MARTIN EICHLER

Représentation moyenne de nombres par des formes quadratiques quaternaires

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 199-202
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__199_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.199-202

REPRÉSENTATION MOYENNE DE NOMBRES PAR DES FORMES QUADRATIQUES QUATERNAIRES

par

Martin EICHLER

Nous considérons des formes quadratiques, entières, définies positives, à 4 variables, de discriminant donné $D(F)$. Soit $F_1,\dots,F_H$ un système de représentants de ces formes et e_i $(1 \leqslant i \leqslant H)$ le nombre des unités de F_i (c'est-à-dire le nombre des isométries de déterminant 1). Pour tout entier m positif, soient $a_i(m)$ les nombres de représentation de m par F_i $(1 \leqslant i \leqslant H)$. On sait que le nombre

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{H} e_i^{-1}\, a_i(m) = e(m)\ ,$$

a une expression élémentaire et est le coefficient d'une certaine série d'Eisenstein

$$E(z) = \sum_{m\geqslant 0} e(m)\, e^{2i\pi mz}\ .$$

Si on se borne aux formes qui représentent 1, on peut aussi définir d'autres "nombres moyens de représentations". Supposons que les classes des formes qui représentent 1 soient données par F_i, $1 \leqslant i \leqslant h$. Si $D(F) = q^2$ est le carré d'un nombre premier, on a la relation :

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{h} v_i\, e_i^{-1}\, a_i(m) = \tfrac{1}{2} \sum_{s,f} \left(1 - \left\{\frac{(4m-s^2)f^{-1}}{q}\right\}\right) h((4m-s^2)f^{-2})\ ,$$

où

$$\left\{\frac{a}{q}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv 0 \bmod q^2 \\ \left(\frac{a}{q}\right) & \text{le symbole de Legendre, sinon.} \end{cases}$$

Dans le membre de droite, la somme porte sur les couples $(s,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\Delta = -(4m-s^2)f^{-2}$ soit un entier négatif, congru à 0 ou 1 modulo 4. On note $h(\Delta)$ le nombre de classes de l'ordre de discriminant Δ dans le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. Les nombres v_i seront expliqués plus loin.

Si $D(F) = q$, $q \equiv 13 \bmod 24$ est un nombre premier, on a la relation :

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{h} u_i^{-1}\, a_i(m) = \tfrac{1}{2} \sum_{s,f} \left(1 - \left\{\frac{q(4m-s^2)f^{-2}}{q}\right\}\right) h(q(4m-s^2)f^{-2}) - c a_2(q^{-\mu} m)$$

où les u_i sont les nombres de certaines unités symétriques (voir plus loin). On note q^{μ} la plus grande puissance de q divisant m et $a_2(q^{-\mu}m)$ le nombre de décompositions en somme de 2 carrés :

$$q^{-\mu} m = a^2 + b^2 \qquad\qquad (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} .$$

La correction apportée au membre de droite est en fait souvent nulle (c'est-à-dire $c = 0$), par exemple pour $q = 13$, 37 ou si μ est impair. Pour $q = 13$, comme le nombre de classes $H = 1$, les sommes obtenues dans (3) sont égales aux coefficients d'une série d'Eisenstein. Nous obtenons de nouvelles relations entre nombres de classes binaires semblables à celles démontrées par Hirzebruch et Zagier.

Remarques sur les démonstrations.

Si $D(F) = q^2$, les F_i représentent les normes dans les idéaux entiers d'une algèbre de quaternions K_q totalement définie sur $\mathbb{Q}$, ramifiée en q. On arrange les classes des idéaux dans un schéma carré. Sur la diagonale se trouvent les idéaux unités c'est-à-dire les ordres maximaux. Ceux-ci figurent une ou deux fois selon que l'idéal ambige $\mathfrak{q}$ de norme q est principal ou non. Cela nous donne $v_i = 1$ ou 2. La somme (2) est la trace d'une matrice de Brandt. On rappelle que les matrices de Brandt forment une représentation des opérateurs de Hecke.

Si $D(F) = q$, on construit l'algèbre de Clifford de la forme F en définissant un produit dans le réseau L associé à F . Le produit des vecteurs $\underline{a}$, $\underline{b} \ldots \in L$ est assujetti aux règles suivantes :

1) $\underline{a}\,\underline{b}$ est linéaire en chaque facteur

2) $\underline{a}\,\underline{b} + \underline{b}\,\underline{a} = (\underline{a},\underline{b})$ est le produit scalaire défini par la forme F .

La sous-algèbre K engendrée sur $\mathbb{Q}$ par les produits de nombres pairs de vecteurs est l'algèbre de quaternions sur $k = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ totalement définie et non ramifiée pour tous les idéaux premiers de k . On note $\varkappa$ l'anti-automorphisme naturel de K :

$$(\underline{a}\,\underline{b} \ldots)^{\varkappa} = \ldots \underline{b}\,\underline{a} \ .$$

Soit $\underline{e}$ un vecteur de norme $\frac{1}{2}(\underline{e},\underline{e}) = 1$. Alors la relation

$$\underline{e}^{-1}(\underline{a}\,\underline{b} \ldots)\underline{e} = (\underline{a}\,\underline{b} \ldots)^{\sigma}$$

définit un isomorphisme σ de K qui commute évidemment avec $\varkappa$. Les produits des vecteurs de L engendrent un ordre $\mathcal{O}$ dans K . Les correspondances entre F , L , $\mathcal{O}$ sont bijectives. Les réseaux contenant le vecteur $\underline{e}$ engendrent les ordres symétriques, on a :

$$\underline{e}^{-1}\, \mathcal{O}\, \underline{e} = \mathcal{O}^{\sigma} = \mathcal{O} \ .$$

Nous nous bornons à ceux-ci. Enfin, on associe à un vecteur $\underline{m} \in L$, <u>l'élément distingué</u> de K

$$M = \underline{e}\,\underline{m} \ .$$

Il a la propriété de symétrie

$$M^{\varkappa\sigma} = M \ . \tag{4}$$

Inversement tous les éléments de K ayant cette propriété sont obtenus de cette manière. La norme de M est égale à celle de m :

$$N_{K/k}(M) = \tfrac{1}{2}(\underline{m},\underline{m}) \ .$$

Le calcul du nombre des vecteurs $\underline{m} \in L$ de norme donnée, donc du nombre des éléments distingués dans $\mathcal{O}$ de norme donnée ressemble au calcul des traces des matrices de Brandt. Une des idées essentielles de la démonstration est d'utiliser la symétrie (4) et de se ramener à des considérations dans l'algèbre $K_q/\mathbb{Q}$ au lieu de K/k. On trouve d'abord une formule analogue à (3) mais où le membre de droite contient une somme de nombres de classes d'idéaux d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ symétriques pour σ. On peut exprimer ces nombres avec des nombres de classes de corps quadratiques.

Nous n'avons pas encore défini les nombres u_i figurant dans le membre de gauche de (3). Ce sont les nombres de certaines unités symétriques des $\mathcal{O}_i$ attachés aux F_i. Si $q \equiv 13 \bmod 24$, ces nombres sont indépendants de la symétrie choisie (liée au choix du vecteur $\underline{e}$).

Pour les autres q la méthode marche aussi en principe, mais les unités causent des difficultés, et je n'ai que des conjectures.

Les démonstrations seront publiées dans un volume dédié au 80-ième anniversaire de C.L. Siegel dans "Communications in Pure and Applied Mathematics".

Martin EICHLER
Universität Basel
Mathematisches Institut
Petersplatz 1
4051 BASEL (Suisse)