Astérisque

T. JEULIN
MARC YOR

Autour d'un théorème de Ray

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 145-158
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__145_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 52-53 (1978) p.145-158

AUTOUR D'UN THÉORÈME DE RAY

T. JEULIN ET M. YOR

INTRODUCTION

Soit (X_t) une diffusion réelle continue, issue de 0, associée à un opérateur $L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}$, et $(\underline{\underline{F}}_t)$ sa filtration naturelle, dûment complétée et rendue continue à droite ; on note $T_a = \inf(t/X_t=a)$, et $(L_t^x)_{t \geq 0,\, x \in \mathbf{R}}$ le processus des temps locaux de la semi-martingale X. ([3], ch. VI).

Rappelons deux propriétés essentielles de (L_t^x) (cf. RPG) :

i). <u>pour tout</u> $t \geq 0$, $(L_t^x)_{x \in \mathbf{R}}$ <u>peut être interprété comme "densité de temps d'occupation"</u>, <u>car il vérifie</u> :

(1) <u>pour toute fonction</u> $f \in b(\mathbf{R})$, $\int_0^t f(X_s)\,\sigma^2(X_s)ds = \int_{\mathbf{R}} f(a)\,L_t^a\,da$

ii). <u>pour tout</u> x <u>de</u> $\mathbf{R}$, $(L_t^x)_{t \geq 0}$ <u>est lié à la semi-martingale</u> $(X-x)^+$ <u>par la formule suivante, dûe à Tanaka lorsque</u> X <u>est le mouvement brownien réel</u> (on note $a^+ = \sup(a,0)$):

(2) $(X_t-x)^+ = (X_0-x)^+ + \int_0^t I_{(X_s > x)}\,dX_s + \frac{1}{2}L_t^x.$

Le but de notre travail est de démontrer, en utilisant essentiellement ces deux propriétés, une caractérisation - dûe à D. Ray (4)- de la loi du processus

$Z_x = L_{T_1}^{1-x} (x \in \mathbb{R})$, qui s'énonce comme suit, dans le cas du mouvement brownien, et lorsque $x \in [0,1]$:

Théorème

Si X est le mouvement brownien réel, issu de $x=0$, le processus $L_{T_1}^{1-x}$, $0 \leq x \leq 1)$ a même loi que le carré du module d'un mouvement brownien complexe issu de 0.

En fait, plusieurs démonstrations de ce théorème sont connues (cf. par exemple [4], [5]). La nôtre nous semble assez naturelle, et surtout on y dégage, au théorème 4 - qui est la clé de notre démarche - un résultat de représentation de certaines variables aléatoires comme intégrales stochastiques qui, à notre connaissance, est nouveau, et peut avoir son intérêt propre.

Signalons encore que l'article original de Ray ([4]) donne des résultats beaucoup plus complets que ceux que nous obtenons ici en fin d'article.

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

Nous utilisons les notations figurant dans l'introduction.

En outre, nous faisons sur σ et b les hypothèses suivantes :

(a) σ et b sont localement lipschitziennes

(b) σ est strictement positive

(c) Il existe une constante $C > 0$, telle que $|\sigma(x)| + |b(x)| \leq C(1+|x|)$

(d) Si f est la fonction strictement croissante définie par :

$$f(x) = \int_0^x (\exp - \int_0^z \frac{2\, b(u)}{\sigma^2(u)}\, du) dz,$$

on suppose que : $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

Ω désigne l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ sur lequel on considère le processus (X_t) des coordonnées (défini par $X_t(\omega) = \omega(t)$) et la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^0)$ qu'il engendre.

D'après les hypothèses (a),(b), (c), (d), il est classique que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o_\infty)$ - que nous notons $\mathbb{P}_y$ - faisant de X un processus de diffusion issu de y, associé à L.

$(\underline{\underline{F}}_t)$ désigne la filtration $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ rendue continue à droite, et convenablement complétée pour les $\mathbb{P}_y$.

Enfin, l'hypothèse (d) entraîne, d'après [2] (p. 115), que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = 1$.

I - RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES SUR LES TEMPS LOCAUX

Nous avons adopté dans l'introduction, en ce qui concerne les temps locaux, le point de vue des semi-martingales (nous garderons ce point de vue dans tout l'article).

Cependant nous travaillons ici avec toute la famille des probabilités $\mathbb{P}_y$, et l'existence d'un processus $(L^a_t, a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$ de temps locaux, associés à X, et qui convienne pour toutes les probabilités $\mathbb{P}_y$ à la fois, nous est nécessaire. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 1

Il existe un processus $L : \begin{array}{l} \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ (\omega, a, t) \longrightarrow L^a_t(\omega) \end{array}$

vérifiant les propriétés suivantes, pour toute probabilité $\mathbb{P}_y (y \in \mathbb{R})$:

1). $\forall f \in b(\mathbb{R})$
$\forall t \geq 0, \int_0^t f(X_s)\, \sigma^2(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(a)\, L^a_t da$, $\mathbb{P}_y$ ps

2). le processus L est, $\mathbb{P}_y$ p.s., bicontinu en (a,t)

3). pour tout $a \in \mathbb{R}$, L^a est un temps local (au sens de [1]) en a de (X_t), considéré comme processus de Markov.

Démonstration : pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, notons ${}_yL^x_t$ le processus (en t) du temps local au point x de la semi-martingale (X_t) sous $\mathbb{P}_y$, processus qui est défini par la formule (2).

D'après [6], σ ne s'annulant pas, on sait que pour tout y, il existe une version ${}_y\tilde{L}_t^x$ de ${}_yL_t^x$, qui est $\mathbb{P}_y$ ps bicontinue en (x,t). Ainsi, d'après la formule (1), on a, $\mathbb{P}_y$ ps :

$$\begin{matrix}\forall x \in \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+\end{matrix}, \quad {}_y\tilde{L}_t^x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_0^t I_{(x < X_s < x+h)}\, \sigma^2(X_s)ds$$

Posons $L_t^x(\omega) = \liminf_{h \to 0} \{\frac{1}{h}\int_0^t I_{(x < X_s < x+h)}\, \sigma^2(X_s)ds\}(\omega)$

Ce processus - indépendant de y - vérifie bien, par construction, les propriétés (1) et (2) (car elles étaient vérifiées par ${}_y\tilde{L}_t^x$).

D'autre part, pour tout y, on a, en fait

$$\mathbb{P}_y \text{ ps}, \; L_t^x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_0^t I_{(x < X_s < x+h)}\, \sigma^2(X_s)ds.$$

On en déduit que, pour x fixé, L^x est une fonctionnelle additive continue du processus de Markov X. Par ailleurs, la mesure $dL_\cdot^x(\omega)$ est portée par $(s/X_s(\omega) = x)$. X étant à trajectoires continues, on en déduit que le support de L^x (en tant que fonctionnelle additive, cf. [1], page 213) est contenu dans $\{x\}$, et donc identique à $\{x\}$, sinon L^x serait nulle ([1], p. 214), ce qui est contredit par les formules du lemme 2.

Par définition ([1], p. 216), L^x est donc bien un temps local en x du processus de Markov (X_t). $\square$

Notons $M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s)ds$; c'est une $(\mathbb{P}, \underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale - fonctionnelle additive, de processus croissant $\int_0^t \sigma^2(X_s)ds$. D'après (b), l'intégrale stochastique $\int_0^t \frac{1}{\sigma(X_s)}\, dM_s$ (qui est aussi une martingale - fonctionnelle additive) est bien définie ; de plus, c'est un $(\mathbb{P}, \underline{\underline{F}}_t)$ mouvement brownien que l'on note B_t.

On peut alors écrire :

$$(3) \qquad X_t = X_o + \int_o^t \sigma(X_s)dB_s + \int_o^t b(X_s)ds.$$

Le lemme suivant donne l'expression explicite du premier moment de $L^a_{T_1}$:

Lemme 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. f désignant la fonction introduite en (d), on a les égalités :

$$\begin{aligned}
- \text{ si } y \le 1, \ \mathbf{E}_y(L^a_{T_1}) &= \frac{2}{f'(a)} \ (f(1) - f(y)) && \text{si } a \le y \\
&= \frac{2}{f'(a)} \ (f(1) - f(a)) && \text{si } y \le a \le 1 \\
&= 0 && \text{si } a \ge 1 \\
- \text{ si } 1 \le y, \ \mathbf{E}_y(L^a_{T_1}) &= 0 && \text{si } a \le 1 \\
&= \frac{2}{f'(a)} \ (f(a) - f(1)) && \text{si } 1 \le a \le y \\
&= \frac{2}{f'(a)} \ (f(y) - f(1)) && \text{si } y \le a
\end{aligned}$$

Démonstration : la fonction f est de classe C^2, et vérifie :

$$\frac{1}{2} \ \sigma^2 f'' + bf' = 0.$$

Fixons $y \in \mathbb{R}$, et raisonnons relativement à la probabilité $\mathbf{P}_y$.
La formule d'Ito permet d'écrire :

$$(4) \qquad Y_t = f(X_t) = f(X_o) + \int_o^t (\sigma \ f')(X_s)dB_s.$$

Notons $\mathcal{L}^a_t$ une version bicontinue du temps local associé à la martingale continue Y (voir, par exemple, [6]); alors, si $\bar{f}$ désigne l'application réciproque de f, on a, d'après (1), pour toute $\phi \in b(\mathbb{R})$:

$$\int \phi(a) \ L^a_t \ da = \int_o^t \phi(X_s) \ \sigma^2(X_s)ds = \int_o^t \left[\frac{\phi}{(f')^2} \circ \bar{f}\right](Y_s)(f'^2 \ \sigma^2)(X_s)ds$$

$$= \int \frac{\phi}{f'^2} \circ \bar{f}(b) \mathcal{L}^b_t \ db = \int \phi(a) \ \frac{1}{f'(a)} \quad \mathcal{L}^{f(a)}_t \ da$$

En identifiant les deux membres extrêmes de cette suite d'égalités, on a donc :

(5) $\quad L_t^a = \frac{1}{f'(a)} \mathcal{L}_t^{f(a)}$ (à une $\mathbf{P}_y$-indistinguabilité près en (a,t)).

Remarquons que, pour $y \leq 1$, l'intégrale $\int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(a))} (\sigma f')^2 (X_s) ds$ est majorée par $t \times \sup_{u \in [a,1]} (\sigma f')^2 (u)$, $\mathbf{P}_y$ ps.

La martingale $\int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(a))} (\sigma f')(X_s) dB_s$ est donc de carré intégrable; elle est, par suite, d'espérance nulle, pour tout t. On déduit alors de (2) (en remplaçant X par Y) l'égalité :

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}_y(\mathcal{L}_{t \wedge T_1}^{f(a)}) + (f(y) - f(a))^+ = \mathbb{E}_y((f(X_{t \wedge T_1}) - f(a))^+).$$

Quand t tend vers $+\infty$, le membre de gauche croit vers $\frac{1}{2} \mathbb{E}_y(\mathcal{L}_{T_1}^{f(a)}) + (f(y) - f(a))^+$, tandis que celui de droite tend, par convergence dominée, vers $(f(1) - f(a))^+$, d'où les égalités annoncées dans le cas où $y \leq 1$.

Si $y \geq 1$, on procède de même, en utilisant

(2') $\quad (Y_t - f(a))^- = (Y_0 - f(a))^- + \int_0^t I_{(Y_s < f(a))} dY_s + \frac{1}{2} \mathcal{L}_t^{f(a)}$

<u>Nota bene</u> : la formule (5) $L_t^a = \frac{1}{f'(a)} \mathcal{L}_t^{f(a)}$, liant les temps locaux L et $\mathcal{L}$ relatifs respectivement à X et $Y=f(X)$ est encore utilisée dans les paragraphes suivants.

2 - UNE MARTINGALE REMARQUABLE

Remplaçons en (2) t par T_1 et x par $1-x (x \geq 0)$; on obtient :

$$x = (X_0 - 1 + x)^+ + \frac{1}{2} L_{T_1}^{1-x} + \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) dB_s + \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} b(X_s) ds$$

Posons $Z_x = L_{T_1}^{1-x}$ $(x \geq 0)$.

Si l'on transforme la dernière intégrale à l'aide de (1), il vient :

(6) $\quad Z_x - 2 \inf(x, 1-X_0) + 2 \int_0^x \frac{b}{\sigma^2} (1-u) Z_u \, du = -2 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) dB_s$

Dans la suite, on s'intéresse au comportement de Z_x sous $\mathbb{P}_0$.

D'après l'identification de L^a à un temps local markovien de X en a (lemme 1, 3)), Z_x est strictement positif, $\mathbb{P}_0$ p.s., pour x fixé ($x \in]0,1]$). Une première conséquence du lemme 2 est l'intégrabilité de Z_x par rapport à $\mathbb{P}_0$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$. En voici une seconde :

<u>Lemme 3</u> : <u>soit</u> $x \geq 0$.

<u>Notons</u> (M_t^x) la $(\underline{F}_t)$-<u>martingale locale</u> $2\int_0^{t \wedge T_1} I_{(X_s > 1-x)}\, \sigma(X_s) dB_s$.

<u>On a les égalités</u> :

$$< M^x, M^x >_\infty = 4 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)}\, \sigma^2(X_s) ds = 4 \int_0^x Z_u\, du,$$

<u>et la variable</u> $< M^x, M^x >_\infty$ <u>est de carré intégrable sous</u> $\mathbb{P}_0$. <u>En conséquence,</u>

$$\mathbf{E}_0(\sup_t |M_t^x|^4) < +\infty .$$

<u>Démonstration</u> : l'expression de $< M^x, M^x >_\infty$ en fonction de Z découle de (1) ; d'après l'inégalité de Schwarz, $\mathbf{E}_0((\int_0^x Z_u\, du)^2)$ est majoré par $x \times \int_0^x E(Z_u^2) du$, donc, d'après (5), par :

$$x \int_{1-x}^1 \frac{1}{f'^2(u)}\, \mathbf{E}_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) du \ ;$$

il suffit donc de montrer que, pour $a \geq 0$, on a : $\sup_{u \in [-a,1]} \mathbf{E}_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) < +\infty$.

Pour simplifier les expressions à écrire, on prend $a=0$ dans la suite.

Soit U^u la martingale $U_t^u = \int_0^{t \wedge T_1} I_{(Y_s > f(u))}\, \sigma f'(X_s) dB_s$.

D'après (2), on a, pour $u \in [0,1]$:

$$U_t^u = (Y_{t \wedge T_1} - f(u))^+ - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{t \wedge T_1}^{f(u)}, \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{4} \mathbf{E}_0((\mathcal{L}_{T_1}^{f(u)})^2) = \mathbf{E}_0((f(1) - f(u) - U_\infty^u)^2)$$
$$\leq 2\{f(1)^2 + \mathbf{E}_0((U_\infty^u)^2)\}.$$

Or, on a : $\mathbf{E}_0(<U^u,U^u>_\infty) = \mathbf{E}_0\left(\int_0^{T_1} I_{(Y_s > f(u))}\, \sigma^2 f'^2(X_s)ds\right)$

$$= \mathbf{E}_0\left(\int_{f(u)}^{f(1)} \mathcal{L}_{T_1}^b\, db\right)$$

$$\leq \mathbf{E}_0\left(\int_0^{f(1)} \mathcal{L}_{T_1}^b\, db\right).$$

D'après (5), cette dernière intégrale est égale à :

$$\int_0^1 f'^2(v)\, \mathbf{E}_0(L_{T_1}^v)dv < +\infty \text{ , d'après le lemme (2).}$$

La fin du lemme découle des inégalités de Burkholder - Davis - Gundy.

3 - UN THÉORÈME DE REPRÉSENTATION ET SES CONSÉQUENCES

Soit $\underline{\underline{\mathcal{Z}}}_x$ la filtration engendrée par le processus continu $(Z_x, x \geq 0)$, rendue continue à droite, et dûment complétée sous $\mathbf{P}_0$.

Le théorème suivant est la clé de notre démonstration du théorème de Ray :

<u>Théorème 4</u>

<u>Soit</u> $x \geq 0$.

i). <u>Si</u> $H \in L^2(\underline{\underline{\mathcal{Z}}}_x, \mathbf{P}_0)$, <u>il existe un processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u> Φ <u>tel que</u> <u>l'on puisse écrire</u> :

$$H = \mathbf{E}_0(H) + \int_0^{T_1} \Phi_s\, I_{(X_s > 1-x)}\, dB_s,\ \mathbf{P}_0 \text{ ps,}$$

<u>avec</u>

$$\mathbf{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Phi_s^2\, I_{(X_s > 1-x)} ds\right) < +\infty.$$

ii). <u>Si</u> $H \in L^4(\underline{\underline{\mathcal{Z}}}_x, \mathbf{P}_0)$, <u>il existe un processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u> Ψ <u>tel que la variable aléatoire</u> $K \in L^2(\mathbf{P}_0)$, <u>définie par</u> :

$$K = \int_0^{T_1} \Phi_s \, I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds,$$ où Φ est le processus obtenu précédemment,

puisse s'écrire :

$$K = \mathbb{E}_0(K) + \int_0^{T_1} \Psi_s \, I_{(X_s > 1-x)} dB_s, \; \mathbb{P}_0 \text{ ps},$$

avec

$$\mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Psi_s^2 \, I_{(X_s > 1-x)} ds\right) < +\infty.$$

Supposons démontré le théorème 4 (ce qui sera fait au paragraphe 4). On peut alors énoncer la :

Proposition 5

Le processus $(Q_x, x \geq 0)$, défini par

$$Q_x = Z_x - 2(x \wedge 1) + 2 \int_0^x \frac{b}{\sigma^2} (1-u) \, Z_u \, du$$

est une $(\mathcal{Z}_x, \mathbb{P}_0)$ martingale continue, telle que $Q_x \in L^4(\mathcal{Z}_x)$ pour tout x, et admettant pour processus croissant (relativement à $\mathcal{Z}_x$) $4\int_0^x Z_u \, du$.

Démonstration : soit $H \in b(\mathcal{Z}_x)$, et $y \geq x$. On a :

$$Q_y = -M_{T_1}^y = -2 \int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-y)} \, \sigma(X_s) dB_s.$$

A l'aide de la représentation de H, obtenue dans la première partie du théorème 4, on a :

$$\mathbb{E}_0(H \, Q_y) = -2 \, \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Phi_s \, I_{(X_s > 1-x)} \, dB_s . \int_0^{T_1} \sigma(X_s) \, I_{(X_s > 1-y)} dB_s\right)$$

$$= -2 \, \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Phi_s \, \sigma(X_s) \, I_{(X_s > 1-x)} \, I_{(X_s > 1-y)} ds\right)$$

$$= -2 \, \mathbb{E}_0 \left(\int_0^{T_1} \Phi_s \, \sigma(X_s) \, I_{(X_s > 1-x)} ds\right)$$

$$= \mathbb{E}_0(H \, Q_x)$$

Q est donc une $\underline{\underline{\mathcal{G}}}$-martingale. En outre, du lemme 3, on déduit aisément que

$\int_0^{t\wedge T_1} M_s^y \, I_{(X_s > 1-y)} \, \sigma(X_s) dB_s$ est une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale de carré intégrable.

On peut donc écrire :

$$\mathbf{E}_0(H\,(Q_y^2 - 4\int_0^y Z_u \, du))$$

$$= 4\,\mathbf{E}_0(\int_0^{T_1} \Phi_s \, I_{(X_s > 1-x)} \, dB_s \, . \int_0^{T_1} M_s^y \, I_{(X_s > 1-y)} \, \sigma(X_s) dB_s)$$

$$= 4\,\mathbf{E}_0(\int_0^{T_1} \Phi_s \, M_s^y \, I_{(X_s > 1-x)} \, \sigma(X_s) ds)$$

Si K_t désigne le processus prévisible à variation finie $\int_0^{t\wedge T_1} \Phi_s \, \sigma(X_s) \, I_{(X_s > 1-x)} ds$, on obtient :

$$\mathbf{E}_0(H(Q_y^2 - 4\int_0^y Z_u \, du)) = 4\,\mathbf{E}_0(\int_0^{T_1} M_s^y \, dK_s) = 4\,\mathbf{E}_0(M_{T_1}^y . K_{T_1})$$

$$= 8\,\mathbf{E}_0(\int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-y)} \, \sigma(X_s) dB_s . \int_0^{T_1} \Psi_s \, I_{(X_s > 1-x)} dB_s) \text{ (d'après le théorème 4,ii))}$$

$$= 8\,\mathbf{E}_0(\int_0^{T_1} I_{(X_s > 1-x)} \, \Psi_s \, \sigma(X_s) ds) = \mathbf{E}_0(H(Q_x^2 - 4\int_0^x Z_u \, du)).$$

Le processus croissant associé à la martingale Q est donc $4\int_0^{\cdot} Z_u \, du$.

Afin de ne pas alourdir inutilement la rédaction, nous énonçons sans démonstration le résultat d'unicité suivant :

Théorème 6

Soit $T > 0$ et $\Omega_0^T = C([0,T], \mathbf{R}_+)$ l'ensemble des applications continues de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}_+$ muni de ses applications coordonnées (ξ_t) et de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$ qu'elles engendrent.

1). Si $\sigma = 1$, b=0 (i.e. : $\mathbf{P}_0$ est la loi du mouvement brownien issu de 0), la loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq T)$ sous $\mathbf{P}_0$, soit $\Pi^T_{1,0}$, est l'unique probabilité $\mathbf{Q}$ sur Ω^T_0 telle que $\mathbf{Q}(\xi_0 = 0) = 1$ et

$(\xi_t - 2 \inf(1,t), t \leq T)$ soit une $\mathbf{Q}$-martingale de processus croissant

$4\int_0^t \xi_u \, du$.

2). De même, dans le cas général, la loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq T)$ sous $\mathbf{P}_0$, soit $\Pi^T_{\sigma,b}$, est l'unique probabilité $\mathbf{Q}$ sur Ω^T_0 telle que :

$\mathbf{Q}(\xi_0 = 0) = 1$ et

$(\xi_t - 2 \inf(1,t) + 2 \int_0^t \frac{b}{\sigma^2} (1-u)\, \xi_u \, du, t \leq T)$ soit une $\mathbf{Q}$ martingale de processus croissant associé $4 \int_0^t \xi_u \, du$.

Corollaire 7(Ray(4))

La loi de $(Z_x, 0 \leq x \leq 1)$ sous $\mathbf{P}_0$ est celle du carré du module d'un mouvement brownien complexe issu de 0.

Démonstration : d'après le théorème 6,1), appliqué pour T=1, il nous reste à vérifier que si $C_t = U_t + iV_t$ $(0 \leq t \leq 1)$ est un mouvement brownien complexe issu de 0, $|C_t|^2$ a pour loi $\Pi^1_{1,0}$.

Or, $|C_t|^2 = U_t^2 + V_t^2$ vérifie, d'après la formule d'Ito :

$$|C_t|^2 = 2 \int_0^t (U_s \, dU_s + V_s \, dV_s) + 2t$$

et la martingale (locale) $M_t = 2 \int_0^t (U_s \, dU_s + V_s \, dV_s)$ a pour processus croissant $4 \int_0^t (U_s^2 + V_s^2) ds = 4 \int_0^t |C_s|^2 \, ds$.

4 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

a). Si H admet la représentation donnée en i), alors

$$(7) \qquad \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Phi_s^2 \, I_{(X_s > 1-x)} \, ds\right) + (\mathbb{E}_0(H))^2 = \mathbb{E}_0(H^2)$$

En outre, l'inégalité de Schwarz donne

$$\left(\int_0^{T_1} |\Phi_s| I_{(X_s > 1-x)} \, \sigma(X_s) ds\right)^2 \leq \left(\int_0^{T_1} \Phi_s^2 \, I_{(X_s > 1-x)} ds\right) . \left(\int_0^{T_1} \sigma^2(X_s) \, I_{(X_s > 1-x)} ds\right)$$

d'où

$$\left\| \int_0^{T_1} |\Phi_s| I_{(X_s > 1-x)} \sigma(X_s) ds \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| \int_0^{T_1} \Phi_s^2 \, I_{(X_s > 1-x)} ds \right\|_{L^2} . \left\| \int_0^{T_1} \sigma^2(X_s) I_{(X_s > 1-x)} ds \right\|_{L^2}$$

expression qui, d'après le lemme (3) et les inégalités de Burkholder - Davis - Gundy est majorée par une constante fois $\{\mathbb{E}_0(H^4)\}^{1/2}$; par suite, si $H \in L^4(\mathbb{P}_0)$, $\int_0^{T_1} |\Phi_s| \, I_{(X_s > 1-x)} \, \sigma(X_s) ds$ est de carré intégrable et si on a la représentation indiquée en ii), alors :

$$\int_0^{t \wedge T_1} \Psi_s \, I_{(X_s > 1-x)} dB_s \text{ appartient à } L^2(\mathbb{P}_0), \text{ et l'inégalité :}$$

$$(8) \qquad \mathbb{E}_0\left(\int_0^{T_1} \Psi_s^2 \, I_{(X_s > 1-x)} ds\right) \leq k\{\mathbb{E}_0(H^4)\}^{1/2}$$

est vérifiée, avec k constante, ne dépendant que de σ et b.

Les inégalités (7) et (8) ci-dessus montrent qu'il suffit de démontrer le théorème 4,i) (resp. ii)) pour un sous-espace dense de $L^2(\underline{\underline{\mathcal{J}}}_x)$ resp. $L^4(\underline{\underline{\mathcal{J}}}_x)$).

b). On se limitera donc à des variables de la forme :

$H = \exp\left(-\int_0^x g(a) \, Z_a \, da\right)$, où g est une fonction positive à support compact inclus dans $]0,x[$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Posons $G(y) = \mathbb{E}_y(H)$.

En appliquant la propriété de Markov, on montre aisément que G est de classe C^1, que $G'(y) = 0$ pour $y \leq 1-x$, ainsi que la formule :

$$H_t = \mathbb{E}(H|\underline{\underline{F}}_t) = (\exp - \int_0^t g(1-X_s)\, \sigma^2(X_s)ds)\; G(X_{t \wedge T_1}).$$

La formule d'Ito appliquée à H_t permet alors d'écrire

$$H = \mathbb{E}_0(H) + \int_0^{T_1} (\exp - \int_0^u g(1-X_s)\, \sigma^2(X_s)ds)\; G'(X_u)\, \sigma(X_u)\, I_{(X_u > 1-x)} dB_u$$

d'où le théorème 4 i).

c). Il nous reste à représenter

$$K = \int_0^{T_1} \exp(-\int_0^u g(1-X_s)\sigma^2(X_s)ds)\; (G'\sigma^2)\,(X_u)du.$$

Notons $J(y) = \mathbb{E}_y(K)$.

La propriété de Markov permet de montrer que J est différence de deux fonctions convexes et que sa dérivée à gauche $J'(y)$ est nulle pour $y \leq 1-x$.

En outre, $\mathbb{E}(K|\underline{\underline{F}}_t) = K_t + M_t\, J(X_{t \wedge T_1})$ avec

$$M_t = \exp - \int_0^t g(1-X_s)\, \sigma^2(X_s)ds \quad \text{et} \quad K_t = \int_0^{t \wedge T_1} M_s(G'\sigma^2)(X_s)ds.$$

La formule d'Ito généralisée permet alors d'écrire

$$\mathbb{E}(K|\underline{\underline{F}}_t) = \mathbb{E}_0(K) + \int_0^{t \wedge T_1} I_{(X_s > 1-x)} M_s\; (J'\sigma)(X_s)dB_s,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4 (prendre $t=T_1$).

BIBLIOGRAPHIE

(1) BLUMENTHAL R.M. & GETOOR R.K. : Markov Processes and Potential Theory
Academic Press, 1968.

(2) GIHMAN I.I. & SHOROHOD A.V. : Stochastic Differential Equations. Springer 1972

[3] MEYER P.A. : Un cours sur les Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. n° 511, Springer 1976.

[4] RAY D. : Sojourn Times of Diffusion Processes, Illinois J. Math 7, p. 615 - 630, 1963.

[5] WILLIAMS D. : Markov properties of Brownian local times. Bull. Amer. Math. Soc. **75**, p. 1035-1036, 1969.

[6] YOR M. : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales, (dans ce volume).