Astérisque

M. R. HERMAN

Sur les mesures invariantes

Astérisque, tome 40 (1976), p. 103-104

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__40__103_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 40 (1976) p.103-104

SUR LES MESURES INVARIANTES

M. R. Herman

Construction d'un homéomorphisme PL du cercle

On se donne $\lambda > 1$.

Soit f l'homéomorphisme PL de $[0,1]$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x & 0 \leq x \leq a \\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda}(x-1) + 1 & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec $$\lambda a = \frac{1}{\lambda}(a-1) + 1.$$

On définit $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x+n) = \tilde{f}(x) + n \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [0,1] .$$

Soit pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'homéomorphisme PL

$$\tilde{f}_b(x) = \tilde{f}(x) + b \qquad x \in R .$$

Soit $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Par passage au quotient de $\tilde{f}_b$ on a l'homéomorphisme PL de T^1 f_b .

Remarquons que f_b et f_b^{-1} laissent invariant l'ensemble des ensembles de Haar nulle sur T^1 .

Nombre de rotation de f_b

On montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\tilde{f}_b^{on}(0)}{n} = \rho(\tilde{f}_b)$ existe et dépend continuement de b , de plus on a $\rho(\tilde{f}_{b+1}) = \rho(\tilde{f}_b) + 1$.

On pose $\rho(f_b) = \rho(\tilde{f}_b) \bmod(1)$.

Soit b tel que $\rho(f_b) = \alpha \in T^1 - Q/\mathbb{Z}$, alors on a le :

Théorème.

1) f_b *est topologiquement conjugué sur* T^1 *à la translation* $R_\alpha : x \to x+\alpha$.

2) f_b *n'a pas de mesure* σ *finie (non nulle) invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Haar.*

On trouvera la démonstration dans M.R. Herman "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations". La partie 1) est le théorème de A. Denjoy.
Le premier exemple de 2) (non continue) à été donné par D. Ornstein, puis un exemple a été donné par A. Brunel.

Remarque:

Si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f_b alors μ est étrangère à la mesure de Haar; de plus, si on écrit $f_b = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, on a $\underset{\text{p.p.}}{Dh} = \underset{\text{p.p.}}{Dh^{-1}} = 0$.

Problème:

Est-ce que f_b est ergodique par rapport à la mesure de Haar m au sens suivant : si A est m-mesurable et si $f_b(A)=A$ p.p., alors $m(A) = 0$ ou 1 ?

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91120 Palaiseau