ROLF BERNDT

Différentielles arithmétiquement entières des corps de fonctions modulaires

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 165-172

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__165_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.165-172

DIFFÉRENTIELLES ARITHMÉTIQUEMENT ENTIÈRES DES CORPS DE FONCTIONS MODULAIRES

par

Rolf BERNDT

Il s'agit de caractériser pour certains corps de fonctions modulaires, d'une manière intrinsèque (à l'aide des anneaux de valuation), les différentielles abéliennes de première espèce à coefficients de Fourier entiers. En développant et comparant plusieurs notions de différentielles entières, on aboutit à la définition d'une différentielle rationnelle entière ([1], [2]), qui est inspirée par Néron [11] et applicable à des schémas réduits irréductibles de type fini sur un anneau de base. Les résultats concernant les corps modulaires sont presque tous contenus dans la thèse de Schramm, en préparation à Hambourg.

I

Soit K un sous-corps du corps $\mathfrak{K}_N$ des fonctions modulaires de niveau N. Je voudrais comparer entre elles les notions arithmétiques suivantes pour les différentielles abéliennes de première espèce de K :

1) $\mathrm{Diff}_A K$ désigne les différentielles de première espèce, qui ont à l'infini un développement de Fourier - c'est-à-dire un développement en puissances de $q_N = \exp \frac{2\pi i \omega}{N}$ - à coefficients dans un sous-anneau A d'un corps de nombres k contenu dans K.

2) $\mathrm{Diff}^*_A K$ désigne les différentielles, qui ont de tels coefficients, quand on les développe en toutes les pointes.

En plus de ces notions "classiques" je définis selon Kähler [7] :

3) $D(\frac{K}{A}) = \bigcap\limits_{S \supset A} SdS$. Ici SdS désigne le sous-module engendré par tous les adb $(a,b \in S)$ dans le module $\Omega^1_{K/A}$ des différentielles de K sur A ; l'intersection est prise sur tous les anneaux de valuation discrète (de rang 1) de K, qui sont essentiellement de type fini sur A.

$D(\frac{K}{A})$ est un invariant birationnel de K sur A, qui peut évidemment être associé à tout corps K, engendré comme corps par un nombre fini d'éléments sur A (anneau quelconque). Il est formé en généralisant la notion de la fermeture intégrale $\mathfrak{o}$ de $\mathbf{Z}$ dans le corps de nombres k :

$\mathfrak{o} = \cap\, s$, l'intersection étant prise sur tous les anneaux de valuation s de k.

Pour $A = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{C}(x,y)$ avec $f(x,y) = 0$,

$D(\frac{K}{\mathbb{C}})$ est justement le $\mathbb{C}$-module des différentielles abéliennes de première espèce de K.

D'après un théorème de Kähler ([7] 359-378), $D(\frac{K}{A})$ est en général un A-module de type fini.

En arithmétique, on considère surtout les sous-corps suivants du corps $\mathfrak{K}_N$ des fonctions modulaires de niveau N :

K_N le corps des fonctions modulaires à coefficients dans k_N, le corps des racines N-ièmes de l'unité, et

K^o_N le corps des fonctions modulaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Pour $N = 6$ et 7 on a des calculs explicites [3]. Je veux citer

$D(\frac{K^o_N}{\mathbf{Z}}) = N\,\mathrm{Diff}_{\mathbf{Z}} K^o_N$, c'est-à-dire : avec $K^o_N = \mathbb{Q}(x,y)$

$$= \frac{3dx}{y}\mathbf{Z} \qquad \text{pour } N = 6 \quad (f = y^2-x^3-1 = 0)$$

$$= 7(\frac{dx}{f_y}\mathbf{Z} + \frac{dx}{f_y}x\mathbf{Z} + \frac{dx}{f_y}y\mathbf{Z}) \qquad \text{pour } N = 7 \quad (f = y^3+yx^3+x = 0) .$$

Pour K_N les résultats sont malheureusement plus compliqués. En général, je sais (thèse de Schramm, déjà mentionnée), qu'il existe $c \in \mathbb{N}$, tel que

$D(\frac{K_N}{\mathfrak{o}_N}) \subset \mathrm{Diff}_{\mathfrak{o}_N} K_N \subset N^{-c} D(\frac{K_N}{\mathfrak{o}_N})$, $\mathfrak{o}_N$ étant l'ensemble des éléments entiers de k_N.

Sur $\mathbf{A} = \mathfrak{o}'_N = \mathfrak{o}_N[\frac{1}{N}]$, tout devient plus facile et on peut prouver :

$$D(\frac{K_N}{\mathfrak{o}'_N}) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{o}'_N} K_N .$$

II

Aussi, dans l'espoir d'améliorer l'inclusion donnée ci-dessus, on peut modifier la définition 3, à l'aide de la première différente kählérienne $\vartheta_1(\frac{S}{\mathbf{A}})$ de S sur $\mathbf{A}$ ([7], [1]) et définir un autre invariant birationnel, valable d'ailleurs aussi dans le cas des corps $K/\mathbf{A}$ quelconques (mais séparables) :

$$4)\ D(\frac{K}{\vartheta|\mathbf{A}}) = \bigcap_{S \supset \mathbf{A}} \vartheta_1(\frac{S}{\mathbf{A}})^{-1}\, SdS .$$

Pour $N = 6$ et 7 et K_N^o, on trouve les résultats explicites qu'on cherchait :

$$D(\frac{K^o}{\vartheta|\mathbf{Z}}) = \mathrm{Diff}_{\mathbf{Z}} K_N^o .$$

Et pour K_N tout redevient plus compliqué. En général, on a

$$D(\frac{K_N}{\vartheta|\mathfrak{o}_N}) \subset \vartheta_o(\frac{\mathfrak{o}_N}{Z})^{-1}\, \mathrm{Diff}_{\mathfrak{o}_N} K_N \subset N^{-c-1}\, D(\frac{K_N}{\mathfrak{o}_N}) ,$$

$$D(\frac{K_N}{\vartheta|\mathfrak{o}'_N}) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{o}'_N} K_N .$$

III

On peut modifier encore les définitions 3 et 4, a priori birationnellement invariantes, et définir des notions qui ne le sont pas :

Soit V un modèle de type fini sur $\mathbf{A}$. Alors je définis :

$5)\ D(\frac{V}{\mathbf{A}}) = \bigcap_{S \in V} SdS$, l'intersection prise sur tous les $S \in V$,

$$D(\frac{V}{\vartheta|\mathbf{A}}) = \bigcap_{S \in V} \vartheta_1(\frac{S}{\mathbf{A}})^{-1}\, SdS .$$

Ici, on va prendre pour K_N le modèle V_N d'Igusa, qui consiste en tous les anneaux locaux qui sont des localisations des anneaux

A_N fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[J]$ dans K_N ,

B_N fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[\frac{1}{J}]$ dans K_N .

On obtient

$$D(\frac{V_N}{\mathfrak{o}_N}) = \mathrm{Diff}^*_{\mathfrak{o}_N} K_N \quad \text{et} \quad D(\frac{V_N}{\vartheta|\mathfrak{o}_N}) = \vartheta_0(\frac{\mathfrak{o}_N}{\mathbb{Z}})^{-1} \, \mathrm{Diff}^*_{\mathfrak{o}_N} K_N .$$

Il y a une relation entre les notions 4 et 5 : Pour un modèle V régulier et complet sur A (c'est-à-dire associé à un schéma propre sur A) de K on a ([1] 2)

$$D(\frac{V}{\vartheta|A}) = D(\frac{K}{\vartheta|A}) \quad {}^{(*)}.$$

Autrement dit, la notion utilisant ces V et travaillant avec la différente est birationnellement invariante. On peut considérer cela comme un analogue du fait suivant :

Pour un tel modèle V régulier et complet sur un corps $A = k$ $\bigcap_{O_x \in V} O_x dO_x$, l'intersection prise sur tous les anneaux locaux O_x de V , est un invariant birationnel, qu'on peut identifier au A-module des sections globales $\Gamma(X,\Omega_{X/A})$ du faisceau des différentielles sur un schéma X , dont V est l'ensemble des anneaux locaux.

IV

Avant de donner quelques indications concernant les preuves des faits cités, je désire poursuivre encore sur le sujet des schémas :

On peut traiter les points des schémas quelconques de K , qui sont de type fini sur A , de la manière suivante : On définit une notion de différentielle entière,

(*) Avec la remarque de Deligne ([4], sans preuve, mais confirmée par Katz pendant les "Journées arithmétiques" ; voir aussi Drinfeld [5]) que V_N est un modèle régulier, cela donne la caractérisation

$$D(\frac{K_N}{\vartheta|\mathfrak{o}_N}) = \vartheta_0(\frac{\mathfrak{o}_N}{\mathbb{Z}})^{-1} \, \mathrm{Diff}^*_{\mathfrak{o}_N} K_N .$$

généralisant la notion de la différente kählérienne d'une manière inspirée par les différentielles $\mathfrak{g}$-morphes de Néron [11] . C'est-à-dire on définit pour tout

$$w \in \Omega^1_{K/A} \quad \text{et} \quad x \in X \quad \text{une différente} \quad \vartheta(w|\frac{O_x}{A})$$

$\vartheta(w|\frac{O_x}{A})$ est un O_x-module. On a $\vartheta(1|\frac{O_x}{A}) = \vartheta_1(\frac{O_x}{A})$. Ici on a supposé que K a le degré de transcendence 1 sur A , mais tout se généralise aux degrés plus grands. Alors je définis :

w est (arithmétiquement) entier si et si seulement si $\vartheta(w|\frac{O_x}{A}) \subset O_x$.

En désignant par

$\tilde{\Omega}_X$ le faisceau des différentielles entières dans ce sens et

$\tilde{\Omega}_K$ le faisceau constant avec la fibre $\Omega^1_{K/A}$ et

$\varphi : \Omega_X \to \tilde{\Omega}_K$ l'homomorphisme canonique, j'ai un théorème de comparaison [2] :

Soit X propre sur $\mathbb{Z}$ et régulier. Alors, il existe $c \in \mathbb{N}$ avec

$$\Gamma(X,\varphi(\Omega_X)) \subset D(K) \subset \Gamma(X,\tilde{\Omega}_X) = D(\frac{K}{\mathfrak{F}}) \subset c^{-1}\ \Gamma(X,\varphi(\Omega_X)) .$$

On peut en plus essayer de comparer ces faisceaux avec le faisceau dualisant ω_X de Serre-Grothendieck :

Pour $A = k$ un corps, et X étant intersection complète, on obtient

$$\tilde{\Omega}_X = \omega_X .$$

C'est un corollaire simple à la version de Kunz [8] , [9] du faisceau dualisant. Kunz utilise un module complémentaire généralisé pour définir une notion de différentielle holomorphe. Ainsi la comparaison est réduite à une comparaison des différentes de Kähler (avec indice 0) et de Dedekind. Dans le cas particulier des intersections complètes, on a l'égalité de ces différentes et ainsi l'égalité des faisceaux. Mais j'espère obtenir ici des résultats plus généraux.

V

Les preuves des résultats concernant les corps de fonctions modulaires se ramènent à l'étude des anneaux de valuation de ces corps, c'est-à-dire à la description de ces anneaux de valuation et de certaines fermetures intégrales dans K_N^o et K_N et de leurs modules différentiels (considérés comme sous-modules de $\Omega^1_{K/A}$) par des séries de Fourier.

Par exemple, pour vérifier

$$D(\frac{K_N}{\mathfrak{o}_N}) \subset \mathrm{Diff}_{\mathfrak{o}_N} K_N$$

on remarque que

$K_N = k_N(J(\omega)\,,J(N\omega)\,,f_{(\frac{1}{N},0)}(\omega))$ avec $f_{(\mu,\nu)}(\omega)$ la "fonction de Fricke" (voir [10]).

Par conséquent on a l'injection

$$K_N \hookrightarrow \tilde{K}_N = \mathrm{Quot}\,\mathfrak{A}\,,\ \mathfrak{A} = \mathfrak{o}_N[[q_N]]\ .$$

Il faut montrer que

$$w = gdh \in SdS \quad \text{pour tout} \quad A \subset S \subset K$$

entraîne que w a le développement $w = F(q_N)dq_N$ avec $F \in \mathfrak{A}$. Mais parce que $\mathfrak{A}$ est intégralement clos, cela équivaut à ce que $F(q_N)$ soit élément de $\tilde{S}$ pour tout anneau de valuation $\tilde{S}$ de $\tilde{K}$ qui est une localisation $\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}$ de $\mathfrak{A}$.

Comme $\tilde{S} \cap K_N = K_N$ ou

$= S$ anneau de valuation de K_N, dont on peut s'assurer qu'il est essentiellement de type fini sur $\mathfrak{o}_N$, on peut déduire de l'hypothèse $w = gdh \in SdS$ que $g,h \in S$ et par conséquent $F \in \tilde{S}$, ce qui donne le résultat désiré.

D'autres preuves s'obtiennent par des moyens plus subtils. Par exemple, pour prouver l'égalité

$$\mathrm{BdB} = \left\{ w \in \Omega^1_{K_N} \,\middle|\, \begin{array}{l} w \text{ holomorphe dans le demi-plan } H \text{ et} \\ w = F(q_N)dq_N \text{ avec } F(q_N) \in \mathcal{O}'_N[[q_N]][\frac{1}{q_N}] \end{array} \right\}$$

$(B$ = fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[\frac{1}{N},J]$ dans $K_N)$

on s'appuie sur un lemme d'Igusa [6] , qui dit que la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}[J]_{(p)}$ dans K^o_N est un anneau de valuation non ramifié. Ce lemme est équivalent au principe de q_N-développement (voir [4]). En plus, on utilise les fonctions thêta fondamentales et les intégrales de troisième espèce de Hecke.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BERNDT.- Über Differentialintegritäten endlich erzeugbarer Körper. Math. Ann. 212 249-275 (1975).

[2] R. BERNDT.- Arithmetisch ganze Differentiale. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. A paraître.

[3] R. BERNDT, K. SCHRAMM.- Arithmetisch ganze Differentiale der Modulfunktionenkörper 6 und 7 Stufe. Acta arithmetica 33. A paraître.

[4] P. DELIGNE, M. RAPOPORT.- Les Schémas de modules de courbes elliptiques. Springer Lecture Notes 349 (1973).

[5] V.G. DRINFELD.- Elliptic Modules. Math. USSR Sbornik 23 561-592 (1974).

[6] J. IGUSA.- Kroneckerian Model of Fields of Elliptic Modular Functions. Am. J. of Math. 81 561-577 (1959).

[7] E. KÄHLER.- Geometria aritmetica. Ann. di Matematica XLV (1958).

[8] E. KUNZ.- Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten I. Manuscripta math. 15 91-108 (1975).

[9] E. KUNZ.- Teil II. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. A paraître.

[10] S. LANG.- Elliptic Functions. Addison-Wesley, London (1973).

[11] A. NÉRON.- Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Publ. Math. I.H.E.S. nº 21 (1964).

Rolf BERNDT
Mathematisches Seminar der
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2 HAMBURG 13