

Astérisque

PAUL ERDOS

J. L. NICOLAS

Propriétés probabilistes des diviseurs d'un nombre

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 203-214

http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__203_0

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS PROBABILISTES
 des DIVISEURS d'un NOMBRE

par

P. ERDÖS et J.L. NICOLAS

INTRODUCTION

P. Erdős a démontré que la densité asymptotique des entiers ayant deux diviseurs d_1 et d_2 vérifiant : $d_1 < d_2 < 2 d_1$ existe (cf. (2)) et le livre de Halberstam et Roth (3), p. 262, th. 14). Soit :

$$F(n) = \max_t \left(\sum_{\substack{t/2 < d \leq t \\ d|n}} 1 \right)$$

L'énoncé précédent revient à dire : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\sum_{\substack{F(n) > 1 \\ n \leq x}} 1 \right) = c$

P. Erdős a conjecturé que $c = 1$, c'est-à-dire que, presque tous les entiers ont deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 < 2 d_1$.

Les résultats actuellement connus sont beaucoup moins satisfaisants sur la répartition probabiliste des *diviseurs* d'un nombre que sur celle des *diviseurs premiers* d'un nombre.

En effet, on sait, ((9)) que presque tous les nombres n ont

$$\log \log n + O(\psi(n) \sqrt{\log \log n})$$

facteurs premiers (ψ est une fonction quelconque telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty).$$

Mais on sait aussi que si l'on écrit :

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{\omega}^{\alpha_{\omega}}$, pour l'entier "moyen" n , le $i^{\text{ème}}$ facteur premier est de l'ordre de $\exp(\exp i)$. Plus précisément : (5)

p. 178) : Pour tout $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe i_0 tel que pour tous les $n \leq x$ (sauf au plus ϵx), on a pour $i > i_0$:

$$(1 - \eta) i < \log \log p_i < (1 + \eta) i .$$

P. Erdős a également démontré (cf. (3) où le théorème 1 donne un résultat plus fort) que presque tous les entiers ont deux diviseurs premiers p et q vérifiant $p < q < p^2$. Enfin nous utiliserons (proposition 2) une autre propriété probabiliste des diviseurs premiers de n .

On peut ainsi considérer l'étude de la fonction $F(n)$ comme une approche de la répartition des diviseurs d'un nombre.

On peut définir également la fonction g :

$$g(n) = \max_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq m}} d \right)$$

Il est facile de voir (cf. (7)) que l'on a pour tout n :

$$\frac{1}{2} F(n) \leq g(n) \leq 2 F(n)$$

Dans deux précédents articles, nous avons donné diverses propriétés des fonctions F et g concernant notamment les "grandes" valeurs qu'elles peuvent prendre. (cf. (6) et (7)). Signalons à ce propos que les résultats mentionnés dans ((6) p. 86) sur la fonction f :

$f(n) = n/d_n$ avec d_n le plus petit diviseur de n tel que :

$$\sum_{\substack{d \geq n \\ d|n, d \leq d_n}} d$$

ont été rédigés par Tran ((11)).

Nous allons nous intéresser à la fonction $\Delta(n)$, une des valeurs de m pour laquelle le maximum intervenant dans la définition de $g(n)$ est réalisé. On a donc :

$$g(n) = \frac{1}{\Delta(n)} \sum_{d|n, d \leq \Delta(n)} d$$

Les n pour lesquels le maximum est atteint en plusieurs points sont sûrement très difficiles à étudier, c'est un problème du type : nombres parfaits. Mais dans les résultats que nous obtenons, la détermination de la fonction Δ est sans importance.

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1 -

Pour toute constante $c_1 \leq 0,23$ et pour tout n assez grand, on a :

$$\Delta(n) \geq \exp(c_1 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 2 -

Il existe une constante $c_2 > 0$, telle que pour une infinité de n , on ait :

$$\Delta(n) \leq \exp(c_2 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 3 -

Pour presque tout n , on a :

$$\Delta(n) < n, \text{ c'est-à-dire } g(n) > \frac{\sigma(n)}{n}$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs de n .

Dans les démonstrations, il sera commode d'utiliser la notation :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d|n, d \leq m} d$$

On a ainsi : $\sigma(n) = g_n(n)$ et : $g(n) = \max_{1 \leq m \leq n} g_m(n) = g_{\Delta(n)}(n)$.

Il est d'autre part facile de voir que $\Delta(n)$ est un diviseur de n .

§1. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 1

LEMME 1 -

Soit p premier et α entier. Si p divise n , alors $\Delta(n) \geq p^\alpha$.

Démonstration -

Soit $m < p^\alpha$, on va montrer que $g_{pm}(n) > g_m(n)$.

Soit $d_1 = 1, d_2, \dots, d_i$ les diviseurs de n inférieurs à m ; alors $1, p d_1, \dots, p d_i$ seront des diviseurs de n inférieurs à pm . On aura donc :

$$g_{pm}(n) \geq \frac{1}{pm} (1 + p d_1 + \dots + p d_i) = \frac{1}{pm} + g_m(n) > g_m(n).$$

Le lemme 1 montre que $\Delta(n) \geq f(n) = \max_{p^\alpha | n} p^\alpha$.

Les "petites" valeurs de la fonction f sont obtenues pour

$n = e^{\psi(x)}$, où $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \log p$ est une des fonctions de Tchebicheff.

Précisons aussi que $e^{\psi(x)}$ est le p.p.c.m. des entiers $\leq x$. Les

nombre de la forme $n = e^{\psi(x)}$ ont beaucoup de diviseurs, et le

théorème central limite des probabilités (cf. (7)) indique qu'ils

sont regroupés en majorité autour de \sqrt{n} , ce qui implique que $\Delta(n)$

soit voisin de \sqrt{n} , alors que le lemme 1 ne donne qu'une minoration

de l'ordre de $\log n$. C'est en utilisant cette opposition que l'on

démontre le théorème 1.

Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, vérifiant $q_1 < q_2 < \dots < q_k$

On écrit pour alléger : $A(n) = \exp(c \log n / \log \log n)$ et on

suppose que $\max_i q_i^{\alpha_i} \leq A(n)$ sinon le lemme 1 donne le résultat.

On écrit :

$$(1) \quad n = D_1 D_2 \dots D_r$$

où les D_j sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux et vérifiant pour tout j : $A(n)^2 \leq D_j \leq A(n)^3$. On peut obtenir une telle décomposition (1) en prenant par exemple :

$$D_1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$$

i_1 étant le plus petit indice pour lequel D_1 soit supérieur à $A(n)^2$. Ensuite on choisit $D_2 = \prod_{i_1 < i \leq i_2} q_i^{\alpha_i}$ etc ...

Comme on a $D_j \leq A(n)^3$, le nombre r de facteurs dans la formule (1) vérifie :

$$r \geq \frac{1}{3} \frac{\log n}{\log A(n)} = \frac{1}{3c} \log \log n$$

Un diviseur d de n s'écrira :

$$d = d_1 d_2 \dots d_r \text{ avec } d_j \mid D_j$$

Choisissons maintenant $m < A(n)$. Si l'on a $d \leq m$, on aura forcément pour tout j : $d_j \leq m < \sqrt{D_j}$ et le nombre de diviseurs d de n inférieurs à m sera majoré par $d(n)/2^r$. Il vient alors :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d|n, d \leq m} d \leq \sum_{d|n, d \leq m} 1 \leq \frac{d(n)}{2^r} = \frac{d(n)}{(\log n)^{(1 \log 2)^{3c}}}$$

Maintenant, par le principe des tiroirs, on voit que pour tout n ,

$$g(n) \geq \frac{\log 2}{2 \log 2 n} d(n) \quad \text{cf. (7), prop. 1.}$$

On en déduit que pour $c < \frac{1}{3} \log 2$, on a, pour n assez grand, $\Delta(n) \geq A(n)$ et cela démontre le théorème 1.

§2. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 2

On considère des nombres premiers $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\lambda} < q_k < \frac{x''}{\lambda} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{x'}{\lambda 3^i} < q_{k-i} < \frac{x''}{\lambda 3^i} \end{aligned}$$

où λ est un nombre réel fixé > 1 , et x' et x'' des nombres voisins tendant simultanément vers l'infini; par exemple :

$$x'' = x' \left(1 + \frac{1}{\log x'} \right).$$

Soit $n = q_1 q_2 \dots q_k$. On va montrer que $\Delta(n) = q_k$.

Ce nombre $n = q_1 q_2 \dots q_k$ a les propriétés suivantes :

i) Tout r diviseur δ_r (i. e. tout diviseur produit de r facteurs premiers) est inférieur à tout $(r + 1)$ diviseur δ_{r+1} .

On exigera même d'avoir :

$$(2) \quad \frac{\delta_r}{\delta_{r+1}} < \frac{q_1}{2 q_k}$$

Pour cela il suffit que :

$$(3) \quad 2 \lambda^{3^k} \left(\frac{x''}{x'} \right)^k < x'$$

ii) On écrit un diviseur de n sous la forme $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ avec toujours $q_{i_1} < q_{i_2} < \dots < q_{i_r}$. Les r -diviseurs de n sont rangés comme leurs plus petits facteurs premiers. Plus précisément, on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} < q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_s}$$

si et seulement si :

$(r < s)$ ou $(r = s \text{ et } i_1 < j_1)$ ou $(r = s, i_1 = j_1 \text{ et } i_2 < j_2)$ etc ...

On exigera même d'avoir :

$$(4) \quad i_1 < j_1 \Rightarrow \frac{q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}} < \frac{q_{i_1+1}}{2 q_k}$$

Comme on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} \leq \frac{x''^r}{\lambda^{3^{k-i_1}}}$$

et $j_1 \geq i_1 + 1$ donne

$$q_{j_1} \dots q_{j_r} \geq \frac{x'^r}{\lambda^3 + 3^{k-j_2} + \dots} \geq \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{3}{2}} 3^{k-j_1}} \geq \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{1}{2}} 3^{k-i_1}}$$

Comme on a d'autre part :

$$\frac{q_{i_1+1}}{2 q_k} > \frac{\lambda x'}{2 \lambda^3 x''^{k-i_1-1}}$$

Il suffira pour obtenir (4) d'avoir :

$$\frac{\lambda}{2} \lambda^{\frac{1}{6} 3^{k-i_1}} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^{r+1}$$

relation qui est entraînée par, car $i_1 < j_1 \leq k$ et

$r \leq k - 1$:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \lambda^{3/2} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^k$$

iii) On remarque que les propriétés i et ii entraînent que le quotient de deux diviseurs successifs de n est ≥ 2 .

Il reste à démontrer que $\Delta(n) = q_k$. On a d'abord :

$$g_{q_k}(n) = 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \dots + \frac{q_1}{q_k}$$

On va montrer que pour tout diviseur $m > q_k$, on a $g_m(n) < g_{q_k}(n)$

Trois cas se présentent, suivant la valeur de d , diviseur de n précédant m . On écrit $m = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ avec $r \geq 2$.

Premier cas -

d a $(r - 1)$ diviseurs. Par les propriétés iii et i,

on a :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{d}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \leq 1 + \frac{2d}{m} \leq 1 + \frac{q_1}{q_k}$$

Deuxième cas -

$d = q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}$ a r diviseurs premiers. On suppose que $i_1 = j_1$; ... ; $i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire $j_h \leq i_h - 1$ et on suppose $i_h \neq k$, ce qui entraîne $j_h \leq k - 2$.

On a alors :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{d}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) < 1 + \frac{2d}{m} \leq 1 + \frac{q_{j_h} + 1}{q_k} \leq 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}$$

en utilisant la relation (4).

Troisième cas -

On suppose que $i_r = k$. Les diviseurs précédant m sont :

$$\frac{q_\ell}{q_k} m \text{ pour } \ell = k-1, k-2, \dots, i_{r-1} + 1$$

et soit d celui qui vient juste avant. On a alors :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \dots + \frac{q_{i_{r-1}+1}}{q_k} + \frac{2d}{m}$$

Si d a $(r-1)$ facteurs premiers, on sait que $\frac{2d}{m} < \frac{q_1}{q_k}$.

Si d a r facteurs premiers, on l'écrit $d = q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}$

On suppose $i_1 = j_1 ; \dots ; i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire

$j_h \leq i_h - 1$. On a forcément $i_h \leq i_{r-1}$ et d'après la relation (4)

on a $\frac{2d}{m} < \frac{q_{i_{r-1}}}{q_k}$, ce qui achève de montrer que $\Delta(n) = q_k$.

En regardant les conditions (3) et (5), on peut voir

qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles :

$$\Delta(n) \leq \exp [(\log 3 + \epsilon) \log n / \log \log n]$$

Ce qui démontre le théorème 2. Avec un peu plus de soin, on peut

remplacer le 3 de $\log 3$ (qui vient des exposants 3^k) par $2 + \epsilon$.

Il semble que la "bonne" constante c entre les théorèmes 1

et 2 soit $\log 2$.

PROPOSITION 1 -

La densité inférieure des n tels que $\Delta(n) < \sqrt{n}$ est strictement positive.

Démonstration -

On considère les $n \leq x$ ayant 3 diviseurs premiers

q_1, q_2, q_3 vérifiant par exemple :

$$\begin{aligned} x^{\alpha-\epsilon} < q_1 < x^\alpha & \text{ avec } \alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{100} \\ x^{\beta-\epsilon} < q_2 < x^\beta & \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \text{ et } \epsilon = \frac{1}{1000} \\ x^{\gamma-\epsilon} < q_3 < x^\gamma & \gamma = \frac{1}{3} + \frac{2}{100} \end{aligned}$$

Combien y a-t-il de tels nombres $n \leq x$? Il y en a :

$$\sum_{q_1, q_2, q_3} \left[\frac{x}{q_1 q_2 q_3} \right] = \sum_{q_1, q_2, q_3} \frac{x}{q_1 q_2 q_3} + O\left(\frac{x^{\alpha+\beta+\gamma}}{\log^3 x}\right)$$

$$= x \left(\sum_{q_1} \frac{1}{q_1} \right) \left(\sum_{q_2} \frac{1}{q_2} \right) \left(\sum_{q_3} \frac{1}{q_3} \right) + o(x).$$

Or
$$\sum_{x^a \leq p \leq x^b} \frac{1}{p} = \log \log(x^b) - \log \log(x^a) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= \log \frac{b}{a} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

le nombre des $n \leq x$ est donc :

$$x \left(\log \frac{\alpha}{\alpha - \varepsilon} \right) \left(\log \frac{\beta}{\beta - \varepsilon} \right) \left(\log \frac{\gamma}{\gamma - \varepsilon} \right) + o(x)$$

Montrons maintenant que pour $n = n' q_1 q_2 q_3$, alors $\Delta(n) \leq q_3 n'$.

Cela résulte d'abord de ce que $\Delta(q_1 q_2 q_3) = q_3$. Ensuite, comme n'

est tout petit, les diviseurs de n de la forme $d' D$, où $d' \mid n'$

et $D \mid q_1 q_2 q_3$ sont rangés prioritairement suivant les valeurs

de D . On a donc pour $m = m' D$:

$$g_{m'D}(n) = \frac{\sigma(m')}{m'D} \sum_{\substack{d \mid q_1 q_2 q_3 \\ d < D}} d + \frac{1}{m'} \sum_{\substack{d' \mid n' \\ d' \leq m'}} d'$$

$$= g_{m'}(n') + \frac{\sigma(m')}{m'} (g_D(q_1 q_2 q_3) - 1)$$

et cette dernière quantité est maximale pour $D = q_3$.

On sait d'autre part que, si l'on désigne par $P(n)$

le plus grand facteur premier de n , la densité des n pour lesquels

$P(n) \geq n^c$ existe (cf : [1]) et vaut $\log \frac{1}{\alpha}$ pour $c \geq \frac{1}{2}$.

D'après le lemme 1, la densité des n pour lesquels $\Delta(n) < \sqrt{n}$

est donc majorée par $1 - \log 2 < 0,31$. Tout ceci laisse conjecturer

l'existence d'une fonction $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante et continue

telle que :

$$\lim \frac{1}{x} \text{card} \{n \leq x, \Delta(n) < n^c\} = \phi(c)$$

§3. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 3

Soit $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n .

On écrit :

$$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} q_i^{\alpha_i}$$

et l'on pose pour $2 \leq j \leq \omega(n)$:

$$\prod_{i=1}^{j-1} q_i^{\alpha_i} = q_j^{\gamma_j(n)}$$

PROPOSITION 2 - (P. ERDÖS, (4), Th. 2).

Il existe une fonction continue strictement croissante ϕ , avec $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = 1$ telle que, si l'on enlève un ensemble E de densité 0 on ait :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} \frac{1}{\log \log n} \sum_{\gamma_j(n) \leq c} 1 = \phi(c)$$

PROPOSITION 3 -

Soit $\psi(n)$ une fonction croissante tendant vers l'infini avec n . Presque tous les entiers n vérifient, si $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$:

$$i \leq k-1 \text{ et } q_i > \psi(n) \Rightarrow q_{i+1} > 2 q_i$$

Démonstration -

Considérons les entiers n entre \sqrt{x} et x . Ceux qui ne vérifient pas la propriété ont deux diviseurs premiers $q > \psi(\sqrt{x})$ et p , $q < p < 2q$. De tels entiers, il y en a au plus :

$$\sum_{\substack{q > \psi(\sqrt{x}) \\ q < p < 2q}} \left[\frac{x}{p q} \right] \leq x \sum_{q > \psi(\sqrt{x})} \frac{1}{q} \left(\sum_{q < p < 2q} \frac{1}{p} \right)$$

Or $\sum_{q < p < 2q} \frac{1}{p} \sim \frac{\log 2}{\log q}$, et comme la série $\sum \frac{1}{q \log q}$ lorsque q est premier, est convergente, son reste, lorsque $q > \psi(\sqrt{x})$ tend vers 0.

PROPOSITION 4 -

Soit n vérifiant : Il existe $j \geq 7$ tel que

$1 < \gamma_j(n) < \frac{3}{2}$ et $q_i > 2 q_{i-1}$ pour $i \geq j$. Pour un tel n , on a

$$g_m(n) > \frac{\sigma(n)}{n} \text{ avec } m = q_1^{\alpha_1} \dots q_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$$

et donc $\Delta(n) \neq n$.

Démonstration -

Comme $j \geq 7$, on a $q_j \geq 17$ et $m \geq 2.3.5.7.11.13 = 30\ 030$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{n} &= \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{1}{q_i} + \dots + \frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \frac{1}{1 - 1/q_i} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{q_i}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right) \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \sum_{i \geq j} \log \left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right) \\ &\leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \frac{1}{q_j} \sum_{i \geq j} \frac{2}{2^{i-j}} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \frac{4}{q_j} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \left(1 + \frac{8}{q_j}\right) \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que pour $0 \leq x \leq 1$, $e^x \leq 1 + 2x$.

On a d'autre part : $(\gamma_j(n) > 1 \Rightarrow q_j < m)$

$$g_m(n) \geq \frac{1}{m} (\sigma(m) + q_j) = \frac{\sigma(m)}{m} \left(1 + \frac{q_j}{\sigma(m)}\right)$$

Il reste donc à démontrer :

$$\frac{8}{q_j} < \frac{q_j}{\sigma(m)}$$

soit, comme $q_j^{\gamma_j(n)} = m$, que $\frac{2}{\gamma_j(n)} > 8 \frac{\sigma(m)}{m}$.

Comme $\gamma_j(n) < 3/2$, ceci sera assuré pour $\sigma(m) < \frac{1}{8} m^{4/3}$.

Il n'y a qu'un nombre fini de m qui vérifient cette inégalité.

L'étude des nombres colossalement abondants nous apprend même,

(cf. (6), tableau III) que tout n vérifie :

$$\sigma(n) \leq \sigma(12) \left(\frac{n}{12}\right)^{1,114} \leq 1,76 n^{1,14}$$

ce qui entraîne $\sigma(m) > \frac{1}{8} m^{4/3}$ pour $m \geq 7317$.

La démonstration du théorème 3 se fait de la façon suivante :

Les propositions 2 et 3 montrent que presque tous les entiers vérifient

les hypothèses de la proposition 4.

Une caractérisation plus précise des entiers n pour lesquels

$\Delta(n) = n$ semble difficile.

REFERENCES

- (1) N.G. BRUIN (*de*) On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$.- Indagationes Math. 13, 1951.- p. 50-60.
- (2) P. ERDÖS On the density of some sequences of integers.- Bull. Amer. Math. Soc.- (1948).- t. 54.- p. 685-692.
- (3) P. ERDÖS Some remarks on prime factors of integers.- Canadian j. Maths.- (1959).- t. 11.- p. 161-167
- (4) P. ERDÖS On some properties of prime factors of integers.- Nagoya Math. J. (1966).- t. 27.- p. 617-623.
- (5) P. ERDÖS On the distribution of prime divisors.- Aequationes Math. (1969).- t. 2.- p. 177-183
- (6) P. ERDÖS & J.L. NICOLAS Répartition des nombres superabondants.- Bull. Soc. Math. France.- (1975).- t. 103 p. 65-90.
- (7) P. ERDÖS & J.L. NICOLAS Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres.- à paraître au Bulletin des Science Mathématiques.- t. 100 (1976) et Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux.- (1974-75) exposé n° 13.
- (8) H. HALBERSTAM & K.F. ROTH Séquences.- Oxford at the Clarendon Press (1966).
- (9) G.H. HARDY & S. RAMANUJAN The Normal number of prime factors of a number n .- Quarterly Journal of Mathematics.- 48;- (1917) p. 76-92 et Collected papers of Ramanujan.- p. 262-275.
- (10) J. KUBILIUS Probabilistic methods in the theory of numbers.- vol. 11.- Translations of Mathematical Monographs.
- (11) T. H. TRAN Sur le nombre d'entiers $\leq x$ et non divisibles par les nombres premiers $> y$.- Séminaire de Théorie des nombres Delange-Pisot-Poitou.- (1975-76) (Groupe d'étude).

P. ERDÖS
Académie des Sciences de Hongrie
BUDAPEST, Hongrie

J.L. NICOLAS
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences de LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES