Astérisque

ALBERT FATHI
MICHAEL R. HERMAN

Existence de difféomorphismes minimaux

Astérisque, tome 49 (1977), p. 37-59
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__49__37_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 49 (1977) p.37-59

EXISTENCE DE DIFFÉOMORPHISMES MINIMAUX

par

Albert FATHI et Michael R. HERMAN

Nous démontrons des théorèmes d'existence de difféomorphismes minimaux sur les variétés C^∞ compactes connexes possédant une action localement libre de $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La démonstration s'inspire d'Anosov et Katok [2]. Une partie de ces résultats a été annoncée par Katok [11].

§ 1. - INTRODUCTION

Soit G un groupe topologique agissant continûment comme groupe d'homéomorphismes sur un espace topologique X.

1.1. DÉFINITION . L'action de G est minimale sur X si l'orbite par G de tout $x \in X$ (i. e. $Gx = \{gx \mid g \in G\}$) est dense dans X.

Soit G une action minimale sur X, si $G = \mathbb{Z}$ et $f \in \text{Homeo}(X)$ est un générateur de G, alors f est appelé un homéomorphisme minimal de X ; si $G = \mathbb{R}$, on a un flot minimal (ou encore un groupe à un paramètre minimal).

1.2. PROPOSITION. *Les affirmations i) et ii) sont équivalentes* :

i) *L'action de* G *sur* X *est minimale* .

ii) *Si* F *est un fermé invariant pour* G (*i.e.* $g(F) = F$ *pour tout* $g \in G$), *alors*

$F = \emptyset$ ou X (i.e. X est minimal pour la relation d'inclusion parmi les ensembles fermés non vides invariants par G).

1.3. PROBLÈME. Quels espaces topologiques X admettent un homéomorphisme (resp. flot) minimal ?

En fait, il est assez naturel de se limiter au cas où X est une variété compacte connexe. On a des exemples de flots minimaux sur une variété ouverte : les flots de Stepanoff [16] ; on obtient un tel flot en partant d'un flot minimal sur une variété C^∞ compacte X ; on considère $Y = X - \{1 \text{ point}\}$ et on "reparamètre" le flot pour obtenir un flot minimal sur Y.

1.4. PROPOSITION. Soit X un espace topologique de Lindelöf, alors i) et ii) sont équivalents :

i) L'action de G sur X est minimale.

ii) Pour tout ouvert non vide U de X, il existe un ensemble dénombrable $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset G$ tel que $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(U)$. Si X est compact, il existe un nombre fini $g_1,\dots,g_n$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(U)$.

Rappelons que X est Lindelöf si tout recouvrement par des ouverts contient un sous-recouvrement dénombrable.

1.5. Remarquons que s'il existe $V \subset X$ ouvert et homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et si X admet une action minimale, alors X est une variété topologique de dimension n.

Pour des exemples d'espace X compact métrique non homogène avec un homéomorphisme minimal, voir [9, § 14.24].

1.6. PROBLÈME. Est-ce qu'il existe un C^∞ difféomorphisme f d'une variété compacte, tel que f ait un ensemble minimal qui ne soit pas localement homéomorphe à $\mathbb{R}^p \times$ Cantor ? Quelle mesure de Lebesgue peut avoir un ensemble minimal ? (On ne connaît pas la réponse à la dernière question, même dans le cas où l'ensemble minimal est une variété topologique ou un Cantor.)

§ 2. - OBSTRUCTIONS A L'EXISTENCE D'ACTION MINIMALE

Fuller [7] a montré le théorème suivant (qui est une application du théorème du point fixe de Lefschetz) :

2.1. THÉORÈME. Soient M^n une variété compacte et f un homéomorphisme de M^n. Si $\chi(M^n)$, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M^n, est non nulle, alors f a un point périodique (et on peut majorer la période par la somme des nombres de Betti).

Anosov & Katok [2] et Anosov [1], généralisant au cas C^∞ des théorèmes d'Oxtoby & Ulam [17, 18], ont démontré le théorème remarquable suivant (voir aussi l'article de Katok [12]).

2.2. THÉORÈME. Toute variété C^∞ compacte connexe M^n admet un difféomorphisme f de classe C^∞ avec une orbite dense. De plus, on peut supposer que f préserve une mesure μ, ayant une densité C^∞ strictement positive, et que f est μ-ergodique.

Anosov [1] et Blohin [3] ont montré que le théorème 2.2 reste vrai pour les flots C^∞ à l'exclusion de S^2, $P_2(\mathbb{R})$ et de la bouteille de Klein.

Le théorème 2.2 a un corollaire (presque) immédiat :

2.3. COROLLAIRE. Toute variété C^∞ compacte connexe M^n admet une action minimale du groupe libre non commutatif à 2 générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Démonstration : Soit f un difféomorphisme C^∞ de M^n ayant une orbite dense. L'ensemble $D = \{x \in M^n \mid (f^k(x))_{k\geq 0}$ est dense$\}$ est un G_δ dense dans M^n ; il a, en particulier, un nombre infini de points.

Soit g un difféomorphisme de Morse-Smale de M^n, par exemple le temps 1 du flot du gradient (pour une métrique riemannienne) d'une fonction de Morse sur M^n. Par définition $\Omega(g)$, l'ensemble des points de M^n non errants pour g, est fini. Quitte à conjuguer g, nous pouvons supposer que $\Omega(g) \subset D$, et par conséquent l'ensemble ω-limite $\omega_g(x) \subset D$ pour tout $x \in M^n$. Considérons l'action de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sur M^n engendrée par f et g, on vérifie sans peine qu'elle est minimale. □

Les théorèmes 2.1 et 2.2 montrent que la difficulté avec la minimalité est évidemment qu'il faut que toute orbite soit dense. Nous allons voir que la méthode d'Anosov & Katok va nous permettre, en fait, de construire dans certains cas des difféomorphismes minimaux.

2.4. Les obstructions connues sur les variétés.

2.4.1. $\mathbb{R}$ admet un flot minimal mais pas d'homéomorphisme minimal.

2.4.2. $\mathbb{R}^2$ n'admet pas, par le théorème de Poincaré-Bendixson, de feuilletage de codimension 1 avec une feuille dense. Il résulte d'un théorème profond de Brouwer [6] que $\mathbb{R}^2$ n'a pas d'homéomorphisme minimal (Brouwer montre que, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme préservant l'orientation et sans point fixe, alors il existe un disque D^2_ϵ tel que les ensembles $\{f^n(D^2_\epsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soient 2 à 2 disjoints).

2.4.3. La bouteille de Klein K n'admet pas de flot minimal bien que $\chi(K) = 0$ (tout feuilletage de la bouteille de Klein a une feuille compacte, voir [13]). La bouteille de Klein admet en contrepartie un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique minimal et même strictement ergodique, voir par exemple [19] (cela résulte, dans le cas C^∞, du théorème 1 énoncé plus loin).

§ 3. - RÉSULTATS

3.1. On suppose dans la suite que M^n est une variété C^∞ compacte connexe de dimension n. Toutes les actions de groupe de Lie que l'on considèrera seront des actions C^∞ et effectives (i.e. $G \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$).

3.2. DÉFINITION. Soit G un groupe de Lie agissant sur M^n, l'action est dite localement libre (resp. libre) si, pour tout $x \in M^n$, le stabilisateur de x $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est un sous-groupe discret de G (resp. est réduit à l'élément neutre de G).

Les orbites de G définissent alors un feuilletage C^∞ sur M^n de codimension $n - \dim G$.

3.3. Soit $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 1)$. Donnons-nous une action localement libre de T^k sur M^n, que l'on écrira $t \in T^k \longmapsto R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. Dans ce cas, la réunion des stabilisateurs $S = \bigcup_{x \in M^n} T^k_x$ est un sous-ensemble fini de T^k. (En effet [14, § 5.3] $x \in M^n$ et U est un ouvert de T^k contenant T^k_x, il existe un voisinage V de x dans M^n, tel que, si $y \in V$, alors $T^k_y \subset U$. Comme T^k/T^k_x n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit, on a $T^k_y \subset T^k_x$, si U est assez petit. On conclut par compacité de M^n.)

DÉFINITION. Dans la situation précédente, si H est un sous-groupe fermé de T^k, on dit que H est premier aux stabilisateurs si $H \cap S = \{0\}$. Si $k = 1$ et si H est engendré par $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, on dit que $\frac{p}{q}$ est premier à S.

DÉFINITION. Une action C^∞ de T^k sur M^n $(k \geq 2)$ localement libre est dite spéciale, si $\{\varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k) \mid \mathrm{Im}\,\varphi \cong T^{k-1}, \mathrm{Im}\,\varphi \cap S = \{0\}\}$ est dense dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, l'ensemble des C^∞ homomorphismes de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans T^k muni de la C^∞-topologie.

3.4. Les théorèmes que nous démontrons sont les suivants :

THÉORÈME 1. Toute variété M^n compacte connexe qui admet une action C^∞ localement libre effective de T^1 admet un difféomorphisme de classe C^∞ (isotope à l'identité) qui est minimal.

THÉORÈME 2. Toute variété M^n compacte connexe admettant une action localement libre spéciale C^∞ de T^k $(k \geq 2)$ admet une action C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ libre et minimale.

Dans le cas où l'action est libre, les théorèmes 1 et 2 ont été annoncés par Katok en 1972, [11]. La démonstration de Katok du théorème 1, dans le cas où $M^n = T^1 \times N^{n-1}$, se trouve dans [5, § 11.44].

3.5. Rappelons que, par le théorème de Markov-Kakutani, si G est un groupe abélien agissant sur un espace compact, alors il existe une mesure de probabilité μ sur X invariante par G (i.e. pour tout $g \in G$, $g_* \mu = \mu$) ; plus généralement, il existe une mesure de probabilité invariante si G est moyennable.

3.6. PROPOSITION. Soit G un groupe (topologique) abélien (ou moyennable) agissant continûment sur un espace compact X, alors i) et ii) sont équivalents :

i) L'action de G sur X est minimale.

ii) Toute mesure de probabilité μ invariante par G vérifie $\text{support}(\mu) = X$.

3.7. DÉFINITION. Toujours sous les mêmes hypothèses que 3.6, G est une action uniquement (resp. strictement) ergodique si G a une unique mesure de probabilité invariante (resp. si de plus $\text{support}(\mu) = X$).

Remarquer que l'action de G est strictement ergodique si et seulement si cette action est minimale et uniquement ergodique.

EXEMPLE : Les translations ergodiques sur les tores.

Soit $R_\alpha : T^k \to T^k$ définie par $R_\alpha(x) = x + \alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$. La translation R_α est strictement ergodique si et seulement si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$).

Noter que la minimalité, l'unique ergodicité et la stricte ergodicité sont des propriétés invariantes par conjugaison topologique.

3.8. Nous esquissons la démonstration des théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. Toute variété M^n admettant une action localement libre C^∞ de T^1 admet un difféomorphisme C^∞ strictement ergodique.

THÉORÈME 4. Toute variété M^n admettant une action localement libre spéciale C^∞ de T^k $(k \geq 2)$ admet une action libre C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ strictement ergodique.

Le premier auteur sait même montrer les théorèmes 3 et 4 en imposant à l'unique mesure invariante d'avoir une densité C^∞ strictement positive.

3.9. EXEMPLES. a) Si V est une variété compacte connexe, alors $T^k \times V$ admet une action libre C^∞ de T^k.

b) Tout groupe de Lie compact connexe G $(\neq \{0\})$ admet une action libre de T^k $(k \geq 1)$ car il contient un tore maximal. Si $G \neq T^1$, $SO(3)$ ou S^3, le groupe G admet une action libre de T^2, car dans ce cas $k \geq 2$.

Si Γ est un sous-groupe fini de G, le quotient G/Γ a une action localement libre de T^k.

c) Toutes les sphères impaires S^{2n+1} (resp. espaces lenticulaires) admettent une action libre de T^1 (resp. localement libre) ; et tout produit de sphères impaires $S^{2n_1+1} \times S^{2n_2+1}$ admet donc une action libre de T^2.

d) En dimension 3, M^3 admet une action localement libre de T^1, si M^3 est une "fibration de Seifert orientable". Pour la classification de ces "fibrations", voir [15].

e) Toute action libre de T^k sur M^n est spéciale.

f) Si $M_1^{n_1}$ a une action localement libre de T^1 et $M_2^{n_2}$ a une action libre de T^k, l'action produit de T^{1+k} sur $M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ est spéciale. Par contre, si M^n a une action localement libre de T^1 non libre, l'action produit de T^2 sur $M^n \times M^n$ n'est pas spéciale.

§ 4. - GÉNÉRALITÉS

Soit X un espace métrique compact non vide, en particulier X a une base dénombrable d'ouverts $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (on suppose que $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $U_i \neq \emptyset$). Nous munissons Homeo(X), le groupe des homéomorphismes de X, de la topologie compacte ouverte. Le groupe Homeo(X) est alors un groupe topologique polonais (i.e. homéomorphe à un espace métrique complet séparable). Soit $\mathfrak{m} = \{f \in \mathrm{Homeo}(X) \mid f \text{ est minimal}\}$.

4.1. PROPOSITION. L'ensemble $\mathfrak{m}$ des homéomorphismes minimaux de X est un G_δ dans Homeo(X) (éventuellement vide).

Démonstration : Soit $\mathfrak{w}_{U_i} = \{f \in \mathrm{Homeo}(X) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $U_i \cup f(U_i) \cup \dots \cup f^n(U_i) = X\}$. Par 1.4, $\mathfrak{m} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{w}_{U_i}$. Il suffit alors de démontrer que $\mathfrak{w}_{U_i}$ est ouvert dans Homeo(X), ou encore que, $\forall\, i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$\mathfrak{w}_{U_i}^n = \{f \in \mathrm{Homeo}(X) \mid U_i \cup \dots \cup f^n(U_i) = X\}$ est ouvert.

Soit $f \in \mathfrak{w}_{U_i}^n$ et $\{K_j\}_{0 \le j \le n}$ des compacts avec $K_j \subset f^j(U_i)$ tels que $\bigcup_{0 \le j \le n} K_j = X$. Visiblement $\bigcap_{0 \le j \le n} \{g \in \mathrm{Homeo}(X) \mid g^{-j}(K_j) \subset U_i\}$ est un voisinage ouvert de f contenu dans $\mathfrak{w}_{U_i}^n$. $\square$

4.2. Unique ergodicité. Soit T une translation de $\mathbb{R}^n$, $T \neq \mathrm{Id}$, alors T se prolonge en $\tilde{T} : S^n \to S^n$ avec $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. $\tilde{T}$ est uniquement ergodique avec pour unique mesure de probabilité invariante δ_∞, la mesure de Dirac concentrée au point ∞.

Plus généralement, toute variété C^∞ compacte connexe a un difféomorphisme (resp. flot) C^∞ uniquement ergodique. En effet, soient $x_o \in M^n$ et φ une fonction C^∞ sans point critique sur la variété ouverte $M^n - x_o$. On considère X un champ de vecteurs sur $M^n - x_o$ tel que $X(f) > 0$, par exemple $X = \text{grad } f$ pour une métrique riemannienne sur $M^n - x_o$. Soit ψ une fonction C^∞ sur M^n, strictement positive sur $M^n - x_o$, telle que ψX prolongé par 0 en x_o soit un champ de vecteurs C^∞ sur M^n. L'ensemble non errant du flot de ce champ de vecteurs est réduit à x_o.

4.3. PROPOSITION. Soit X un espace compact métrique et $f \in \text{Homeo}(X)$. Les affirmations (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) f est uniquement ergodique avec, pour unique mesure de probabilité invariante, μ.

(ii) Pour toute fonction $\varphi \in C^o(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$ converge uniformément, quand $n \to \infty$, vers une constante (qui est obligatoirement égale à $\int_X \varphi d\mu$).

Démonstration : Voir [8] ou [20]. □

Pour les actions de $\mathbb{R}^k$, on a la même proposition en remplaçant les sommes de Birkhoff par $\frac{1}{t^k}\int_0^t \dots \int_0^t \varphi \circ f_s ds_1 \dots ds_k$.

Soit $\mathcal{U}e$ le sous-ensemble de $\text{Homeo}(X)$ formé des homéomorphismes uniquement ergodiques, i.e. $\mathcal{U}e = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid f \text{ est uniquement ergodique}\}$.

4.4. PROPOSITION. L'ensemble $\mathcal{U}e$ est un G_δ de $\text{Homeo}(X)$.

Démonstration : Soit $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^o(X)$ un ensemble dénombrable dense pour la topologie de la convergence uniforme (la norme est notée $\| \ \|$). On se donne $x_o \in X$. Soit $E_i : \text{Homeo}(X) \to \mathbb{R}_+$ la fonction semi-continue supérieurement définie par :

$$E_i(f) = \inf_{n\geq 1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi_i \circ f^j - \varphi_i \circ f^j(x_o)) \right\| .$$

On pose $\mathcal{G}_i = E_i^{-1}(0)$, c'est un G_δ de $\text{Homeo}(X)$.

On vérifie aisément que si $f \in \mathcal{G}_i$ et μ_1 & μ_2 sont deux mesures de probabilité invariantes par f, alors $\mu_1(\varphi_i) = \mu_2(\varphi_i)$. Ceci implique l'inclusion $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i \subset \mathcal{U}e$.

L'inclusion opposée $\mathcal{U}e \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_i$, est une conséquence immédiate de 4.3. Donc $\mathcal{U}e = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_i$ est une intersection dénombrable de G_δ, et est par conséquent un G_δ. □

4.5. COROLLAIRE. L'ensemble $\mathcal{S}e$ des homéomorphismes strictement ergodiques de X est un G_δ de Homeo(X).

Démonstration : Cela vient de 4.1 et 4.4. □

4.6. LEMME. Soit $t \in T^1 \to R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, une action localement libre de T^1 sur M^n. Soit V un ouvert de M^n qui coupe chaque orbite de l'action. Alors, si $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe un entier k tel que $V \cup R_\alpha(V) \cup \ldots \cup R_\alpha^k(V) = M^n$.

Démonstration : Par compacité, il suffit de montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_\alpha^n(V) = M^n$. Soit $x \in M^n$, l'orbite de x est notée $O_x \simeq T^1/T_x^1 \cong T^1$; $R_\alpha | O_x$ est une translation irrationnelle donc minimale sur O_x. Puisque $V_x = V \cap O_x$ est un ouvert non vide de O_x, on a alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R_\alpha | O_x)^n (V_x) = O_x$. Il en résulte que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_\alpha^n(V) = M^n$. □

4.7. Soient M^n une variété C^∞ compacte et $\mathcal{F}$ un feuilletage C^∞ de M^n de codimension $p \neq n$. Si r est > 0, on note $D^p(r)$ le disque (fermé) $\{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq r\}$; et on note $\mathring{D}^p(r)$ l'intérieur de $D^p(r)$, i.e. $\mathring{D}^p(r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| < r\}$. Un disque $D^p \hookrightarrow M^n$, difféomorphe à $D^p(r)$, est transverse à $\mathcal{F}$, s'il existe $\varepsilon > 0$ et un plongement $\varphi : \mathring{D}^p(r+\varepsilon) \hookrightarrow M^n$, tel que $\varphi(D^p(r)) = D^p$ et que φ soit transverse à $\mathcal{F}$ (i.e. si $x \in \varphi(\mathring{D}^p(r+\varepsilon))$, on a $T_x\mathcal{F} + T_x\varphi(\mathring{D}^p(r+\varepsilon)) = T_xM^n$).

On appelle intérieur de disque de D^p, l'image par φ de $\mathring{D}^p(r)$.

4.8. PROPOSITION. Il existe un nombre fini de disques D_i^p $(1 \leq i \leq k)$ transverses à $\mathcal{F}$ 2 à 2 disjoints et tels que la réunion des intérieurs de disque des D_i^p coupe chaque feuille de M^n.

Démonstration : On considère un recouvrement fini de M^n par les intérieurs de cartes distinguées $(V_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ difféomorphes à $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$ par ψ_i $(1 \leq i \leq \ell)$. On choisit ε assez petit pour que la réunion des $K_i = \psi_i(D^{n-p})(1) \times D^p(1-\varepsilon))$ recouvre M^n.

On choisit comme premier disque $D_1^p = \psi_1(0 \times D^p(1 - \frac{\epsilon}{2}))$. On suppose que l'on a construit pour $1 \leq j \leq \ell$ un nombre fini de disques D_k^p $(1 \leq k \leq k_j)$ 2 à 2 disjoints, transverses à $\mathcal{F}$ et tels que la réunion des intérieurs de disque des D_k^p $(1 \leq k \leq k_j)$ coupe chaque feuille rencontrant $\bigcup_{1 \leq i \leq j} K_i$.

Il faut montrer que l'on peut gagner K_{j+1}. On pose $L = V_{j+1} \cap (\bigcup_{h=1}^{k_j} D_h^p)$. Le sous-ensemble L est un compact que l'on regarde à l'aide de ψ_{j+1} dans la carte $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$. Pour $x \in D^p(1)$, on pose $L_x = L \cap (D^{n-p}(1) \times \{x\}) \subset D^{n-p}(1)$. Par la condition de transversalité, L_x est un sous-ensemble fini de $D^{n-p}(1)$.

4.9. <u>LEMME</u>. <u>Soient</u> $x \in D^p(1)$ <u>et</u> U_x <u>un voisinage de</u> L_x <u>dans</u> $D^{n-p}(1)$. <u>Alors il existe un voisinage</u> V_x <u>de</u> x <u>dans</u> $D^p(1)$, <u>tel que, si</u> $y \in V_x$, <u>on ait</u> $L_y \subset U_x$.

<u>Démonstration</u> : a) Puisque L est compact (donc fermé dans $D^{n-p}(1) \times D^p(1)$), si $(z,x) \notin L$, il existe un ouvert (en produit) $W_z \times V_x$ ne rencontrant par L ; par conséquent pour tout $y \in V_x$, on a $L_y \cap W_z = \emptyset$.

b) On recouvre le compact $D^{n-p}(1) - U_x$ de $D^{n-p}(1)$ par un nombre fini d'ouverts $W_{z_1}, \dots, W_{z_k}$ construits en a). Si $y \in \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i}$, on a clairement $L_y \subset U_x$. □

4.10. <u>Fin de la démonstration de 4.8.</u>

A l'aide de 4.9, on construit un recouvrement fini de $D^p(1 - \epsilon)$ par des disques B_i^p et une famille d'ouverts U_i de $D^{n-p}(1)$, tels que :

1) $B_i^p \subset D^p(1)$;

2) $D^{n-p}(1) - U_i$ est infini ;

3) Si $y \in B_i^p$, on a $L_y \subset U_i$.

On prend les disques D_k^p $(1 \leq k \leq k_j)$ auxquels on ajoute un disque pour chaque B_i^p. On choisit pour B_1^p, $z_1 \in D^{n-p}(1) - U_1$ et on ajoute le disque $\{z_1\} \times B_1^p$. On choisit pour B_2^p, $z_2 \in D^{n-p}(1) - (U_2 \cup \{z_1\})$ et on prend $\{z_2\} \times B_2^p$, et ainsi de suite. On épuise K_{j+1} en un nombre fini d'étapes. □

4.11. COROLLAIRE. *Soit M^n une variété C^∞ compacte connexe avec une action localement libre de T^1. Soit U un ouvert non vide de M^n. Il existe un C^∞ difféomorphisme H de M^n, isotope à l'identité, tel que $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite de l'action de T^1.*

Démonstration : Les orbites de l'action de T^1 définissent un feuilletage $\mathfrak{F}$ de codimension $n-1$ sur M^n. Soit D_i^{n-1} $(1 \leq i \leq k)$ les disques donnés par 4.8. Il existe un C^∞ difféomorphisme H de M^n, isotope à l'identité tel que $H(\bigcup_{i=1}^{k} D_i^{n-1}) \subset U$ (voir [10], chapitre 8). $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite de l'action de T^1, puisqu'il contient $\bigcup_{i=1}^{k} D_i^{n-1}$. [Voici une esquisse de la construction de H. On inclut les D_i^{n-1} dans des disques D_i^n 2 à 2 disjoints, par exemple dans notre cas, on peut prendre $D_i^n = \{R_t x \mid x \in D_i^{n-1}$ et $t \in [0,\epsilon]\}$ où $\epsilon > 0$ suffisamment petit. On peut supposer $n \geq 2$, le cas $n = 1$ (i.e. $M = T^1$) se traite directement. On peut alors mener des arcs c_i 2 à 2 disjoints, c_i joignant D_i^n à U il existe des ouverts V_i $(1 \leq i \leq k)$, 2 à 2 disjoints, tels que chaque V_i soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et soit un voisinage de $D_i^n \cup c_i$. On est alors ramené à construire un C^∞-difféomorphisme $H_i : V_i \to V_i$ à support compact et tel que $H_i(D_i^n) \subset V_i \cap U$. L'existence de H_i est fournie par le théorème d'isotopie de plongements de disques de Cerf-Palais et le théorème de prolongement d'isotopie de Thom.] □

4.12. COROLLAIRE. *Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ premier aux stabilisateurs de l'action de T^1, $U \neq \emptyset$ un ouvert de M^n. Alors il existe un C^∞-difféomorphisme H de M^n tel que :*

i) $H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$;

ii) $H^{-1}(U)$ <u>coupe toute orbite de l'action de</u> T^1 <u>sur</u> M^n.

<u>Démonstration</u> : Soit $G = \{i\frac{p}{q} \mid i = 1,\dots,q\}$ le sous-groupe de T^1 engendré par $\frac{p}{q}$.
G agit librement sur M^n puisque $\frac{p}{q}$ est premier aux stabilisateurs de l'action.
$M^n \xrightarrow{\pi} M^n/G$ est un revêtement et l'action de T^1 passe au quotient en une action localement libre de T^1.
Par 4.11, il existe $\bar{H} : M^n/G \to M^n/G$ isotope à l'identité tel que $\bar{H}^{-1}(\pi(U))$ coupe toute orbite de l'action de T^1 sur M^n/G.

Soit H un G-relevé de $\bar{H}$, i.e. on écrit un G-isomorphisme C^∞ entre les G-fibrés $\xi : G \hookrightarrow M^n \to M^n/G$ et $H^*(\xi)$, un tel isomorphisme existe puisque $\bar{H}$ est isotope à l'identité.

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{H} & M^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M^n/G & \xrightarrow{H} & M^n/G \end{array}$$

Par construction, H commute avec l'action de G et i) suit.

ii) résulte aisément du fait que $\bar{H}^{-1}(\pi(U))$ coupe toutes les orbites de l'action de T^1 sur M^n/G. □

4.13. <u>Remarque</u> : On peut s'arranger pour que, dans 4.11, le difféomorphisme H préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive donnée à l'avance. On en conclut que l'on peut supposer, dans 4.12, que le difféomorphisme H préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive donnée à l'avance et invariante par l'action de T^1.

§ 5. - DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1 et 2.

5.1. MÉTHODE.

Soit M^n compacte connexe avec une action localement libre de T^1 : $t \to R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. On considère (voir Anosov & Katok [2]) :

$$\mathfrak{G}^\infty(T^1) = \{g \circ R_t \circ g^{-1} \mid t \in T^1,\ g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)\} \subset \mathrm{Diff}^\infty(M^n) .$$

Sur $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, on met la C^∞-topologie. $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ est alors un groupe topologique polonais. Sur les sous-espaces de $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ on met la topologie induite par la C^∞-topologie. Noter que tout sous-espace fermé de $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ avec la C^∞-topologie est un espace de Baire.

On considère $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ la fermeture de $\mathfrak{G}^\infty(T^1)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ pour la C^∞-topologie. La démonstration du théorème 1 consiste à montrer que les difféomorphismes minimaux constituent un G_δ dense dans $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ pour la C^∞-topologie (i.e. on les construit par catégorie de Baire).

5.2. EXEMPLE. Soit $\mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ le groupe des difféomorphisme C^∞ de T^2 préservant la mesure de Haar m. Soit $\overline{\mathfrak{G}}^\infty_m(T^2)$ l'adhérence de $\{g^{-1} \circ R_t \circ g \mid t \in T^2,\ g \in \mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)\}$ dans $\mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ pour la C^∞-topologie. Comme l'ensemble des translations strictement ergodiques est dense dans l'ensemble $\{R_t \mid t \in T^2\}$, il suit de 4.5 que $\{f \in \overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^2) \mid f \text{ est strictement ergodique}\}$ est un G_δ dense de $\overline{\mathfrak{G}}^\infty_m(T^2)$.

Le second auteur montrera ailleurs que la propriété suivante :

"f n'admet pas de feuilletage $\mathcal{F}$ (de T^2) C^0 de codimension 1 invariant (i.e. f envoie chaque feuille de $\mathcal{F}$ sur une feuille de $\mathcal{F}$ pas nécessairement la même)" est vraie sur un ensemble qui contient un G_δ dense de $\overline{\mathfrak{G}}^\infty_m(T^2)$.

Il suit qu'il existe $f \in \mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ minimal voisin de R_t dans $\mathrm{Diff}^\infty_m(T^2)$ (†) et non topologiquement conjugué à une translation, de plus f n'est pas sur un groupe à un paramètre.

Cet exemple montre aussi que $\mathfrak{G}^\infty_m(T^2)$ est maigre dans son adhérence $\overline{\mathfrak{G}}^\infty_m(T^2)$.

5.3. Anosov & Katok [2] ont montré que si M^n a une action effective de T^1 et si μ est une mesure de densité C^∞ strictement positive laissée invariante par l'action, alors dans $\overline{\mathfrak{G}}^\infty_\mu(T^1)$ (l'adhérence dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ de $\{h \circ R_t \circ h^{-1} \mid h \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, $h_*\mu = \mu$ et $t \in T^1\}$) les difféomorphismes μ-ergodiques forment un G_δ dense.

5.4. <u>Démonstration du théorème 1</u>.

Soit U un ouvert non vide de M^n. On définit $\mathfrak{V}_U = \{f \in \overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1) \mid \exists\ k \in \mathbb{N}$ tel que $U \cup \ldots \cup f^k(U) = M^n\}$. L'ensemble $\mathfrak{V}_U$ est (par la démonstration de 4.1) un ouvert de $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ pour la C^0-topologie et donc aussi pour la C^∞-topologie qui est plus fine.

5.5. <u>PROPOSITION</u>. <u>Pour tout ouvert non vide</u> U <u>de</u> M^n, <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{V}_U$ <u>est dense dans</u> $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ <u>(pour la C^∞-topologie)</u>.

<u>Démonstration</u> : Puisque les difféomorphismes de la forme $g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$ ($\alpha \in T^1$, $g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$) sont denses dans $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$, il suffit de voir que $g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \in \overline{\mathfrak{V}_U}$, pour tout $\alpha \in T^1$, et tout $g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, où $\overline{\mathfrak{V}_U}$ est l'adhérence de $\mathfrak{V}_U$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ pour la C^∞-topologie. Par ailleurs, il est clair que $g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \in \overline{\mathfrak{V}_U}$ si et seulement si $R_\alpha \in \overline{\mathfrak{V}_{g^{-1}(U)}}$. Par conséquent on est ramené à montrer que, si U ($\neq \emptyset$) est un ouvert arbitraire de M^n, alors pour tout $\alpha \in T^1$, on a $R_\alpha \in \overline{\mathfrak{V}_U}$. En utilisant le fait que les $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tels que $\frac{p}{q}$ soit premier aux stabilisateurs, forment un sous-ensemble dense de T^1, on voit que l'on peut supposer que

---

(†) <u>Remarque</u> : Il existe des difféomorphismes minimaux de T^2 non homotopes à l'identité (et donc non conjugués à une translation), par exemple $(x,y) \in T^2 \to (x+y, y+\alpha)$, avec $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, est minimal (voir [8]).

$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\frac{p}{q}$ premier aux stabilisateurs de l'action de T^1 sur M^n.

On choisit H comme en 4.12. Si $\alpha \to \frac{p}{q}$, on a $H \circ R_\alpha \circ H^{-1} \to H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$ dans la C^∞-topologie. Par construction de H (4.12, (ii)), U coupe toute orbite de l'action $t \to H \circ R_t \circ H^{-1}$. Par 4.6, on conclut que, si $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a $H \circ R_\alpha \circ H^{-1} \in \mathcal{V}_U$. Il en résulte que $R_{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathcal{V}_U}$. □

5.6. Fin de la démonstration du théorème 1.

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts (non vides) de M^n ; par 5.5 $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{U_i}$ est un G_δ dense de l'espace de Baire $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$, et est par conséquent non vide. Par 4.1, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{U_i}$ est le sous-ensemble de $\overline{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ formé par les difféomorphismes minimaux. □

5.7. Remarque. Il existe toujours une mesure μ de densité strictement positive invariante par l'action de T^1. En effet, si ν est une mesure de probabilité sur M^n de densité C^∞ strictement positive, la mesure $\mu = \int_{T^1} R_{t*}\nu \, dt$ convient
Considérons $\mathfrak{G}_\mu^\infty(T^1)$ le sous-ensemble $\mathfrak{G}^\infty(T^1)$ défini par :

$$\mathfrak{G}_\mu^\infty(T^1) = \{h \circ R_t \circ h^{-1} \mid t \in T^1,\ h \in \mathrm{Diff}^\infty(M),\ h_*\mu = \mu\}.$$

Si on utilise la remarque 4.13, la démonstration du théorème 1 permet de démontrer que, dans $\overline{\mathfrak{G}}_\mu^\infty(T^1)$, il est générique d'être minimal.
Par conséquent, sur M^n, il existe un difféomorphisme minimal qui préserve une mesure de densité C^∞ strictement positive.

5.8. Esquisse de la démonstration du théorème 2.

On considère $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ l'ensemble des homomorphismes de groupe de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$. On met sur $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact. Pour cette topologie, $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ est alors un espace séparable métrisable complet. $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ s'identifie à un fermé de $C^\infty(\mathbb{R}^{k-1} \times M^n, M^n)$ et est donc un espace séparable métrisable complet pour la topologie induite que l'on appelle la C^∞-topologie.

Soit $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$ l'ensemble des homomorphismes de groupe C^∞ de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans T^k.

L'action de T^k sur M^n est notée

$$t \in T^k \longrightarrow R_t \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n).$$

On définit un sous-ensemble $\mathfrak{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ de $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ par :

$$\mathfrak{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k) = \{t \to g \circ R_{\varphi(t)} \circ g^{-1},\ t \in \mathbb{R}^{k-1} \mid \varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k),\ g \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)\}.$$

$\bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ est la fermeture de $\mathfrak{G}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$ dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, \mathrm{Diff}^\infty(M^n))$ pour la C^∞-topologie.

Remarquons que les actions libres de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans M^n, qui appartiennent à $\bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$, forment un G_δ dense de $\bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$. Il en résulte que pour démontrer le théorème 2, il suffit, par 1.4 et (la démonstration de) 4.1, de montrer la proposition suivante.

5.9. <u>PROPOSITION</u>. <u>Soit</u> U <u>un ouvert non vide de</u> M^n. <u>Alors</u>

$$\mathcal{V}_U = \{f_t \in \bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k),\ t \in \mathbb{R}^{k-1} \mid \exists\, t_1, \dots, t_q \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ tels que } f_{t_1}(U) \cup \dots \cup f_{t_q}(U) = M^n\}$$

<u>est un ouvert dense de</u> $\bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$.

<u>Démonstration</u> : Comme l'action de T^k est spéciale, les $\varphi \in \mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, tels que $\mathrm{Im}\,\varphi$ soit isomorphe à T^{k-1} et premier aux stabilisateurs de l'action de T^k sur M^n, forment un sous-ensemble dense dans $\mathrm{Hom}^\infty(\mathbb{R}^{k-1}, T^k)$, par le même raisonnement qu'en 5.5, il suffit de montrer le lemme suivant.

5.10 <u>LEMME</u>. <u>Soit</u> $T^{k-1} \subset T^k$ <u>premier aux stabilisateurs de l'action de</u> T^k <u>sur</u> M^n <u>et</u> U <u>un ouvert non vide de</u> M^n. <u>Alors il existe un</u> C^∞<u>-difféomorphisme</u> H <u>de</u> M^n tel que :

i) <u>Pour tout</u> $t \in T^{k-1}$, $H \circ R_t \circ H^{-1} = R_t$;

ii) $H^{-1}(U)$ <u>coupe toute orbite de l'action de</u> T^k <u>sur</u> M^n.

Démonstration : Puisque T^{k-1} agit librement sur M^n, on a un fibré principal $T^{k-1} \longrightarrow M^n \xrightarrow{\pi} M^n/T^{k-1}$. Le quotient M^n/T^{k-1} admet une action localement libre de $T^k/T^{k-1} \simeq T^1$. On raisonne alors comme dans 4.12. □

§ 6. - ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.

6.1. Soit M^n une variété C^∞ compacte connexe avec une action localement libre de T^1. On pose $M^n/T^1 = B$, c'est un espace compact ; on note π la projection : $M^n \to B$. Remarquons que sur chaque $\pi^{-1}(b)$ $(b \in B)$, la mesure de Haar m_b est canoniquement définie ($m = dt$ = mesure de Haar sur T^1).

Rappelons le théorème du "slice" [4, § VI, 2]. Soient $x \in M^n$, O_x son orbite et q l'ordre du stabilisateur de x. Il existe un voisinage tubulaire T^1-équivariant de O_x, qui est T^1-difféomorphe à $(T^1 \times D^{n-1}(r))/G$, où G est le groupe cyclique d'ordre q engendré par : $(x,y) \in T^1 \times D^{n-1}(r) \longmapsto (x + \frac{1}{q}, Ay)$ avec $A \in O(n-1)$ et $A^q = id$. De plus O_x est l'image de $(T^1 \times \{0\})/G$.

6.2. On se donne $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$, une fonction C^∞ strictement positive en tout point de M^n.

On suppose que, pour tout b appartenant à B, la mesure μ_b définie par $d\mu_b = (\varphi \mid \pi^{-1}(b))dm_b$ est une mesure de probabilité.

LEMME. Il existe un C^∞-difféomorphisme $H : M^n \to M^n$, qui préserve chaque orbite de l'action de T^1, isotope à l'identité, et tel que, pour tout $b \in B$, $(H|_{\pi^{-1}(b)})_* \mu_b = m_b$.

Démonstration : (†) On considère d'abord le cas où $M^n = (T^1 \times D^{n-1}(r))/G$. Notons p la projection $T^1 \times D^{n-1}(r) \to (T^1 \times D^{n-1}(r))/G$. Soit $r' < r$, et $\gamma : [0,r] \to [0,1]$

(†) Nous remercions H. King pour nous avoir communiqué cette démonstration.

une fonction C^{∞} telle que $\gamma([0,r'])=1$ et $\gamma=0$ dans un voisinage de r.
Définissons un difféomorphisme $\bar{H} : T^1 \times D^{n-1}(r) \longrightarrow T^1 \times D^{n-1}(r)$,

$$(t,x) \longmapsto (\bar{H}_1(t,x), x)$$

avec $H_1(t,x) = t + \gamma(\|x\|) \left(\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \int_0^{t+i/q} [\varphi \circ p(s, A^i x) - 1]\, ds \right)$. Remarquons que $\bar{H}$ commute avec G. Appelons H le difféomorphisme induit par $\bar{H}$ sur $(T^1 \times D^{n-1})(r))/G$.

Ce difféomorphisme vérifie les propriétés suivantes :

1° H est égal à l'identité au voisinage de $(T^1 \times \partial D^{n-1}(r))/G$. De plus, il est isotope à l'identité par une isotopie qui est l'identité dans un voisinage de $(T^1 \times \partial D^{n-1}(r))/G$;

2° H préserve chaque orbite de l'action de T^1 ;

3° Pour tout $b \in B$ tel que $\pi^{-1}(b) \subset (T^1 \times D^{n-1}(r'))/G$, on a $(H \mid \pi^{-1}(b))_* \mu_b = m_b$;

4° Si $\varphi_b = 1$, alors $H \mid \pi^{-1}(b)$ est l'identité.

Le cas général se déduit de ce qui précède grâce au théorème du "slice". □

6.3. <u>LEMME</u>. <u>Soient</u> U <u>un ouvert non vide de</u> M^n <u>et</u> ϵ <u>un nombre réel strictement positif</u>. <u>Il existe un</u> C^{∞}<u>-difféomorphisme</u> H <u>de</u> M^n, <u>isotope à l'identité</u>, <u>tel que</u>, <u>pour tout</u> $y \in M^n$, <u>on ait</u> :

$$m\{t \in T^1 \mid R_t y \notin H^{-1}(U)\} < \epsilon .$$

<u>Démonstration</u> : Par 4.11, il existe un C^{∞}-difféomorphisme H_1 de M^n, isotope à l'identité, tel que $H_1^{-1}(U)$ coupe toutes les orbites de l'action.
Il est facile de construire une fonction C^{∞} $\psi : M^n \to \mathbb{R}_+$ telle que :

a) Support $\psi \subset H_1^{-1}(U)$,

b) Pour tout $b \in B$, $\int_{\pi^{-1}(b)} \psi\, dm_b = 1$.

Définissons $\varphi : M^n \to \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi = (1-\epsilon)\psi + \epsilon$. La mesure μ_b sur T_b^1 définie par $d\mu_b = (\varphi | \pi^{-1}(b))dm_b$ est une mesure de probabilité. Le lemme 6.2 nous fournit un difféomorphisme H_2. Il suffit alors de poser $H = H_1 \circ H_2^{-1}$ pour obtenir un difféomorphisme qui convient. □

6.4. COROLLAIRE. Soient $\varphi \in C^0(M^n), \eta > 0$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ premier aux stabilisateurs. Il existe $H \in \mathrm{Diff}^\infty(M^n)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

i) $H \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H^{-1} = R_{\frac{p}{q}}$;

ii) Pour tout $x \in M^n$, $\left| \int_{T^1} \varphi \circ H \circ R_t(x)\, dt - c \right| < \eta$.

Démonstration : La première condition s'obtient en travaillant dans $\bar{M}^n$ le quotient de M^n par le groupe $G = \{R_{\frac{i}{q}} \mid i = 0,1,\dots,q-1\}$. La fonction $\bar{\varphi} = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \varphi \circ R_{\frac{i}{q}}$ s'identifie à une fonction sur $\bar{M}^n$. Notons que $\bar{M}^n$ a une action libre de $T^1 \simeq T^1/K_q$ où $K_q = \{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}\} \subset T^1$. Quitte à retrancher à $\bar{\varphi}$ une constante, on peut supposer que $\bar{\varphi}$ s'annule en un point de $\bar{M}^n$. Considérons alors l'ouvert non vide de $\bar{M}^n$, $U = \{\bar{x} \in \bar{M}^n, |\bar{\varphi}(\bar{x})| < \varepsilon\}$; en appliquant le lemme 6.3, on trouve un difféomorphisme $\bar{H}$ de $\bar{M}^n$ isotope à l'identité et tel que, pour tout $\bar{x} \in \bar{M}^n$, $m\{t \in T^1 \mid \bar{R}_t \bar{x} \notin \bar{H}^{-1}(U)\} < \epsilon$. On voit facilement que :

$$\left| \int_{T^1} \bar{\varphi} \circ \bar{H} \circ \bar{R}_t(x)\, dt \right| \leq \varepsilon + \varepsilon \|\bar{\varphi}\| < \eta \text{ , si } \varepsilon \text{ est suffisament petit.}$$

Si on prend un G-relevé de $\bar{H}$ à M^n, on trouve le difféomorphisme H.

6.5. Esquisse de la démonstration du théorème 3.

Soient $\varphi \in C^0(M^n)$ et $\varepsilon > 0$. Posons :

$$\mathcal{U}(\varphi,\varepsilon) = \{f \in \bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^* \;\&\; c \in \mathbb{R} \text{ tels que } \|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i - c\| < \varepsilon\},$$

c'est un ouvert de $\bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$.

On voit facilement, par la démonstration de 4.4, que :

$$\mathcal{U}_e \cap \bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1) = \bigcap_{i\geq 1} \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{V}(\varphi_i, \frac{1}{k}) \ ,$$

où $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dense dans $C^0(M^n)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème 3 résulte alors de la démonstration du théorème 1 et de la propo- suivante puisqu'alors $\mathcal{S}_e \cap \bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ est un G_δ dense de $\bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$ pour la C^∞-topologie.

PROPOSITION. Si $\varphi \in C^0(M^n)$ et $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}(\varphi, \varepsilon)$ est dense dans $\bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$.

Démonstration : Par le même argument qu'en 5.5, il suffit de montrer que $R_{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathcal{V}(\theta, \varepsilon)}$, où $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ premier aux stabilisateurs et θ est une fonction arbitraire sur M^n.

Par la stricte ergodicité de la rotation R_α sur T^1, $\alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a, si ψ appartient à $C^0(M^n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi \circ R_{i\alpha}(x) = \int_{T^1} \psi \circ R_t(x)\,dt$, et ceci uniformément en $x \in M^n$. En particulier, si H appartient à $\mathrm{Diff}^\infty(M^n)$, on a uniformément sur M^n :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \theta \circ H \circ R_{i\alpha} \circ H^{-1} = \int_{T^1} \theta \circ H \circ R_t \circ H^{-1}\,dt = \left[\int_{T^1} \theta \circ H \circ R_t\,dt\right] \circ H^{-1} \ .$$

La proposition résulte de 6.4 par un argument analogue à celui donné dans la démonstration de 5.5. □

La démonstration du théorème 4 se fait de la même manière que celle du théorème 3, en utilisant l'espace $\bar{\mathfrak{G}}^\infty\mathrm{Hom}(T^k)$, introduit dans 5.8, à la place de $\bar{\mathfrak{G}}^\infty(T^1)$.

RÉFÉRENCES

[1] D.V. ANOSOV, Existence of smooth ergodic flows on smooth manifolds, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Mat, tom 38 (1974), traduction anglaise Math. USSR Izvestija, vol 8 (1974), p. 525-552.

[2] D.V. ANOSOV & A.B. KATOK, New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms, Trudy Moskov. Mat. Obsc, Tom. 23 (1970), traduction anglaise Trans. Moscow Math. Soc., vol 23 (1970), p. 1-35.

[3] A.A. BLOHIN, Smooth ergodic flows on surfaces, Trudy Moskov. Mat. Obsc, tom 27 (1972), traduction anglaise Trans. Moscow Math. Soc., vol 27 (1972), p. 117-134.

[4] G.E. BREDON, Introduction to compact transformation groups, Pure & Applied Mathematics 46, Academic Press (1972), New-York.

[5] I.U. BRONŠTEIN, Rasširenija minimal'nych grupp, Štiinca (1975), Kišinev (en russe).

[6] L.E.J. BROUWER, Be weis des ebenen Translation satzes, Math. Annalen vol 72 (1912), p. 37-54.

[7] F. FULLER, The existence of periodic points, Ann. Math. 57 (1953), p. 229-230.

[8] H. FURSTENBERG, Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math 83 (1961), p. 573-601.

[9] W.H. GOTTSCHALK & G.A. HEDLUND, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 36,(1965), Providence.

[10] M.W. HIRSCH, Differential topology, Graduate texts in Mathematics 33, Springer Verlag (1976), Berlin, Heidelberg & New-York.

[11] A.B. KATOK, Minimal ' nye diffeomorphizmy na gljavnych S^1-fassloenijach, Tezisy VI, Vsesvjuznoj topologičekoj konferencii v Tblisi Mecniereba (1972), Tblisi (en russe).

[12] A.B. KATOK, Ergodic perturbation of degenerate integrable Hamiltonian systems, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), traduction anglaise Math. USSR Ivz. 7 (1973), p. 535-571.

[13] H. KNESER , Regulare Kurvensharen auf Ringflächen, Math Ann. 91 (1924), p. 135-154.

[14] D. MONTGOMERY & L. ZIPPIN, Topological transformation groups, Interscience Tracts in pure & applied Mathematics 1, John Wiley and Sons (1955), New-York.

[15] P. ORLIK, Seifert manifolds, Lecture Notes in Mathematics 291, Springer-Verlag (1972), Berlin, Heidelberg & New-York.

[16] J. OXTOBY, Stepanoff flows on the torus, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), p. 982-986.

[17] J. OXTOBY, Note on transitive transformations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 23 (1937), p. 443-446.

[18] J. OXTOBY & S.M. ULAM, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, Ann. of Math. 42 (1941), p. 874-920.

[19] W. PARRY, A note on cocycles in ergodic theory, Comp. Math. 28 (1974), p. 343-350.

[20] P. WALTERS, Ergodic theory - Introductory lectures, Lecture notes in Mathematics, 458, Springer-Verlag (1975), Berlin, Heidelberg & New-York.

A. FATHI
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bâtiment 425

91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

M. HERMAN
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique

91128 PALAISEAU CEDEX
FRANCE