

# *Astérisque*

PETER BUNDSCHUH

**Fractions continues et indépendance algébrique en  $p$ -adique**

*Astérisque*, tome 41-42 (1977), p. 179-181

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1977\\_\\_41-42\\_\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__179_0)>

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FRACTIONS CONTINUES ET INDEPENDANCE ALGEBRIQUE EN P-ADIQUE

par

Peter BUNDSCHUH

1.- Fractions continues. Dans la première partie de cet exposé nous allons discuter quelques problèmes concernant les fractions continues sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $p$  un nombre premier, introduites par Schneider [6]. Pour tout  $\zeta \in \mathbb{Q}_p$  non nul, son algorithme donne un développement unique de la forme

$$\zeta = \frac{a_0}{b_0} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots, \quad (\text{plus brièvement } \zeta = \left[ \begin{array}{c} a_0, \dots, a_n, \dots \\ b_0, \dots, b_n, \dots \end{array} \right])$$

avec  $a_v = p^c v$ ,  $c_v \in \mathbb{Z}$  et, pour  $v \geq 1$ ,  $c_v \geq 1$ ,  $b_v \in \mathbb{Z}$  et  $1 \leq b_v \leq p-1$ . Bien sûr, ces fractions continues  $p$ -adiques peuvent être finies, et dans ce cas,  $\zeta$  est rationnel. Notre premier théorème contient une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre  $p$ -adique soit rationnel.

THÉOREME 1 [1]. Soit  $\zeta \in \mathbb{Q}_p$ ,  $\zeta \neq 0$ . Le nombre  $\zeta$  est rationnel si et seulement si sa fraction continue  $p$ -adique est, ou bien finie, ou bien périodique de période 1 avec  $a_n = p$ ,  $b_n = p-1$  pour  $n \geq n_0$ .

Comme Schneider l'a déjà mentionné dans son article, la question se pose maintenant de caractériser les  $\zeta \in \mathbb{Q}_p$ , algébriques de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ , par leurs fractions continues  $p$ -adiques. Naturellement l'analogue du théorème d'Euler est vrai : si la

fraction continue de  $\zeta \in \mathbb{Q}_p$  est périodique avec une période différente de la forme indiquée dans notre théorème 1, alors  $\zeta$  est algébrique de degré exact 2. Mais, en ce qui concerne l'analogie du théorème de Lagrange, rien n'est démontré jusqu'à présent; quelques calculs pourraient indiquer que cet analogue n'est pas vrai.

2.- Indépendance algébrique. Cette partie sera consacrée à la discussion de quelques théorèmes sur l'indépendance algébrique dans  $\mathbb{Q}_p$ , dont la plupart ont été trouvés en collaboration avec R. Wallisser et seront publiés dans [2]. Des conséquences de notre résultat principal que nous ne citons pas ici sont premièrement l'analogie p-adique bien connu du théorème de Liouville sur l'approximation rationnelle de nombres algébriques p-adiques, et puis deuxièmement le théorème suivant qui donne un critère suffisant pour l'indépendance algébrique dans  $\mathbb{Q}_p$  et qui est l'analogie d'un critère de W.M. Schmidt [5] dans le cas réel :

THEOREME 2. Soient  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  des entiers p-adiques tels que, pour tout  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $d > 1$ , il existe un  $(n+1)$ -uple  $(p_1, \dots, p_n, q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ,  $q \neq 0$  avec

$$0 < |q\zeta_{k+1} - p_{k+1}|_p < (2 \text{ Max}(|p_1|, \dots, |p_n|, |q|))^{-nd} \prod_{x=1}^k |q\zeta_x - p_x|_p^d$$

$(0 \leq k < n)$ . Alors  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

A l'aide de ce critère et d'un lemme trouvé par A. Durand [3] on peut construire effectivement des ensembles non dénombrables de nombres p-adiques tels que tout sous-ensemble fini est algébriquement indépendant sur  $\mathbb{Q}$ . Le problème analogue dans le cas réel a été résolu pour la première fois par von Neumann [4].

THEOREME 3. Les entiers p-adiques

$$\zeta(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} p^{-c_m(\tau)}, \quad c_m(\tau) = [2^{\tau m}] \quad \text{avec } \tau \in (1, \infty)$$

ont la propriété que tout sous-ensemble fini est algébriquement indépendant sur  $\mathbb{Q}$ .

THÉOREME 4. Les fractions continues  $p$ -adiques

$$\zeta^*(\tau) = \left[ \begin{matrix} a_0, a_1, \dots \\ 1, 1, \dots \end{matrix} \right] \text{ avec } a_m = p^{c_m(\tau)}, \quad c_m(\tau) = \lfloor 2^{\tau m} \rfloor, \quad \tau \in (1, \infty)$$

sont des entiers  $p$ -adiques qui ont la même propriété que les  $\zeta(\tau)$  du théorème 3.

Ce dernier théorème n'est pas encore contenu dans [2] ; mais parce que sa démonstration est très semblable à celle du théorème précédent nous renonçons à la donner ici.

-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BUNDSCHUH.-  $p$ -adische Kettenbrüche und Irrationalität  $p$ -adischer Zahlen. *El. Math.* (à paraître).
- [2] P. BUNDSCHUH und R. WALLISSER.- Algebraische Unabhängigkeit  $p$ -adischer Zahlen. *Math. Ann.* 221 (1976), 243-249.
- [3] A. DURAND.- Un système de nombres algébriquement indépendants. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* 280 (1975), 309-311.
- [4] J.V. NEUMANN.- Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen. *Math. Ann.* 99 (1928), 134-141.
- [5] W.M. SCHMIDT.- Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.* 68 (1962), 475-478.
- [6] T. SCHNEIDER.- Über  $p$ -adische Kettenbrüche. *Symposia Math.* Vol. IV (1970), 181-189.

Peter BUNDSCHUH  
Universität Köln  
Mathematisches Institut  
Weyertal 86-90  
D-5000 KÖLN 41