ROGER PAYSANT-LE ROUX

Transformation par une fonction homographique d'une fraction continue périodique

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 251-253
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__251_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.251-253

TRANSFORMATION PAR UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE D'UNE FRACTION CONTINUE PÉRIODIQUE

par

Roger PAYSANT-LE ROUX

Soit α un nombre réel quadratique (éventuellement rationnel) donné ; notons

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}, \overline{a_h, \ldots, a_{h+k-1}}]$$

la fraction continue régulière représentant le nombre α.

Nous désignerons par $Pr(\alpha)$ le nombre de termes de la prépériode et par $P(\alpha)$ le nombre de termes de la plus courte période.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients entiers rationnels premiers entre eux de déterminant n non nul.

A. Schinzel [1] montre que

$$\sup_{\alpha \in Q} \frac{Pr(M\alpha)}{Pr(\alpha)} \quad , \quad \sup_{\alpha \in Q} \frac{P(M\alpha)}{P(\alpha)}$$

existent. (On note $M\alpha$ le nombre $\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, et Q l'ensemble des réels quadratiques).

Notre but est d'avoir la valeur ou une estimation de ces bornes supérieures.

En 1973, M. Mendès-France [2] montre l'égalité :

$$\sup_{\alpha \in Q} \frac{Pr(n\alpha)}{Pr(\alpha)} = \sup_{0 \leqslant i < n} L\left(\frac{i}{n}\right) = \theta(n)$$

où $L(\frac{i}{n})$ est le nombre de termes de la fraction continue régulière de longueur impaire représentant le nombre rationnel $\frac{i}{n}$.

Plus récemment, M. Mendès-France (3) généralise ce résultat, il montre l'égalité :

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{Q}} \frac{Pr(M\alpha)}{Pr(\alpha)} = \theta(n)$$

H. Cohen (4) et (5) montre l'inégalité :

$$\operatorname{Sup}_{\alpha\in Q} \frac{P(n\alpha)}{P(\alpha)} \leqslant \sum_{u\in P_n} L(\phi_n(u)) = \Theta(n)$$

où P_n est la droite projective sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Les deux membres sont égaux pour une infinité de n.

Nous généralisons ces résultats ainsi :

1) Quel que soit k entier positif ou nul et quel que soit α un nombre quadratique réel (éventuellement rationnel), tel que $P(\alpha) = k$, on a l'inégalité :

$$Pr(M\alpha) \leqslant C + Pr(\alpha).\theta(n)$$

où C est une constante indépendante de α.

2) Sous les mêmes hypothèses, on a

$$P(M\alpha) \leqslant k.\Theta(n)$$

La technique que nous employons nous a été inspirée par un article de Georges N. Raney (6).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. SCHINZEL.- On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. Acta Arithmetica, 6 393-413 (1961).

(2) M. MENDES-FRANCE.- Sur les fractions continues limitées. Acta Arithmetica, 23. 207-215 (1973).

(3) M. MENDES-FRANCE.- The Depth of a rational number. A paraître.

(4) H. COHEN.- Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique. CRAS. 276 595-598 (19 février 1973).

[5] H. COHEN.- Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique. Acta Arithmetica. 26 t.2 117-128.

[6] G.N. RANEY.- On continued fractions and finite automata. Math. Ann. 206 207-215 (1973).

Roger PAYSANT-LE ROUX
Département de Mathématiques
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX