Astérisque

M. CHALEYAT-MAUREL
MARC YOR

Les filtrations de $|X|$ et X^+, lorsque X est une semi-martingale continue

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 193-196
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__193_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.193-196

LES FILTRATIONS DE $|X|$ ET X^+, LORSQUE X EST UNE SEMI-MARTINGALE CONTINUE.

M. CHALEYAT-MAUREL et M. YOR

INTRODUCTION

Le second auteur a montré en [4] que, si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel, issu de $x \in \mathbb{R}$, les filtrations, dûment complétées et rendues continues à droite de $|B|$ et du mouvement brownien $\hat{B} = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(B_s)dB_s$ sont identiques.

On montre ici que ce résultat s'étend à la valeur absolue $|X|$ de toute semi-martingale continue X (jouant le rôle de B). Un résultat analogue - convenablement formulé - est valable pour la partie positive X^+ de X.

1 - PRÉLIMINAIRES

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ constituée de sous-tribus de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles.

La définition suivante nous sera très utile :

Définition

Si X et Y sont deux processus, on dit que X domine Y si la filtration $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t, t \geq 0)$ engendrée par X, complétée et rendue continue à droite, contient la filtration $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \geq 0)$ associée de la même façon à Y, c'est à dire :

pour tout t, $\mathcal{Y}_t \subseteq \mathcal{X}_t$.

X et Y sont dits équivalents si X domine Y et Y domine X.

Voici un premier exemple de domination :

Lemme

Toute semi-martingale X domine les processus $[X,X]$ et $\langle X^c, X^c \rangle$.

Démonstration : il est classique que, pour tout t, $[X,X]_t$ est la limite p.s d'une suite de variables $\sum_{i=1}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, où $0 \leq t_o < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$. X domine donc $[X,X]$. D'autre part, l'égalité $\langle X^c, X^c \rangle_t = \int_o^t 1_{(\Delta X_s = 0)} \, d[X,X]_s$ implique que X domine $\langle X^c, X^c \rangle$ ∎

Voici deux applications de ce lemme :

Proposition

Soit X une semi-martingale, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure signée.

Alors, $f(X)$ domine $\int_o^{\cdot} (f'_g)^2 (X_s) \, d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

Corollaire

Si X est une semi-martingale, alors :

a). $|X|$ domine $\langle X^c, X^c \rangle$.

b). X^+ domine $\int_o^{\cdot} 1_{(X_s > 0)} \, d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

Démonstration : d'après la formule d'Ito généralisée (voir [2], chapitre VI, ou, dans ce volume, RPG), on a :

$$f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t f'_g(X_{s-}) dX_s + A_t^f,$$

où A^f est un processus à variation bornée.

On en déduit : $\langle f(X)^c, f(X)^c \rangle = \int_o^{\cdot} (f'_g)^2 (X_s) \, d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

La proposition découle alors du lemme.

Pour démontrer le corollaire, prendre $f(x) = |x|$, puis x^+.

2 - LES FILTRATIONS DE $|X|$ ET X^+

Soit X une semi-martingale continue.

D'après la formule de Tanaka (voir toujours RPG), on a :

$$(1) \qquad X_t^+ = X_o^+ + \int_o^t 1_{(X_s > 0)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^o,$$

où L^o est le temps local de X en 0.

D'autre part, la formule suivante a été montrée en ([3], formule 8)

$$(2) \qquad |X_t| = |X_o| + \int_o^t \overline{\mathrm{sgn}}(X_s) dX_s + \bar{L}_t^o,$$

où $\overline{\mathrm{sgn}}(u) = +1$ si $u > 0$, 0 si $u=0$, -1 si $u < 0$, et

$$\bar{L}_t^o = \frac{1}{2}(L_t^o + L_t^{o-})$$

Notons $\hat{X}_t = X_o^+ + \int_o^t 1_{(X_s > 0)} dX_s$

et $\bar{X}_t = |X_o| + \int_o^t \overline{\mathrm{sgn}}(X_s) dX_s$

Voici notre résultat principal :

<u>Théorème</u> :

<u>Soit</u> X <u>une semi-martingale continue. Alors,</u>

a). <u>les processus</u> X^+ <u>et</u> $\hat{X}$ <u>sont équivalents</u>.

b). <u>les processus</u> $|X|$ <u>et</u> $\bar{X}$ <u>sont équivalents</u>.

<u>Démonstration</u> :

a). D'après (1), on a : $\frac{1}{2} L_t^o = \sup_{s \leq t} [\hat{X}_s]^-$ (on note $x^- = \sup(-x,0)$), et donc, d'après la formule (1), $\hat{X}$ domine X^+.

Inversement, il est montré en (3) (corollaire 2) que

$$L_t^o = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_o^t 1_{(0 < X_s < \varepsilon)} \, d < X^c, X^c >_s$$

$$= \lim_{(\varepsilon \to 0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_o^t 1_{0 < X_s^+ < \varepsilon} \{ 1_{(X_s > 0)} \, d < X^c, X^c >_s \}$$

Si l'on remplace l'indicatrice $1_{]0,\varepsilon[}(x)$ par une fonction continue à support compact f, il découle du corollaire de la proposition que X^+ domine $\int_0^t f(X_s^+)\, 1_{(X_s > 0)}\, d<X^c,X^c>_s$.

Par un argument de classe monotone, X^+ domine L^0, et donc $\hat{X}$, d'après la formule (1).

Finalement, X^+ et $\hat{X}$ sont équivalents.

b). On fait le même raisonnement qu'en a), à partir de la formule (2), et des expressions suivantes de $\bar{L}^0$:

$$\bar{L}_t^0 = \sup_{s \leq t} (\bar{X}_s)^- \quad \text{(provenant de (1))}$$

et

$$\bar{L}_t^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(0 < |X_s| < \varepsilon)}\, d<X^c,X^c>s \quad \text{(provenant de (3))}.$$

Remarque : en changeant X en -X, on déduit du théorème l'équivalence des processus X^- et $\check{X} = X_0^- - \int_0^{\cdot} 1_{(X_s < 0)} dX_s$.

RÉFÉRENCES

(1) N. EL KAROUI et M.CHALEYAT-MAUREL : Un problème de réflexion et ses applications au temps local, (dans ce volume).

(2) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511, Springer.

(3) M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales, (dans ce volume).

(4) M. YOR : Sur les théories du filtrage et de la prédiction. Séminaire de Proba. Strasbourg XI, Lecture Notes in Math. 581, Springer.