

# *Astérisque*

DANIEL BERTRAND

**Sur les dénominateurs des points rationnels  
des courbes elliptiques**

*Astérisque*, tome 41-42 (1977), p. 173-178

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1977\\_\\_41-42\\_\\_173\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__173_0)

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES DÉNOMINATEURS DES POINTS  
RATIONNELS DES COURBES ELLIPTIQUES

Daniel BERTRAND

§ 1. INTRODUCTION. RAPPEL DES RÉSULTATS ARCHIMÉDIENS.

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  par l'équation :  $y^2 = x^3 + Ax + B$ . Pour tout plongement  $K \hookrightarrow L$ , et tout sous-groupe  $E'$  de  $E$ , on note  $E'(L)$  l'ensemble des points  $L$ -rationnels de  $E'$ .

On appelle hauteur d'un nombre algébrique  $\alpha$ , et on note  $H(\alpha)$ , le maximum des valeurs absolues archimédiennes des coefficients de son polynôme minimal sur  $\mathbb{Z}$  ; on note  $\text{den}(\alpha)$  son dénominateur. Par ailleurs, si  $x(Q)$  désigne l'abscisse d'un élément  $Q$  de  $E(K)$ , on pose :

$$H(Q) = H(x(Q)) ; D(Q) = \text{den}(x(Q)) .$$

Rappelons qu'il n'y a qu'un nombre fini de points  $Q$  de  $E(K)$  tels que  $H(Q)$  soit borné.

Soit  $\mathcal{M}_\infty$  l'ensemble des valeurs des intégrales elliptiques  $\int_0^Q dx/y$  prises entre l'origine de  $E$  et les points  $Q$  de  $E(\mathbb{C})$  à coordonnées algébriques.

D'après un théorème classique de Schneider, les éléments non nuls de  $\mathcal{M}_\infty$  sont transcendants. Dans le cas (M.C.) où E admet une multiplication complexe, Masser [4] a obtenu des minoration explicites -améliorées par Coates et Lang [2]- des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{M}_\infty$  à coefficients algébriques. Ces minoration fournissent une nouvelle preuve du théorème de finitude de Siegel sur E. Ainsi, dans le cas où E est définie sur  $\mathbb{Q}$ , on peut énoncer :

Proposition 1 (M.C.) : (Voir [4], thm. A4) : il existe un nombre réel  $c_1 > 0$  ne dépendant que de A et B tel que, pour tout élément Q de  $E(\mathbb{Q})$ , on ait :

$$\text{Log}(D(Q)) > c_1 \text{Log}(H(Q)) .$$

Nous présentons ici l'analogie ultramétrique de ces résultats. Soient p un nombre premier,  $\mathbb{C}_p$  le complété de la clôture algébrique du corps  $\mathbb{Q}_p$ , et  $|\cdot|_p$  la valeur absolue normalisée de  $\mathbb{C}_p$ . Alors il existe une isométrie t (voir [3], § 2), analytique sur un sous-groupe non trivial  $\mathcal{C}_p$  de  $\mathbb{C}_p$ , telle que l'application  $e_p$  :

$$z \mapsto \{\mathcal{P}(z) = 1/t^2(z) ; \mathcal{P}'(z)/2 = -t'(z)/t^3(z); 1\}$$

représente l'application exponentielle p-adique au voisinage de l'origine de  $E(\mathbb{C}_p)$ . Nous notons  $\mathcal{M}_p$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}_p$  où t prend des valeurs algébriques.

§ 2. VERSION p-ADIQUE DU THÉORÈME DE SCHNEIDER.

Théorème 1 ([1], thm. 1) : les éléments non nuls de  $\mathcal{M}_p$  sont transcendants.

Démonstration (nous indiquons comment le lemme 1 de [1] permet de prouver le théorème 1). Soit  $k$  un entier arbitrairement grand. La notation  $\ll$  se rapporte à la variable  $k$  tendant vers  $+\infty$ .

Supposons qu'il existe un élément  $u \neq 0$  de  $\mathcal{M}_p$ , algébrique. Le "lemme de Siegel" permet alors de construire une fonction non identiquement nulle :

$$\Phi(z) = \sum_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq r} p_{\lambda_1, \lambda_2} z^{\lambda_1} \wp(z)^{\lambda_2}$$

avec  $r = [k^{3/4}]$ ,  $p_{\lambda_1, \lambda_2} \in \mathbb{Z}$ ,  $H(p_{\lambda_1, \lambda_2}) \ll e^r$ , admettant le point  $u$  pour zéro d'ordre  $k$ .

Pour tout entier  $n > 0$ , soit  $k_n$  l'ordre de la fonction  $\Phi$  au point  $nu$  (de sorte que  $k_1 \geq k$  et  $k_n = 0$  pour  $n$  suffisamment grand). Le lemme 1 de [1] entraîne :

$$\text{Log } H(\Phi^n(nu)) \ll rn^2 + k_n (\text{Log } k_n + \text{Log } k + \text{Log } n) ,$$

et le lemme de Schwarz appliqué à la fonction  $z^{2r} \Phi$ , joint aux inégalités de Cauchy au point  $nu$ , fournit uniformément en  $n$  l'inégalité :

$$(I_n) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} k_i \ll rn^2 + k_n (\text{Log } k_n + \text{Log } k + \text{Log } n) .$$

Soit  $N$  le plus petit entier tel que  $k_N < k_1^{11/12}$ . On tire de  $(I_N)$  :

$$k_1 + (N-2)k_1^{11/12} \ll k^{3/4} N^2 + k_1^{11/12} (\text{Log } k_1 + \text{Log } N) ,$$

d'où :  $N \gg k_1^{1/6}$ . En conséquence :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} k_i > (N-1)k_1^{11/12} \gg k_1^{13/12} .$$

Mais l'inégalité  $(I_1)$  entraîne alors :

$$k_1^{13/12} \ll k_1 \text{ Log } k_1 ,$$

ce qui fournit la contradiction recherchée.

§ 3. VERSION p-ADIQUE DES RÉSULTATS DE MASSER, COATES ET LANG.

Nous supposons désormais que  $E$  admet une multiplication complexe.

On considère  $n$  éléments  $u_1, \dots, u_n$  de  $\mathcal{M}_p$  tels que  $e_p(u_1), \dots, e_p(u_n)$  soient des points de  $E(K)$  linéairement indépendants sur l'anneau des endomorphismes de  $E$ , et on note  $U = \sup_{i=1, \dots, n} H(e_p(u_i))$ .

Proposition 2 (M.C.) (Voir [1], § 3) : soient  $d$  et  $h$  des nombres entiers  $> 0$ . Il existe un nombre réel  $c_2 = c_2(n, d, A, B, K) > 0$  effectivement calculable tel que l'inégalité

$$|\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n|_p > \exp(-c_2 (\text{Log } h)^{16n} (p \text{ Log } U)^{32n^2})$$

soit satisfaite par tout  $n$ -uple  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de nombres algébriques de degré  $\leq d$  et de hauteur  $\leq h$ .

Si  $S$  désigne un ensemble fini de places de  $K$  contenant les places archimédiennes, on peut déduire des propositions 1 et 2 une démonstration du théorème de finitude de Siegel-Mahler sur les points de  $E(K)$  à coordon-

nées entières hors de  $S$ . Ainsi, dans le cas où  $A$  et  $B$  sont des entiers rationnels, on a, en notant  $P(x)$  le plus grand facteur premier de l'entier  $x$  :

Théorème 2 (M.C.) ([1], thm. 5) : il existe un nombre réel  $c_3 > 0$  ne dépendant que de  $A$  et  $B$  tel que, pour tout élément  $Q$  de  $E(\mathbb{Q})$ , on ait :

$$P(D(Q)) > c_3 [\text{Log}(H(Q))]^{1/(100r^2)},$$

où  $r$  désigne le rang du groupe de Mordell  $E(\mathbb{Q})$ .

Démonstration : soit  $E(\mathbb{Q})_t$  le sous-groupe de torsion de  $E(\mathbb{Q})$ , et  $P_1, \dots, P_r$  des représentants d'une base de  $E(\mathbb{Q})/E(\mathbb{Q})_t$ . Les lettres  $c_4, \dots, c_8$  apparaissant ci-dessous désignent des nombres réels  $> 0$  ne dépendant que de  $A, B, P_1, \dots, P_r$ .

Tout élément  $Q$  de  $E(\mathbb{Q})$  s'écrit sous la forme  $Q = h_1 P_1 + \dots + h_r P_r + P_t$ , où  $P_t \in E(\mathbb{Q})_t$ , et  $h_1, \dots, h_r$  sont des entiers de module majoré par  $h$ , avec :  $H(Q) > c_4 h^2$ .

Pour tout nombre premier  $p$ , l'ensemble  $E^{(p)}(\mathbb{Q}_p) = e_p(\mathcal{O}_p \cap \mathbb{Q}_p)$  est un sous-groupe d'indice fini du groupe  $E_1^{(p)}(\mathbb{Q}_p)$  des points de  $E(\mathbb{Q}_p)$  dont l'image par la réduction modulo  $p$  est le point à l'infini de la courbe réduite.

Dans le cas considéré, les estimations de [3], § 2 montrent que

$E^{(p)}(\mathbb{Q}_p) = E_1^{(p)}(\mathbb{Q}_p)$  dès que  $p > 2$ . On déduit donc du théorème 3 de [5] que l'indice  $\gamma_p$  de  $E^{(p)}(\mathbb{Q}_p)$  dans  $E(\mathbb{Q}_p)$  est, pour tout  $p$ , majoré par  $c_5 p$ . Alors  $\gamma_p Q = h_1(\gamma_p P_1) + \dots + h_r(\gamma_p P_r)$ , où  $\gamma_p P_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , est un point de  $E^{(p)}(\mathbb{Q})$  vérifiant :  $H(\gamma_p P_i) < c_6 p^2$ . Dans ces conditions, on tire de la proposition 2 :

$$\left| e_p^{-1}(\gamma_p Q) \right|_p > \exp[-c_2 (\text{Log } h)^{16r} (p^3 \text{Log } c_6)^{32r^2}]$$

soit :

$$|x(Q)|_p \leq |x(\gamma_p Q)|_p \leq \exp [c_8 p^{96r^2} (\text{Log Log } H(Q))^{16r}] .$$

L'égalité  $D(Q) = \prod_{p|D(Q)} |x(Q)|_p$ , jointe à la proposition 1, permet de conclure.

Remarque : On notera que le seul point ineffectif de ce type de démonstration réside dans la détermination d'une base du groupe de Mordell-Weil.

\*  
\* \*  
\*

- [1] D. Bertrand, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (1976), série A, p. 1399.
- [2] J. Coates, S. Lang, Inventiones Maths., 34 (1976), p. 129-133.
- [3] E. Lutz, J. r. ang. Math., 177 (1937), p. 238-247.
- [4] D.W. Masser, Elliptic functions and transcendence, S. L. N. No 437.
- [5] J. Tate, Invent. Maths., 23 (1974), p. 179-206.

Centre de Mathématiques  
de l'Ecole Polytechnique  
Route de Saclay  
91120 PALAISEAU (France)

-----