrable (par exemple que X_0 vérifie la condition (K)).

Rappelons qu'il existe un plongement canonique de $X'_o \otimes Y = Z \otimes Y$ dans $\mathscr{L}(X_o, Y_o) = L$, associant à tout élément décomposé $z \otimes y$ de $Z \otimes Y$ l'application linéaire de rang un

$$x \longmapsto \langle x, z \rangle y \qquad \text{de } X_o \text{ dans } Y_o \ .$$

Proposition - *Avec toutes ces données, la représentation* Ψ *possède les propriétés suivantes:*

(i) *Pour tout* $z \in Z$ *et tout* $y \in Y$ *on a* $sp_\psi(z \otimes y) = (sp_{{}^tU} z) \times (sp_V y)$.

(ii) *Pour toute partie* P *de* $\hat{G}$ *et toute partie* Q *de* $\hat{H}$ *on a*

$$Z^{{}^tU}(P) \otimes Y^V(Q) \subset L^\Psi(P \times Q) \ .$$

(iii) $sp\, \psi = (sp\, U) \times (sp\, V)$.

(i) Soient $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Pour tout $(r,s) \in G \times H$ on a

(1) $$[\psi_{r,s}(z \otimes y)]\ (x) = [\, V_s\ (z \otimes y)\ U_r\,]\ (x) = V_s \ \langle U_r\, x, z \rangle\, y$$
$$= \langle U_r\, x, z \rangle\ V_s\, y = \langle x, {}^tU_r\, z \rangle\ V_s\, y \ .$$

Soit j_1 l'injection canonique $g \longmapsto (g,0)$ de G dans $G \times H$.
et soit $\psi_1 = \psi \circ j_1$. D'après la relation précédente, pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\Psi_1(f)\ (z \otimes y)(x) = \langle x, {}^tU(f) z \rangle\, y$$

On en déduit

$$J_z^{{}^tU} \subset J_{z \otimes y}^{\psi_1} \qquad \text{d'où} \qquad sp_{\psi_1}\ (z \otimes y) \subset sp_{{}^tU}\ z \ .$$

D'après la proposition 3-14, $sp_{\psi_1}\ (z \otimes y) = [\ \hat{j}_1\ (sp_\psi\ z \otimes y)\ ]^-$ On voit donc que $sp_\psi\ (z \otimes y) \subset \hat{j}_1^{-1}\ [\ sp_{{}^tU}\ z\ ]$.

De même, en considérant l'injection canonique $j_2 : h \longmapsto (0,h)$ de H dans $G \times H$ et $\psi_2 = \psi \circ j_2$, on obtient pour tout $g \in L^1(H)$, $\psi_2(g)\ (z \otimes y) = \langle x, z \rangle\ V(g) y$.
d'où l'on déduit de la même façon $sp_\psi\ (z \otimes y) \subset \hat{j}_2^{-1}\ [\ sp_V\ y\ ]$

Comme $\hat{j}_1$ et $\hat{j}_2$ sont les projections canoniques de $\hat{G} \times \hat{H}$ sur $\hat{G}$ et $\hat{H}$ respectivement, on obtient $sp_\psi(z \otimes y) \subset (sp_{{}^tU}\ z) \times (sp_V\ y)$.

Réciproquement, soit $\gamma_o = (\alpha_o, \beta_o) \in \hat{G} \times \hat{H}$ dans le complémentaire de $sp_\Psi \; z \otimes y$. Il existe alors des voisinages ouverts W_1 et W_2 de α_o et β_o respectivement tels que $W_1 \times W_2$ de α_o et β_o respectivement tels que $W_1 \times W_2$ soit disjoint de $sp_\Psi \; z \otimes y$. Choisissons $f \in L^1(G)$ et $g \in L^1(H)$ telles que $\hat{f}$ (resp. $\hat{g}$) prenne la valeur un au point α_o (resp. β_o) et la valeur zéro au voisinage du complémentaire de W_1 (resp. W_2). Posons, $h(r,s) = f(r)\, g(s)$. Alors $\hat{h}(\alpha,\beta) = \hat{f}(\alpha)\, \hat{g}(\beta)$ prend la valeur un au point γ_o et la valeur zéro au voisinage de $sp_\Psi \; (z \otimes y)$, de sorte que $\Psi(h)\,(z \otimes y) = 0$. Mais par ailleurs, la relation (1) ci-dessus nous donne pour tout $x \in X$,

$$\left[\, \Psi\,(h)\;(z \otimes y)\,\right]\;(x) = \;<x, {}^tU(f)\, z>\; V(g)\, y\;,$$

soit $\Psi(h)\;(z \otimes y) = {}^tU(f) z \otimes V(g)\, y$, qui est nul si et seulement si l'un des termes ${}^tU(f) z$ ou $V(g) y$ est nul ce qui impose soit $\alpha_o \notin sp_{{}^tU} \; z$, soit $\beta_o \notin sp_V \; y$.

(ii) résulte immédiatement de (i).

(iii) Comme $sp\, U = sp\, {}^tU = \left[\bigcup_{z \in Z} sp_{{}^tU} \; z\right]^-$ et comme $spV = \left[\bigcup_{y \in Y} sp_V \; y\right]^-$ l'assertion (i) montre que l'on a $(sp\, U) \times (sp\, V) \subset sp\, \Psi$. D'autre part appliquons (ii) en prenant $P = sp^{\,{}^tU}$ et $Q = sp\, V$. On obtient $Z \otimes Y \subset L^\Psi (P \times Q)$. Par bipolarité, on voit facilement que $Z \otimes Y$ est partout dense dans L pour la topologie de L_0. Dons $L = L^\Psi (P \times Q)$ et $sp\, \Psi \subset P \times Q$.

6.18. <u>*Corollaire*</u> - *Gardons les données de* 6.17. *Alors* Ψ *est normiquement continue si et seulement si* U et V *le sont*.

En effet, d'après 6-17 (iii), $sp\, \Psi$ est compact si et seulement si $sp\, U$ et $sp\, V$ le sont, et la conclusion résulte de la proposition 6-6.

6.19. *Corollaire* - *Reprenons les données de* 6.17 *avec* $G = H$, *et soit* Φ *la représentation continue de* G *sur* (L,L_0) *obtenue en composant la la représentation* Ψ *précédente avec l'homomorphisme* $j: g \longmapsto (-g,g)$ de G *dans* $G \times G$.

(*i*) *Pour tout* $z \in Z$ *et tout* $y \in Y$, *on a* $sp_\Phi\, z \otimes y = (sp_V\, y - sp_{{}^tU}\, z)^-$.

(*ii*) *Si* P *et* Q *sont deux parties de* $\hat{G}$, *on a*

$$Z^{{}^tU}(P) \otimes Y^V(Q) \subset L^\Phi\, [\, (Q-P)^-\,] \quad .$$

(*iii*)
$$sp\, \Phi = (sp\, V - sp\, U)^- .$$

(i) résulte de 6.17(*i*), en utilisant la proposition 3-14(i) et compte-tenu du fait que $\hat{j}$ est l'application $(\alpha,\beta) \longmapsto \beta - \alpha$ de $\hat{G} \times \hat{G}$ dans $\hat{G}$.

(ii) D'après la proposition 6-17 (*ii*), on a

$$Z^{{}^tU}(P) \otimes Y^V(Q) \subset L^\Psi\, (P \times Q) \subset L^\Psi\, (\hat{j}^{-1}\, (Q-P)) \subset L^\Psi\, (\hat{j}^{-1}\, [(Q-P)^-])$$

et d'après 3-14(ii),

$$L^\Psi\, (\hat{j}^{-1}\, [(Q-P)^-]\,) = L^\Phi\, (\, (Q-P)^-\,)$$

(iii) résulte des assertions 6-17 (iii) et 3-14 (iii) .

6.20. *Corollaire* - *Pour que la représentation* Φ *du corollaire* 6.18 *soit normiquement continue il faut et il suffit que* U *et* V *le soient* .

Cela résulte immédiatement de 6.19 (iii) et de la proposition 6.6 .

6.21. *Corollaire* - *Supposons que* $G = H$, *que* $(X,Z) = (Y,T)$ *et que tout élément de* $U(G)$ *commute avec tout élément de* $V(G)$. *Soit* W *la représentation continue* $g \longmapsto U_g V_g$ *de* G *sur* (X,X_0) .

(*i*) $sp\, W \subset [\, sp\, U + sp\, V\,]^-$;

(*ii*) *pour tout* $x \in X$, *on a* $sp_W\, x \subset (sp_U\, x + sp_V\, x)^-$;

(*iii*) *si* P et Q *sont deux parties fermées de* $\hat{G}$, *on a*

$$X^U(P) \cap X^V(Q) \subset X^W\, (P+Q) \quad .$$

(i) Notons Φ' la représentation obtenue en composant la représentation Ψ de $G \times G$ sur (L, L_o) avec l'application diagonale $g \longmapsto (g,g)$ de G dans $G \times G$. Comme dans le corollaire 6.19 on voit que $\text{sp}\ \Phi' = (\text{sp}\ U + \text{sp}\ V)^-$. D'autre part, pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$W(f) = \int_G f(g)\ W_g\ dg = \int_G f(g)\ \Phi'_g(I) dg = \Phi'(f)(I)\ .$$

Donc $\text{Ker}\ W = J_I^{\Phi'}$ et $\text{sp}\ W = \text{sp}_{\Phi'}\ I \subset \text{sp}\ \Phi'$.

(ii) Soit $x \in X$ et posons $E = \text{sp}_U\ x$, $F = \text{sp}_V\ x$. Comme les éléments de $U(G)$ commutent avec ceux de $V(G)$, les sous-espaces $X^U(E)$ et $X^V(F)$ sont invariants par U et V (voir 3.3. (iv)), et donc par W. Notons $\overline{U}$, $\overline{V}$ et $\overline{W}$ les restrictions de ces représentations au sous-espace $X^U(E) \cap X^V(F)$. D'après (i) on a

$$\text{sp}\ \overline{W} \subset [\ \text{sp}\ \overline{U} + \text{sp}\ \overline{V}\ ]^-$$

d'où

$$\text{sp}_W\ x = \text{sp}_{\overline{W}}\ x \subset \text{sp}\ \overline{W} \subset [\text{sp}\ \overline{U} + \text{sp}\ \overline{V}]^- = [\ E + F\ ]^-.$$

(iii) Tout élément x de $X^U(P) \cap X^V(Q)$ est limite dans X_o d'éléments de la forme $U(f)\ V(g)x$ avec f et $g \in L^1(G)$ tels que supp. $\hat{f}$ et supp. $\hat{g}$ soient compacts (voir 3.1.7 et 2.8 (iv)). Posons $y = U(f)\ V(g)x$. D'après 3.3. (iv), (v) et 3.5 (iii), les ensembles $\text{sp}_U\ y$ et $\text{sp}_V\ y$ sont compacts, contenus respectivement dans P et Q. Il résulte alors de (ii) que $\text{sp}_W\ y \subset P+Q$, d'où $y \in X^W(P+Q)$, et comme $X^W(P+Q)$ est fermé dans X_o, on voit que $x \in X^W(P+Q)$.

6.22. Remarque - Reprenons les notations de 6.9 ou 6.17. Nous avons considéré dans ce paragraphe 6 les représentations Ψ et Φ sur (L, L_o) dans le cas où L est mis en dualité métrique avec $M = X \otimes T$.

Lorsque L est mis en dualité métrique avec $\hat{M}$, c'est-à-dire lorsqu'on remplace la topologie $\sigma(L,M)$ de L_0 par $\sigma(L,\hat{M})$, on a vu en 5.9 et 5.10 que les représentations Ψ et Φ correspondantes possèdent les mêmes propriétés que les précédentes, si on fait les mêmes hypothèses sur U, V, (X,Z) et (Y,T). Tous les résultats énoncés à partir de 6.9 restent valables dans ce nouveau cadre, car les démonstrations utilisent seulement le fait que toutes les représentations considérées sont ponctuellement intégrables.

Notons que pour tout $A \in L$, l'ensemble $sp_\Psi A$ est le même que L soit mis en dualité métrique avec M ou avec $\hat{M}$, et par conséquent pour toute partie fermée P de $\hat{G} \times \hat{H}$, l'espace $L^\Psi(P)$ ne dépend pas de la dualité métrique considérée (voir 3.5(iii)). Pour une partie P quelconque, $L^\Psi(P)$ étant l'adhérence de $\bigcup L^\Psi(K)$ où K décrit l'ensemble des parties compactes contenues dans P, le sous-espace spectral associé à P et Ψ dans la dualité métrique de L avec $\hat{M}$ est l'adhérence pour $\sigma(L,\hat{M})$ du sous-espace spectral correspondant dans la dualité métrique de L avec M.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les propriétés 6.1 à 6.5 sont formulées dans ([15], §II) pour les représentations par automorphismes dans les algèbres de von Neumann. Leur expression générale donnée ici est due à M. Enock et J.M. Schwartz. La proposition 6.6. est démontrée par D. Olesen ([29], prop. 2.1). Les corollaires 6.12 et 6.13 constituent des énoncés clé de l'article de W. Arveson ([1], th. 2-3 et corol. 1 et 2). La formulation plus générale donnée dans la proposition 6-9, les corollaires 6.10 à 6.13, 6.15 et 6.16, est due à F. Combes. Les énoncés 6.19 et 6.20 sont établis par D. Olesen dans ([29], prop. 3.2 et corol. 3.3). La démonstration donnée ici de 6.17 et 6.19 est due à R. Charpentier [12].

DEUXIÈME PARTIE

GROUPES D'AUTOMORPHISMES DANS LES ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

§7 GROUPES CONTINUS D'AUTOMORPHISMES DANS LES ALGÈBRES DE BANACH BITOPOLOGIQUES

7.1. *Définition* - *Nous appellerons algèbre de Banach bitopologique un e.l.c.s. bitopologique* (A,A_o) *où* A *est une algèbre de Banach, et qui vérifie les conditions suivantes :*

1) la boule unité fermée de A *est une partie fermée de* A_o ;

2) la topologie de A_o *est égale à la topologie* $\sigma(A_o,A_o')$ *de la dualité avec le sous-espace* A'_o *de* A' ;

3) pour tout $a \in A$, *les applications linéaires* $l_a : x \longmapsto ax$ *et* $r_a : x \longmapsto x_a$ *sont continues de* A_o *dans* A_o .

7.2. *Remarques* - a) Les conditions 1) et 2) ci-dessus signifient que (A,A_o) a la structure d'e.l.c.s. bitopologique associée à la dualité métrique de l'espace de Banach A avec un espace vectoriel normé (à savoir A_o'). La condition 3) signifie que le produit de A est séparément continu pour A_o .

Ainsi, pour tout $a \in A$, on a $l_a, r_a \in \mathcal{L}(A_o) \subset \mathcal{L}(A)$ avec $\|l_a\| \leq \|a\|$ et $\|r_a\| \leq \|a\|$. Si A est unifère ou possède des unités approchées, on a $\|l_a\| = \|a\| = \|r_a\|$.

L'application $l : a \longmapsto l_a$ (resp. $r : a \longmapsto r_a$) de A dans $\mathcal{L}(A_o)$ est un homomorphisme (resp. un antihomomorphisme) de A dans $\mathcal{L}(A_o)$. C'est un morphisme d'e.l.c.s. bitopologiques de (A,A_o) dans (L,L_o) , si (L,L_o) désigne la structure bitopologique associée à la dualité métrique du sous-espace vectoriel normé $\mathcal{L}(A_o)$ de $\mathcal{L}(A)$ avec l'espace vectoriel normé $A \otimes A_o'$

b) Soit B une sous-algèbre de A normiquement fermée et soit B_0 l'espace B muni de la topologie induite par celle de A_0. Alors (B,B_0) est une algèbre de Banach bitopologique que nous appellerons sous-algèbre de Banach bitopologique de (A,A_0)

c) Soit toujours (A,A_0) une algèbre de Banach bitopologique. Si de plus A est une algèbre de Banach involutive et si l'involution de A est continue pour la topologie de A_0, nous dirons que (A,A_0) est une <u>algèbre de Banach bitopologique involutive</u>.

7.3. <u>Exemples</u> - a) Soient (X,Z) un couple d'espaces de Banach en dualité métrique et (X,X_0) la structure bitopologique sur X associée à cette dualité. Notons (L,L_0) l'e.l.c.s. bitopologique associé à la dualité de l'espace de Banach $\mathcal{L}(X_0)$ avec l'espace vectoriel normé $M = X \otimes Z$ (ou à la dualité avec le complété $\hat{M}$ de M). On vérifie facilement que (L,L_0) est une algèbre de Banach bitopologique (voir 4.3.c et 4.4)

b) En particulier, considérons le cas où X est un espace hilbertien H et où Z est son espace hilbertien conjugué $\bar{H}$ identifié au dual de H. L'espace bitopologique associé à cette dualité est (H,H_0) où H_0 est H muni de sa topologie faible. On a alors $L = \mathcal{L}(H_0) = \mathcal{L}(H)$. Dans le cas où L est mis en dualité métrique avec l'espace vectoriel normé $M = H \otimes \bar{H}$, alors L_0 est $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie faible des opérateurs. Le complété $\hat{M}$ de M est le prédual de $\mathcal{L}(H)$, et lorsque L est mis en dualité métrique avec $\hat{M}$, la topologie de L_0 est la la topologie ultrafaible des opérateurs (voir [18], chap. I, §3, n°3). Dans les deux cas l'involution de $\mathcal{L}(H)$ fait de (L,L_0) une algèbre de Banach bitopologique involutive.

Si A est une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(H)$ et si A_0 est A muni de la topologie faible (ou de la topologie ultrafaible) des opérateurs, alors (A,A_0) est une sous-algèbre de Banach bitopologique involutive de l'algèbre (L,L_0) correspondante.

7.4. *Définition* - Soient G un groupe topologique et (A,A_o) une algèbre de Banach bitopologique. Nous appellerons <u>représentation automorphique continue</u> de G sur (A,A_o) une représentation continue Φ de G sur l'e.l.c.s. bitopologique (A,A_o) telle que Φ_g soit, pour tout $g \in G$, un automorphisme de l'algèbre A. Si de plus (A,A_o) est involutive et si Φ_g est, pour tout $g \in G$, un automorphisme d'algèbre involutive, nous parlerons de <u>représentation automorphique involutive continue</u> de G sur (A,A_o)

7.5. <u>Exemples</u> - a) Reprenons les données de l'exemple 7.3. a). Soit U une représentation continue d'un groupe topologique G sur l'e.l.c.s. bitopologique (X,X_o) et supposons que U ou ${}^tU$ soit équicontinue. Pour tout $g \in G$, notons Φ_g l'application $A \longmapsto U_g\, AU_{-g}$ de $\mathscr{L}(X_o)$ dans lui-même. Alors $g \longmapsto \Phi_g$ est une représentation automorphique continue de G dans l'algèbre de Banach bitopologique (L,L_o) (voir corol. 5.6 et prop. 5.10).

b) Considérons le cas plus particulier de 7.3. b) et soit U une représentation unitaire fortement continue de G sur H. Nous obtenons alors une représentation automorphique involutive continue Φ de G sur $(\mathscr{L}(H), \mathscr{L}(H)_o)$, et plus généralement sur toute sous-algèbre (A,A_o) où A désigne une sous-algèbre de von Neumann de $\mathscr{L}(H)$ stable par Φ_g pour tout $g \in G$.

7.6. Soit (A,A_o) une algèbre de Banach bitopologique. Nous supposons que les applications $l: a \longmapsto l_a$ et $r: a \longmapsto r_a$ de A dans $\mathscr{L}(A_o)$ sont injectives, que $Z = A'_o$ est normiquement fermé dans A', et que Z muni de la topologie $\sigma(Z,A)$ et A_o vérifient la condition (K).

D'autre part, soit U une représentation automorphique continue d'un groupe localement compact commutatif G sur (A,A_o). Nous supposons que U ou ${}^tU$ est une représentation équicontinue.

En particulier, les conditions énoncées avant la proposition 6.9 sont réalisées avec $X = Y = A$, $Z = T = A'_o$, et $U = V$.

<u>*Proposition*</u> - *Avec ces données, considérons une partie fermée* E *de* $\hat{G}$ *et une base* $\mathfrak{B}$ *de voisinages compacts de* 0 *dans* $\hat{G}$ *. Pour un élément* a *de* A *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*i*) $a \in A^U(E)$;

(*ii*) $a\, A^U(F) \subset A^U(\overline{E + F})$ *pour toute partie fermée* F *de* $\hat{G}$;

(*iii*) $a\, A^U(P) \subset A^U(E + P)$ *pour toute partie* P *de* $\hat{G}$;

(*iv*) $a\, A^U(\Omega) \subset A^U(E + \Omega)$ *pour toute partie ouverte* Ω *de* $\hat{G}$;

(*v*) $a\, A^U(K) \subset A^U(E + K)$ *pour toute partie compacte* K *de* $\hat{G}$;

(*vi*) $a\, A^U(\gamma + W) \subset A^U(\gamma + E + W)$ *pour tout* $\gamma \in \hat{G}$ *et tout* $W \in \mathfrak{B}$.

Sous les hypothèses faites, si pour tout $g \in G$ et tout $v \in \mathcal{L}(A_o)$ nous posons $\Phi_g(v) = U_g\, v\, U_{-g}$, alors $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ est une représentation continue ponctuellement intégrable de G sur l'e.l.c.s. bitopologique (L, L_o) associé à $\mathcal{L}(A_o)$ en dualité métrique avec l'espace vectoriel normé $A \otimes Z$ (voir 5.6). Pour tout $a \in A$, l'élement $\Phi_g(1_a)$ de L est l'application $x \mapsto U_g\, 1_a\, U_{-g}(x) = U_g\, [a\, U_{-g}(x)] = [U_g(a)]\,(x)$.

On voit donc que $\Phi_g \circ 1 = 1 \circ U_g$, et 1 est une application linéaire continue de A_o dans L_o qui entrelace les représentations U et Φ de G. Comme 1 est injective , d'après 3.3. (iv) on a $sp_U\, a = sp_\Phi\, 1_a$ pour tout $a \in A$. Les conditions $a \in A^U(E)$ et $1_a \in L^\Phi(E)$ sont donc équivalentes. L'assertion résulte alors de la proposition 6.9 appliquée à 1_a

7.7. <u>*Corollaire*</u> - *Conservons les données de* 7.6.

(*i*) *Soient* P *et* Q *deux parties de* $\hat{G}$; on a $A^U(P)\, A^U(Q) \subset A^U(P+Q)$.

(*ii*) *Soit* P *une partie de* $\hat{G}$ *telle que* $P+P \subset P$. *Alors* $A^U(P)$ *est une sous-algèbre de* A *fermée dans* A_o .

(*iii*) *Si* (A, A_o) *est involutive, si la représentation* U *est involutive et si* P *est un sous-groupe de* $\hat{G}$, *alors* $A^U(P)$ *est une sous-algèbre involutive de* A *fermée dans* A_o .

(i) Soit $a \in A^U(P)$. Alors a est limite dans A_o d'éléments b tels que $sp_U\, b \subset P$. D'après la proposition 7.6 (iii), on a

$$b\, A^U(Q) \subset A^U(sp_U\, b + Q) \subset A^U(P + Q) \ .$$

Comme le produit est séparément continu dans A_o et comme $A^U(P + Q)$ est fermé dans A_o , on voit que $a\, A^U(Q) \subset A^U(P + Q)$.

(ii) résulte immédiatement de (i) .

(iii) Soit $x \mapsto x^*$ l'involution de A . D'après 3-3(iv), pour tout $x \in A$ nous avons $sp_U\, x^* = - sp_U\, x$. Alors (iii) résulte immédiatement de cette égalité et de (i).

7.8. <u>*Corollaire*</u> - *Conservons les données de 7.6. L'ensemble* A^U *des points* x *de* A *tels que* $U_g x = x$ *pour tout* $g \in G$ *est une sous-algèbre de* A *fermée dans* A_o, *involutive si* (A,A_o) et U *sont involutives. Pour toute partie* E *de* $\hat{G}$, *tout* $x \in A^U$ *et tout* $y \in A^U(E)$, *on a* xy *et* $yx \in A^U(E)$, *donc* $A^U(E)$ *est un module à gauche et à droite sur* A^U .

Pour la première assertion, il suffit d'appliquer 7.7 (ii) et (iii) en prenant P réduit à l'élément neutre de $\hat{G}$. La deuxième assertion se déduit de 7.7. (i).

7.9. <u>*Corollaire*</u> - *Avec ces mêmes données, supposons que* A *et* $\{0\}$ *soient les seuls idéaux à gauche de* A *fermés dans* A_o , *stables par l'action de* $U(g)$ *et par la multiplication à droite et à gauche par les éléments de* A^U . *Alors on a* $sp\, U + sp\, U \subset sp\, U$. *Si de plus* (A,A_o) et U *sont involutives, alors* $sp\, U$ *est un sous-groupe de* $\hat{G}$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in sp\, U$. Montrons que $\gamma_1 + \gamma_2 \in sp\, U$. D'après 3-8-(ii), il suffit de vérifier que pour tout voisinage V de $\gamma_1 + \gamma_2$ on a $A^U(V) \neq \{0\}$. Soient V_1 et V_2 des voisinages de γ_1 et γ_2 tels que $V_1 + V_2 \subset V$. Pour $i = 1,2$ on a $\gamma_i \in sp\, U$, d'où $A^U(V_i) \neq \{0\}$

L'annulateur à gauche N de $A^U(V_2)$ est un idéal à gauche de A fermé dans A_0 et globalement stable par $U(G)$, car $A^U(V_2)$ l'est (voir 3-5-iii), et par les multiplications par les éléments de A^U. Si on avait $A^U(V_1)\, A^U(V_2) = \{0\}$, cet annulateur N serait distinct de $\{0\}$, donc égal à A. Comme l'application $r : a \mapsto r_a$ est injective, on aurait $A^U(V_2) = \{0\}$ ce qui est absurde. On a donc $\{0\} \neq A^U(V_1)\, A^U(V_2) \subset (A^U(V_1+V_2)$ $\subset A^U(V)$.

Si (A,A_o) et U sont involutives, on a toujours $\mathrm{sp}\, U = -\mathrm{sp}\, U$. En effet, si $x \mapsto x^*$ est l'involution de A, pour tout $x \in A$ on a $\mathrm{sp}_U\, x^* = -\mathrm{sp}_U\, x$ (voir 3.3. (iv)) et il suffit alors d'utiliser 3.8 (iv). Dans ce cas $\mathrm{sp}\, U$ sera donc un sous-groupe de $\hat{G}$.

7.10. <u>Remarque</u> - Avec les données et hypothèses de 7.6., nous supposons en outre que (A,A_o) et U sont involutives et que l'involution $x \mapsto x^*$ de A est telle que $x^* x = 0$ si et seulement si $x = 0$. Alors on a $0 \in \mathrm{sp}\, U$. En effet, vérifions que pour tout voisinage V de 0 dans $\hat{G}$, le sous-espace $A^U(V)$ n'est pas réduit à 0. Soit W un voisinage compact de 0 tel que $W - W \subset V$. Prenons $\gamma \in \mathrm{sp}\, U$ et soit x un élément non nul de A tel que $\mathrm{sp}_U\, x \subset \gamma + W$. Alors $x^* x$ est un élément non nul de A, et on a $\mathrm{sp}_U\, x^*\, x \subset W - W \subset V$.

7.11. Soit (A,A_o) une algèbre de Banach bitopologique involutive. Nous notons $x \mapsto x^*$ l'involution de A et nous supposons que l'on a $x^* x = 0$ si seulement si $x = 0$. De plus nous supposons que le dual A'_o de A_o est normiquement fermé dans A', et que A'_o muni de la topologie $\sigma(A'_o, A_o)$ et A_o vérifient la condition (K).

Nous considérons d'autre part une représentation automorphique involutive continue U d'un groupe localement compact commutatif G sur (A,A_o) et nous supposons que U ou ${}^tU$ est équicontinue.

En particulier, nous sommes dans les conditions de la proposition 7.6.

Signalons que ces hypothèses sont réalisées dans le cas suivant :

A est une algèbre de Banach involutive telle que $x^*x = 0$ si et seulement si $x = 0$;

la topologie de A_0 est la topologie $\sigma(A,A')$;

U est une représentation continue involutive de G sur (A,A_0) (voir ([19], th. 4, p. 434) , la remarque 2-6 a) et le corollaire 2.11).

Ces hypothèses sont également réalisées dans la situation du §10.

Nous notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des idéaux à gauche non nuls de A fermés dans A_0 et stables par l'action de U(G). Enfin nous notons $\Gamma(U)$ l'intersection des fermés sp U^B lorsque B décrit l'ensemble des sous-algèbres de A de la forme $N \cap N^*$ avec $N \in \mathcal{N}$ (comme d'habitude U^B désigne la sous-représentation de U définie par B).

Lemme - Soient $N \in \mathcal{N}$ *et* $B = N \cap N^*$ *. Alors on a*

$$\Gamma(U) + \mathrm{sp}\, U^B = \mathrm{sp}\, U^B$$

D'après la remarque 7.10 , l'élément 0 appartient à $\Gamma(U)$ car il appartient à tous les fermés sp U^C où $C = M \cap M^*$ avec $M \in \mathcal{N}$. On a donc sp U $\subset$ $\Gamma(U)$ + sp U .

Soient $\gamma_1 \in \mathrm{sp}\, U^B$ et $\gamma_2 \in \Gamma(U)$ et montrons que $\gamma_1 + \gamma_2 \in \mathrm{sp}\, U^B$. Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout voisinage fermé V de $\gamma_1 + \gamma_2$ nous avons $A^U(V) \cap B \neq 0$, compte-tenu de 3-11 (i). Soient V_1 et V_2 deux voisinages compacts de γ_1 et γ_2 respectivement tels que $V_1 + V_2 \subset V$. L'ensemble $A^U(V_1) \cap B$ n'est pas réduit à 0 puisque $\gamma_1 \in \mathrm{sp}\, U^B$. Son annulateur à droite M est un idéal à droite fermé dans A_0 , stable par U(G) car $A^U(V_1) \cap B$ l'est (voir 3.5 (i)). Par conséquent l'annulateur à gauche L de M est un idéal à gauche fermé dans A_0 et stable par U(G), et $K = L \cap N$ possède encore les mêmes propriétés. Notons que K n'est pas nul car il contient $A^U(V_1) \cap B$, et c'est donc un élément de $\mathcal{N}$. Si $x \in L^* \cap M$, on a $x^*x = 0$ car x^* appartient à l'annulateur à gauche L de M , d'où $x = 0$, et donc $L^* \cap M = 0$. Posons $C = K^* \cap K$. Puisque

$\gamma_2 \in \Gamma(U) \subset \mathrm{sp}\, U^C$, on a $A^U(V_2) \cap C \neq 0$ d'où $[A^U(V_1) \cap B]\ [A^U(V_2) \cap C] \neq 0$ car sinon on aurait $0 \neq A^U(V_2) \cap C \subset L^* \cap M$. On obtient ainsi

$$0 \neq [A^U(V_1) \cap B]\ [A^U(V_2) \cap C] \subset A^U(V_1+V_2) \cap B \subset A^U(V) \cap B ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

7.12. *Proposition* - *Avec les données de* 7.11, l'ensemble $\Gamma(U)$ *est un sous-groupe fermé de* $\hat{G}$.

On a évidemment $\Gamma(U) = -\Gamma(U)$ car $\Gamma(U)$ s'obtient comme intersection de supports spectraux de représentations involutives. Comme d'autre part $0 \in \Gamma(U)$, il reste à vérifier que $\Gamma(U) + \Gamma(U) \subset \Gamma(U)$.

Soient $N \in \mathcal{N}$ et $B = N \cap N^*$. D'après le lemme 7.11 on a $\Gamma(U) + \mathrm{sp}\, U^B \subset \mathrm{sp}\, U^B$, d'où $\Gamma(U) + \Gamma(U) \subset \mathrm{sp}\, U^B$ car $\Gamma(U) \subset \mathrm{sp}\, U^B$. Ceci étant valable pour tout $N \in \mathcal{N}$, on en déduit que $\Gamma(U) + \Gamma(U) \subset \Gamma(U)$.

7.13. *Lemme* - *Conservons les données et notations de* 7.11. *Soit* V *un voisinage de* 0 *dans* $\hat{G}$ *et soient* N_1, N_2 *deux éléments de* $\mathcal{N}$ *tels que* $N_1^* \cap N_2 \neq 0$. *Alors il existe des éléments* M_1 *et* M_2 *de* $\mathcal{N}$ *contenus respectivement dans* N_1 *et* N_2 *et tels que si* $B_i = M_i \cap M_i^*$ pour $i = 1,2$, on ait

$$\mathrm{sp}\, U^{B_1} \subset V + \mathrm{sp}\, U^{B_2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sp}\, U^{B_2} \subset V + \mathrm{sp}\, U^{B_1} .$$

Nous pouvons évidement supposer que V est un voisinage compact de 0 . Soit W un voisinage compact de 0 dans $\hat{G}$ tel que $W - W \subset V$, et soit x un élément non nul de $N_1^* \cap N_2$. Considérons le sous-espace vectoriel I de $L^1(G)$ engendré par les fonctions $f \in L^1(G)$ telles que le support de $\hat{f}$ soit contenu dans un sous-ensemble de $\hat{G}$ de la forme $\gamma + W$. C'est un idéal de $L^1(G)$. En utilisant 3.1.5, on voit que $Z(I) \neq \emptyset$ et par conséquent, d'après 3.1.3, l'idéal I est dense dans $L^1(G)$. Soit f_α une unité approchée de $L^1(G)$ formée d'éléments de I (voir 3.1.6). Comme $x = \lim U(f_\alpha)x$ d'après 2.8 (iv), on voit qu'il existe $\gamma_0 \in \hat{G}$ et $f \in L^1(G)$ tels que supp. $\hat{f}$ $\subset \gamma_0 + W$ et $U(f)(x) \neq 0$. Posons $y = U(f)x$. L'espace vectoriel $N_1^* \cap N_2$

étant fermé dans A_o et stable par $U(G)$, on a $y \in N_1^* \cap N_2$. D'autre part, d'après 3.3.(v), on a $sp_U\, y \subset \gamma_o + W$, d'où $sp_U\, y - sp_U\, y \subset W - W$.

Notons M_1 (resp. M_2) le plus petit élément de $\mathcal{N}$ tel que $y \in M_1^*$ (resp. $y \in M_2$). On a bien sûr $M_i \subset N_i$ pour $i = 1,2$. Posons $B_1 = M_1 \cap M_1^*$ et $B_2 = M_2 \cap M_2^*$. Nous allons vérifier que $sp\, U^{B_1} \subset V + sp\, U^{B_2}$, l'autre inclusion du lemme se démontrant de la même façon.

Soit $\gamma_1 \in sp\, U^{B_1}$. Puisque $V + sp\, U^{B_2}$ est fermé, il suffit de prouver que pour tout voisinage compact V_1 de γ_1, on a $V_1 \cap (V + sp\, U^{B_2}) \neq \emptyset$, c'est à dire $(V_1 - V) \cap sp\, U^{B_2} \neq \emptyset$. Soit L l'annulateur à gauche de $\{U_g(y)\ ,\ y \in G\}$. C'est un idéal à gauche fermé dans A_o et stable par $U(G)$. L'annulateur à droite de L est un idéal à droite fermé dans A_o, stable par $U(G)$, qui contient y. Il contient M_1^*. Pour tout $z \in M_1 \cap L$, on a $zz^* = 0$, d'où $z = 0$, d'où $M_1 \cap L = 0$. Par conséquent, si x_1 est un élément non nul de $A^U(V_1) \cap B_1 \subset M_1$, il existe $g_1 \in G$ tel que $x_1\, U_{g_1}(y) \neq 0$. De même, puisque $U_{g_1}(y^*)x_1^*$ est encore un élément non nul de M_1, il existe $g_2 \in G$ tel que $U_{g_1}(y^*)x_1^*\, U_{g_2}(y) = 0$. Posons $z = U_{g_2}(y^*)x_1\, U_{g_1}(y)$. Comme $U_{g_1}(y)$ et $U_{g_2}(y)$ appartiennent à M_2, on voit que z appartient à B_2. Par ailleurs, d'après 7.6.(v) on a $z \in A^U(V_1 + W - W) \subset A^U(V_1 - V)$ d'où

$$\emptyset \neq sp_U\, z \subset (V_1 - V) \cap sp\, U^{B_2} .$$

7.14. <u>*Proposition*</u> - *Avec les données et notations de 7.11, considérons un élément* N *de* $\mathcal{N}$ *tel qu'il n'existe pas d'idéal bilatère fermé dans* A_o, *stable par* $U(G)$, *contenant* N *et distinct de* A. *Alors* $\Gamma(U)$ *est égal à l'intersection des fermés* $sp\, U^B$ *lorsque* B *décrit l'ensemble des sous-algèbres de* A *de la forme* $M \cap M^*$ *avec* $M \subset N$ *et* $M \in \mathcal{N}$.

Soient $L \in \mathcal{N}$ et V un voisinage de 0 dans $\hat{G}$. Posons $C = L \cap L^*$ On a bien sûr $L^* N \neq 0$, car sinon N serait contenu dans l'annulateur à droite de L^*, qui est un idéal bilatère de A fermé dans A_o, stable par $U(G)$ et distinct de A. Comme $L^* \cap N$ n'est pas réduit à 0, d'après le lemme 7.13, il existe des éléments M_1 et M_2 de $\mathcal{N}$, contenus respectivement dans L et N, et tels que si $B_1 = M_1 \cap M_1^*$ et $B_2 = M_2 \cap M_2^*$, on ait en particulier

$$\operatorname{sp} U^{B_2} \subset V + \operatorname{sp} U^{B_1} \subset V + \operatorname{sp} U^C .$$

On en déduit que l'intersection Λ des fermés $\operatorname{sp} U^B$ lorsque B décrit l'ensemble des sous-algèbres de A de la forme $M \cap M^*$ avec $M \subset N$ et $M \in \mathcal{N}$ est contenue dans $V + \operatorname{sp} U^C$. Comme $\Gamma(U)$ est égal à l'intersection des ensembles $V + \operatorname{sp} U^C$ lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 0 et L parcourt $\mathcal{N}$, on obtient $\Lambda \subset \Gamma(U)$, d'où $\Lambda = \Gamma(U)$, car on a évidemment $\Gamma(U) \subset \Lambda$.

7.15. *Proposition* - *Avec les données de* 7.11, *nous supposons que* $\{0\}$ *et* A *soient les seuls idéaux bilatères de* A *fermés dans* A_o *et stables par* $U(G)$. *Alors la famille* $\mathcal{F}(U)$ *des sous-ensembles de* $\hat{G}$ *de la forme* $V + \operatorname{sp} U^B$, *où* V *est un voisinage de* 0 *et* $B = N^* \cap N$ *avec* $N \in \mathcal{N}$, *est une base de filtre, d'intersection* $\Gamma(U)$.

Soient N_1, N_2 deux éléments de $\mathcal{N}$ et posons $B_i = N_i \cap N_i^*$ pour $i = 1,2$. D'autre part, soient V_1, V_2 deux voisinages compacts de 0 et considérons un voisinage compact V de 0 tel que $V \subset V_1$ et $V+V \subset V_2$. On a $N_1^* N_2 \neq 0$ car sinon l'annulateur à droite de N_1 serait un idéal bilatère non trivial de A, fermé dans A_o et stable par $U(G)$. Alors d'après le lemme 7.13, il existe des éléments M_1 et M_2 dans $\mathcal{N}$ contenus dans N_1 et N_2 respectivement, et tels que si $C_i = M_i \cap M_i^*$ pour $i = 1,2$, on ait en particulier $\operatorname{sp} U^{C_1} \subset V + \operatorname{sp} U^{C_2}$. On a alors

$$V + \operatorname{sp} U^{C_1} \subset V + \operatorname{sp} U^{B_1} \subset V_1 + \operatorname{sp} U^{B_1}$$

$$V + \operatorname{sp} U^{C_1} \subset V + V + \operatorname{sp} U^{C_2} \subset V_2 + \operatorname{sp} U^{B_2}$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}(U)$ est une base de filtre. D'autre part $\Gamma(U)$ est évidemment égal à l'intersection des éléments de $\mathcal{F}(U)$.

7.16. Remarque - D'après la démonstration de la proposition 7.14, on voit que cette proposition reste valable pour tout $N \in \mathcal{N}$ tel que l'on ait $L^* \cap N \neq 0$ si $L \in \mathcal{N}$. De même la proposition 7.15 reste valable en supposant seulement que l'on a $N_1^* \cap N_2 \neq 0$ pour tous N_1 et N_2 dans $\mathcal{N}$.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE .

La proposition 7.6 , qui résulte facilement de la proposition 6.9 de cet exposé , généralise des énoncés de W. Arveson ([1], lemme 1) et de A. Connes ([15], lemme 2.1.5). Le corollaire 7.9 se trouve dans ([15], §II) pour une algèbre de von Neumann.

La définition de $\Gamma(U)$ (pour une représentation continue U d'un groupe abélien localement compact dans une algèbre de Banach bitopologique involutive) est une simple transcription de la définition introduite par A. Connes ([15], déf. 2.2.1) pour une algèbre de von Neumann. Les propositions 7.11 à 7.16, dont la formulation donnée ici est due à C. Delaroche, sont directement inspirés des énoncés analogues contenus dans ([15], §II). Une formulation voisine a été fournie indépendamment par D. Olesen ([30]).

§8 GROUPES D'AUTOMORPHISMES DANS UNE ALGÈBRE DE von NEUMANN

Dans tout ce paragraphe, nous considérons une algèbre de von Neumann M opérant sur un espace de Hilbert H. Nous noterons H_o l'espace H muni de sa topologie faible, $\mathcal{L}(H)_o$ (resp. M_o) l'espace $\mathcal{L}(H)$ (resp. M) muni de sa topologie ultrafaible. Alors $(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}(H)_o)$ est l'e.l.c.s. bitopologique associé à la dualité métrique de $\mathcal{L}(H)$ avec son prédual $\mathcal{L}(H)_*$, et son sous-espace bitopologique (M,M_o) est associé à la dualité métrique de M avec son prédual M_*. Si on munit $\mathcal{L}(H)$ de l'involution et du produit usuels, $(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}(H)_o)$ est une algèbre de Banach bitopologique involutive et (M,M_o) en est une sous-algèbre de Banach bitopologique involutive (voir 7.3.b)).

Si U est une représentation unitaire fortement continue d'un groupe localement compact abélien G sur l'espace hilbertien H. On en déduit (voir 7.5 b) une représentation Φ automorphique continue de G sur $(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}(H)_o)$ donnée par

$$\Phi_g(A) = U_g A U_g^* \qquad (A \in \mathcal{L}(H), \quad g \in G).$$

Les conditions énoncées avant la proposition 6.9 sont réalisées avec $U = V$, $X = Y = H$ et $Z = T = H^-$ (dual de H). Aussi, compte-tenu de la remarque 6.22 nous pouvons appliquer à Φ les résultats de 6.9.

Si M est globalement invariante par les Φ_g (pour tout $g \in G$), Φ induit une représentation automorphique involutive continue Φ^M sur (M,M_o).

Rappelons qu'un automorphisme involutif d'une algèbre de von Neumann est automatiquement continu pour les topologies ultrafaibles ([18], corol. 1, p. 54). Dans la suite α désignera une représentation continue automorphique involutive de G sur (M,M_o). Notons que la représentation transposée ${}^t\alpha$ sur M_* est équicontinue et que les représentations α et ${}^t\alpha$ sont intégrables (corol. 5.4).

8.1. *Proposition* - *Pour toute partie* P *de* $\hat{G}$, *notons* A_P *l'annulateur à gauche dans* M *du sous-espace spectral* $M^{\alpha}(P)$, *et* 1^P *l'homomorphisme d'algèbres* $x \longmapsto 1_x^P$ *de* M^{α} *dans* $\mathcal{L}(M^{\alpha}(P))$ *où l'on a* $1_x^P(y) = xy$ *pour tout* y *de* $M^{\alpha}(P)$.

Les projecteurs suivants de M *sont égaux et appartiennent au centre de* M^{α} :

(*i*) p_P *projecteur sur le sous-espace fermé* $[M^{\alpha}(P)H]^-$ *de* H ;

(*ii*) $k_P = 1-q_P$ *où* q_P *désigne le plus grand projecteur de* A_P ,

(*iii*) r_P *borne supérieure des supports* $s(y^*)$ *des opérateurs* y^* *où* y *parcourt* $M^{\alpha}(P)$,

(*iv*) s_P *support de l'homomorphisme* 1^P *de* M^{α} *dans* $\mathcal{L}(M^{\alpha}(P))$.

La continuité séparée du produit dans M_o montre que l'idéal à gauche A_P de M et l'idéal bilatère Ker 1^P de M^{α} sont fermées pour la topologie ultrafaible de M . D'où l'existence des projecteurs q_P et s_P , ce dernier étant dans le centre de M^{α} . De plus, l'inclusion Ker $1^P \subset A_P$ nous donne $1 - s_P < q_P$.

D'autre part, $M^{\alpha}(P)$ étant globalement invariant par les automorphismes α_g (3.5.(i)), il en est de même pour son annulateur à gauche A_P . De même , comme $M^{\alpha}(P)$ est un module à gauche et à droite sur M^{α} (cor. 7.8); il en est de même de A_P . Donc q_P appartient au centre de M^{α} , donc à Ker 1^P .

On en déduit $q_P \leqslant 1 - s_P$, et donc $k_P = s_P$.

Soit maintenant q un projecteur de M . On a

$$\begin{aligned} q \in A_P &\Leftrightarrow qy = 0 \ , \ \forall y \in M^{\alpha}(P) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} y \subset \operatorname{Ker} q \ , \forall y \in M^{\alpha}(P) \\ &\Leftrightarrow s(y^*) \leqslant 1 - q \ , \forall y \in M^{\alpha}(P) \\ &\Leftrightarrow r_P \leqslant 1 - q \\ &\Leftrightarrow q \leqslant 1 - r_P \end{aligned}$$

On en déduit $k_P = r_P$.

De même :

$$\begin{aligned} q \in A_P &\iff qy = 0 \quad \forall\, y \in M^\alpha(P) \\ &\iff qy\,H = \{0\} \quad \forall\, y \in M^\alpha(P) \\ &\iff q\,[M^\alpha(P)H]^- = \{0\} \\ &\iff q\,p_P = 0 \end{aligned}$$

Comme $[M^\alpha(P)H]^-$ est stable par M' , p_P appartient à M .

On en déduit $p_P = k_P$.

8.2. <u>Notations</u> - Pour toute partie P de $\hat{G}$, nous noterons q_P^α (ou q_P s'il n'y a pas d'ambiguité) le plus grand projecteur de l'annulateur à gauche A_P^α de $M^\alpha(P)$, et $p_P^\alpha = 1 - q_P^\alpha$. Ils sont dans $Z(M^\alpha)$.

Si $G = \mathbb{R}$, nous poserons $q_t^\alpha = q^\alpha_{]t,\infty[}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, et nous le noterons q_t s'il n'y a pas d'ambiguité . De même, nous écrirons M_t^α ou M_t pour $M^\alpha(]t,\infty[)$ et A_t^α ou A_t pour $A_{]t,\infty[}$ (annulateur à gauche de $M^\alpha(]t,\infty[)$.

Enfin q_∞^α ou q_∞ désigne la borne supérieure dans le centre de M^α de la famille des projecteurs q_t^α , où $t \in \mathbb{R}$.

8.3. <u>*Proposition*</u> - *Si* $G = \mathbb{R}$, *l'application* $q : t \mapsto q_t$ *de* $\mathbb{R}$ *dans le centre de* M^α *possède les propriétés suivantes :*

(i) C'est une fonction croissante de t, *et* $q_t \to q_\infty$ *fortement quand* $t \to +\infty$.

(ii) Elle est continue à droite .

(iii) $q_t = 0$ *pour tout* $t < 0$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}\,\alpha$ *admet une borne inférieure* m_1 *dans* $\mathbb{R}$ *, alors* $q_t = 0$ *pour tout* $t < m_1$ *. De même, si* $\mathrm{Sp}\,\alpha$ *admet une borne supérieure* m_2 *dans* $\mathbb{R}$ *, alors* $q_t = I$ *pour tout* $t \geqslant m_2$ *.*

(v) Si T *est un automorphisme de* M *qui commute avec* α_t *pour tout* t *de* $\mathbb{R}$ *, alors on a* $T(q_t) = q_t$ *pour tout* t *de* $\mathbb{R}$ *.*

(i) tient au fait que $t \longmapsto]\,t,\infty\,[$ est une fonction décroissante de t , et que $P \longmapsto q_P$ est une fonction décroissante de P .

(ii) Soit $s_n \to t$, $s_n \geqslant t$. On peut se limiter à considérer une suite décroissante (quitte à remplacer s_n par $\sup\limits_{p\geqslant n} s_p$). Alors, par 3.5. vi) ,on a $M_t = [\bigcup\limits_n M_{s_n}]^-$ et donc

$$A_t = \bigcap_n A_{s_n}$$

et

$$q_t = \bigwedge_n q_{s_n} = \lim_n q_{s_n}$$

(iii) Pour tout $t < 0$, M_t contient M^α , et par suite l'identité I de M . Son annulateur A_t est donc égal à $\{0\}$.

(iv) Si $\mathrm{Sp}\,\alpha$ est borné inférieurement par m_1 , pour tout $t < m_1$ on a $\mathrm{sp}\,\alpha \subset]\,t,\infty\,[$, d'où $M_t = M$, $A_t = \{0\}$, $q_t = 0$
De même, si $\mathrm{Sp}\,\alpha$ est borné supérieurement par m_2 , pour $t > m_2$ on a $\mathrm{Sp}\,\alpha \cap]\,t,\infty\,[= \emptyset$, d'où $M_t = \{0\}$, $A_t = M$ et $q_t = I$

(v) Par 3.3. iv), T laisse invariant $M^\alpha(P)$, pour toute partie P de $\hat{G}$, donc également A_P . On en déduit $T(q_P) = q_P$. D'où le résultat.

8.4. <u>Définition</u> - Si $G = \mathbb{R}$, la proposition 8.3. montre que q^α est une résolution de l'identité sur $q_\infty^\alpha(H)$. Elle définit donc un opérateur autoadjoint $a = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dq_t$ sur $q_\infty^\alpha(H)$ (qui est positif par 8.3 iii) et un groupe à un paramètre fortement continu d'unitaires U sur $q_\infty^\alpha(H)$, par

$$U_t = \exp(ita) .$$

Nous dirons que a et U sont canoniquement associés à la représentation α .

Par 8.1 et 8.3 (v) , on voit que q_∞^α a q_∞^α est affilié au centre de M^α , et que

$$q_\infty^\alpha \; U_t \; q_\infty^\alpha \in Z(M^\alpha) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R} \; .$$

8.5. *Lemme - Soit e un projecteur de M^α , M_e l'algèbre de von Neumann réduite* eMe .

(i) $\left((M_e \, , \, (M_e)_o\right)$ est un sous-espace bitopologique de (M,M_o) stable par la représentation α ; α induit donc une sous-représentation que nous noterons α^e .

(ii) Pour toute partie E fermée de $\hat{G}$, on a

$$M^{\alpha^e}(E) \; = \; M^\alpha(E) \cap M_e \; = \; eM^\alpha(E)e \; .$$

En particulier $\quad (M_e)^{\alpha^e} = M^\alpha \cap M_e = eM^\alpha e \qquad$ et $\operatorname{Sp} \alpha^e \subset \operatorname{Sp} \alpha$.

(iii) Si e est dans le centre de M , pour toute partie E fermée de $\hat{G}$, on a $q_E^{\alpha^e} = e\, q_E^\alpha$. En particulier, si $G = \mathbb{R}$, on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$q_t^{\alpha^e} \; = \; e\, q_t^\alpha \qquad \text{et} \qquad q_\infty^{\alpha^e} \; = \; e\, q_\infty^\alpha$$

(i) est évident, et (ii) provient de 3.11 et du corollaire 7.8 .

(iii) d'après ii), on a $A_E^\alpha \cap M_e \subset A_E^{\alpha^e}$. Réciproquement, soit $x \in A_E^{\alpha^e}$ et $y \in M^\alpha(E)$

On a $\qquad x = x\,e \quad$, et $y = ey + (1-e)y$, avec

$$ey \in eM^\alpha(E) \; = \; M^{\alpha^e}(E) \; .$$

Donc $\quad xy = x(ey) = 0$. Cela prouve que $A_E^{\alpha^e} = A_E^\alpha \cap M_e$ et donc

$$q_E^{\alpha^e} \; = \; e\, q_E^\alpha$$

D'autre part, on en déduit aussi

$$e\,[M^\alpha(E)H]^- \; = \; [M^{\alpha^e}(E)\; eH]^- \quad \text{pour toute partie } E \text{ fermée ,}$$

donc à fortiori compacte, d'où, par (3.5 (ii)), pour tout ouvert, en particulier pour $]\, t, \infty\, [$. On a donc $q_t^{\alpha^e} = e q_t^\alpha$ et à la limite

$$q_\infty^{\alpha^e} = e\, q_\infty^\alpha$$

8.6. <u>Notations</u> -

(i) Etant donnée une représentation unitaire U fortement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$, on notera P_U sa mesure de Stone. On a (3.7 (ii)) $P_U(B)H = H^U(B)$ pour tout borélien B de $\mathbb{R}$.

En particulier, si U est le groupe à un paramètre canoniquement associé à α (cf. 8.4.), on a

$$(q_\infty^\alpha H)^U\, (]s,\infty[) = (q_\infty^\alpha - q_s^\alpha)H = [M^\alpha(]s,\infty[)\, q_\infty^\alpha H]^-$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$

(ii) Nous noterons $RP(\alpha, \mathcal{L}(H))$ l'ensemble des représentations unitaires fortement continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$, qui induisent sur M la représentation α , et qui ont un générateur infinitésimal autoadjoint positif.
Si $U \in RP(\alpha, \mathcal{L}(H))$, on a $H = H^U([0,+\infty[)$.

(iii) Nous noterons $RP(\alpha,M)$ le sous-ensemble de $RP(\alpha, \mathcal{L}(H))$ formé des représentations à valeurs dans M .

8.7. <u>*Lemme*</u> - *Supposons que* $G = \mathbb{R}$. *Soit* e *le plus grand projecteur du centre de* M *majoré par* q_∞ . *Alors ce projecteur appartient à* M^α . *Le groupe à un paramètre* U^e *canoniquement associé à* α^e *opère sur* eH *et appartient à* $RP(\alpha^e, M_e)$; *il est minimal dans le sens suivant : pour tout* $V \in RP(\alpha^e, \mathcal{L}(eH))$, *et* $t \in \mathbb{R}$, on a

$$P_{U^e}(]t,\infty[) \leq P_V(]t,\infty[) .$$

Comme q_∞ est fixe pour les α_t , qui laissent globalement invariant le centre de M, on voit que $\alpha_t(e) = e$, pour tout t réel.
Le groupe à un paramètre U^e opére, par définition, sur $q_\infty^{\alpha^e} eH$. Comme $q_\infty^{\alpha^e} = eq_\infty^\alpha$ (8.5. iii), on voit que U^e opère sur eH .

Par ailleurs, on a, pour s,t dans $\mathbb{R}$, (cf 7.6)

$$M^{\alpha^e}([t,\infty[)\; M^{\alpha^e}(]s,\infty[) \subset M_e^{\alpha^e}(]s+t,\infty[)$$

et donc

$$M_e^{\alpha^e}([t,\infty[)\ [M_e^{\alpha^e}(]s,\infty[)\ eH]^- \subset [M_e^{\alpha^e}(]s+t,\infty[)\ eH]^-$$

ou encore, par 8.6

$$M_e^{\alpha^e}([t,\infty[)\ (eH)^{U^e}(]s,\infty[) \subset (eH)^{U^e}(]s+t,\infty[)$$

soit, par 6.13

$$M_e^{\alpha^e}([t,\infty[) \subset \mathcal{L}(eH)^{\Phi^{U^e,U^e}}([t,\infty[)$$

pour tout t réel.

Mais U^e est à valeurs dans M_e (cf. 8.4). M_e est donc globalement invariante par Φ^{U^e,U^e}. Posons $\beta = \Phi^{U^e,U^e}|M_e$.

Par 3.11, on a

$$M_e^{\alpha^e}([t,\infty[) \subset M_e^{\beta}([t,\infty[).$$

ce qui entraine, par 6.16, $\alpha^e = \beta$.

Ainsi U^e appartient à $RP(\alpha^e, M_e)$.

Soit maintenant $V \in RP(\alpha^e, \mathcal{L}(eH))$. Pour tout t réel, et a dans $M_e^{\alpha^e}(]t,\infty[)$, on a

$$a\,e\,H = a(e\,H)^V([o,+\infty[) \subset (eH)^V(]t,\infty[)$$

(par 8.6 ii) et 6.10).

Donc $(eH)^{U^e}(]t,\infty[) \subset (eH)^V(]t,\infty[)$ (cf. 8.6 i).

d'où le résultat.

8.8. *Théorème* - (*Borchers*)

Supposons que $G = \mathbb{R}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(*i*) $RP(\alpha, \mathcal{L}(H)) \neq 0$

(*ii*) $RP(\alpha, M) \neq 0$

(*iii*) $q_\infty^\alpha = I$

(*iv*) $\bigcap_t [M_t H]^- = \{0\}$

(i) $\Longrightarrow$ (iv) Soit $U \in RP(\alpha, \mathcal{L}(H))$. Alors, pour tout t réel ,

$$M_t H = M^\alpha (]t,\infty[) \; H^U([o,+\infty[\subset H^U (]t,+\infty[$$

(cf 6.10).

Donc $\bigcap_t [M_t H]^- \subset \bigcap_t (P_U (]t,\infty[) H) = [\bigwedge_t P_U (]t,\infty[)] H = \{0\}$

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Evident par définition de q_t^α et q_∞^α ($1 - q_\infty^\alpha$ est le projecteur sur $\bigcap_t [M_t H]^-$).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Si $q_\infty^\alpha = I$, le projecteur e du lemme 8.7 estégal à I . Le lemme 8.7 fournit alors $U \in RP(\alpha, M)$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) trivial.

8.9. *Théorème* - (*Kadison - Sakai*)

Toute dérivation D *d'une algèbre de von Neumann* M *est intérieure, i.e. du type* $D_a : x \longmapsto ax - xa$.

Si D *est antihermitienne, son spectre est réel, symétrique par rapport à* 0 *, de bornes* $-\|D\|$ *et* $\|D\|$*;on peut choisir* a *dans* M *, positif , tel que* $\|ae\| = \|D|M_e\|$ *pour tout projecteur* e *du centre de* M*.L'élément* a *ainsi choisi est unique, et c'est le plus petit élément positif de* M *qui induise* D .

En utilisant le théorème du graphe fermé, on démontre que D est un élément de $\mathcal{L}(M)$ ([18] lemme 3. p. 308). D'autre part, on a $D = D_1 + i D_2$ où D_1 et D_2 sont les dérivations antihermitiennes.

$$D_1(x) = \frac{1}{2} \left[D(x) - D(x^*)^* \right]$$
$$D_2(x) = \frac{1}{2i} \left[D(x) + D(x^*)^* \right]$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de considérer une dérivation antihermitienne (i.e. telle que $D(x^*) = -D(x)^*$, $\forall x \in M$). Alors, pour tout t réel, $\exp(it D)$ est un automorphisme involutif de M. Donc $\alpha : t \mapsto \exp(it D)$ est une représentation automorphique continue de $\mathbb{R}$ sur M. La proposition 6.7 montre que $\mathrm{Sp}\,\alpha = \mathrm{Sp}\ D \subset [-\|D\|, \|D\|] \subset \mathbb{R}$.

Par 3.17, $\mathrm{Sp}\,\alpha$ (et donc $\mathrm{Sp}\,D$) est symétrique par rapport à 0. Comme D est hermitienne au sens de ([2],§5), son rayon spectral est égal à sa norme, donc $-\|D\|$ et $\|D\|$ sont les bornes de $\mathrm{sp}\,D$ dans $\mathbb{R}$. D'après 8.3 iv), pour $t \geqslant \|D\|$, on a $q_t^\alpha = I$. Donc $q_\infty^\alpha = I$.

Soient a et U l'opérateur positif et le groupe à un paramètre canoniquement associés à α. Comme $q_\infty^\alpha = I$, U opère sur H. De plus, comme $a = \int_0^{\|D\|} t\, dq_t$, on voit que $\|a\| \leq \|D\|$

En dérivant en 0 l'identité

$$\exp(it D)(x) = \exp(ita)x\exp(-ita)$$

On voit que $D_a = D$.

Soit maintenant e un projecteur central de M. On a

$$De = De^2 = e(De) + (De)e = 2\,e(De)$$

Donc $e(De) = 2e(De)$ et $e(De) = 0$. Donc $De = 0$.
Ainsi, tout projecteur central de M appartient à M^α. Le lemme 8.5 iii) montre alors que ea est le générateur infinitésimal du groupe U^e associé à α^e. La démonstration précédente, appliquée à M_e, montre alors que

$$D_{ae} = D|M_e \qquad \text{et} \qquad \|ae\| \leq \|D|M_e\|.$$

Soit maintenant un autre élément b positif de M tel que $D_b = D$. Alors, pour tout projecteur central e, la représentation V^e: $t \mapsto \exp(itbe)$ induit α^e. Donc $V^e \in RP(\alpha^e, \mathcal{U}(eH))$. Mais, par 8.7, on a donc

$$P_{U_e}(\,]t,\infty[\,) \leq P_{V^e}(\,]t,\infty[\,) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prenons $t = \|be\|$. On a $P_{V^e}(\,]\|be\|, \infty[\,) = 0$ et donc

$P_{U^e}(\,]t,\infty[\,) = 0$. Ceci entraîne $\|be\| \geqslant \|ae\|$.

Supposons maintenant que $(a-b)^+$ soit non nul . Il existe alors un $\lambda > 0$ et un projecteur spectral e de $a-b$ tel que $(a-b)e \geqslant \lambda e$. Comme $D_a = D_b$, on voit que $a-b$ (et donc $(a-b)^+$ et e) appartient au centre de M . Pourtant, la relation $(a-b)e \geqslant \lambda e$ conduit à

$$\| be \| < \| be \| + \lambda = \| be + \lambda e \| \leqslant \| ae \|$$

et donc à une contradiction . Donc $(a-b)^+ = 0$, c'est à dire $a \leqslant b$.

Remarquons enfin que si on pose $c = a - \frac{1}{2} \| a \|$, on a

$$D_c = D_a = D \quad , \text{ et donc } \| c \| \geqslant \frac{1}{2} \| D \|$$

Par ailleurs, le calcul fonctionnel montre que $\| c \| \leqslant \frac{1}{2} \| a \|$.

Donc $\quad \| c \| \leqslant \frac{1}{2} \| a \| \leqslant \frac{\| D \|}{2} \leqslant \| c \|$, donc $\| a \| = \| D \|$.

On montre de même que $\| ae \| = \| D |M_e \|$.

L'unicité de a résulte facilement de ce qui précède .

8.10. <u>Lemme</u> - *(Araki)*

Soient M *une algèbre de von Neumann opérant sur un espace de Hilbert* H , U *une représentation unitaire fortement continue de* $\mathbb{R}^n$ *dans* H , *telle que pour tout* t *de* $\mathbb{R}^n$, U_t *appartienne à* M. *Alors il existe une représentation unitaire fortement continue* Z *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans le centre de* M , *telle que la représentation* $UZ : t \mapsto U_t Z_t$ *vérifie la condition suivante : pour tout voisinage* Ω *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$, le projecteur $P_{UZ}(\Omega)$ *a pour support central* I *dans* M .

Notons que si M est un facteur, il suffit de prendre θ dans $\mathrm{Sp}\, U$, et $Z_t = \overline{\langle \theta, t \rangle}\, I$ pour tout t de $\mathbb{R}^n$.

Alors, on aura $0 \in \mathrm{sp}\, UZ$ (cf. 3.16) et donc $P_{UZ}(\Omega) \neq 0$ pour tout voisinage de zéro Ω (cf. 3.8 ii))

Dans le cas général, considérons une partition de $\mathbb{R}^n$, soit $(E_j)_{j \in J}$, composée d'hypercubes semi-ouverts de longueur d'arête égale à 1. On a

$$\sum_{j \in J} P_U (E_j) = I \ .$$

Comme J est dénombrable, on peut construire par récurrence une famille $(Q_j)_{j \in J}$ de projecteurs 2 à 2 orthogonaux du centre de M tels que

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j\in J} Q_j = I \\ &Q_j \leq c(P_U(E_j)) \qquad \forall j \in J \end{aligned}$$

(pour tout projecteur e de M, on note $c(e)$ son support central).
Pour tout j de J, soit θ_j un point de E_j. Posons

$$Z_0(t) = \sum_{j\in J} \overline{\langle\theta_j, t\rangle}\, Q_j$$

On a ainsi une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le centre de M.

Découpons maintenant chaque hypercube E_j en 2^n hypercubes $(E_{j,k_1})_{k_1=1,\dots,2^n}$ semi-ouverts, de longueur d'arête égale à 1/2. On a, pour tout $j \in J$

$$\sum_{k_1=1}^{2^n} P_U(E_{j,k_1}) = P_U(E_j) ,$$

Et donc
$$Q_j \leq \sum_{k_1=1}^{2^n} c(P_U(E_{j,k_1})) .$$

Pour tout j de J, il existe une famille $(Q_{j,k_1})_{k_1=1,\dots,2^n}$ de projecteurs du centre de M, 2 à 2 orthogonaux, tels que

$$Q_j = \sum_{k_1=1}^{2^n} Q_{j,k_1}$$

et
$$Q_{j,k_1} \leq c(P_U(E_{j,k_1}))$$

Pour tout j de J, et k_1 de $\{1,\dots,2^n\}$, soit θ_{j,k_1} un point de E_{j,k_1}

Posons

$$Z_1(t) = \sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \overline{\langle\theta_{j,k_1}, t\rangle}\, Q_{j,k_1}$$

ce qui définit encore une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$ dans H, à valeurs dans le centre de M.

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on construit une partition de $\mathbb{R}^n$ en hypercubes semi-ouverts de longueur d'arête égale à $\frac{1}{2^p}$, soit

$$\left(E_{j,k_1,\dots,k_p} \right)_{j \in J, k_1,\dots,k_p \in \{1,\dots,2^n\}}$$

Par récurrence, on associe à cette partition une famille de projecteurs du centre M , $\left(Q_{j,k_1,\dots,k_p} \right)_{j\in J,\ k_1,\dots,k_p \in \{1,\dots,2^n\}}$ 2 à 2 orthogonaux, tels que

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sum_{k_p=1}^{2^n} Q_{j,k_1,\dots,k_p} &= Q_{j,k_1,\dots,k_{p-1}} \\ Q_{j,k_1,\dots,k_p} &\leq c(P_U(E_{j,k_1,\dots,k_p})) \end{aligned}$$

Soit alors $\theta_{j,k_1,\dots,k_p}$ un point de $E_{j,k_1,\dots,k_p}$. Posons

$$Z_p(t) = \sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \dots \sum_{k_p=1}^{2^n} \overline{<\theta_{j,k_1,\dots,k_p},t>}\ Q_{j,k_1,\dots,k_p}$$

Comme $\sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \dots \sum_{k_p=1}^{2^n} Q_{j,k_1,\dots,k_p} = I$ (par (1) et (2)) , c'est encore une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le centre de M .

La suite $Z_p(t)$ ainsi formée converge uniformement sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie normique. En effet, on a

$$Z_{p+1}(t) - Z_p(t) =$$

$$= \sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \dots \sum_{k_{p+1}=1}^{2^n} \overline{<\theta_{j,k_1,\dots,k_{p+1}},t>}\ Q_{j,k_1,\dots,k_{p+1}} - \sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \dots \sum_{k_p=1}^{2^n} \overline{<\theta_{j,k_1\dots k_p},t>}\ Q_{j,k_1,\dots,k_p}$$

$$= \sum_{j\in J} \sum_{k_1=1}^{2^n} \dots \sum_{k_{p+1}=1}^{2^n} \left(\overline{<\theta_{j,k_1,\dots,k_{p+1}},t>} - \overline{<\theta_{j,k_1,\dots,k_p},t>} \right) Q_{j,k_1,\dots,k_{p+1}}$$

d'où

$$\| Z_{p+1}(t) - Z_p(t) \| \leq \sup_{j,k_1,\dots,k_{p+1}} | (\theta_{j,k_1,\dots,k_{p+1}} - \theta_{j,k_1,\dots,k_p} | t) |$$

$$\leq \| t \| \frac{\sqrt{n}}{2^p} .$$

D'où le résultat .

Posons $Z_t = \lim\limits_{p\to\infty} Z_p(t)$. Les propriétés de la suite $Z_p(t)$ assurent que l'on obtient ainsi une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le centre de M .

Soit Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Il existe q tel que

$E_{j,k_1,\ldots,k_q} - E_{j,k_1,\ldots,k_q} \subset \Omega$ pour tous j de J,et $k_1,\ldots k_p$ de $\{1,\ldots 2^n\}$.

Par ailleurs, on a, pour tout p de $\mathbb{N}$, j de J, $k_1,\ldots,k_p$ de $\{1,\ldots 2^n\}$

$$P_{UZ_p}(\Omega)\ Q_{j,k_1,\ldots,k_p} = P_U(\Omega + \theta_{j,k_1,\ldots,k_p})\ Q_{j,k_1,\ldots,k_p} .$$

Si on prend $p \geqslant q$, comme $\theta_{j,k_1,\ldots,k_p} \in E_{j,k_1,\ldots,k_p} \subset E_{j,k_1,\ldots,k_q}$, on a $(\forall p \geqslant q,\ \forall j \in J,\ \forall k_1,\ldots,k_p \in \{1,\ldots,2^n\})$

$$P_{UZ_p}(\Omega)\ Q_{j,k_1,\ldots,k_p} \geqslant P_U(E_{j,k_1,\ldots,k_q})\ Q_{j,k_1,\ldots,k_p} .$$

Si on somme ces relations pour tous les $k_{q+1},\ldots,k_p \in \{1,\ldots,2^n\}$, on obtient (en utilisant (2)) $(\forall p \geqslant q\ ,\forall j\in J,\ \forall k_1,\ldots,k_q \in \{1,\ldots,2^n\})$

$$P_{UZ_p}(\Omega)\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} \geqslant P_U(E_{j,k_1,\ldots,k_q})\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} .$$

Si on passe à la limite suivant p , on trouve $(\forall j \in J,\ \forall k_1,\ldots,k_q \in \{1,\ldots,2^n\})$

$$P_{UZ}(\Omega)\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} \geqslant P_U(E_{j,k_1,\ldots,k_q})\ Q_j,$$

et donc, pour tous j de J , $k_1,\ldots,k_q$ de $\{1,\ldots,2^n\}$, on a

$$\begin{aligned} c(P_{UZ}(\Omega))\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} &\geqslant c(P_U(E_{j,k_1,\ldots,k_q}))\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} \\ &\geqslant Q_{j,k_1,\ldots,k_q} \qquad ((2)). \end{aligned}$$

On a donc

$$c(P_{UZ}(\Omega))\ Q_{j,k_1,\ldots,k_q} = Q_{j,k_1,\ldots,k_q}$$

pour tous j de J , et $k_1,\ldots,k_q$ dans $\{1,\ldots,2^n\}$.

Si on somme toutes ces relations, on trouve

$$c(P_{UZ}(\Omega)) = I .$$

8.11. *Théorème* - (*Borchers*)

Supposons que $G = \mathbb{R}^n$. *Soit* C *un cône convexe saillant fermé de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* U *une représentation unitaire fortement continue de* $\mathbb{R}^n$ sur H, *telle que* $U_t M U_t^* = M$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^n$, *et telle que* Sp U *soit inclus dans* C . *Alors, il existe une représentation unitaire fortement continue* U' *de* $\mathbb{R}^n$ *sur* H , *à valeurs dans* M , *telle que* sp U' $\subset$ Sp U ,*et vérifiant* $U_t\, x\, U_t^* = U'_t\, x\, U'^*_t$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, x \in M$.

Posons $\alpha = \Phi^{U,U}|_M$.

Choisissons une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que C soit inclus dans le cône $\{t\, e_1 + \dots + t_n\, e_n\ ;\ t_1 \geqslant 0, \dots , t_n \geqslant 0\}$.

Soit j_i l'injection $t \mapsto t\, e_i$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; alors $\hat{j}_i$ est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}\, e_i$. On a, par (3.14 (iii))

$$\mathrm{Sp}(U \circ j_i) = [\hat{j}_i\ (\mathrm{Sp}\ U)]^- \subset [\hat{j}_i\ (C)]^- = \mathbb{R}^+$$

On en déduit que $U \circ j_i \in \mathrm{RP}\ (\alpha \circ j_i\ ,\ \mathcal{L}(H)\ )$. Par 8.8 , il existe $V^i \in \mathrm{RP}(\alpha \circ j_i\ , M)$. Plus précisément, V^i est le groupe à un paramètre canoniquement associé à $\alpha \circ j_i$.

Soit $i_o \neq i$, et $t_o \in \mathbb{R}$. L'automorphisme $\alpha \circ j_{i_o}(t_o)$ commute à tous les $\alpha \circ j_i(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, donc, par 8.3. v), $\alpha \circ j_{i_o}(t_o)$ laisse invariant tous les opérateurs V^i_t $(t \in \mathbb{R})$. Mais cela s'écrit aussi

$$V^{i_o}_{t_o}\ V^i_t\ V^{i_o *}_{t_o} = V^i_t \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Cela était vrai pour tout t_o de $\mathbb{R}$, et pour tous i et i_o dans $\{1,\dots,n\}$ on en déduit que tous les V^i_t $(i = 1,\dots,n\ ;\ t \in \mathbb{R}\ )$ commutent entre eux.

Si on pose $V_{t_1 e_1 + \dots + t_n e_n} = V^1_{t_1} \dots\dots V^n_{t_n}$, on a donc une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans M , et qui induit évidemment α sur M .

On a donc, pour s,t de $\mathbb{R}^n$

$$U_s\, V_t\, U_s^* = \alpha_s\ (V_t) = V_s\, V_t\, V_s^* = V_t$$

Donc U_s et V_t commutent; l'application

$$t \longmapsto W_t = V_t^* U_t$$

est donc une représentation unitaire de $\mathbb{R}^n$ fortement continue, à valeurs dans le commutant M' de M. Le lemme 8.10 appliqué à la représentation W et à l'algèbre de von Neumann M' fournit une représentation Z fortement continue, à valeurs dans le centre de M, telle que, pour tout voisinage Ω de 0, le support central de $P_{WZ}(\Omega)$ soit I.

Posons $\quad U'_t = V_t Z_t^*$. Comme Z est à valeurs dans le centre de M, $t \longmapsto U'_t$ est encore une représentation unitaire fortement continue de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans M, et qui induit α sur M.

Par ailleurs, on a, pour tout t de $\mathbb{R}^n$

$$U'_t W_t Z_t = V_t W_t = U_t$$

Comme $W_t Z_t$ appartient à M', et U'_t à M, on peut appliquer (6.21.(iii)), et on a

$$P_{U'}(F_1) P_{WZ}(F_2) \leq P_U(F_1 + F_2)$$

pour tous fermés F_1, F_2 de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, si $\theta \notin \mathrm{Sp}\, U = \mathrm{Supp}\, P_U$, il existe un voisinage compact Ω de 0 tel que $\quad P_U(\theta+\Omega+\Omega) = 0$

On en déduit $\quad P_{U'}(\theta+\Omega) \; P_{WZ}(\Omega) = 0$

d'où :

$$M' P_{U'}(\theta+\Omega) \; P_{WZ}(\Omega) H = \{0\} ,$$

ou encore $\quad P_{U'}(\theta+\Omega) \; M' P_{WZ}(\Omega) H = \{0\}$,

soit $\quad P_{U'}(\theta+\Omega) \; c(P_{WZ}(\Omega) = 0$

et donc $\quad P_{U'}(\theta+\Omega) = 0$

On en déduit que $\theta \notin \mathrm{Sp}\, U'$; donc $\quad \mathrm{Sp}\, U' \subset \mathrm{Sp}\, U$.

8.12. <u>*Théorème*</u> - *(Olesen)*

Supposons G *connexe, et* α *continu pour la topologie normique des automorphismes. Alors, il existe une représentation unitaire normiquement continue* U *de* G *sur* H *, à valeurs dans* M *, qui induit* α *sur* M .

Comme G est localement compact abélien connexe, il existe un entier n et un groupe compact (connexe) K tel que $G = \mathbb{R}^n \times K$ ([35], th.2.4.1) Notons j l'injection $K \longrightarrow G$, et $j_i (i=1,\dots,n)$ les n injections $\mathbb{R} \longrightarrow G$ correspondante à cette décomposition. Les applications duales sont les projections correspondantes.

Comme α est normiquement continue, $\mathrm{Sp}\,\alpha$ est compact (prop. 6.6) et donc $\mathrm{Sp}(\alpha \circ j_i) = \hat{j}_i\,(\mathrm{Sp}\,\alpha)$ aussi. D'après 8.3 iv), on en déduit que l'opérateur autoadjoint positif canoniquement associé à $\alpha \circ j_i$ est borné. Le groupe à un paramètre V^i canoniquement associé à $\alpha \circ j_i$ opère donc sur H, et est normiquement continu. Par (8.7), il induit $\alpha \circ j_i$ sur M. Par ailleurs, soit t_o réel, et $i_o \neq i$, $\alpha \circ j_{i_o}(t_o)$ commute à tous les $\alpha \circ j_t(t)$. Donc, par 8.3 v), $\alpha \circ j_{i_o}(t_o)$ laisse invariant tous les opérateurs $V_t^i (t \in \mathbb{R})$. On en déduit que tous les V_t^i $(i=1,\dots,n\ ;\ t \in \mathbb{R})$ commutent entre eux. De même, pour tout g de K, $\alpha \circ j(g)$ commute à tous les $\alpha \circ j_i(t)$. Donc, tous les V_t^i $(i=1,\dots,n;\ t \in \mathbb{R})$ sont invariants par les automorphismes $\alpha \circ j(g)$ $(g \in K)$.

Le groupe dual $\hat{K}$ de K est discret, et peut être totalement ordonné (cf [35] 8.1.2 a) et 2.5.6 c)). Pour un tel ordre, soit S le semi-groupe des éléments positifs. Notons P_γ le projecteur sur le sous- fermé $[M^{\alpha o j}(\gamma+S)H]^-$ Comme $\mathrm{Sp}\,\alpha$ est compact, $\mathrm{Sp}\,(\alpha \circ j) = \hat{j}\,(\mathrm{Sp}\,\alpha)$ aussi; de plus, il est symétrique par rapport à 0 (car $\alpha \circ j$ est une représentation involutive). Il est donc de la forme

$\{-\gamma_p,\dots,-\gamma_1, 0, \gamma_1,\dots,\gamma_p\}$. Supposons que les éléments γ_i aient été ordonnés, i.e. que $0 = \gamma_o \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_p$.

Pour tout g de K, posons

$$W_g = \sum_{i=o}^{p-1} \langle g,\gamma_i \rangle \,(P_{\gamma_i} - P_{\gamma_{i+1}}) + \langle g,\gamma_p \rangle\, P_{\gamma_p}$$

On a $P_{\gamma_o} = I$ car $0 \in S$ et donc $I \in M^{\alpha o j}(S)$. On obtient donc ainsi une représentation W normiquement continue de K sur M, telle que

$$\begin{aligned} P_W(\{\gamma_i\}) &= P_{\gamma_i} - P_{\gamma_{i+1}} && (0 \leq i \leq p-1) \\ &= P_{\gamma_p} && \text{si } i = P \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que $P_W(\gamma+S) = P_\gamma$.

D'autre part, on a, pour tous γ_1,γ_2 dans $\hat{K}$

$$M^{\alpha o j}(\gamma_1+S)\ M^{\alpha o j}(\gamma_2+S) \subset M^{\alpha o j}(\gamma_1+\gamma_2+S)$$

et donc

$$M^{\alpha o j}(\gamma_1+S)P_{\gamma_2}H \subset P_{\gamma_1+\gamma_2}H$$

et donc, par (6.13)

$$M^{\alpha o j}(\gamma_1+S) \subset \mathcal{L}(H)^{\Phi^{W,W}}(\gamma_1+S) \qquad \forall\, \gamma_1 \in \hat{K} \ .$$

Comme W est à valeurs dans M , $\Phi^{W,W}$ laisse stable M . Posons $\beta = \Phi^{W,W}|M$. On a alors

$$M^{\alpha o j}(\gamma_1+S) \subset M^{\beta}(\gamma_1+S)$$

et donc, par (6.16) $\qquad \alpha \circ j = \beta$

Donc W induit $\alpha \circ j$ sur M .

D'autre part, comme les opérateurs V_t^i sont invariants par les $\alpha \circ j(g)$ on en déduit que les V_t^i commutent aux W_g .

Ainsi

$$(t_1,\dots,t_n,g) \longmapsto V_{t_1}^1 \dots V_{t_n}^n\ W_g$$

est une représentation unitaire normiquement continue de $\mathbb{R}^n \times K$ dans M , qui clairement induit α sur M .

<u>NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE</u> .

Les énoncés 8.1 à 8.9 proviennent, pour l'essentiel, de [1] . La première démonstration du théorème 8.9 , par des méthodes différentes, a été fournie par R.V. Kadison [24] et S. Sakai [36] . Le lemme 8.10 est dû à H. Araki qui ne l'a pas publié. Il permet de démontrer, en utilisant les techniques d'Arveson, le théorème 8.11 de H.J. Borchers, pour un cône convexe saillant fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$. On trouve dans [31] une démonstration de ce théorème, dans le cas où le cône est $[0,+\infty[^n$, qui utilise également les idées d'Arveson. En ce qui concerne ce théorème de Borchers on peut aussi se reporter à [3], [4], [5] où des méthodes différentes sont employées.

Le théorème 8.12 est dû à D. Olesen ([29], th. 4.2).

§9 GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'UNE C^*-ALGÈBRE

Soient A une C^*-algèbre, A' son dual, A_o l'espace vectoriel sous-jacent muni de la topologie $\sigma(A,A')$. Alors (A, A_o) est une algèbre de Banach involutive bitopologique au sens du §7.

Soit A'' le bidual de A identifié à l'algèbre de von Neumann enveloppante de A. Si α désigne une représentation automorphique involutive normiquement continue d'un groupe localement compact G sur A, nous noterons ${}^{tt}\alpha$ la représentation bitransposée de G sur A''.

9.1. *Proposition* (*Corollaire du théorème de Kadison-Sakai*).

Soit D *une dérivation antihermitienne d'une* C^**-algèbre* A. *Alors* D *se prolonge de manière unique en une dérivation antihermitienne* $\bar{D}$ *de* A'', *continue pour* $\sigma(A'', A')$. *Le plus petit élément positif* h *de* A'' *tel que* $\bar{D}(x) = hx - xh$ *pour tout* $x \in A''$ *est semi-continu inférieurement relativement à* A *et on a* $\|h\| = \|D\|$.

Il résulte du théorème du graphe fermé que D est continue (cf. 8-9). En bitransposant D on obtient un prolongement $\bar{D}$ de D à A'' qui est continu pour $\sigma(A'',A')$. Utilisant la densité de la boule unité de A dans celle de A'' pour $\sigma(A'',A')$ on vérifie facilement que $\bar{D}$ est une dérivation de A''. Pour $s \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n}(is\,\bar{D})^n a$ converge uniformément sur la boule unité de A'', donc $\exp(is\bar{D})$ est continu pour $\sigma(A'',A')$ sur cette boule unité et coïncide avec $\alpha_s = \exp(isD)$ sur la boule unité de A. On a donc $\exp(i\,s\,\bar{D}) = ({}^{tt}\alpha)_s$. Posons $\beta = {}^{tt}\alpha$ et $B = A''$.

On sait que $B^\beta(\,]s, \infty[\,)$ est l'adhérence de $A^\alpha(\,]s, \infty[\,)$ pour $\sigma(A'',A')$ pour tout s de $\mathbb{R}$ (cf. Rem. 6-8-b). Il résulte de la proposition 8-1-iii) que $p_s^\beta = 1 - q_s^\beta$ est la borne supérieure des supports des éléments y^* où y parcourt $A^\alpha(\,]s,\infty[\,)$. Or le support de tout élément de A est un projecteur semi-continu inférieurement de A'' et la borne supérieure de tels projecteurs est semi-continue inférieurement (voir [13], § 2-2).

Posons $d = \|\bar{D}\| = \|D\|$. Le plus petit élément de B^+ induisant $\bar{D}$ est $h = \int_o^d t\, dq_t^\beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h = \sum_{k=o}^{n-1} \int_{kd/n}^{(k+1)d/n} t dq_t^\beta$

Considérons alors

$$h_n = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{k}{n} d \left(q^{\beta}_{(k+1)d/n} - q^{\beta}_{kd/n} \right)$$

$$= \frac{d}{n} \sum_{k=o}^{n-1} k \left(p^{\beta}_{kd/n} - p^{\beta}_{(k+1)d/n} \right)$$

$$= \frac{d}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k\, p^{\beta}_{kd/n} - \sum_{k=o}^{n-2} k\, p^{\beta}_{(k+1)d/n} \right]$$

$$= \frac{d}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} p^{\beta}_{kd/n} - \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)\, p^{\beta}_{kd/n} \right]$$

$$= \frac{d}{n} \sum_{k=1}^{n-1} p^{\beta}_{kd/n} \quad .$$

On a $o \leqslant h_n \leqslant h \leqslant h_n + \frac{d}{n} 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc h est limite normique de h_n et par suite semi-continu inférieurement .

9.2. <u>Définition</u> Le plus petit élément positif h de A'' tel que $Dx = hx - xh$ pour tout $x \in A$ sera appelé le générateur positif semi-continu inférieurement de D .

9.3. <u>*Lemme*</u>*: Soit* D *une dérivation antihermitienne d'une* C^**-algèbre* A*. Soient* h_+ *et* h_- *les générateurs positifs semi-continus inférieurement de* D *et* $-D$ *. Alors* $h_+ + h_-$ *appartient au centre de* A'' *et, pour toute représentation factorielle* Π *de* A *, on a*

$$\| \bar{\Pi} (h_+ + h_-) \| = \| \bar{\Pi} (h_+) \| = \| \Pi \circ D \|,$$

(où $\bar{\Pi}$ *désigne le prolongement canonique de* Π *à* A''*).*

Comme $-h_-$ est un générateur de D , il est clair que $h_+ + h_-$ appartient au centre de A'' , d'où

(1) $$\bar{\Pi}(h_+ + h_-) = \| \bar{\Pi}(h_+ + h_-) \| . 1 \quad .$$

Comme $$0 \leqslant h_+ \leqslant h_+ + h_- \text{ , on a}$$
$$\| \bar{\Pi}(h_+) \| \leqslant \| \bar{\Pi}(h_+ + h_-) \| \quad .$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

(2) $$\| \bar{\Pi}(h_+) \| \leqslant \| \bar{\Pi}(h_+ + h_-) \| - \varepsilon \ .$$

D'après (1) et (2) , cela entraîne

$$\bar{\Pi}(h_+) \leqslant \| \bar{\Pi}(h_+) \| . 1 \leqslant \bar{\Pi}(h_+ + h_-) - \varepsilon \, . \, 1 ,$$

d'où

$$0 \leq \bar{\Pi}(h_-) - \varepsilon.1 \ .$$

C'est impossible, puisque $\Pi(h_-)$ est le générateur positif minimal de $\Pi\circ(-D)$ (cf. 8-9). Donc $\bar{\Pi}(h_+) = \bar{\Pi}(h_+ + h_-)$.

Comme Π est quasi-équivalente à une représentation de la forme $x \longmapsto Px$ où P est un projecteur du centre de A'' , on a

$$\| \Pi \circ D \| = \| \bar{D}_p \| \ ,$$ où $\bar{D}_p$ désigne la réduite par P du prolongement $\bar{D}$ de D à A'' , puis , d'après 8-9

$$\| \Pi \circ D \| = \| Ph_+ \| = \| \bar{\Pi}(h_+) \| \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

9.4. <u>*Proposition*</u> *Soit* D *une dérivation d'une* C^**-algèbre simple* A . *Il existe un multiplicateur* h *de* A *tel que* $D(x) = hx-xh$ *pour tout* x *de* A.

Comme A est simple, toute représentation non nulle est isométrique; il en résulte que la fonction $\Pi \longmapsto \| \Pi(h_+ + h_-) \|$, définie sur l'ensemble des représentations non nulles de A , est constante, donc continue, le théorème de Dauns-Hofmann ([33], cor 4.) , indique alors que $h_+ + h_-$ est un multiplicateur de A, donc est semi-continu supérieurement relativement à A ([33], th. 2.5) . Il est donc de même de $h_+ = (h_+ + h_-)-h_-$, ainsi h_+ est un multiplicateur de A (op. cit.).

9.5. <u>*Proposition*</u> *Soient* A *une* C^**-algèbre,* α *une représentation automorphique involutive équicontinue de* $\mathbb{R}$ *dans* A , ϕ *un élément de* A' , $(\pi,\mathcal{H},\xi)$ *les objets de la représentation de Gel'fand-Naimark-Ségal associée à* $|\phi|$.

S'il existe θ_o *dans* $\mathbb{R}$ *tel que* ϕ *appartienne à* $A'^{\,t_\alpha}(]-\infty,\theta_o])$, *la représentation* Π *est covariante relativement à* α , *c'est-à-dire qu'il existe une représentation unitaire continue* u *de* $\mathbb{R}$ *sur* H , *telle que*

$$\forall s \in R \ , \forall x \in A \quad , \quad \Pi(\alpha_s(x)) = u_s \ \Pi(x) \ u_s^* \ .$$

Il existe une isométrie partielle v de $\Pi(A)''$ telle que

$$v^*v \ \xi = \xi$$
$$\phi(x) = (\ \Pi(x)\ \xi \,|\, v\xi) \quad , \quad \forall x \in A \ .$$

Soit H_θ l'adhérence de l'espace vectoriel $\pi(A^\alpha(]\theta,+\infty[))\xi$; il résulte de 3.5.(vi) que $H_\theta = \bigvee_{\theta'<\theta} H_{\theta'}$, et $H = \bigvee_\theta H_\theta$. On pose $H_\infty = \bigcap_\theta H_\theta$.

Comme $A^\alpha([\theta,+\infty[)\ A^\alpha(]\theta',+\infty[) \subset A^\alpha(]\theta+\theta',+\infty[)$ pour tous θ,θ' de $\mathbb{R}$, on a

(1) $$\Pi(A^\alpha([\theta,+\infty[))\ H_{\theta'} \subset H_{\theta+\theta'} ,$$

d'où $$\Pi(A^\alpha([\theta,+\infty[))\ H_\infty \subset H_\infty , \qquad \forall\theta\in\mathbb{R} ,$$

puis $$\Pi(A)\ H_\infty \subset H_\infty .$$

Il résulte de 3.13 i) que ϕ annule $A^\alpha(]\theta_0,+\infty[)$, autrement dit $\Pi(A^\alpha(]\theta_0,+\infty[)\ \xi$ est orthogonal à $v\,\xi$, donc H_{θ_0} est orthogonal à $v\,\xi$, ainsi que H_∞ à fortiori. Comme ce dernier espace est invariant par $\Pi(A)$, on en déduit que H_∞ est orthogonal à $\Pi(A)\,v\,\xi$; comme v appartient à $\Pi(A)''$, il résulte de la définition de v que, finalement, H_∞ est orthogonal à $\Pi(A)''\,\xi$; comme ξ est totalisateur cela implique $H_\infty = \{o\}$.

Il résulte de ce qui précède que la famille p_θ des projecteurs sur H_θ est une résolution de l'identité. On pose

$$u_s = \int \exp(is\theta)\ dp_\theta .$$

Considérons la représentation $s \longmapsto u_s$ de $\mathbb{R}$ dans H. Comme $H_\theta = H^u(]\theta,+\infty[)$, on voit que la relation (1) ci-dessus entraîne, d'après 6.13 iii),

$$\Pi(A^\alpha([\theta,+\infty[)) \subset \mathcal{L}(H)^{\Phi^{u,u}}([\theta,+\infty[).$$

En regardant Π comme un élément de $\mathcal{L}(A,\mathcal{L}(H))$, cela entraîne, d'après 6.13 ii),

$$\Pi \in \mathcal{L}(A,\mathcal{L}(H))^{\Phi^\alpha,\Phi^{u,u}}([0,+\infty[)$$

soit, comme Π est involutive,

$$\Pi \in \mathcal{L}(A,\mathcal{L}(H))^{\phi^\alpha,\Phi^{u,u}}(\{0\}) \qquad \text{(cf. 3.17)} ,$$

autrement dit

$$\forall\ s\in\mathbb{R} \qquad \phi^{u,u}_{-s} \circ \Pi \circ \alpha_s = \Pi ,$$

d'où $$u_s^*\ \Pi(\alpha_s(x)\ u_s = \Pi(x) \qquad \forall\ x\in A,$$

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE .

L'énoncé 9.5 est dû à W. Arveson ([1], th. 5.3). Le reste du paragraphe provient de [32] . S. Sakai avait auparavant établi la proposition 9.4 par une méthode différente dans [38] .

§10. ÉQUIVALENCE EXTÉRIEURE POUR LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'UNE ALGÈBRE DE von NEUMANN.

Dans tout ce paragraphe nous considérons une algèbre de von Neumann M et un groupe localement compact commutatif G. Nous appelons plus brièvement représentation continue de G sur M toute représentation automorphique involutive continue de G sur l'algèbre de Banach bitopologique involutive (M,M_o) où M_o désigne l'algèbre M munie de la topologie ultrafaible.

10.1. Lemme. *Soit* α *une représentation continue de* G *sur* M *et soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des idéaux à gauche non nuls de* M, *ultrafaiblement fermés et stables par l'action de* $\alpha(G)$. *L'application* $N \longmapsto e_N$ *associant à tout* $N \in \mathcal{N}$ *son plus grand projecteur est une bijection de* $\mathcal{N}$ *sur l'ensemble des projecteurs non nuls de* M^α. *De plus* e_N *appartient au centre de* M^α *si et seulement si l'élément* N *de* $\mathcal{N}$ *est stable par les multiplications à droite et à gauche par les éléments de* M^α .

Si N est globalement invariant par $\alpha(G)$, son plus grand projecteur e_N est dans M^α . De plus, il est clair que $N \longmapsto e_N$ est une bijection de $\mathcal{N}$ sur l'ensemble des projecteurs non nuls de M^α . Enfin, $N \in \mathcal{N}$ étant un idéal à gauche, il est stable par les multiplications à droite et à gauche par les éléments de M^α si et seulement si il est stable par les automorphismes intérieurs associés aux unitaires de M^α , c'est-à-dire si et seulement si e_N est invariant par ces automorphismes. Cela montre la dernière assertion du lemme.

10.2. Remarques. Conservons les notations du lemme précédent. Les hypothèses faites en 7.11 sont vérifiées pour l'algèbre de Banach bitopologique (M,M_o) et la représentation α . Nous interprétons ci-dessous dans ce cadre certaines considérations de la fin du §7.

a) Soient $N \in \mathcal{N}$ et e son plus grand projecteur. Si $B = N \cap N^*$, on a bien sûr $B = e\,Me$, d'où $\operatorname{sp} \alpha^B = \operatorname{sp} \alpha^e$. En particulier, compte-tenu du lemme 10.1, l'ensemble $\Gamma(\alpha)$ défini en 7.11 n'est autre que l'intersection des fermés $\operatorname{sp} \alpha^e$ lorsque e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de M^α .

b) Soit e un projecteur de M^α de support central égal à 1 dans M. Alors il n'existe pas d'idéal bilatère ultrafaiblement fermé contenant l'idéal à gauche Me et distinct de M. Par conséquent, d'après la proposition 7-14, $\Gamma(\alpha)$ est égal à l'intersection des fermés sp α^f lorsque f décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de M^α majorés par e . Ainsi, compte-tenu du fait que $(eMe)^{\alpha^e} = e(M^\alpha)e$ (voir lemme 8.5.ii)), on a $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha^e)$.

10.3. Remarque . Conservons les notations précédentes. Soient e un projecteur non nul de M^α et $\bar{e}$ son support central dans M^α . Montrons que sp α^e = sp $\alpha^{\bar{e}}$. Puisque α^e est une sous-représentation de $\alpha^{\bar{e}}$, on a sp$\alpha^e \subset$ sp $\alpha^{\bar{e}}$. Pour montrer que sp $\alpha^{\bar{e}} \subset$ sp α^e il suffit de vérifier que pour tout fermé P de $\hat{G}$ tel que
$(\bar{e}M\bar{e})^{\alpha^{\bar{e}}}(P) \neq 0$, on a $(eMe)^{\alpha^e}(P) \neq 0$ (voir prop. 3.7).

Soit x un élément non nul de $(\bar{e}M\bar{e})^{\alpha^{\bar{e}}}(P) = M^\alpha(P) \cap (\bar{e}M\bar{e})$ (voir lemme 8.5. ii)). Etant donné que $\bar{e}\,x\,\bar{e} \neq 0$ et que $\bar{e}$ est la borne supérieure des projecteurs ueu^* lorsque u décrit l'ensemble des unitaires de M^α , il existe deux unitaires u et v dans M^α tels que $ueu^*\,xv\,ev^* \neq 0$. Posons $y = eu^*x\,ve$. Alors y est un élément non nul de eMe, et d'autre part y appartient à $M^\alpha(P)$ d'après la proposition 7.6. Ainsi $(e\,Me)^{\alpha^e}(P) = M^\alpha(P) \cap (e\,Me)$ n'est pas réduit à 0.

Il résulte de ce qui précède que $\Gamma(\alpha)$ est égal à l'intersection des fermés sp α^e lorsque e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls du centre de M^α .

10.4. Proposition. *Soit* α *une représentation continue de* G *sur* M *telle que* M^α *soit un facteur. Alors* sp α est égal à $\Gamma(\alpha)$, *et* sp α *est donc un sous-groupe fermé de* $\hat{G}$.

Cela résulte de la remarque 10.3 et de la proposition 7.12 (voir aussi le corollaire 7.9)

10.5. Lemme. *Soit* α *une représentation continue de* G *sur* M. *Le noyau de* α *est égal à l'annihilateur de* sp α *dans* G , *et par conséquent est contenu dans l'annihilateur* H de $\Gamma(\alpha)$. *De plus, on a* sp $\alpha = \Gamma(\alpha)$ *si et seulement si le noyau de* α *est égal à* H .

Comme $\Gamma(\alpha)$ est un sous-groupe fermé de $\hat{G}$contenu dans sp α , il est égal à sp α si et seulement si son annihilateur est égal à celui de sp α . Il reste donc à vérifier que l'annihilateur K de sp α est égal au noyau de α . D'après le corollaire 6.3 un élément g de G appartient à K si et seulement si le spectre de α_g dans l'algèbre de Banach des applications ultrafaiblement continues de M dans M est égal à 1, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha_g = 1$ d'après le corollaire 6.4.

10.6. Définition. *Soient* α et β *deux représentations continues de* G sur M . *On dit que* α *et* β *sont extérieurement équivalentes, et on écrit* $\alpha \sim \beta$ *, s'il existe une application fortement continue* $g \longmapsto u_g$ de G *dans le groupe unitaire de* M *telle que*

(1) $\quad u_{g_1+g_2} = u_{g_1}\ \alpha_{g_1}(u_{g_2})$ pour tous g_1, g_2 dans G ,

(2) $\quad \beta_g(x) = u_g\ \alpha_g(x)\ u_g^*$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$

10.7. Remarques. a) On vérifie immédiatement que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des représentations continues de G sur M.

b) Soient α une représentation continue de G sur M et $g \longmapsto u_g$ une application fortement continue de G dans le groupe unitaire de M telles que la condition (1) de 10.6 soit vérifiée. Alors en posant $\beta_g(x) = u_g\ \alpha_g(x)\ u_g^*$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$, on définit une représentation continue β de G sur M extérieurement équivalente à α

c) Si $\alpha \sim \beta$, pour tout $g \in G$ l'automorphisme $\beta_g \circ \alpha_g^{-1}$ est intérieur. Mais deux représentations α et β telles que pour tout $g \in G$ l'automorphisme $\beta_g \circ \alpha_g^{-1}$ soit intérieur ne sont pas nécessairement extérieurement équivalentes (voir 10-10).

10.8. Proposition. *Soient* α *et* β *deux représentations continues de* G sur M . *Soit* (e_{ij}) *un système d'unités matricielles pour le facteur* F_2 *de type* I_2 . *On a* $\alpha \sim \beta$ *si et seulement si il existe une représentation continue* γ de G sur $M \otimes F_2$ *vérifiant, pour tout* $g \in G$ *et tout* $x \in M$,

$$\gamma_g\ (x \otimes e_{11}) = \alpha_g(x) \otimes e_{11}$$

$$\gamma_g\ (x \otimes e_{22}) = \beta_g(x) \otimes e_{22}$$

Soit $g \longmapsto u_g$ une application fortement continue de G dans le groupe unitaire de M , vérifiant les conditions (1) et (2) de 10.6 . Si $g \in G$, notons w_g l'unitaire $1 \otimes e_{11} + u_g \otimes e_{22} \in M \otimes F_2$, et pour tout $x \in M \otimes F_2$ posons $\gamma_g(x) = w_g(\alpha_g \otimes 1)(x)\, w_g^*$. On voit immédiatement que pour tout $x \in M$ on a $\gamma_g(x \otimes e_{11}) = \alpha_g(x) \otimes e_{11}$, et $\gamma_g(x \otimes e_{22}) = u_g\, \alpha_g(x) u_g^* \otimes e_{22} = \beta_g(x) \otimes e_{22}$.

De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a

$$w_{g_1+g_2} = 1 \otimes e_{11} + u_{g_1+g_2} \otimes e_{22}$$

$$= 1 \otimes e_{11} + u_{g_1}\, \alpha_{g_1}(u_{g_2}) \otimes e_{22} = w_{g_1}\, \alpha_{g_1} \otimes 1\, (w_{g_2}) .$$

On en déduit que $g \longmapsto \gamma_g$ est une représentation continue de G sur $M \otimes F_2$, extérieurement équivalente à la représentation $g \longmapsto \alpha_g \otimes 1$ (voir 10.7.b)).

Réciproquement, supposons qu'il existe une représentation continue $g \longmapsto \gamma_g$ de G sur $M \otimes F_2$ vérifiant les conditions énoncées dans la proposition. Alors les projecteurs $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ sont fixes par $\gamma(G)$. On déduit des relations $(1 \otimes e_{12})^* = 1 \otimes e_{21}$, $(1 \otimes e_{12})\,(1 \otimes e_{12})^* = 1 \otimes e_{11}$, et $(1 \otimes e_{21})\,(1 \otimes e_{21})^* = 1 \otimes e_{22}$, que pour tout $g \in G$ l'élément $V_g = \gamma_g(1 \otimes e_{21})$ vérifie

$$V_g V_g^* = 1 \otimes e_{22} \quad \text{et} \quad V_g^* V_g = 1 \otimes e_{11} .$$

Par conséquent V_g est de la forme $u_g \otimes e_{21}$ où u_g est un unitaire de M.

L'application $g \longmapsto u_g$ est évidemment fortement continue, et pour tous $g_1,\ g_2 \in G$ on a

$$u_{g_1+g_2} \otimes e_{21} = \gamma_{g_1+g_2}(1 \otimes e_{21}) = \gamma_{g_1}(u_{g_2} \otimes e_{21})$$

$$= \gamma_{g_1}(1 \otimes e_{21})\, \gamma_{g_1}(u_{g_2} \otimes e_{11})$$

$$= (u_{g_1} \otimes e_{21})\, (\alpha_{g_1}(u_{g_2}) \otimes e_{11})$$

$$= u_{g_1}\, \alpha_{g_1}(u_{g_2}) \otimes e_{21} ,$$

d'où $u_{g_1+g_2} = u_{g_1}\, \alpha_{g_1}(u_{g_2})$.

Enfin , pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$ on a

$$\beta_g(x) \otimes e_{22} = \gamma_g(x \otimes e_{22}) = \gamma_g\,(1 \otimes e_{21})\,\gamma_g\,(x \otimes e_{11})\,\gamma_g(1 \otimes e_{12})$$

$$= \big(u_g \otimes e_{21}\big)\big(\alpha_g(x) \otimes e_{11}\big)\,(u_g^* \otimes e_{12})$$

$$= u_g\,\alpha_g(x)\,u_g^* \otimes e_{22}\ ,$$

et par conséquent les représentations α et β sont extérieurement équivalentes.

10.9 <u>*Théorème*</u>. *Soient* α et β *deux représentations continues extérieurement équivalentes de* G sur M. *Alors on a* $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$

Soit γ une représentation de G sur $M \otimes F_2$ possédant les propriétés énoncées dans la proposition 10.8. Les projecteurs $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ sont invariants par $\gamma(G)$, et leur support central dans $M \otimes F_2$ est égal à 1. On a donc $\Gamma(\gamma^{1 \otimes e_{11}}) = \Gamma(\gamma) = \Gamma(\gamma^{1 \otimes e_{22}})$ (voir remarque 10.2 b)). D'autre part on a évidemment $\Gamma(\gamma^{1 \otimes e_{11}}) = \Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\gamma^{1 \otimes e_{22}}) = \Gamma(\beta)$ par isomorphisme, d'où $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$.

10.10. Dans ce paragraphe nous prenons pour groupe G le groupe additif $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et pour M l'algèbre de von Neumann $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace hilbertien séparable. Soit α la représentation G sur M telle que $\alpha_g = 1$ pour tout $g \in G$. Nous allons construire une représentation β non extérieurement équivalente à α . Comme tous les automorphismes de $\mathcal{L}(H)$ sont intérieurs, nous aurons ainsi prouvé l'existence de deux représentations α et β non extérieurement équivalentes telles que pour tout $g \in G$ l'automorphisme $\beta_g \circ \alpha_g^{-1}$ soit intérieur. D'après le théorème 10.9, il suffit de construire β telle que $\Gamma(\beta)$ ne soit pas réduit à l'élément neutre e du dual de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, car $\Gamma(\alpha) = \{e\}$.

Nous pouvons supposer que $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ est l'espace des nombres complexes de module 1 muni de la mesure de Lebesgue normalisée. Nous notons $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la base orthogonale canonique de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Soient v_1 et v_2 les deux unitaires de M tels que, si $\xi = \sum a_n e_n \in H$, on ait

$$v_1(\xi) = \sum a_n e_{n+1} \quad , \qquad v_2(\xi) = \sum a_n e^{in} e_n \ .$$

Pour tout $g = (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, notons β_g l'automorphisme de M induit par l'unitaire $v_1^p v_2^q$. Compte-tenu du fait que $v_2 v_1 = e^i v_1 v_2$, il est clair que $g \longmapsto \beta_g$ est une représentation de G sur M. Soit $x \in M^\beta$. En particulier x commute avec v_1 et par conséquent, x est l'opérateur de multiplication par une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Comme cet opérateur commute avec v_2 , on vérifie immédiatement que f est une fonction constante. Ainsi on a $M^\beta = \mathbb{C}$, d'où $\mathrm{sp}\,\beta = \Gamma(\beta)$ d'après la proposition 10.4. Le noyau de β est réduit à l'élément neutre de G car l'unitaire $v_1^p v_2^q$ est scalaire si et seulement si $p = q = 0$. Comme $\Gamma(\beta)$ est l'annihilateur du noyau de β (voir lemme 10.5), on en déduit que $\Gamma(\beta)$ est égal au dual de G.

10.11. *Lemme. Soit* u *un homomorphisme fortement continu d'un sous-groupe fermé* G_1 *d'un groupe localement compact commutatif* G *dans le groupe unitaire d'une algèbre de von Neumann* M. *Alors* u *se prolonge en un homomorphisme fortement continu de* G *dans le groupe unitaire de* M.

On peut évidemment supposer que M est engendrée par l'image de u. Dans ces conditions, M est une algèbre de von Neumann commutative, et comme M s'écrit alors comme produit d'algèbres de von Neumann de genre dénombrable, on peut supposer de plus que M est de genre dénombrable. Notons B la C^*-algèbre du groupe G_1 et α la représentation de B associée à la représentation $g \longmapsto u_g$ de G_1. Comme $\alpha(B)$ est faiblement dense dans M, il existe sur le spectre Z de $\alpha(B)$ une mesure positive bornée μ_1 telle que l'isomorphisme de Gelfand se prolonge en un isomorphisme de M sur $L^\infty(Z,\mu_1)$ (voir [18], chap. I, §7, prop. 1 et 4). En identifiant M à $L^\infty(Z, \mu_1)$ par cet isomorphisme, pour tout $g \in G_1$ l'élément $u_g \in M$ n'est autre que la fonction $\gamma \longmapsto \langle g, \gamma \rangle$ définie sur $Z \subset \hat{G}_1$. Etant donné que $L^\infty(Z, \mu_1)$ est isomorphe à un produit d'algèbres de la forme $L^\infty(Z', \mu_1')$ où Z' est un compact de Z et μ'_1 la mesure induite par μ_1 sur Z', nous pouvons de plus supposer que Z est compact. Ainsi nous pouvons prendre $M = L^\infty(\hat{G}_1, \mu_1)$ où μ_1 est une mesure positive à support compact sur $\hat{G}_1$, l'unitaire u_g étant, pour tout $g \in G_1$, la fonction $\gamma \longmapsto \langle g, \gamma \rangle$ définie sur $\hat{G}_1$.

Notons p l'homomorphisme canonique de $\hat{G}$ sur $\hat{G}_1$ et soit K un compact de $\hat{G}$ tel que $p(K)$ soit égal au support de μ_1. Prenons un point extrémal μ dans l'ensemble convexe faiblement compact des mesures positives ν sur K telles que $f\circ p = \int_K f\circ p(g)\, d\nu(g) = \int f(s)\, d\mu_1(s)$ pour toute fonction continue f définie sur le support de μ_1. D'après [27], l'application Φ qui à $f \in L^\infty(\hat{G}_1, \mu_1)$ associe $f\circ p \in L^\infty(\hat{G}, \mu)$ est un isomorphisme de $L^\infty(\hat{G}_1,\mu_1)$ sur $L^\infty(\hat{G},\mu)$. Si $g \in G$, soit h_g la fonction $\gamma \longmapsto \langle g,\gamma \rangle$ définie sur $\hat{G}$, et posons $v_g = \Phi^{-1}(h_g) \in M$. Alors $g \longmapsto v_g$ est un homomorphisme fortement continu de G dans le groupe unitaire de M. De plus, si $g \in G_1$ et $\gamma \in \hat{G}$, on a

$$\langle g, \gamma \rangle = \langle g, p(\gamma) \rangle = u_g \circ p(\gamma)$$

d'où $v_g = u_g$.

10.12. __Lemme__ . *Soient* θ *un automorphisme d'une algèbre de von Neumann* M *et* e *un projecteur invariant par* θ *de support central 1 dans* M. *On suppose qu'il existe* $u \in M$ *tel que* $uu^* = e = u^*u$ *et* $\theta(x) = u\,xu^*$ *pour tout* $x \in eMe$. *Alors il existe un unitaire* $v \in M$ *et un seul tel que* $ve = ev = u$ et $\theta(x) = v\,x\,v^*$ pour tout $x \in M$.

Soient v et v' deux unitaires satisfaisant aux conditions énoncées. Alors v^*v' appartient au centre de M et on a $v^*v'\,e = e$. Comme le support central de e est 1 , on en déduit que $v^*v' = 1$.

Supposons que M agisse dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}$. Etant données les familles finies $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ et $(\xi_i)_{i\in I}$ d'éléments de M, M' et $e(\mathcal{H})$ respectivement, posons

$$v\Big[\sum_{i\in I} x_i\, y_i\, \xi_i\Big] = \sum_{i\in I} \theta(x_i)\, y_i\, u\, \xi_i .$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big\| v\Big[\sum_{i\in I} x_i\, y_i\, \xi_i\Big]\Big\|^2 &= \sum_{i,j} < \xi_i\, , u^*\, \theta(x_i^* x_j)\, u\, y_i^* y_j\, \xi_j > \\
&= \sum_{i,j} < \xi_i\, , u^*\, \theta(ex_i^*\, x_j e)\, u\, y_i^* y_j\, \xi_j > \\
&= \sum_{i,j} < \xi_i\, , e\, x_i^* x_j\, e\, y_i^* y_j\, \xi_j > \\
&= \sum_{i,j} < \xi_i\, , x_i^* y_i^* x_j\, y_j\, \xi_j > \\
&= \Big\|\sum_i x_i\, y_i\, \xi_i\Big\|^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent, v est un opérateur isométrique bien défini sur le sous-espace vectoriel des éléments de la forme $\sum_i x_i\, y_i\, \xi_i$ avec $x_i \in M$, $y_i \in M'$ et $\xi_i \in e(\mathcal{H})$. Comme le support central de e égal à 1 , l'ensemble de définition et l'ensemble image de v sont denses dans $\mathcal{H}$, et v se prolonge donc en un opérateur unitaire, noté encore v . On vérifie immédiatement que $ve = ev = u$ et que $\theta(x)v = vx$ pour tout $x \in M$.

10.13. __Proposition.__ *Soit* α *une représentation continue de* G *sur un facteur* M *telle que le centre de* M^α *possède un projecteur minimal. Alors il existe une représentation continue* β de G *sur* M *extérieurement équivalente à* α *telle que* sp $\beta = \Gamma(\alpha)$.

Soit e un projecteur minimal du centre de M^α . L'algèbre des points fixes de la représentation α^e étant le facteur $eM^\alpha e$ (voir lemme 8.5.ii)), d'après la proposition 10.4 on a sp $\alpha^e = \Gamma(\alpha^e)$, et il résulte du lemme 10.5 que le noyau de la représentation α^e est égal à l'annihilateur H de $\Gamma(\alpha^e)$. Comme le support central de e est égal à 1, il existe, pour tout $h \in H$, un unitaire $u_h \in M$ et un seul tel que $u_h e = e u_h = e$ et $\alpha_h(x) = u_h x u_h^*$ pour tout $x \in M$ (voir lemme 10.12). Si $g \in G$, l'unitaire $\alpha_g(u_h)$ vérifie les mêmes conditions que u_h et par conséquent on a $\alpha_g(u_h) = u_h$, d'où $u_h \in M^\alpha$. Toujours par raison d'unicité on vérifie que $h \longmapsto u_h$ est un homomorphisme de H dans le groupe unitaire de M^α . Montrons que cet homomorphisme est faiblement continu. Si $\mathcal{H}$ désigne l'espace hilbertien dans lequel agit M , pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $x \in M$, la fonction $h \longmapsto \alpha_h(x) e\xi$ est faiblement continue. Etant donné que $\alpha_h(x) e\xi = u_h x u_h^* e\xi = u_h x e\xi$ et que l'ensemble des éléments $x e\xi$ avec $x \in M$ et $\xi \in \mathcal{H}$ est total dans $\mathcal{H}$, on en déduit la continuité faible de $h \longmapsto u_h$. D'après le lemme 10.11, il existe un homomorphisme faiblement continu $g \longmapsto v_g$ de G dans le groupe unitaire de M^α tel que $v_h = u_h$ pour tout $h \in H$. Posons $\beta_g(x) = v_g^* \alpha_g(x) v_g$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$. Alors β est une représentation continue de G sur M extérieurement équivalente à α, dont le noyau contient H. Comme $\Gamma(\alpha^e) = \Gamma(\alpha)$ (voir remarque 10.2 b)), le groupe H est aussi l'annihilateur de $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)$, et d'après le lemme 10.5, on a sp $\beta = \Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)$.

10.14 <u>Lemme.</u> *Soient α et β deux représentations continues de G sur une algèbre de von Neumann M . Soit e un projecteur non nul de $M^\alpha \cap M^\beta$ de support central 1 dans M et tel que $\alpha^e \sim \beta^e$. Alors, on a $\alpha \sim \beta$.*

Par hypothèse , il existe une application fortement continue $g \longmapsto u_g$ de G dans le groupe unitaire de eMe telle que

$$u_{g_1+g_2} = u_{g_1} \alpha_{g_1}(u_{g_2}) \quad \text{pour} \quad g_1, g_2 \in G ,$$
$$\beta_g \alpha_g^{-1}(x) = u_g x u_g^* \quad \text{pour tout } g \in G \text{ et tout } x \in eMe .$$

D'après le lemme 10.12, il existe pour tout $g \in G$ un unitaire $v_g \in M$ et un seul tel que $v_g e = e v_g = u_g$ et $\beta_g \alpha_g^{-1}(x) = v_g x v_g^*$ si $x \in M$. Pour $g_1, g_2 \in G$ et $x \in M$, on a

$$\begin{aligned}\beta_{g_1+g_2} \circ \alpha_{g_1+g_2}^{-1}(x) &= \beta_{g_1} \circ \beta_{g_2} \circ \alpha_{g_2}^{-1} \circ \alpha_{g_1}^{-1}(x) \\ &= \beta_{g_1}\left[v_{g_2} \alpha_{g_1}^{-1}(x) v_{g_2}^*\right] = \beta_{g_1} \circ \alpha_{g_1}^{-1}\left[\alpha_{g_1}(v_{g_2}) x \alpha_{g_1}(v_{g_2}^*)\right] \\ &= v_{g_1} \alpha_{g_1}(v_{g_2}) x \alpha_{g_1}(v_{g_2}^*) v_{g_1}^* .\end{aligned}$$

De plus, on a

$$v_{g_1}\ \alpha_{g_1}(v_{g_2})\ e\ = u_{g_1}\ \alpha_{g_1}(u_{g_2}) = u_{g_1+g_2}\quad \text{et } e\ v_{g_1}\ \alpha_{g_1}(v_{g_2}) = u_{g_1+g_2}.$$

Il en résulte, par unicité, que $v_{g_1+g_2} = v_{g_1}\ \alpha_{g_1}(v_{g_2})$.

Montrons que $g \longmapsto v_g$ est faiblement continue en tout point $g_o \in G$. Si $\mathcal{H}$ est l'espace hilbertien dans lequel agit M , il suffit de prouver que pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in \mathcal{H}$ la fonction $g \longmapsto v_g\, x e\xi$ est faiblement continue en g_o , car l'ensemble des $x e \xi$ avec $x \in M$ et $\xi \in \mathcal{H}$ est total dans $\mathcal{H}$. Posons $e\,\xi = u^*_{g_o}\eta$ avec $e\eta = \eta$. On a

$$v_g\, x\, e\, \xi = v_g\, x\, u^*_{g_o}\, \eta = \beta_g\ \alpha_g^{-1}(x)\, \eta - v_g\, x\, (u^*_{g_o} - u^*_g)\eta$$

d'où on déduit la continuité faible de $g \longmapsto v_g\, x\, e\xi$ en g_o .

Il est alors clair que β est extérieurement équivalente à α .

10.15. <u>*Lemme.*</u> *Soit* α *une représentation continue de* G *sur une algèbre de von Neumann* M . *Soit* e *un projecteur de* M^α *tel que* 1-e *soit la somme d'une famille de projecteurs de* M, *deux à deux orthogonaux et équivalents à* e. *Alors il existe une représentation continue* β *de* G *sur* M, *extérieurement équivalente à* α *telle que* $\mathrm{sp}\ \beta = \mathrm{sp}\ \alpha^e$.

Il existe un facteur F de type I, un projecteur minimal p de F et un isomorphisme ϕ de M sur $(eMe)\otimes F$ tel que $\phi(x) = x \otimes p$ pour tout $x \in eMe$. Soit β la représentation continue de G sur M telle que pour tout $g \in G$ on ait $\beta_g = \phi^{-1} \circ \alpha_g^e \otimes 1 \circ \phi$. Si $f \in L^1(G)$, on a évidemment $\beta(f) = \phi^{-1} \circ \alpha^e(f) \otimes 1 \circ \phi$, d'où $\mathrm{sp}\ \beta = \mathrm{sp}\ \alpha^e$. Enfin, pour tout $x \in eMe$ on a

$$\beta_g^{\,e}(x) = \beta_g(x) = \phi^{-1} \circ \alpha_g^{\,e} \otimes 1\ (x \otimes p) = \alpha_g^{\,e}(x)\ ,$$

et d'après le lemme 10.14 , la représentation β est extérieurement équivalente à α .

10.16. <u>*Lemme*</u>. *Soit* α *une représentation continue de* G *sur un facteur* M *Pour tout projecteur non nul* $e \in M^\alpha$ *il existe une représentation continue* β *de* G *sur* M, *extérieurement équivalente à* α *telle que* $\mathrm{sp}\ \beta \subset \mathrm{sp}\ \alpha^e$.

Etudions d'abord le cas où e est équivalent à 1 dans M. Soit $u \in M$ tel que $u^* u = 1$ et $uu^* = e$. Pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$, posons $\beta_g(x) = u^* \alpha_g(uxu^*)u$. On vérifie immédiatement que $u^* \alpha_g(u)$ est un unitaire de M. De plus, on a

$$\begin{aligned} u^* \alpha_{g_1}(u)\, \alpha_{g_1}[u^* \alpha_{g_2}(u)] &= u^* \alpha_{g_1}(e)\, \alpha_{g_1+g_2}(u) \\ &= u^* \alpha_{g_1+g_2}(u) \end{aligned}$$

Ainsi β est une représentation de G sur M extérieurement équivalente à α. Comme β est obtenue en transportant la représentation α^e par l'isomorphisme $x \longmapsto uxu^*$ de M sur eMe, on a évidemment $\mathrm{sp}\, \beta = \mathrm{sp}\, \alpha^e$.

Dans le cas où M^α possède un projecteur minimal, le centre de M^α possède également un projecteur minimal, et d'après la proposition 10.13, il existe $\beta \sim \alpha$ telle que $\mathrm{sp}\, \beta = \Gamma(\alpha) \subset \mathrm{sp}\, \alpha^e$.

Il nous reste à examiner le cas où e n'est pas équivalent à 1 dans M et où M^α ne possède pas de projecteur minimal. Nous allons montrer qu'il existe alors un projecteur $f \leqslant e$ dans M^α et une famille $(e_i)_{i \in I}$ de projecteurs de M deux à deux orthogonaux, équivalents à f, telle que $\sum_{i \in I} e_i = 1 - f$. Dans ces conditions, d'après le lemme 10.15, il existera $\beta \sim \alpha$ telle que $\mathrm{sp}\, \beta = \mathrm{sp}\, \alpha^f \subset \mathrm{sp}\, \alpha^e$, et le lemme sera démontré.

Considérons d'abord le cas où M est facteur fini et soit τ la trace sur M vérifiant $\tau(1) = 1$. Pour tout projecteur non nul $e' \in M^\alpha$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un projecteur non nul $f_1 \in M^\alpha$ majoré par e' et tel que $\tau(f_1) \leqslant \varepsilon$. Soit alors n un entier vérifiant $\frac{1}{n} \leqslant \tau(e)$ et soit (f_λ) une famille maximale de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans M^α, majorés par e et tels que $\sum_\lambda \tau(f_\lambda) \leqslant \frac{1}{n}$. D'après ce qui précède et le maximalité de la famille (f_λ), on a $\sum_\lambda \tau(f_\lambda) = \frac{1}{n}$. Posons $f = \sum_\lambda f_\lambda$. Comme $\tau(f) = \frac{1}{n}$, il existe dans M des projecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$ équivalents à f, deux à deux orthogonaux et tels que $\sum_{i=1}^{n-1} e_i = 1 - f$.

Supposons maintenant que M est proprement infinie. Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille maximale de projecteurs de M deux à deux orthogonaux, équivalents à e dans M et majorés par $1-e$. Alors Λ est un ensemble infini d'indices. Sinon, dans le cas où e est un projecteur fini, le projecteur 1 serait fini, ce qui est contraire aux hypothèses, et dans le cas où e est proprement infini on aurait $1-e \prec e$, d'où $e \sim 1$ ce qui est contraire aux hypothèses. Comme $(1-e) - \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda < e \sim f_\lambda$, on en déduit que $1-e \sim \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, et par conséquent $1-e$ est somme de projecteurs de M deux à deux orthogonaux et équivalents à e

10.17. *Théorème. Soit* α *une représentation continue de* G *sur un facteur* M. *Alors* $\Gamma(\alpha)$ *est égal à l'intersection des fermés* $\mathrm{sp}\,\beta$ *lorsque* β *décrit l'ensemble des représentations continues de* G *sur* M *extérieurement équivalentes à* α .

Comme $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)$ pour tout $\beta \sim \alpha$, on a $\Gamma(\alpha) \subset \bigcap_{\beta\sim\alpha} \mathrm{sp}\,\beta$.
L'inclusion inverse résulte immédiatement du lemme 10-16.

<u>NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE</u> .

Les résultats de ce paragraphe proviennent de ([15], §II).

§11. GROUPES D'AUTOMORPHISMES LAISSANT UN POIDS RELATIVEMENT INVARIANT. L'INVARIANT S de A. CONNES

11.1. Notations - Soit M une algèbre de von Neumann. Nous notons $P(M)$ l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur M. Pour tout $\phi \in P(M)$, nous adopterons les notations usuelles de la théorie des poids et de la théorie de Tomita (voir [14] et [42]), dont certaines sont rappelées ci-dessous:

$\mathfrak{N}_\phi = \{ x \in M , \phi(x^* x) < +\infty \}$;

H_ϕ est le complété de l'espace préhilbertien $\mathfrak{N}_\phi$ et Λ_ϕ est l'injection canonique de $\mathfrak{N}_\phi$ dans H_ϕ ;

Π_ϕ est la représentation de Gelfand-Segal de M dans H_ϕ ;

$\mathfrak{U}_\phi = \Lambda_\phi(\mathfrak{N}_\phi \cap \mathfrak{N}_\phi^*)$, $\mathfrak{U}'_\phi$ est l'algèbre hilbertienne à droite associée à l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{U}_\phi$, et Δ_ϕ , J_ϕ , $\mathcal{D}^\#_\phi$, $\mathcal{D}^\flat_\phi$ sont les objets usuels associés à l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{U}_\phi$;

Si $\xi \in \mathfrak{U}_\phi$ (resp $\mathfrak{U}'_\phi$), $\Pi(\xi)$ (resp. $\Pi'(\xi)$) désigne le prolongement continu de l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) dans $\mathfrak{U}_\phi$ (resp. $\mathfrak{U}'_\phi$);

H^g_ϕ (resp. H^d_ϕ) est l'ensemble des éléments ξ de H_ϕ bornés à gauche (resp. à droite), c'est à dire tels que l'application $\eta \longmapsto \Pi'(\eta)\xi$ $\mathfrak{U}'_\phi$ dans H_ϕ (resp. $\eta \longmapsto \Pi(\eta)\xi$ de $\mathfrak{U}_\phi$ dans H_ϕ) soit continue. Rappelons que l'on a $\mathfrak{U}_\phi = \mathcal{D}^\#_\phi \cap H^g_\phi$, $\mathfrak{U}'_\phi = \mathcal{D}^\flat_\phi \cap H^d_\phi$ et $\Lambda_\phi(\mathfrak{N}_\phi) = H^g_\phi$. De plus, pour tout $x \in \mathfrak{N}_\phi$, on a $\Pi_\phi(x) = \Pi(\Lambda_\phi x)$, en notant $\Pi(\Lambda_\phi x)$ le prolongement continu à H_ϕ de l'opérateur $\eta \longmapsto \Pi'(\eta)\Lambda_\phi x$ défini sur $\mathfrak{U}'_\phi$ (voir [14] , th. 2.11);

$\mathfrak{B}_\phi$ désigne l'algèbre de Tomita maximale associée à $\mathfrak{U}_\phi$, c'est à dire la sous algèbre des $\xi \in \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\Delta^s_\phi)$ tels que $\Delta_\phi \in H^g_\phi$ pour tout $s \in \mathbb{R}$;

σ^{ϕ} est le groupe des automorphismes modulaires associés au poids ϕ : pour tout $x \in \mathfrak{N}_{\phi}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\Delta_{\phi}^{it}\, \Lambda_{\phi}\, x = \Lambda_{\phi}\, \sigma_t^{\phi}(x)$, et pour tout $x \in M$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\Pi_{\phi}[\sigma_t^{\phi}(x)] = \Delta_{\phi}^{it}\ \Pi_{\phi}(x)\ \Delta_{\phi}^{-it}$.

Dans la suite, pour alléger l'écriture nous identifierons M et son image par la représentation fidèle Π_{ϕ} .

11.2. *Proposition* - *Soient* M *une algèbre de von Neumann* , $\phi \in P(M)$ *et* θ *un automorphisme de* M *tel que* $\phi o \theta = \lambda\phi$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$. *Il existe sur* H_{ϕ} *un opérateur unitaire unique* u *tel que* $u(\Lambda_{\phi} x) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda_{\phi}\ \theta\ (x)$ *pour tout* $x \in \mathfrak{N}_{\phi}$, *et cet unitaire induit l'automorphisme* θ .

Pour tout $x \in \mathfrak{N}_{\phi}$ on a

$$\|\lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda_{\phi}\theta(x)\|^2 = \lambda^{-1}\ \phi(\theta(x)^*\theta(x)) = \lambda^{-1}\ \phi(\theta(x^*\ x)) = \phi(x^*x) = \|\Lambda_{\phi}x\|^2$$

L'espace hilbertien H_{ϕ} étant le complété de $\Lambda_{\phi}\ \mathfrak{N}_{\phi}$ pour la norme définie par ϕ , il existe un opérateur isométrique unique u de H_{ϕ} tel que $u(\Lambda_{\phi}x) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\ \Lambda_{\phi}\ \theta(x)$. Il est clair que $\theta(\mathfrak{N}_{\phi}) = \mathfrak{N}_{\phi}$, et par conséquent $\Lambda_{\phi}\ \mathfrak{N}_{\phi}$ est contenu dans l'image de u . Ainsi u est surjectif et c'est donc un opérateur unitaire.

Pour tout $x \in M$ et $y \in \mathfrak{N}_{\phi}$ on a

$$\begin{aligned}(uxu^*)\ \Lambda_{\phi}y &= (ux)\ (\lambda^{\frac{1}{2}}\ \Lambda_{\phi}\theta^{-1}(y)) = \lambda^{\frac{1}{2}}\ u(\Lambda_{\phi}\ x\ \theta^{-1}(y)) \\ &= \Lambda_{\phi}\theta(x\theta^{-1}(y)) = \theta(x)\ \Lambda_{\phi}\ y\ ,\end{aligned}$$

d'où $uxu^* = \theta(x)$.

11.3. *Proposition* - *Conservons les données de* 11.2. *Tous les objets associés à* ϕ *par la théorie de Tomita sont globalement invariants par* u . *Ainsi* $u(\mathfrak{U}_{\phi}) = \mathfrak{U}_{\phi}$, $u(\mathfrak{U}'_{\phi}) = \mathfrak{U}'_{\phi}$, $u(H_{\phi}^{g}) = H_{\phi}^{g}$, $u(H_{\phi}^{d}) = H_{\phi}^{d}$; $u(\mathfrak{D}_{\phi}^{*}) = \mathfrak{D}_{\phi}^{*}$, $u(\mathfrak{D}_{\phi}^{\flat}) = \mathfrak{D}_{\phi}^{\flat}$) , $u\,J_{\phi}u^* = J_{\phi}$, $u\Delta_{\phi}^{it}\ u^* = \Delta_{\phi}^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ etc...

Il est clair que $u(\mathcal{U}_\phi) = \mathcal{U}_\phi$, car $\mathcal{U}_\phi$ est l'image par Λ_ϕ de $\mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\phi^*$ qui est globalement invariant par θ . Pour tout $\xi \in \mathcal{U}_\phi$ on a

(1) $$\Pi(u\xi) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \, u \, \Pi(\xi)u^* .$$

En effet, si $x \in \mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\psi^*$ est tel que $\Lambda_\phi x = \xi$, on voit que

$$\Pi(u\xi) = \Pi(u\Lambda_\phi x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \Pi(\Lambda_\phi \theta(x)) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \theta(x)$$
$$= \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, x \, u^* = \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi(\xi)u^* .$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{U}_\phi$, il en résulte que

$$\Pi(u(\xi^*)) = \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi(\xi^*)u^* = \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi(\xi)^* u^*$$
$$= (\lambda^{-\frac{1}{2}} u\Pi(\xi)u^*)^* = \Pi \, (u\xi)^* = \Pi\left[(u\xi)^*\right] .$$

Comme Π est injective, on obtient $u(\xi^*) = [u(\xi)]^*$ pour tout $\xi \in \mathcal{U}_\phi$. Etant donné que $\mathcal{U}_\phi$ est un domaine essentiel pour l'opérateur $S_\phi : \xi \longmapsto \xi^*$ défini sur $\mathcal{D}_\phi^*$, on en déduit que u et S_ϕ commutent . Alors u commute avec les éléments de la décomposition polaire de S_ϕ , c'est à dire que l'on a $u J_\phi = J_\phi u$ et $u \, \Delta_\phi^{\frac{1}{2}} \subset \Delta_\phi^{\frac{1}{2}} u$.

Pour toute fonction borélienne f définie sur $\mathbb{R}$ on a aussi $u f(\Delta_\phi) \subset f(\Delta_\phi)u$. En particulier, on en déduit que $u \, \Delta_\phi^{it} u^* = \Delta_\phi^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $u \, \Delta_\phi^{-\frac{1}{2}} \subset \Delta_\phi^{-\frac{1}{2}} u$ d'où $u(\mathcal{D}_\phi^\flat) \subset \mathcal{D}_\phi^\flat$. Comme u^{-1} correspond à θ^{-1} avec des propriétés analogues, on a finalement $u(\mathcal{D}_\phi^\flat) = \mathcal{D}_\phi^\flat$ et de même $u(\mathcal{D}_\phi^*) = \mathcal{D}_\phi^*$.

Si $\eta \in H_\phi^d$, pour tout $\xi \in \mathcal{U}_\phi$ on a

$$\Pi(\xi) \, u \, \eta = u \, u^* \Pi(\xi) u \, \eta = \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi(u^* \xi)\eta \qquad \text{d'après (1)} ,$$
$$= \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi'(\eta) \, u^* \xi ,$$

où $\Pi'(\eta)$ désigne le prolongement continu sur H_ϕ de l'opérateur $\xi \longmapsto \Pi(\xi)\eta$ défini sur $\mathcal{U}$. Il en résulte que $u\eta$ est encore borné à droite et que $\Pi'(u\eta) = \lambda^{-\frac{1}{2}} u \, \Pi'(\eta)u^*$. On a donc $u(H_\phi^d) = H_\phi^d$ et $u(\mathcal{U}_\phi') = u(\mathcal{D}_\phi^\flat \cap H_\phi) = \mathcal{U}_\phi'$.

En utilisant l'égalité $u(H_\phi^g) = H_\phi^g$, évidente car on a $H_\phi^g = \Lambda_\phi \mathfrak{N}_\phi$, et le fait que $u \Delta_\phi^s \subset \Delta_\phi^s u$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, on vérifie immédiatement que $u(\mathfrak{B}_\phi) = \mathfrak{B}_\phi$.

11.4. <u>*Remarque*</u> - On voit aussi que le cône P , adhérence de $\{ \xi J_\phi \xi, \ \xi \in \mathfrak{A}_\phi \}$ dans H_ϕ est invariant par u . Par conséquent, u n'est autre que l'unitaire qui induit l'automorphisme θ de façon canonique dans la forme standard de M associée au poids ϕ (voir [23]). Nous dirons que u est <u>l'unitaire associé canoniquement à l'automorphisme</u> θ .

11.5. <u>*Définition*</u> - Soient M une algèbre de von Neumann , $\phi \in P(M)$ et α une représentation continue d'un groupe topologique G sur M . On dit que le poids ϕ est <u>relativement invariant par l'action de</u> $\alpha(G)$ s'il existe un homomorphisme continu $\lambda : g \longmapsto \lambda(g)$ de G dans le groupe $\mathbb{R}_*^+$ tel que l'on ait $\phi \circ \alpha_g = \lambda(g)\, \phi$ pour tout $g \in G$. Lorsque $\lambda(g) = 1$ pour tout $g \in G$, on dit que ϕ <u>est invariant par l'action de</u> $\alpha(G)$.

11.6. <u>*Proposition*</u> - *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* $\phi \in P(M)$ *et* α *une représentation continue d'un groupe topologique* G *sur* M *tels que* ϕ *soit relativement invariant par l'action de* $\alpha(G)$. *Pour tout* $g \in G$, *notons* u_g *l'unitaire sur* H_ϕ *associé canoniquement à l'automorphisme* α_g . *Alors* $g \longmapsto u_g$ *est une représentation unitaire continue de* G *sur* H_ϕ .

En utilisant l'unicité de u_g vérifiant $u_g(x) = \lambda(g)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_\phi\, \alpha_g(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\phi$, on voit facilement que $g \longmapsto u_g$ est un homomorphisme de groupe.

Soient $x \in \mathfrak{N}_\phi \cap \mathfrak{N}_\phi^*$, $\xi = \Lambda_\phi x$, et $\eta_1 , \eta_2 \in \mathfrak{A}_\phi'$. On a

$$< u_g \xi \mid \eta_1 \eta_2' > = < u_g \xi \mid \Pi'(\eta_2)^* \eta_1 > = < \Pi'(\eta_2) u_g \xi \mid \eta_1 >$$

$$= < \Pi(u_g \xi)\, \eta_2 \mid \eta_1 > = \lambda(g)^{-\frac{1}{2}} < \alpha_g(x)\, \eta_2 \mid \eta_1 > .$$

Comme α et λ sont continues et comme $\mathfrak{A}'^2_\phi$ et $\mathfrak{A}_\phi$ sont denses dans H_ϕ , on voit que u est continue .

Nous dirons que u est la représentation unitaire continue de G sur H_ϕ <u>associée canoniquement</u> à α .

11.7. <u>*Proposition*</u> - *Nous conservons les notations de 11.6. en supposant de plus que* G *est un groupe localement compact. Soit* $\mu \in M^1(G)$ *telle que la mesure* ν *de densité* $\lambda^{-\frac{1}{2}} : g \longmapsto \lambda(g)^{-\frac{1}{2}}$ *par rapport à* μ *soit bornée. Alors l'opérateur* $u(\mu)$ *commute avec* J_ϕ *et avec* Δ_ϕ *, et il laisse stables les objets suivants :* $\mathfrak{A}_\phi$, $\mathfrak{A}'_\phi$, $\mathcal{B}_\phi$, $\mathcal{D}^\#_\phi$, $\mathcal{D}^\flat_\phi$, H^g_ϕ , H^d_ϕ . *En outre, si* $\xi \in \mathfrak{A}_\phi$ *et si* $x = \Pi(\xi)$ *on a*

$$\Pi(u(\mu)\xi) = \alpha(\nu)x \ .$$

Soient $\xi \in H^g_\phi$ et $x = \Pi(\xi) \in \mathcal{N}_\phi$. Pour tout $g \in G$, on a $u_g\ \xi \in H^g_\phi$ et $\Pi(u_g\ \xi) = \Pi\ [\lambda(g)^{-\frac{1}{2}} \Lambda_\phi\ \alpha_g(x)] = \lambda(g)^{-\frac{1}{2}} . \alpha_g(x)$, d'où , si $\eta \in \mathfrak{A}'$,

$$\Pi'(\eta)\ u(\mu)\xi = \int_G \Pi'(\eta)\ u_g\ \xi\ d\mu(g) = \int_G \Pi(u_g\ \xi)\ \eta\ d\mu(g)$$

$$= \int_G \lambda(g)^{-\frac{1}{2}}\ \alpha_g(x)\ \eta\ d\mu(g) = \int_G \alpha_g(x)\ \eta\ d\nu(g) \ .$$

$$= [\ \alpha(\nu)(x)\ ]\ \eta \ .$$

Ceci prouve que $u(\mu)\xi$ est borné à gauche et que $\Pi[u(\mu)\xi] = \alpha(\nu)x$.

Comme $u(\mu)$ est un élément de l'algèbre de von Neumann engendrée par les u_g , il commute avec J_ϕ et avec $f(\Delta_\phi)$ pour toute fonction borélienne f , puisque les u_g possèdent ces propriétés d'après la proposition 11.3.
En particulier $u(\mu)$ commute avec $\Delta^{\frac{1}{2}}_\phi$ et $\Delta^{-\frac{1}{2}}_\phi$, d'où $u(\mu)\ \mathcal{D}^\#_\phi \subset \mathcal{D}^\#_\phi$ et $u(\mu)\ \mathcal{D}^\flat_\phi \subset \mathcal{D}^\flat_\phi$. Il en résulte que l'on a

$$u(\mu)\ \mathfrak{A}_\phi = u(\mu)\ [H^g_\phi \cap \mathcal{D}^\#_\phi] \subset \mathfrak{A}_\phi \ .$$

En utilisant les relations $J_\phi H_\phi^g = H_\phi^d$ et $J_\phi \mathfrak{U}_\phi = \mathfrak{U}'_\phi$, on déduit de ce qui précède que $u(\mu) H_\phi^d \subset H_\phi^d$ et que $u(\mu) \mathfrak{U}'_\phi \subset \mathfrak{U}'_\phi$.

Enfin, on vérifie facilement que $u(\mu) \mathcal{B}_\phi \subset \mathcal{B}_\phi$ puisque $\mathcal{B}_\phi$ est l'ensemble des $\xi \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{D}(\Delta_\phi^s)$ tels que $\Delta_\phi^s \xi \in H_\phi^g$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

11.8. *Proposition* - *Soient* M *une algèbre de von Neumann ,* $\phi \in P(M)$ *,* et α *une représentation continue d'un groupe localement compact commutatif* G *sur* M *, tels que* ϕ *soit invariant par l'action de* $\alpha(G)$*. Soit* u *la représentation unitaire continue de* G *sur* H_ϕ *associée canoniquement à* α .

(i) pour tout $\xi \in \mathfrak{U}_\phi$, on a $sp_u\, \xi = sp_\alpha\, x$ *avec* $x = \Pi(\xi)$;

(ii) on a $sp\, u = sp\, \alpha$;

(iii) pour toute partie ouverte Ω *de* $\hat{G}$ *, l'espace* $H_\phi^u(\Omega) \cap \mathfrak{U}_\phi$ *est dense dans* $H_\phi^u(\Omega)$.

(iv) pour toute partie ouverte Ω *de* $\hat{G}$ *, l'espace* $M^\alpha(\Omega) \cap \mathfrak{N}_\phi \cap \mathfrak{N}_\phi^*$ *est dense dans* $M^\alpha(\Omega)$.

(i) Soient $\xi \in \mathfrak{U}_\phi$ et $x = \Pi(\xi)$. D'après 11.7 , pour tout $f \in L^1(G)$ on a $u(f)\xi \in \mathfrak{U}_\phi$ et $\Pi(u(f)\xi) = \alpha(f)x$. Comme Π est injective , on voit que l'on a $u(f)\xi = 0$ si et seulement si $\alpha(f)x = 0$, d'où (i).

(ii) Comme $\mathfrak{U}_\phi$ est dense dans H_ϕ et comme $\mathfrak{N}_\phi \cap \mathfrak{N}_\phi^*$ est faiblement dense dans M , il résulte de 3.8 et de (i) que l'on a

$$sp u = \Big[\bigcup_{\xi\in\mathfrak{U}_\phi} sp_u\, \xi\Big]^- = \Big[\bigcup_{x \in \mathfrak{N}_\phi\cap\mathfrak{N}_\phi^*} sp_\alpha\, x\Big]^- = sp\, \alpha\ .$$

(iii) Considérons un élément $\xi \in H_\phi$ tel que $sp_u\, \xi$ soit compact et contenu dans Ω , et prenons une fonction $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ soit égale à 1 au voisinage de $sp_u\, \xi$ et à 0 au voisinage de Ω^c . L'élément ξ est limite d'une suite généralisée (ξ_i) d'éléments de $\mathfrak{U}_\phi$, d'où $\xi = u(f)\xi = \lim u(f)\xi_i$, avec $u(f)\xi_i \in \mathfrak{U}_\phi$ d'après la proposition 11.7 et $sp_u\, u(f)\xi \subset supp.\ \hat{f} \subset \Omega$. Etant donné que l'ensemble des $\xi \in H_\phi$ tels que $sp_u\, \xi$ soit compact et contenu dans Ω est dense dans $H_\phi^u(\Omega)$ (voir 3-5(ii)), l'assertion (iii) est démontrée .

(iv) se démontre de la même façon .

11.9. <u>*Remarque*</u> - Conservons les données de 11.8 . Alors pour toute partie ouverte Ω de $\hat{G}$, le projecteur p_Ω de H_ϕ sur $[\, M^\alpha(\Omega)\, H_\phi\,]^-$ est le plus petit projecteur de M qui majore le projecteur de H_ϕ sur $H_\phi^u(\Omega)$. En effet, $1 - p_\Omega$ est le plus grand projecteur de l'annulateur à gauche A_Ω de $M^\alpha(\Omega)$ dans M (voir prop. 8.1), et d'après la proposition 11.8 et l'injectivité de $\xi \longmapsto \Pi(\xi)$ de $\mathcal{U}_\phi$ dans M on a

$$\begin{aligned} x \in A_\Omega &\iff xy = 0 \quad \forall\, y \in M^\alpha(\Omega)\ , \\ &\iff xy = 0 \quad \forall\, y \in M^\alpha(\Omega) \cap \mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\phi^*\ , \\ &\iff x\xi = 0 \quad \forall\, \xi \in H^u(\Omega) \cap \mathcal{U}_\phi\ , \\ &\iff x\xi = 0 \quad \forall\, \xi \in H^u(\Omega)\ . \end{aligned}$$

11.10. <u>*Lemme*</u> - *Soient* M *une algèbre de von Neumann et* $\phi \in P(M)$. *On a* $\operatorname{sp} \sigma^\phi = (\operatorname{sp} \Delta_\phi) \cap \mathbb{R}_*^+$ *lorsqu'on identifie le dual de* $\mathbb{R}$ *au groupe multiplicatif* $\mathbb{R}_*^+$ *en posant* $< t, \lambda > = \lambda^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

Pour tout $x \in \mathcal{N}_\phi$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\Lambda_\phi\, \sigma_t^\phi(x) = \Delta_\phi^{it}\, \Lambda_\phi(x)$. Par conséquent, $t \longmapsto u_t = \Delta_\phi^{it}$ est la représentation unitaire continue de $\mathbb{R}$ sur H_ϕ canoniquement associée à σ^ϕ , et d'après la proposition 11.8 on a $\operatorname{sp} \sigma^\phi = \operatorname{sp} u$. D'autre part, $\operatorname{sp} u$ est égal au support de la mesure de Stone associée à u (voir 3.7(*iii*)) , d'où

$$\operatorname{sp} \sigma^\phi = \operatorname{sp} u = (\operatorname{sp} \Delta_\phi) \cap \mathbb{R}_*^+ \ .$$

11.11. <u>*Définition*</u> - *Si* M *est un facteur, on note* $S(M)$ *l'intersection des fermés* $\operatorname{sp} \Delta_\phi$ *lorsque* ϕ *décrit* $P(M)$.

Ainsi, $S(M)$ est un invariant algébrique de M , et c'est une partie fermée de $[0, +\infty[$.

11.12. *<u>Théorème</u> - Soit* M *un facteur. Pour tout* $\phi \in P(M)$ *on a*

$$S(M) \cap \mathbb{R}_*^+ = \Gamma(\sigma^\phi) ,$$

et par conséquent $S(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ *est un sous-groupe fermé du groupe multiplicatif* $\mathbb{R}_*^+$.

Soit $\phi \in P(M)$. D'après ([15], th. 1.2.1), pour tout $\Psi \in P(M)$ les représentations σ^ϕ et σ^Ψ sont extérieurement équivalentes, et d'après [15] th. 1.2.4 toute représentation de $\mathbb{R}$ sur M extérieurement équivalente à σ^ϕ est de la forme σ^Ψ avec $\Psi \in P(M)$. Il résulte alors du théorème 10-17 que $\Gamma(\sigma^\phi)$ est égal à l'intersection des fermés sp σ^Ψ lorsque Ψ décrit P(M), d'où $\Gamma(\sigma^\phi) = S(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ d'après le lemme 11.10, et par conséquent $S(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_*^+$ (voir Prop. 7.12.).

11.13. Soient M une algèbre de von Neumann, $\phi \in P(M)$ et e un projecteur non nul de $M_\phi = M^{\sigma^\phi}$. D'après [34], prop. 3.3.(ii), pour tout $x \in M^+$ tel que $\phi(x) < +\infty$, on a $\phi(exe) < +\infty$. Il en résulte que la restriction Ψ de ϕ à $(eMe)^+$ est un poids normal fidèle semi-fini sur eMe que nous appellerons <u>poids réduit de</u> ϕ <u>par</u> e. Comme on a $\mathcal{H}_\Psi \subset \mathcal{H}_\phi$, il est clair que la sous-représentation de σ^ϕ définie par eMe satisfait aux conditions K.M.S. relativement au poids Ψ, et par conséquent elle est égale à σ^Ψ.

<u>Proposition</u> - Soient M *un facteur et* $\phi \in P(M)$. *Alors* $S(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ *est égal à la partie non nulle de l'intersection des spectres des opérateurs modulaires associés aux poids réduits de* ϕ *par les projecteurs non nuls de* M_ϕ. *De plus l'énoncé analogue en se limitant aux projecteurs non nuls du centre de* M_ϕ *est également valable.*

D'après le théorème 11.12 et la définition de $\Gamma(\sigma^\phi)$, l'ensemble $S(M) \cap \mathbb{R}^+$ est égal à l'intersection des fermés sp σ^Ψ lorsque Ψ décrit l'ensemble des poids réduits de ϕ par les projecteurs non nuls de M_ϕ. Compte-tenu du lemme 11.10, on en déduit la première assertion de la proposition. Pour la deuxième assertion il suffit d'utiliser la remarque 10.3.

11.14. *Proposition* - *Soit* M *un facteur. L'ensemble* S(M) *contient* 0 *si et seulement si* M *est un facteur de type* III .

Si M est semi-fini et si τ est une trace normale fidèle semi-finie sur M , on a $\Delta_\tau = 1$, d'où $S(M) = \{1\}$.

Supposons maintenant que l'on ait $0 \notin S(M)$ et soit $\phi \in P(M)$ tel que $0 \notin \operatorname{sp} \Delta_\phi$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{sp} \Delta_\phi \subset [\lambda, +\infty[$. Alors $\operatorname{Log} \Delta_\phi - \operatorname{Log} \lambda$ est un opérateur autoadjoint positif, et c'est le générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre fortement continu d'unitaires de $\mathcal{L}(H_\phi)$ qui induit la représentation σ^ϕ . D'après le théorème 8.8, la représentation σ^ϕ est induite par un groupe à un paramètre fortement continu d'unitaires de M , et on déduit alors du théorème 7.4. de [34] que le facteur M est semi-fini.

11.15. Comme $S(M) \cap \mathbb{R}_*^+$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_*^+$, il a nécessairement l'une des formes suivantes:

$$\{1\} , \qquad]0, +\infty[, \qquad \{\lambda^n , n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad \lambda \in]0,1[.$$

D'après la proposition 11.14 , le facteur M est semi-fini si et seulement si $S(M) = \{1\}$. Par conséquent, l'invariant S ne donne aucun élément nouveau pour classer les facteurs semi-finis. Par contre, si M est un facteur de type III on peut avoir $S(M) = \{0,1\}$, $S(M) = [0, +\infty[$, ou $S(M) = \{\lambda^n , n \in \mathbb{Z}\}^-$ avec $\lambda \in]0,1[$. On dit que M est de type III_0 dans le premier cas, de type III_1 dans le deuxième cas et de type III_λ dans le dernier cas.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE .

L'invariant S a été introduit par A. Connes dans ([15], §II), d'où proviennent également les énoncés 11.10 à 11.14.

La définition 11.5 se trouve dans ([41], §5) ainsi que la proposition 11.6 . Cette proposition peut également se déduire de ([23], démonstration de 3.12) , qui contient aussi, en partie, les énoncés 11.2 et 11.3 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. ARVESON, On groups of automorphisms of operator algebras (J. Funct. Anal., t.15, 1974, p.217-243).

[2] F.F. BONSALL & J. DUNCAN, Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras (London Math. Soc. Lecture Note Series, n° 2, Cambridge University Press, 1971).

[3] H.J. BORCHERS, Energy and momentum as observables in quantum field theory (Comm. Math. Phys., t.2, 1966, p. 49-54.).

[4] H.J. BORCHERS, On groups of automorphisms with semi-bounded spectrum (Colloque Gif-sur-Yvette, C.N.R.S. , 1969).

[5] H.J. BORCHERS, Über Ableitungen von C^*-Algebren (Nach. d. Göttingen Akad., t.2, 1973, p. 19-35)

[6] H.J. BORCHERS, Characterization of inner $*$-automorphisms of W^*-algebras (Publ. Res. Inst. Math. Sci., t.10, 1974, p.11-50)

[7] N. BOURBAKI, Topologie Générale, Chap. 2 (Act. Sci. Ind., n° 1142, Paris, Hermann, 1961).

[8] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques (Act. Sci. Ind., n^{os} 1189 et 1229, Paris, Hermann, 1966 et 1967)

[9] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. 6 (Act. Sci. Ind., n° 1281, Paris, Hermann, 1959).

[10] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. 8 (Act. Sci. Ind., n° 1306, Paris, Hermann, 1963).

[11] N. BOURBAKI, Théories spectrales (Act. Sci. Ind., n° 1332, Paris, Hermann, 1967).

[12] R. CHARPENTIER, Théorie spectrale des groupes localement compacts commutatifs (Thèse 3ème Cycle, Université d'Orléans, 1975).

[13] F. COMBES , Quelques propriétés des C^*-algèbres
(Bull Sc. Math. 2ème série, t.94, 1970, p. 165-192)

[14] F. COMBES , Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche
(Comp. Math., t.23, 1971, p 49-77)

[15] A. CONNES , Une classification des facteurs de type III
(Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., t.6, 1973, p 133-252)

[16] A. CONNES , Almost periodic states and factors of type III_1
(J. Funct. Anal., t.6, 1974, p. 415-445)

[17] A. CONNES & A. VAN DAELE, The group property of the invariant S
(Math. Scand., t.32, 1973, p.187-192)

[18] J. DIXMIER , Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien
(Gauthier-Villars, Paris, 1969)

[19] N. DUNFORD & J. SCHWARTZ, Linear operators , Vol I
(Interscience Publishers, New-York, 1967)

[20] F. FORELLI , Analytic and quasi-invariant measures
(Acta. Math., t. 118, 1967, p. 33-59)

[21] A. GROTHENDIECK , Espaces vectoriels topologiques
(Sociedade de Matematica, São Paulo, 1964)

[22] A. GROTHENDIECK , Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
(Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955)

[23] U. HAAGERUP , The standard form of von Neumann algebras
(University of Copenhagen, preprint n° 15, 1973)

[24] R.V. KADISON , Derivations of operator algebras
(Ann. of Math., t.83, 1966 , p. 280-293)

[25] R.V. KADISON & J.R. RINGROSE, Derivations and automorphisms of operator algebras
(Comm. Math. Phys., t.4, 1967, p. 32-63)

[26] R.R. KALLMAN, Uniform continuity, unitary groups and compact operators (J. Funct. Anal., t.1, 1967, p. 245-253)

[27] G. MOKOBODSKI, Sur des mesures qui définissent des graphes d'applications (Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 6ème année, 1962)

[28] D. OLESEN, Derivations of AW^*-algebras are inner (Pacific J. Math., t.53, 1974, p. 555-561)

[29] D. OLESEN, On norm continuity and compactness of spectrum (Math. Scand. t.35, 1974, p 223-236)

[30] D. OLESEN, Inner $*$-automorphisms of simple C^*-algebras (Comm. Math. Phys. t.44, 1975, p. 175-190)

[31] D. OLESEN, On spectral subspaces and their applications to automorphism groups (Séminaire de Physique théorique, C.N.R.S. , Marseille, 1974)

[32] D. OLESEN & G.K. PEDERSEN, Derivations of C^*-algebras have semi-continuous generators (Pacific J. Math. , t.53, 1974, p 563-572)

[33] G.K. PEDERSEN , Applications of weak $*$-semicontinuity in C^*-algebra theory (Duke Math. J., t.39, 1972, p. 431-450)

[34] G.K. PEDERSEN & M. TAKESAKI, The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras (Acta Math., t.130, 1973, p.53-87)

[35] W. RUDIN , Fourier analysis on groups (Interscience Publishers, New-York, 1962)

[36] S. SAKAI, Derivations of W^*-algebras (Ann. of Math., t.83, 1966, p 273-279)

[37] S. SAKAI, C^*-algebras and W^*-algebras (Springer-Verlag, 1971)

[38] S. SAKAI, Derivations of simple C^*-algebras II (Bull. Soc. Math. France, t.99, 1971, p. 259-263)

[39] L. SCHWARTZ, Probabilités cylindriques et applications radonifiantes (Journal de la Faculté des Sciences, Université de Tokyo, t.18, 1971, p. 139-285)

[40] E. STØRMER, Spectra of ergodic transformations (J. Funct. Anal., t.15, 1974, p. 202-215)

[41] M. TAKESAKI, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III (Acta. Math., t.131, 1973, p. 249-310)

[42] M. TAKESAKI, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications (Lecture notes in Mathematics, n° 128, Springer-Verlag, 1970)

[43] A.S. WIGHTMAN, Proc. Int. Congress of Mathematicians, 1962, p. 587-595

[44] S. DOPLICHER, An algebraic spectrum condition (Comm. Math. Phys., t.1, 1965, p. 1-5)

[45] G.F. DELL'ANTONIO, On some groups of automorphisms of physical observables (Comm. Math. Phys., t.2, 1966, p. 384-397)

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE

SUMMARY

This paper studies a generalization of the theory of equicontinuous representations of locally compact groups. The point of view adopted here is to work simultaneously with two topologies on the representation space. This generalization is needed, in particular, for the study of a representation U of a locally compact group G on a von Neumann algebra M : in this case, $(U_g)_{g \in G}$ is a family of automorphisms of M (so, equicontinuous for the uniform topology) and, for each $x \in M$, the application $g \longmapsto U_g x$ is only continuous in the weak topology of M .

The first part of this paper is devoted to the general study of representations on bitopological vector spaces. The emphasis is laid on the case where the bitopological structures come from couples of Banach spaces in duality and where the groups are abelian. The spectral subspaces of the representations are the key objects, and the techniques are those utilised in harmonic analysis.

In the second part, the theory of representations on operator algebras is developped. Several applications are given, in particular KADISON-SAKAI's theorem asserting that every derivation D of a von Neumann algebra M is inner (obtained here by studying the one-parameter group $t \longmapsto \exp itD$), and BORCHERS' theorem : representations of $\mathbb{R}^n$ on M induced by certain unitary representations are inner. The invariant S of CONNES is also introduced.

The main results of this paper are due to W. ARVESON who initiated this study. The theory was then developped by several authors : A. CONNES, H.J. BORCHERS, D. OLESEN, G.K. PEDERSEN, etc... References are given at the end of each paragraph.