Astérisque

GERARD RAUZY

Répartition modulo 1

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 81-101

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__81_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.81-101

RÉPARTITION MODULO 1

Gérard RAUZY

INTRODUCTION.

Nous nous proposons de montrer sur des exemples, comment les méthodes de la théorie ergodique peuvent s'appliquer à des problèmes de répartition modulo 1. Enonçons d'abord ce type de problèmes : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$; désignons pour tout arc I de $\mathbb{T}$, par χ_I sa fonction caractéristique par $\ell(I)$ sa longueur et pour $N \geqq 1$ par $S_N(I)$ la somme :

$$S_N(I) = \sum_{0 \leqq n < N} \chi_I(u_n)$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite <u>équirépartie</u> dans $\mathbb{T}$, si quelque soit l'arc I

$$\frac{1}{N} S_N(I) \to \ell(I) \quad \text{quand } N \to \infty .$$

On démontre alors que dans ce cas $\sup\limits_{I} \left| \frac{1}{N} S_N(I) - \ell(I) \right| \to 0$ quand $N \to \infty$, ce qui conduit à introduire la notion de <u>discrépance</u> (voir [9] chapitre 2).

De nombreuses études ont été faites pour préciser le comportement asymptotique de la suite $(S_N(I))_{N \geqq 1}$; elles sont de divers types :

- donner (K. F. ROTH, W. M. SCHMIDT) des bornes inférieures de la discrépance valables pour une suite quelconque ;

- fabriquer (VAN DER CORPUT, HALTON, HAMMERSLEY) des suites de discrépance très faible ;

- étudier la suite $(S_N(I))_{N \geqq 1}$ pour des intervalles I particuliers et des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particulières.

Dans ce dernier ordre d'idée, la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ où α est un nombre irrationnel qui constitue l'exemple le plus naturel de suite équirépartie a bien entendu particulièrement reçu l'attention (KESTEN, SÓS, LESCA, DUPAIN...). Ainsi KESTEN a montré que la suite $(|S_N(I) - N\,\ell(I)|)_{N \geqq 1}$ est bornée, si et seulement si, $\ell(I)$ est congru modulo 1 à un multiple de α ; plus généralement W. M. SCHMIDT a d'ailleurs montré que pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque la suite $(|S_N([0,x[) - Nx|)_{N \geq 1}$ correspondante ne peut être bornée que pour une infinité dénombrable de valeurs de x.

Revenons à la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ où α irrationnel et posons pour $N \geq 1$, $\varphi_N = 2\, S_N([0,\ 1/2[) - N$. Nous allons montrer, ici, que <u>la suite $(\varphi_N)_{N \geq 1}$ est équirépartie dans $\mathbb{Z}$ au sens de Hartman</u> ([9] page 295), c'est-à-dire que :

$$\forall\ t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \quad \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e^{2i\pi t \varphi_n} \to 0 \text{ quand } N \to \infty\ .$$

Il en résulte en particulier, que pour tout entier $m \geq 1$, cette suite est équirépartie modulo m, et que, a fortiori, elle ne peut être bornée, ce qui découlait déjà du résultat de Kesten.

Nous allons voir, en fait, que l'étude de la répartition de la suite $(\varphi_N)_{N \geq 1}$ peut en utilisant les méthodes de la théorie ergodique se ramener à la résolution d'une équation fonctionnelle. Nous renvoyons à la littérature pour la résolution de cette équation, qui fait appel à des résultats d'approximations diophantiennes.

Dans une première partie nous donnons quelques définitions, dans une deuxième partie nous énonçons et démontrons ce qui constitue l'étape fondamentale du résultat cité, enfin dans une troisième partie nous faisons quelques commentaires sur les résultats obtenus et leur application à d'autres problèmes de répartition modulo 1.

PREMIÈRE PARTIE.

1 - POINTS GÉNÉRIQUES.

11 - Soit T la transformation de $\mathbb{T}$ en lui-même qui à x associe $x + \alpha$, et soit S la transformation de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ en lui-même définie par : $S(x, z) = (Tx, z + \varphi(x))$ où φ est la fonction de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$\varphi(x) = 1$ si x appartient à l'arc image de $[0,\ 1/2[$ dans l'application canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T}$

$\varphi(x) = -1$ sinon.

Il est facile de voir, alors, que pour $N \geq 1$ on a : $S^N(0,0) = (N\alpha, \varphi_N)$. La suite $(\varphi_N)_{N\geq 1}$ apparaît ainsi comme liée à la suite des itérés du point $(0,0)$ par la transformation S.

12 - Donnons maintenant une définition. Soit X un espace compact, λ une mesure de probabilité sur X, T une transformation mesurable de X dans lui-même, conservant la mesure λ, c'est-à-dire, telle que pour toute partie mesurable A on ait $\lambda(T^{-1}A) = \lambda(A)$.

Un point a de X est dit <u>point générique</u> pour λ, si :

$$\forall f \in C(X) \quad \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(T^n \alpha) \to \lambda(f) \text{ quand } N \to \infty$$

où $C(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$.

13 - Soit Γ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Soit $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et soit Γ_t l'adhérence dans Γ du sous-groupe engendré par les éléments de la forme $e^{2i\pi kt}$ où $k \in \mathbb{Z}$ ($\Gamma_t = \Gamma$ si t irrationnel, $\Gamma_t \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si t est de la forme h/m avec $m \geq 1$, h premier avec m).

Désignons par S_t l'application de $\mathbb{T} \times \Gamma_t$ dans lui-même définie par :

$$S_t(x,z) = (Tx,\ z\, e^{2i\pi t\varphi(x)})$$

Le résultat que nous avons en vue est alors impliqué par le suivant : <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ $(0,1)$ <u>est</u> S_t<u>-générique pour la mesure</u> m_t <u>produit de la mesure de Haar sur</u> $\mathbb{T}$ <u>par la mesure de Haar sur</u> Γ_t.

<u>Remarque</u> : On pourrait énoncer sous une autre forme le résultat précédent en termes de points génériques sur $\mathbb{T} \times \widetilde{\mathbb{Z}}$ où $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ (dual de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète). Cela conduirait à introduire un espace non séparable ce qui est plus délicat à manipuler.

2 - <u>EXISTENCE DE POINTS GÉNÉRIQUES.</u>

21 - La théorie ergodique intervient pour affirmer l'existence de points génériques. Reprenant les notations du paragraphe 12, nous dirons que la

mesure λ <u>est ergodique</u> (sous-entendu relativement à T) si quelque soit l'ensemble mesurable A de X, invariant par T (i. e. tel que $T^{-1}A = A$) on a : $\lambda(A) = 0$ ou $\lambda(A) = 1$. Nous supposerons, d'autre part, X métrisable (donc C(X) séparable).

Le théorème ergodique ponctuel implique alors, que <u>si</u> λ <u>est ergodique, presque tout point au sens de la mesure</u> λ <u>est</u> T-<u>générique pour</u> λ. Réciproquement, du reste, si λ n'est pas ergodique, l'ensemble des points T-génériques pour λ est de λ-mesure nulle.

22 - Pour le problème que nous considérons, montrer que la mesure m_t définie au paragraphe 13 est ergodique relativement à la transformation S_t ne semble pas suffire a priori : presque tout point est générique, mais nous ne savons rien sur le point (0, 1).

En fait, comme $S_t^n(x, z)$ s'obtient à partir de $S_t^n(0, 1)$ par la transformation qui à (u, v) fait correspondre (x+u, zv) (translation sur le groupe produit $\mathbb{T} \times \Gamma_t$), on voit aisément que si un point est générique, tous le sont.

3 - <u>UNIQUE ERGODICITÉ</u>.

31 - Soit X un espace compact métrisable. Une application T de X dans X est dite <u>uniquement ergodique</u> s'il existe une unique mesure de probabilité invariante par T.

La terminologie s'inspire de la remarque suivante : si T est une application <u>continue</u> de X dans X, l'ensemble M(T) des mesures de probabilités invariantes par T est un ensemble convexe compact (pour la topologie faible sur l'espace des mesures boréliennes) ; les mesures ergodiques sont alors les points extrêmaux de cet ensemble ; dire que M(T) est réduit à un seul élément est donc équivalent en vertu du théorème de Krein-Milman, à dire qu'il n'existe dans M(T) qu'un unique point extrêmal, ce point étant alors ergodique.

32 - Soit maintenant X un espace compact métrisable, λ une mesure de

probabilité sur X, T une transformation λ-mesurable de X en lui-même, conservant la mesure λ et telle que l'ensemble de ses points de discontinuité soit contenu dans un fermé de λ mesure nulle. Il y a alors équivalence entre les propositions suivantes :

(i) T est uniquement ergodique (l'unique mesure de probabilité associée étant λ).

(ii) Tout point de X est générique pour λ.

Pour la démonstration dans le cas où T est supposée continue, voir par exemple [1]. Le cas général s'obtient aisément par un raisonnement style "intégrale de Riemann".

33 - Remarque : Il ne suffit pas pour que (i) soit vrai que tout point x de X soit générique pour une certaine mesure (pouvant dépendre de x). Il suffit par exemple de prendre pour T la transformation identique ...

Nous allons voir cependant dans la paragraphe suivant que si T est continue et vérifie une condition dite de minimalité, la généricité de tout point de X pour une mesure dépendant du point suffit à entraîner l'unique ergodicité.

4 - MINIMALITÉ.

41 - Soit X un espace compact métrisable, T une transformation de X dans X que nous supposerons pour simplifier continue. T sera dite minimale, si quelque soit le fermé F de X, l'inclusion $TF \subset F$ (où TF est l'ensemble des Tx, $x \in F$), implique $F = \emptyset$ ou $F = X$.

La transformation T est dite strictement ergodique, si elle est minimale et uniquement ergodique.

42 - Parallèlement au résultat énoncé en 32 on montre aisément, qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes (sous l'hypothèse T continue).

(i) T est minimale.

(ii) Pour tout x de X la suite $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans X.

43 - Soit alors T une transformation continue minimale sur X, et supposons que pour tout point x de X existe une mesure, pour laquelle x est générique. Alors, T est strictement ergodique.

En effet, par hypothèse pour toute fonction f de $C(X)$ et tout $x \in X$

$$\frac{1}{N} \sum_{n<N} f(T^n x) \to c(f, x) \quad \text{quand} \quad N \to \infty .$$

Il suffit en vertu du théorème énoncé en 32, de montrer que $c(f, x)$ est en fait indépendant de x. Remarquons tout d'abord que :

$$\forall x \in X \qquad c(f, Tx) = c(f, x)$$

Il en résulte en particulier que si x_0 est un point de discontinuité de la fonction $c(f, .)$, $T^n x_0$ est aussi un tel point de discontinuité et l'oscillation en $T^n x_0$ est la même qu'au point x_0. T étant minimale, il en résulterait que $c(f, .)$ serait partout discontinue.

Or, d'après un théorème de Baire ([11] page 141, exercice 31) cette fonction est continue sauf peut-être sur un ensemble de première catégorie. X étant métrique compact donc complet, ceci est impossible, c'est-à-dire encore $c(f, .)$ est continue. Utilisant une nouvelle fois l'invariance par T et la densité de $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ on en déduit bien que cette fonction est constante.

Remarque : On peut donner des exemples de transformations minimales qui ne sont pas uniquement ergodiques ([3], voir aussi [5]).

DEUXIÈME PARTIE.

De ce qui précède résulte qu'il suffit, pour établir le résultat cherché, de montrer que la transformation S_t définie au paragraphe 13 de la première partie est uniquement ergodique. Nous avons vu du reste que l'ergodicité de m_t suffisait pour celà, et nous verrons qu'il en est encore ainsi dans la généralisation que nous allons maintenant traiter.

Auparavant, remarquons que la transformation T sur $\mathbb{T}$ est elle-même uniquement ergodique. Pour s'en convaincre on peut soit examiner les coefficients de Fourier d'une mesure invariante, soit utiliser l'équirépartition des suites

$(x + n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'équivalence du paragraphe 32 de la première partie. C'est d'une situation généralisant celle-ci que nous allons partir.

1 - THÉORÈMES.

11 - Soit X un espace compact métrisable, λ une mesure de probabilité sur X, T une application continue de X dans X qui conserve la mesure λ. Soit d'autre part, Z un groupe abélien compact séparable, et μ la mesure de Haar sur Z. Soit enfin φ une application de X dans Z, que nous supposerons continue en dehors d'un fermé de λ-mesure nulle.

Nous définissons une application S de $X \times Z$ dans lui-même par :

$$S(x, z) = (Tx, z + \varphi(x))$$

S conserve évidemment la mesure produit $m = \lambda \otimes \mu$ sur $X \times Z$, et l'ensemble des points de discontinuité de S est de m mesure nulle.

Le problème que nous nous posons maintenant est alors le suivant : si T est uniquement ergodique, à quelles conditions S est-elle uniquement ergodique ?

La réponse est donnée dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si T est uniquement ergodique, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes* :

(i) S *est uniquement ergodique* (*l'unique mesure associée étant* m) ;

(ii) m *est ergodique* ;

(iii) *pour tout caractère* χ *de* Z *non trivial, l'équation fonctionnelle*

$$f(Tx)\,\chi(\varphi x)) = f(x) \qquad \lambda\text{-presque partout}$$

admet comme seule solution mesurable, $f(x) = 0$ λ-*presque partout.*

Nous renvoyons pour la démonstration de ce théorème à [3] dans le cas où φ est supposé continue, et à [2] où le théorème est établi sous forme plus générale le groupe Z n'étant pas supposé abélien et les caractères étant remplacés par des représentations. Signalons que dans [3] une application en est donnée à l'équirépartition de $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$ où P est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est irrationnel (voir aussi [1]).

12 - Donnons maintenant un résultat légèrement plus général, les hypothèses et les notations étant celles du paragraphe précédent, mais la transformation T n'étant pas supposée uniquement ergodique.

THÉORÈME. Considérons les trois propositions suivantes :

(i) quelque soit $x_0 \in X$ générique pour λ et $z_0 \in Z$, (x_0, z_0) est générique pour m ;

(ii) m est ergodique ;

(iii) pour tout caractère χ de Z non trivial, l'équation fonctionnelle

$$f(Tx)\ \chi(\varphi(x)) = f(x) \qquad \lambda\text{-presque partout}$$

implique que $f(x) = 0$ λ-presque partout.

Alors (ii) implique (iii) implique (i). En outre, si λ est ergodique, ces trois propositions sont équivalentes.

Remarque : si T est uniquement ergodique (la mesure λ étant alors ergodique) le théorème précédent en découle en vertu du résultat du paragraphe de la première partie.

Démonstration :

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

En effet, si (iii) était faux la fonction $g(x, z) = f(x)\ \chi(z)$ où f est une solution de l'équation fonctionnelle, non nulle λ-presque partout, serait S invariante et non m presque partout constante.

(iii) $\Rightarrow$ (i).

Donnons une démonstration analogue à celle suggérée en [14] (lemme 1). Supposons donc x_0 générique pour λ et (x_0, z_0) non générique pour m.

Utilisant la séparabilité de $C(X \times Z)$ il existe une suite (N_k) strictement croissante, telle que

$$\forall F \in C(X \times Z) \quad \frac{1}{N_k} \sum_{n < N_k} F \circ S^n(x_0, z_0) \to n(F)$$

où n est une mesure de probabilité sur $X \times Z$, dont on montre aisément qu'elle est S-invariante en utilisant un raisonnement analogue à celui fait en [2] (lemme 3) - attention ! S n'est pas supposée continue - et qui est distincte de m.

En particulier, il existe une fonction $f_0 \in C(X)$ et un caractère χ de Z tels que :

$$n(f_0 \otimes \chi) \neq m(f_0 \otimes \chi)$$

En outre x_0 étant générique pour λ, χ n'est pas le caractère trivial.

Par ailleurs, si $f \in C(X)$,

$$|n(f \otimes \chi)| \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{1}{N_k} \sum_{n < N_k} |f(T^n x_0)| = m(|f|) \leq m(|f|^2)^{1/2}$$

La forme linéaire qui à f associe $\Phi(f) = n(f \otimes \chi)$, se prolonge donc à $L^2(\lambda)$ en une forme linéaire continue et il existe donc f_1 dans $L^2(\lambda)$ tel que :

$$\forall f \in L^2(\lambda) \quad , \quad \Phi(f) = \langle f_1, f \rangle$$

Par ailleurs, sur $C(X)$, donc sur $L^2(\lambda)$, on a $\Phi(f) = \Phi(Vf)$, où V désigne l'opérateur qui à f associe $(Vf)(x) = \chi(\varphi(x)) f(Tx)$

on en déduit que $V^{\times} f_1 = f_1$ où $V^{\times}$ est l'adjoint de V. En utilisant le fait que V conserve le produit intérieur, et en calculant $\|Vf_1 - f_1\|_2^2$, on en déduit que $Vf_1 = f_1$ λ-presque partout.

Par ailleurs $\langle f_1, f_0 \rangle = \Phi(f_0) \neq 0$ donc f_1 n'est pas nulle λ-presque partout et est solution d'une équation fonctionnelle du type (iii) ce qui est contradictoire.

Supposons maintenant λ ergodique ; pour montrer l'équivalence il suffit alors de montrer que (i) implique (ii).

Considérons l'ensemble $A \subset M(S)$ des mesures n invariantes par S telles que leur projection $n_{|1}$ sur le premier facteur (définie par $n_{|1}(f) = n(f \otimes 1)$ soient égale à λ.

En particulier m appartient à A. Les hypothèses faites sur φ donc sur S montrent aisément que A est un convexe compact (pour la topologie faible des mesures), donc possède un point extrémal n. Si n n'était pas extrémal dans $M(S)$, il existerait n_1, n_2 dans $M(S)$, $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha > 0$, $n_1 \neq n$ tels que $n = \alpha n_1 + \beta n_2$. En projetant sur le premier facteur, on en déduit $\lambda = \alpha n_{1|1} + \beta n_{2|1}$, d'où comme λ est ergodique donc extrémale dans $M(T)$, $n_{1|1} = n_{2|1} = \lambda$, c'est à dire n_1 et $n_2 \in A$, ce qui est contradictoire.

n est donc ergodique et est évidemment distincte de m si m n'est pas ergodique. n-presque tout (x_0, z_0) est alors n-générique, et en particulier pour λ-presque tout x_0, il existe z_0 tel que (x_0, z_0) soit n-générique, donc tel que (x_0, z_0) ne soit pas m-générique, ce qui achève la démonstration.

On voit en outre que si (i) est vrai et λ ergodique, m est l'unique élément de M(S) dont la projection sur le premier facteur soit λ.

2 - UNE VERSION TOPOLOGIQUE.

Nous avons déjà dans le paragraphe 4 de la première partie remarqué la similitude (du point de vue des énoncés) entre une notion de nature topologique comme la minimalité, et une notion de nature métrique comme l'unique ergodicité. Ce parallèle peut se poursuivre du point de vue des résultats du paragraphe précédent.

Soit en effet, X un espace métrique compact, T une transformation continue de X en lui-même, φ une application continue de X dans un groupe abélien compact métrisable Z et S la transformation de $X \times Z$ en lui-même définie par :

$$S(x, z) = (Tx, z + \varphi(x))$$

on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME : Si T est minimale, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

(i) S est minimale,

(ii) $\forall g \in C(X \times Z)$ $g_\circ S = g \Rightarrow g$ est constante ,

(iii) quelque soit le caractère χ de Z non trivial, l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in X \qquad f(Tx)\,\chi(\varphi(x)) = f(x)$$

n'admet comme seule solution f dans C(X) que la solution $f = 0$.

Remarque 1 : On pourrait imposer à T et φ des conditions plus techniques mais moins fortes que la continuité supposée ici.

Remarque 2 : Les hypothèses étant celles du théorème du paragraphe 11 de la deuxième partie mais en supposant de plus T et φ continues, les conclusions de ce théorème restent valables quand on y remplace les phrases "T uniquement ergodique" et "S uniquement ergodique", par les phrases "T strictement ergodique", et "S strictement ergodique".

En outre, si l'équation fonctionnelle considérée dans la proposition (iii) de ce théorème admet une solution mesurable non λ-presque partout nulle, et non égale presque partout à une fonction continue, T étant toujours supposé strictement ergodique, il est aisé de voir qu'aucune solution non triviale de cette équation ne peut être égale presque partout à une fonction continue, et donc, que en vertu du résultats du paragraphe 43 de la première partie, il existe un élément x_0 de X, tel que quelque soit l'élément z_0 de Z, le point (x_0, z_0) n'est générique pour aucune mesure sur $X \times Z$.

DÉMONSTRATION.

(ii) ⇒ (iii).

la démonstration est tout à fait analogue (en plus simple) à la démonstration correspondante dans le théorème 11 ou 12 de la deuxième partie.

(iii) ⇒ (ii).

soit en effet $g \in C(X \times Z)$ telle que $g_\circ S = g$.

Si χ est un caractère non trivial de Z, et si f est définie par $f(x) = \int g(x, z)\overline{\chi}(z)d\mu(z)$ f vérifie l'équation fonctionnelle, donc est nulle. Il en résulte que $g(x, z)$ est constant par rapport à z, et comme précédemment en utilisant le fait que T est minimale on en déduit que g est constante.

(i) ⇒(ii).

Si $g \in C(X \times Z)$ est telle que $g_\circ S = g$ et si g n'est pas constante, il existe un élément c de $\mathbb{C}$ tel que l'ensemble F des (x, z) vérifiant $g(x, z) = c$ soit non vide et non égal à $X \times Z$. F est évidemment un fermé tel que $SF \subset F$ ce qui est contradictoire.

(ii) ⇒ (i).

Nous supposerons que (i) n'est pas vrai, c'est-à-dire qu'il existe un fermé $F_\circ$ de $X \times Z$ tel que $SF_\circ \subset F_\circ$ et $F_\circ \neq \emptyset$, $F_\circ \neq X \times Z$.

Soit alors $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de $X \times Z$ vérifiant $SF \subset F$. Ordonnée par inclusion cette famille est inductive ($X \times Z$ étant compact), et l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{F}$ est donc non vide : on pourra en particulier supposer que F_0 appartient à $\mathcal{M}$.

Si (x, z) est un point de $X \times Z$, nous désignons par $F(x, z)$ l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$ contenant le point (x, z).

A priori $F(x, z)$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{M}$, mais si $(x, z) \in F$ où $F \in \mathcal{M}$ alors $F(x, z) = F$.

On voit par ailleurs aisément que si h est un élément quelconque de Z, $F(x, z+h)$ est l'ensemble des couples $(\xi, \zeta+h)$ avec $(\xi, \zeta) \in F(x, z)$, et que $F(x, z+h)$ appartient à $\mathcal{M}$, si et seulement si, $F(x, z)$ y appartient.

Enfin, si F et G appartiennent à $\mathcal{M}$, ou bien $F \cap G = \emptyset$, ou bien $F = G$.

Soit maintenant (x_0, z_0) un point de F_0 (on a donc $F(x_0, z_0)=F_0$), soit A_h l'ensemble des z de Z tels que (x_0, z) appartienne à $F(x_0, h)$.

De ce qui précède résulte que $A_h = h + A_0$, et que ou bien $A_h \cap A_k = \emptyset$, ou bien $A_h = A_k$. En particulier A_0 est un sous-groupe de Z évidemment fermé.

L'hypothèse T minimale, implique par ailleurs, que si F appartient à $\mathcal{M}$, pour tout x de X il existe un élément z de Z au moins tel que (x, z) appartienne à F.

On en déduit en particulier que, l'hypothèse $F_0 \neq X \times Z$ implique $A_0 \neq Z$.

Il existe donc un caractère χ non trivial de Z, constant sur A_0 (obtenu à partir d'un caractère non trivial de Z/A_0).

Soit maintenant (x, z) un point de $X \times Z$; il existe un élément h de Z tel que (x, z) appartient à $F(x_0, h)$; en outre si (x, z) appartient à $F(x_0, h)$ et à $F(x_0, k)$, $h-k$ appartient à A_0 donc $\chi(h) = \chi(k)$. On définit ainsi sans ambiguité une fonction g de $X \times Z$ dans $\mathbb{C}$ en posant $g(x, z) = \chi(h)$ si $(x, z) \in F(x_0, h)$. On voit sans peine que g est continue, invariante par S et non constante ce qui entraîne la contradiction cherchée.

TROISIÈME PARTIE.

1 - DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES.

11 - Pour démontrer complètement le résultat annoncé dans l'introduction, il suffit d'après ce qui précède de montrer que l'équation

(1) $$f(x+\alpha) = e^{-2i\pi t\varphi(x)} \quad \text{presque partout sur } \mathbb{T}$$

n'a pour t appartenant à $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ aucune solution mesurable non presque partout nulle. Ce résultat a été montré pour des valeurs particulières de α par K. Schmidt [12], Veech [13] et [16], Katok-Stepin [6]. Pour tout irrationnel α, Conze [2] a montré le résultat général suivant : soit G un groupe topologique (noté multiplicativement) muni d'une métrique bi-invariante, soit Φ une fonction de $\mathbb{T}$ dans G constante par arcs, et dont les points de discontinuité sont tous rationnels.

THÉORÈME. <u>Si Φ n'est pas constante</u>, <u>l'équation fonctionnelle</u>

(2) $$F(x+\alpha) = \Phi(x)\, F(x) \quad \underline{\text{presque partout sur}}\ \mathbb{T}$$

<u>n'admet aucune solution mesurable de $\mathbb{T}$ dans</u> G.

De ce résultat on déduit le précédent, en remarquant que si (1) admet une solution f, le module $|f|$ de f est invariant par la translation de nombre α, donc est constant ; on peut alors supposer $|f| = 1$ et prendre pour G le groupe Γ des nombres complexes de module 1.

12 - Soit I un arc de $\mathbb{T}$ de fonction caractéristique χ_I. Soit $S_N(I,x)$ la quantité $S_N(I,x) = \sum_{1 \leq n \leq N} \chi_I(x+n\alpha)$ (α irrationnel)

et qoit $\varphi_N(I,x)$ la suite des parités de $S_N(I,x)$ (c'est-à-dire $\varphi_N(I,x)=0$ si $S_N(I,x)$ est pair, et $\varphi_N(I,x)=1$ sinon).

Soit Φ la fonction de $\mathbb{T}$ dans $\{-1,+1\}$ définie par $\Phi(x) = -1$ si $x \in I$ et $+1$ si $x \notin I$. Il résulte de ce qui précède que si l'équation

(3) $$f(x+\alpha) = \Phi(x)\, f(x) \quad \text{presque partout}$$

n'a aucune solution mesurable non nulle presque partout la moyenne $\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \varphi_N(I,x)$ tendra vers $\frac{1}{2}$ quand N tend vers l'infini et ceci pour toute valeur de x. (Prendre ici pour Z le groupe multiplicatif $\{-1,+1\}$).

En particulier, si I' est le complémentaire de I dans $\mathbb{T}$, l'équation fonctionnelle associée est la suivante :

(4) $$f(x+\alpha) = -\Phi(x)\, f(x) \quad \text{presque partout}$$

Si (3) et (4) admettaient tous deux des solutions non triviales, f_1 et f_2 le produit

$f = f_1 f_2$ vérifierait l'équation fonctionnelle

(5) $$f(x+\alpha) = -f(x) \qquad \text{presque partout}$$

on en déduit $f(x+2\alpha) = f(x)$ presque partout, donc f constante presque partout donc f nulle presque partout en vertu de (5), et d'après la remarque faite dans le paragraphe précédent sur le module de f_1 par exemple, f_1 ou f_2 nulle presque partout ce qui est contradictoire.

Il en résulte que quelque soit I, l'une des deux moyenne $\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \varphi_N(I, x)$ ou $\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \varphi_N(I', x)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand N tend vers l'infini et ceci pour toute valeur de x.

En utilisant les méthodes précédentes et notamment un résultat analogue à celui du paragraphe 43 de la première partie, Veech [13] a montré que <u>la limite quand N tend vers l'infini de</u> $\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \varphi_N(I, x)$ <u>existe pour tout</u> x <u>et tout</u> I (<u>tout en n'étant pas nécessairement pas égale à</u> 1/2) <u>si et seulement si</u> α <u>est à quotients partiels bornés.</u>

2 - AUTRES APPLICATIONS.

21 - Revenons au problème évoqué dans l'introduction, de la répartition modulo m de la suite φ_N. φ ayant la signification de l'introduction c'est-à-dire $\varphi(x) = +1$ si x appartient l'arc image de $[0, 1/2[$, -1 sinon, définissons une transformation θ de l'intervalle $[0, m[$ en lui-même de la manière suivante :

Soit $x \in [k, k+1[$ avec $0 \leq k < m$ et soit ξ la classe de x dans $\mathbb{T}$ $\theta(x)$ sera alors l'unique élément y de $[h, h+1[$ dont la classe dans $\mathbb{T}$ soit $\xi + \alpha$, où h est l'unique entier vérifiant $0 \leq h < m$, congru à $k+\varphi(\xi)$ modulo m.
Il est clair alors que la répartition de φ_N mod m est liée à celle de la suite $(\theta^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ des itérés de 0.

On peut traduire ce qui précède en disant que θ <u>est uniquement ergodique la mesure associée étant la mesure de Lebesgue normalisée sur</u> $[0, m[$.

La transformation θ ainsi définie est un cas particulier de ce qu'on appelle <u>les transformations d'échanges d'intervalles</u> : soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres

réels strictement positifs tels que
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, soit $\beta_0 = 0$, $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_i$ et soit τ une permutation de $\{1,\dots,n\}$; on définit une transformation θ de $[0, 1[$ dans $[0, 1[$ en réarrangeant isométriquement les intervalles $X_i = [\beta_{i-1}, \beta_i[$ de manière que X_i vienne à $\tau(i)$-ème place.

La mesure de Lebesgue est évidemment conservée par θ : est-ce la seule, c'est-à-dire, θ est-elle uniquement ergodique ? Nous venons de voir ici un cas particulier d'échanges d'intervalles où la réponse est oui. Dans le cas général, Keane a montré [7] que il existe au plus n mesures ergodiques invariantes par θ lorsque la transformation satisfait à une condition de minimalité (légèrement différente de celle du paragraphe 4 de la première partie). A l'inverse, Keynes et Newton ont donné un exemple de non unique ergodicité où la condition de minimalité est cependant vérifiée : cet exemple s'obtient par une construction analogue à celle que nous venons de faire, en utilisant une autre fonction φ et les résultats de Veech sur l'existence de solutions non triviales d'équation fonctionnelle [8] ; on voit d'après ce qui précède comment multiplier ce type de contre-exemple ; dans tous les cas cependant d'exemples ainsi construits, si la mesure de Lebesgue est ergodique, elle est uniquement ergodique, ce qui renforce une hypothèse émise dans l'article cité.

22 - DÉFINITION. Une suite d'entiers $(r_n)_{n\geq 1}$ sera dite <u>un générateur de suites équiréparties</u> ([14] où une telle suite est notée u. d. s. g.) si quelque soit le groupe topologique compact K et quelle que soit la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K engendrant un sous-groupe dense dans K, la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ où $w_1 = z_{r_1}$, $w_2 = z_{r_1} z_{r_2}$, ..., $w_n = z_{r_1} z_{r_2} \dots z_{r_n}$ est équirépartie dans K.

Soit alors X un espace compact métrisable, λ une mesure de probabilité sur X, T une transformation mesurable de X dans lui-même et φ une application mesurable de X dans l'ensemble des entiers ≥ 1. Nous nous posons la question de savoir à <u>quelles conditions</u>, <u>existent des points</u> x <u>de</u> X <u>tels que la suite</u> $(r_n(x))_{n\geq 1}$ <u>définie par</u> $r_n(x) = \varphi(T^{n-1}x)$ <u>est un générateur de suites équiréparties.</u>

Soit donc $z_1, z_2, \ldots$ une suite engendrant un sous-groupe dense dans le groupe topologique compact K, et soit $w_1(x) = z_{\varphi(x)}$, $w_2(x) = z_{\varphi(x)} z_{\varphi(Tx)}, \ldots$ la suite correspondante.

Si S est l'application de $X \times K$ dans $X\times K$ définie par :

$$S(x, z) = (Tx, z\, z_{\varphi(x)})$$

on voit que
$$S^n(x, z) = (T^n x, z\, w_n(x))$$

Si pour tout choix de K et toute suite $z_1, z_2, \ldots$ la transformation S ainsi définie est uniquement ergodique, il en résultera a fortiori que $(z\, w_n(x))_{n \geq 1}$ est équirépartie dans K, donc que $\varphi(x)$, $\varphi(Tx), \ldots$ est un générateur de suites équiréparties.

En se bornant au cas où K est abélien (le cas général se traitant par les extensions citées des théorèmes de la deuxième partie) on voit qu'il en sera insi quand les conditions suivantes sont réalisées (théorème 12 de la deuxième partie).

(i) x est T-générique pour la mesure λ.

(ii) φ est continue en dehors d'un ensemble fermé de λ-mesure nulle.

(iii) pour tout choix de K et toute suite $z_1, z_2, \ldots$ engendrant un sous-groupe dense dans K, si χ est un caractère non trivial de K et si f est une fonction λ-mesurable de X dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$f(Tx)\, \chi(z_{\varphi(x)}) = f(x) \qquad \lambda\text{-presque partout}$$

on a $f(x) = 0$ λ- presque partout.

Veech a ainsi montré l'existence de générateurs de suites équiréparties ([15]): par exemple soit x un nombre normal en base 10, (q_n) la suite d'entiers définie par $q_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, q_n est la n-ème apparition du chiffre 3 dans le développement décimal de x. Si $r_n = q_n - q_{n-1}$, on a $r_n = \varphi(T^{n-1} x_0)$ où x_0 est le premier élément de la suite $10^k x - [10^k x]$ à appartenir à $X_0 = [\frac{3}{10}, \frac{4}{10}[$, où T est l'application de X_0 en lui-même qui à ξ associe le premier élément de la suite $10^k \xi - [10^k \xi]$ $(k \geq 1)$, appartenant à X_0, et φ l'application (temps de retour à X_0) de X_0 dans $\mathbb{N}^*$ qui à ξ associe le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $10^k \xi - [10^k \xi]$ appartient à X_0. On peut alors montrer grâce aux méthodes précédentes que la suite (r_n) ainsi obtenue est un générateur de suites équiréparties.

3 - REMARQUES ET QUESTIONS.

31 - Nous avons pour simplifier, dans les énoncés du paragraphe 1 de la deuxième partie, supposé T continue ce qui introduisait une dissymétrie par rapport à S : en fait, une condition telle que "T continue en dehors d'un ensemble fermé de λ-mesure nulle" suffit pour entraîner la validité de ces énoncés (raisonnement du style "intégrale de Riemann"). Dans des énoncés où aucune mesure ne serait privilégiée a priori, une condition semble assez naturelle, la quasi-continuité ([10]) : T est dite quasi-continue si, A désignant l'ensemble de ses discontinuités,

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \omega \in C(X) \quad \text{vérifiant}$$

$$\text{(i)} \quad 0 \leq \omega \leq 1 \qquad \text{(ii)} \ \forall x \in A \quad \omega(x) = 1 \qquad \text{(iii)} \ \forall x \in X \quad \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \omega(T^n x) < \epsilon$$

D'autre part, des notions de minimalité peuvent se définir pour des transformations non continues, conduisant à des énoncés analogues. Il faut noter du reste que pour les transformations telles que les échanges d'intervalles, "le bon espace" de ce point de vue est l'espace totalement discontinu obtenu en comptant deux fois (à droite et à gauche) les points de discontinuité des transformations θ^n $(n \in \mathbb{Z})$.

32 - De nombreux énoncés sont en fait "uniformes" par rapport aux points génériques : ainsi, si T est continue et uniquement ergodique de mesure associée λ, la convergence pour $f \in C(X)$ de $\frac{1}{N} \sum_{n<N} f(T^n x)$ vers $\lambda(f)$ est uniforme. Il en résulte que la suite est "bien répartie" (well distributed) pour la mesure λ, c'est-à-dire que :

$$\lim_{N \to \infty} \ \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{N} \sum_{k \leq n < N+k} f(T^n x) - \lambda(f) \right| = 0$$

Cette uniformité disparaît cependant si on affaiblit trop les conditions de continuité imposées à T.

33 - L'étude de la minimalité (et a fortiori de l'ergodicité) de la transformation sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ associée à une suite du type $S_N(I) - N\,\ell(I)$, dans le cas où $\ell(I)$ est

irrationnel reste à faire.

Plus généralement, soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite équirépartie dans $\mathbb{T}^s$, soit I un "rectangle" de $\mathbb{T}^s$, et soit $S_N(I, u)$ la quantité définie par $S_N(I,u) = \sum_{0 \leq n < N} \chi_I(u_n)$, que peut-on dire de la suite $S_N(I,u) - N\ell(I)$ en dehors du résultat cité dans l'introduction ?

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des itérés d'un point comme par exemple les suites $(n\alpha, n^2\alpha)$ (α irrationnel), ou $(n\alpha, n\beta)$ (α et β irrationnellement indépendants), les mêmes méthodes s'appliquent, mais des difficultés importantes (du moins pour la deuxième des suites citées) apparaissent au moment de la résolution des équations fonctionnelles.

Si la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quelconque, les méthodes précédentes ne peuvent évidemment s'appliquer telles quelles. Néanmoins, un cas particulier peut se traiter de manière analogue, quoique moins simplement : c'est lorsque la suite u est "<u>bien répartie</u>".

En effet, soit u une suite à termes dans l'espace Y répartie selon la mesure λ, soit T le "shift" sur l'espace $Y^{\mathbb{N}}$ qui à $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe $Ty = (y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et soit X l'adhérence (au sens de la topologie produit) dans $Y^{\mathbb{N}}$ de l'orbite de u c'est-à-dire de la suite $(T^n u)_{n \in \mathbb{N}}$. Il y a alors une certaine "unique ergodicité relative" provenant de l'équivalence ([1]) entre les propositions suivantes :

(i) <u>pour toute mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> X <u>invariante par</u> T, <u>la projection sur le premier facteur est</u> λ.

(ii) <u>si</u> $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>est un élément de</u> X, <u>la suite</u> $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>est équirépartie dans</u> Y <u>selon la mesure</u> λ.

(iii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>est bien répartie selon la mesure</u> λ.

On peut alors développer des méthodes analogues reliant le transfert de propriétés telles que (i) à l'existence de solutions d'équations fonctionnelles ([10]).

34 - Les hypothèses et notations (X, λ, T, Z) étant les mêmes que dans le paragraphe 11 de la deuxième partie, soit, cette fois-ci, φ une fonction de $X \times Z$ dans Z et définissons S en posant :

$$S(x, z) = (Tx, \varphi(x, z))$$

Que peut-on dire sur les mesures sur $X \times Z$ invariantes par S ?

Peu de choses sont connues ([3] théorème 41) ; remarquons que dans le cas où X est réduit à un point, $Z = \mathbb{T}$ et où φ est un homéomorphisme, on sait qu'il existe une unique mesure invariante, mais que déjà apparaissent des problèmes très délicats ([5]!).

35 - Pour terminer, dans chacun des cas où il est possible de montrer que les suites considérées admettent une répartition, existe-t-il une version quantitative qui permette de majorer la discrépance de telles suites ?

BIBLIOGRAPHIE :

[1] J. CIGLER - Well distributed sequences.
Bull. Soc. Math. France. Mémoire N° 25 (1971), pp. 39-43.

[2] J.P. CONZE - Equirépartition et ergodicité des transformations cylindriques (Preprint).

[3] H. FURSTENBERG - Strict ergodicity and transformations on the torus.
Amer. J. Math. 83 (1961), pp. 573-601.

[4] M.R. HERMAN - Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.
Thèse : Orsay 1976.

[5] M. R. HERMAN - L^2 regularity of measurable solutions of a finite difference equation on the circle.
(Preprint).

[6] A. B. KATOK et A. M. STEPIN - Approximations en théorie ergodique.
Usp. Mat. Nank 22 (1967), pp. 81-106.

[7] M. KEANE - Interval exchange transformations.
Math. Z. 141 (1975), pp. 25-31.

[8] H. B. KEYNES and D. NEWTON - A "minimal" non-uniquely ergodic interval exchange transformation.
Math. S. 148 (1976), pp. 101-105.

[9] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER - Uniform distribution of sequences.
Wiley (1974).

[10] G. RAUZY - Répartition de suites et équations fonctionnelles associées.
(à paraître in Monatshefte).

[11] H. L. ROYDEN - Real Analysis.
The Macmillan Company (1968).

[12] K. SCHMIDT - Ergodicity of a cylinder flow.
(Preprint).

[13] W. A. VEECH - Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod. 2.
T. A. M. S. - 140 (1969) pp. 1-33.

[14] W. A. VEECH - Some questions of uniform distribution.
Annals of Mathematics. Vol 94 n° 1 (1971), pp. 125-138.

[15] W. A. VEECH - Application of ergodic theory to some problems of uniform distribution.
Conference Topological Dynamics and Ergodic Theory. Lexington, Kentucky June 1971.

G. RAUZY

U. E. R. Luminy
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE CEDEX 2