

Astérisque

BERNARD ORIAT

**Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux
de $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$**

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 247-249

http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__247_0

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RELATIONS ENTRE LES 2-GROUPES DES CLASSES D'IDÉAUX
 DE $k(\sqrt{d})$ ET $k(\sqrt{-d})$

Bernard ORIAT

Notons \mathcal{H}_L le 2-groupe des classes d'idéaux (au sens restreint) du corps de nombres L . Soit a un entier sans facteur carré positif. P.Damey et J.J.Payan ont démontré dans [1] que les 4-rangs des groupes des classes des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-a})$ sont liés par :

$$0 \leq \dim_4 \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-a})} - \dim_4 \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{a})} \leq 1 .$$

Nous avons démontré le résultat plus général suivant:

Théorème: Soit k un corps de nombres ne contenant pas $\sqrt{-1}$, soit d un élément de k , non carré dans k . Posons $K=k(\sqrt{d})$ et $\bar{K}=k(\sqrt{-d})$. Soit j (resp. \bar{j}) l'application canonique de \mathcal{H}_k dans \mathcal{H}_K (resp. $\mathcal{H}_{\bar{K}}$). Posons $\mathcal{D}=\mathcal{H}_K/j(\mathcal{H}_k)$ et $\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{H}_{\bar{K}}/\bar{j}(\mathcal{H}_k)$.

Pour toute puissance de 2, notée m , supérieure ou égale à 4 et telle que le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}_o^{(m)}$ du $m^{\text{ème}}$ corps cyclotomique soit inclus dans k , on a les inégalités:

$$\dim_m \mathcal{D} - \dim_m \bar{\mathcal{D}} \leq n_1 + n_2 + n_3 ;$$

Les quantités n_1, n_2, n_3 sont liées à l'extension \bar{K}/k et sont définies de la façon suivante :

Soient E_k et $E_{\bar{K}}$ les groupes d'unités de k et \bar{K} . Soient E_k^+ et $E_{\bar{K}}^+$ les groupes d'unités totalement positives de k et \bar{K} .

On a: $n_1 = \dim_{\mathbb{Z}} E_{\bar{K}} - \dim_{\mathbb{Z}} E_k$ et $n_2 = \dim_{\mathbb{Z}} E_k^+ \cap N_{\bar{K}/k} \bar{K} / E_k^+ N_{\bar{K}/k} E_{\bar{K}}^+$.

Si enfin, $\mathcal{H}_k^{(2)}$ désigne l'ensemble des éléments h de \mathcal{H}_k tels que $h^2 = 1$ et si P_k est le sous-groupe de \mathcal{H}_k engendré par les idéaux prin-

cipaux au sens ordinaire, on a: $n_3 = \dim_2 \mathcal{H}_k^{(2)} / P_k \text{Ker } \bar{J}$.

Cas particulier: Si k est totalement réel et 2-principal, on a :
 $\mathcal{D} = \mathcal{H}_K$, $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{H}_{\bar{K}}$, $n_2 = n_3 = 0$. En appliquant ce théorème avec $k = \mathbb{Q}$,
 $d = a$ et $d = -a$, on obtient le résultat de Damey et Payan.

La démonstration repose également sur le corps de classe et la théorie de Kummer. Elle s'inspire du Spiegelungssatz de Leopoldt [3]. On trouvera les détails dans [4].

Application: Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 8 et soit $h(a)$ le nombre de classes du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. L'utilisation du théorème ci-dessus avec $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $d = 2$ permet de démontrer l'implication: ([2])

$$h(2p) \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow h(-2p) \equiv 0 \pmod{8} .$$

Nous avons pu également démontrer l'implication suivante :

$$h(2p) \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow h(-2p) \equiv 0 \pmod{16} ,$$

à l'aide des mêmes méthodes. toutefois, ce résultat n'a pu être obtenu comme conséquence directe du théorème énoncé ci-dessus. Il faut reprendre la démonstration en précisant certains détails propres à ce cas particulier [5].

Bibliographie.

- [1] Damey (P.) et Payan (J.J.), Existence et construction des extensions galoisiennes et non abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2, Jour. für die reine und angew. Math. 244 (1970), p. 37-54 .

- [2] Kaplan (P.) , Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-groupe des classes est cyclique et récipro-
cité biquadratique , Jour. Math. Soc. Japan ,25-4 ,(1973) ,
p.596-608 .
- [3] Leopoldt (H.W.) Zur Struktur der ℓ -Klassengruppe galoischer
Zahlkörper , Jour. für die reine und angew. Math. 199 ,(1958)
p.165-175.
- [4] Oriat (B.), Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux
des extensions quadratiques $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$, (à paraitre aux
Annales de l'Inst. Fourier , 27, (1977)).
- [5] Oriat (B.) , Sur la divisibilité par 8 et 16 des nombres de classes
des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$, (à paraitre) .

Bernard Oriat
Faculté des Sciences
25030 Besançon