Astérisque

MAX FONTET

Automorphismes de graphes et planarité

Astérisque, tome 38-39 (1976), p. 73-90
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__38-39__73_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 38-39 (1976) p.73-90

AUTOMORPHISMES DE GRAPHES ET PLANARITÉ

par

Max FONTET

1.- INTRODUCTION

Le problème du test d'isomorphie de deux graphes occupe une place importante parmi les problèmes algorithmiques traitant des graphes. C'est un des rares problèmes ouverts dont on ne sait s'il appartient ou non à la classe des problèmes NP-complets [11].

Les seuls résultats qui existent à l'heure actuelle concernent les graphes planaires. On sait que le problème est polynômial dans ce cas [7] ; il est même possible de donner un algorithme le résolvant en temps et place linéaires [6,9].

Dans cet article, nous démontrons d'une part que le problème du test d'isomorphie de deux multigraphes étiquetés se réduit au sens de Karp [11] au problème du test d'isomorphie de deux graphes simples, et d'autre part que ce problème se réduit lui-même au calcul de la partition d'automorphisme d'un graphe simple. Enfin, nous présentons les principaux résultats relatifs au cas des graphes planaires, en insistant sur les liens existant entre le groupe d'automorphismes d'un graphe et ses représentations sur une surface de genre minimum [10].

2.- DÉFINITIONS - NOTATIONS

2.1.- Un multigraphe G peut être assimilé à la donnée d'un quadruplet $(V,L,\mathcal{E},\mu)$ où V est un ensemble de sommets, L un ensemble d'étiquettes, $\mathcal{E} \subseteq V \times V \times L$ l'ensemble des types d'arcs et μ une application de $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des entiers positifs non nuls $N-\{0\}$ qui affecte à chaque type d'arc un ordre de multiplicité. Ainsi $(x,y,\ell)\mu = p$ indique qu'il y a p arcs de ce type. On note (x,y,ℓ,i), pour, $1 \leqslant i \leqslant p$, chacun de ces arcs et E l'ensemble des arcs.

Cette notion correspond à celle de "labeled pseudodigraph" introduite par Harary. La notion de p-graphe de Berge correspond au cas où L est formé d'un seul élément.

Un multigraphe G est dit étiqueté ssi il existe une application de l'ensemble de ses sommets dans un ensemble P d'étiquettes.

Un graphe est de ce fait un multigraphe pour lequel $L = \{\ell\}$ et $\mu(x,y,\ell) = 1 \quad \forall\, x,y \in V, \ \forall\, \ell \in L$. Un graphe sera noté (V,A) où A est l'ensemble de ses arcs.

2.2.- A chaque élément ℓ de L, on associe une relation binaire $R_\ell \subseteq V \times V$ définie par $x R_\ell y$ ssi $(x,y,\ell) \in \mathcal{E}$. La relation $R = \bigcup_{\ell \in L} R_\ell$ est la relation binaire sous-jacente au multigraphe G. On note $\overline{G} = (V,R)$ le graphe sous-jacent au multigraphe G défini par la relation R.

Le multigraphe G est dit symétrique ssi R est une relation symétrique. Il est dit sans boucles ssi R ne coupe pas la diagonale de $V \times V$.

Un graphe est dit simple ssi il est symétrique et sans boucle.

On considère un tel graphe comme un graphe non orienté en remplaçant tout couple d'arcs (x,y) et (y,x) par une arête $[x,y]$.

2.3.- Un isomorphisme d'un multigraphe $G = (V,L,\mathcal{E},\mu)$ sur un multigraphe $G' = (V',L',\mathcal{E}',\mu')$ est une bijection φ de V sur V' telle que :

i) $(x,y,\ell) \in \mathcal{E}$ ssi $(x\varphi, y\varphi, \ell) \in \mathcal{E}'$.

ii) $(x,y,\ell)\mu = (x\varphi, y\varphi, \ell)\mu$.

Tout isomorphisme d'un multigraphe sur lui-même est un <u>automorphisme</u>. L'ensemble des automorphismes d'un multigraphe G forme un groupe noté Aut(G).

2.4.- <u>Quelques notations</u> : On note S_n , A_n respectivement le groupe symétrique et le groupe alterné de degré n, C_n le groupe cyclique d'ordre n et D_n le groupe dihédral d'ordre 2n.

Etant donné l'ensemble $[n] = \{0,1,\ldots,n\}$ $\forall_n \in \mathbb{N}$, on note $I_{[n]}$ l'application identique de $[n]$ dans lui-même.

On dit qu'une fonction g(t) est O(f(t)) ssi il existe une constante C telle que $g(t) \leqslant Cf(t)$.

3. <u>QUELQUES PROPRIÉTÉS DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN GRAPHE SIMPLE</u>

Les graphes étudiés dans ce paragraphe sont tous des graphes simples.

3.1.- Le groupe d'automorphismes d'un graphe G = (X,A) se définit soit comme un groupe (Aut(G),X) opérant sur les sommets, soit comme un groupe $(\widetilde{\mathrm{Aut}}(G),A)$ opérant sur les arêtes.

Ces deux façons de définir le groupe d'automorphismes d'un graphe donnent presque toujours le même groupe abstrait :

<u>PROPOSITION</u>.- Etant donné un graphe G ayant au plus une composante connexe réduite à un sommet et aucune composante réduite à une arête, il existe un isomorphisme μ de Aut(G) sur $\widetilde{\mathrm{Aut}}(G)$.

Par simplification, nous désignerons(Aut(G),X) par Aut(G) et $(\widetilde{\mathrm{Aut}}(G),A)$ par $\widetilde{\mathrm{Aut}}(G)$.

3.2.- Les orbites du groupe Aut(G) (resp. $\widetilde{\mathrm{Aut}}(G)$) définissent une partition des sommets (resp. arêtes) appelée partition d'automorphisme du graphe G vis-à-vis des sommets (resp. arêtes).

Toute partition des sommets d'un graphe connexe plus grossière que la partition d'automorphisme vérifie la propriété suivante :

PROPOSITION.- Si $P = (P_1, \dots, P_p)$ est une partition des sommets d'un graphe simple connexe G plus grossière que la partition d'automorphisme, les sous-graphes G_i de G engendrés par les sommets des différentes classes de la partition P sont tels que :

$$\mathrm{Aut}(G) \subseteq \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Aut}(G_i) .$$

3.3.- On rappelle que deux groupes de permutations $(\mathcal{G}, X)$ et $(\mathcal{G}', X')$ sont équivalents - on note $(\mathcal{G}, X) \equiv (\mathcal{G}', X')$ - ssi il existe un isomorphisme φ du groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe $\mathcal{G}'$ et une bijection η de l'ensemble X sur l'ensemble X' tels que :

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, g \in \mathcal{G} \qquad x g \eta = \eta(g \varphi) .$$

3.3.1.- Ainsi par exemple :

PROPOSITION.- Si G et G' sont deux graphes connexes disjoints non isomorphes le groupe $\mathrm{Aut}(G \cup G')$ est équivalent au produit direct des deux groupes $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G')$.

3.3.2.- Notant nG le graphe formé par n copies disjointes d'un graphe connexe G, on peut énoncer :

PROPOSITION.- Le groupe d'automorphismes du graphe nG est équivalent au produit en couronne du groupe d'automorphismes du graphe G par le groupe symétrique S_n :

$$\mathrm{Aut}(nG) \equiv \mathrm{Aut}(G) \wr S_n .$$

3.3.3.- Si $G = \bigcup_{i=1}^{p} n_i G_i$ est la décomposition du graphe en composantes connexes contenant n_i composantes isomorphes au graphe $G_i (1 \leqslant i \leqslant p)$, le groupe d'automorphismes du graphe G est caractérisé par :

PROPOSITION.- Tout graphe simple G admettant la décomposition en composantes connexes $G = \bigcup_{i=1}^{p} n_i G_i$ a un groupe d'automorphismes équivalent au groupe $\prod_{i=1}^{p} \mathrm{Aut}(G_i) \wr S_{n_i}$.

4.- RÉDUCTION DU TEST D'ISOMORPHIE DE DEUX MULTIGRAPHES ÉTIQUETÉS AU TEST D'ISOMORPHIE DE DEUX GRAPHES SIMPLES

Dans ce paragraphe, nous donnons une construction qui associe à tout multigraphe étiqueté G ayant n sommets et m arcs, un graphe simple $\hat{G}$ ayant $O(n+m)$ sommets et $O(n+m)$ arêtes de telle sorte que $G \simeq G'$ ssi $\hat{G} \simeq \hat{G}'$.

4.1.- Soit le graphe R_n, appelé roue à n rayons, défini par :

$$R_n = ([n], U_n) \qquad n \geqslant 3,$$

où $[i,j] \in U_n$ ssi

$$\begin{array}{ll} j = i+1 & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ j = n & i = 1 \\ j = 0 & 1 \leqslant i \leqslant n. \end{array}$$

4.1.1.- On vérifie aisément que :

LEMME.- Le graphe R_n a son groupe d'automorphismes isomorphe à un groupe A_4 si $n = 3$, et au groupe D_n si $n \geqslant 4$.

4.1.2.- On construit à partir du graphe R_{n+3} le graphe W_n en supprimant l'arête $[0, n+3]$ et en ajoutant l'arête $[n+1, n+3]$.

LEMME.- Le groupe d'automorphismes du graphe W_n est trivial si $n \geqslant 3$, isomorphe au groupe C_2 si $n = 2$ et isomorphe au groupe $C_2 \times C_2$ si $n = 1$.

Preuve.- En effet, si $n \geqslant 3$, tout automorphisme de W_n doit fixer à la fois le sommet $n+3$, seul sommet de degré 4, et le sommet 0, seul sommet de degré $n+2$. De ce fait, tout automorphisme doit échanger les sommets 1 et n, ce qui est impossible : le sommet n est le seul des deux sommets qui soit voisin du sommet $n+2$ qui est fixé par l'automorphisme. Le groupe d'automorphismes de W_n est donc trivial dans ce cas.

Si $n = 2$, tout automorphisme doit laisser les classes de la partition $(\{0,5\},\{1,4\},\{2,3\})$ invariantes. Le sommet 0 ne pouvant être fixé par un automorphisme non trivial, le seul automorphisme possible est l'automorphisme (05) (14) (23). Le groupe d'automorphismes de W_2 est donc isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2.

Si $n = 1$, tout automorphisme doit laisser les classes de la partition $(\{0\},\{1,3\},\{2,4\})$ invariantes. On vérifie alors que les permutations (0)(1)(3)(24) et (0)(13)(2)(4) sont des automorphismes de W_1. le groupe d'automorphismes de W_1 est donc isomorphe au produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2.

4.2.- Etant donné un graphe simple G ayant n sommets ($n \geqslant 3$) et une partition $P = (P_1,\dots,P_p)$ de ses sommets, on note G_P le graphe connexe obtenu à partir du graphe $G \cup W_n$ en ajoutant les arêtes $[x,i]$ ssi $x \in P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

Etant donné une partition P des sommets d'un graphe G plus grossière que la partition d'automorphisme, on note $\mathrm{Aut}(G)_P$ le sous-groupe de Aut(G) fixant les classes de la partition P.

<u>PROPOSITION</u> .- Soient G un graphe simple ayant n sommets ($n \geqslant 3$) et P une partition de ses sommets plus grossière que la partition d'automorphisme, le groupe d'automorphismes du graphe G_P est tel que :

$$\mathrm{Aut}(G_P) \equiv \mathrm{Aut}(G)_P \times I_{[n]} .$$

<u>Preuve</u>.- Le sommet 0 de W_n doit être fixé par tout automorphisme de G_P. En effet, si la partition P du graphe $G = (X,R)$ n'est pas une partition du type $(\{x\},X - \{x\})$, le sommet 0 est le seul sommet de degré $n + 2$. Si $P = (\{x\},X - \{x\})$, le sommet 2 de W_n est aussi de degré $n + 2$, mais à la différence du sommet 0 les voisins du sommet 2 ne sont pas sur un cycle élémen -

taire ; il ne peut donc pas exister d'automorphisme échangeant ces deux sommets.

Les sommets de G_P se répartissent suivant leur distance par rapport au sommet 0 comme suit : les sommets de W_n différents de 0 en sont à distance 1 et les sommets de G en sont à distance 2. Tout automorphisme laisse donc les classes de la partition $(\{0\},\{1,\dots,n\},X)$ invariantes.

On a donc $\mathrm{Aut}(G_P) \subseteq \mathrm{Aut}(G) \times I_{[n]}$ (Proposition 3.2 et lemme 4.1.2).

La trivialité du groupe d'automorphismes de W_n et la présence des arêtes $[x,i]$ ssi $x \in P_i$ dans G_P permettent de conclure que les seuls automorphismes de G engendrant un automorphisme de G_P sont ceux qui laissent les classes de la partition P invariantes. On vérifie alors aisément que tout automorphisme du groupe $\mathrm{Aut}(G)_P$ induit un automorphisme de G_P. On a donc bien :

$$\mathrm{Aut}(G_P) \equiv \mathrm{Aut}(G)_P \times I_{[n]}.$$

4.3.- Toute partition $\tilde{Q}$ des arêtes d'un graphe simple induit une partition Q des sommets du graphe : deux sommets x et y sont dans une même classe modulo Q ssi il existe une bijection de l'ensemble des arêtes contenant x sur l'ensemble des arêtes contenant y laissant les classes de la partition $\tilde{Q}$ invariantes.

On déduit immédiatement de cette définition et de la proposition 4.2 :

<u>PROPOSITION</u>.- Soient G un graphe simple ayant au plus une composante connexe réduite à un sommet et aucune composante réduite à une arête et $\tilde{Q}$ une partition de ses arêtes plus grossière que la partition d'automorphisme, alors $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathrm{Aut}}(G)_{\tilde{Q}}$ ssi $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)_Q$, φ et $\tilde{\varphi}$ étant deux automorphismes se correspondant dans l'isomorphisme canonique de Aut(G) sur $\widetilde{\mathrm{Aut}}(G)$.

4.4.- PROPOSITION.- Etant donné un multigraphe étiqueté G d'ensemble de sommets X et d'ensemble d'arêtes A, il existe un graphe simple $\hat{G}$= (X,E) et une application f de X dans un ensemble d'étiquettes I, tels que le groupe Aut(G) soit équivalent au sous-groupe de Aut($\hat{G}$) laissant les classes de l'équivalence d'application de f invariantes.

Preuve.- Le graphe $\hat{G}$ est le graphe simple obtenu par symétrisation et suppression des boucles du graphe $\overline{G}$ sous-jacent au multigraphe G.

La structure du multigraphe G est codée dans le graphe $\hat{G}$ par un étiquetage convenable.

Deux arêtes [x,y] et [x',y'] ont même étiquette ssi il existe une bijection de l'ensemble des arcs (x,y) (resp. (y,x)) sur l'ensemble des arcs (x',y') (resp. (y',x')) respectant le type des arcs et leur ordre de multiplicité.

Cet étiquetage définit une partition $\tilde{Q}$ des arêtes du graphe symétrisé de $\overline{G}$. On considère la partition Q des sommets associée à $\tilde{Q}$ définie en 4.3.

L'étiquette des sommets de $\hat{G}$ est alors définie comme suit : deux sommets x et y ont la même étiquette ssi ils ont la même étiquette dans G et s'ils sont dans la même classe modulo Q.

Il reste maintenant à vérifier la propriété recherchée pour les automorphismes de $\hat{G}$ vis-à-vis de l'étiquetage des sommets.

La proposition 4.3 permet de faire cette vérification

les composantes connexes de $\hat{G}$ réduites à un sommet ou à une arête étant traitées directement. L'étiquetage des arêtes de ce graphe reflétant fidèlement la structure des arcs du multigraphe G, on a donc la propriété cherchée.

4.5.- Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents se résument dans le théorème suivant :

THÉORÈME.- Tout algorithme testant l'isomorphie de deux graphes simples ayant n sommets et m arêtes en temps $O(f(n+m))$ et en place $O(g(n+m))$ permet de tester l'isomorphie de deux multigraphes étiquetés ayant n sommets et m arcs en temps $O(f(n+m))$ et en place $O(g(n+m))$.

Preuve.- Ce théorème est un corollaire immédiat de la proposition 4.2 via la proposition 4.4. Les graphes obtenus par les procédés de construction définis dans ces propositions ont un nombre de sommets et d'arêtes borné par une fonction linéaire de la somme du nombre de sommets et arcs des multigraphes étudiés.

Tout algorithme testant l'isomorphie de deux graphes simples demandant au moins un temps et une place qui sont des fonctions linéaires du nombre de sommets et d'arêtes des graphes, le résultat de complexité énoncé dans le théorème est donc vérifié.

Corollaire.- Le problème du test d'isomorphie de deux multigraphes étiquetés se réduit, au sens de Karp [11] au problème du test d'isomorphie de deux graphes simples.

5.- RÉDUCTION DU TEST D'ISOMORPHIE DE DEUX GRAPHES SIMPLES AU CALCUL DES ORBITES DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN GRAPHE SIMPLE

Nous montrons dans ce paragraphe que, d'une part on peut prouver l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes G_1 et G_2 à partir de la donnée des orbites $G_1 \cup G_2$ et que d'autre part, si les deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes, on peut construire un isomorphisme en utilisant uniquement un algorithme calculant les orbites du groupe d'automorphismes d'un graphe.

5.1.- Remarque préliminaire.- Nous supposons que les deux graphes simples dont nous avons à tester l'isomorphie sont disjoints. Il est toujours possible de se ramener à ce cas par la construction suivante : on construit une copie de chacun des deux graphes sur des ensembles disjoints ; on étiquette les sommets et les arêtes correspondant à l'intersection des deux graphes initiaux ; enfin, la construction utilisée pour établir le théorème 4.5 permet d'avoir de nouveau deux graphes simples non étiquetés.

5.2.- On suppose que les orbites du groupe $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ ont été calculées auparavant par un algorithme. On se propose de déduire de cette partition des sommets du graphe $G_1 \cup G_2$ l'existence ou non d'un isomorphisme entre les deux graphes G_1 et G_2.

5.2.1.- <u>PROPOSITION</u>.- Deux graphes connexes disjoints G_1 et G_2 sont isomorphes ssi il existe une orbite du groupe $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ contenant un sommet de chacun des deux graphes.

<u>Preuve</u>.- Les propositions 3.3.1 et 3.3.3 montrent que le groupe $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ est équivalent soit au groupe $\mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2)$ si G_1 et G_2 sont non isomorphes, soit au groupe $\mathrm{Aut}(G_1) \wr S_2$ si G_1 et G_2 sont isomorphes. On déduit immédiatement de cette caractérisation de $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ la propriété cherchée.

5.2.2.- <u>PROPOSITION</u>.- Deux graphes disjoints G_1 et G_2 sont isomorphes ssi chaque orbite du groupe $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ coupe autant de composantes connexes de G_1 que de composantes connexes de G_2.

<u>Preuve</u>.- D'une part, $\bigcup_{i=1}^{q} n_i H_i$ étant la décomposition en composantes connexes isomorphes du graphe $H = G_1 \cup G_2$, la proposition 3.3.3 affirme que $\mathrm{Aut}(H) \equiv \prod_{i=1}^{q} \mathrm{Aut}(H_i) \wr S_{n_i}$.

D'autre part, les graphes G_1 et G_2 ayant les décompositions en composantes connexes $G_1 = \bigcup_{i=0}^{p_1} G_1^{(i)}$ et $G_2 = \bigcup_{i=0}^{p_2} G_2^{(i)}$, il faut et il suffit qu'il existe une bijection η de $[p_1]$ sur $[p_2]$ telle que $G_2^{(i\eta)} \simeq G_1^{(i)}$ pour que les graphes G_1 et G_2 soient isomorphes. La conjonction de ces deux propriétés donne le résultat attendu .

5.2.3.- On déduit immédiatement de cette proposition un algorithme réalisant le test d'existence d'un isomorphisme entre deux graphes à partir de la donnée des orbites du groupe d'automorphismes du graphe réunion des deux graphes.

PROPOSITION.- Il existe un algorithme testant l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes G_1 et G_2 à partir de la donnée des orbites du groupe $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ en temps et place $O(n)$ où n est le nombre de sommets du graphe $G_1 \cup G_2$;

Preuve.- On suppose qu'un calcul préalable nous a permis de déterminer les composantes connexes de chacun des deux graphes G_1 et G_2.

Ce calcul se fait en temps et place proportionnels au nombre de sommets et d'arêtes de chaque graphe [1].

Les sommets du graphe $G_1 \cup G_2$ étant numérotés de 1 à n, on utilise les tableaux $T,U,V[1 : n]$ donnant pour chaque sommet respectivement le numéro de l'orbite de $\mathrm{Aut}(G_1 \cup G_2)$ le contenant, le numéro du graphe auquel il appartient et le numéro de sa composante connexe.

On ordonne les sommets du graphe suivant les valeurs du triplet $(T[i],U[i],V[i])$à l'aide d'une procédure de tri lexicographique qui opère en temps $O(n)$ [1]. La liste ordonnée des sommets est stockée dans un tableau LIST[1 : n]. La suite du calcul s'effectue alors par la procédure suivante :

```
Procédure TEST (G1,G2,ISO) ;
commentaire : ISO est un booléen égal à vrai s'il existe un isomorphisme
              entre les deux graphes G1 et G2 et à faux sinon ;
début
    i ← 1 ; j ← 0 ; ISO ← vrai
    commentaire m est le nombre d'orbites du groupe
        Aut(G1 ∪ G2) et n le nombre de sommets du
        graphe G1 ∪ G2 ;
    pour j ← j + 1 tant que ISO = vrai et j ⩽ m faire
        début pour k ← 1,2 faire
                début NB ← RES ← 0 ; i ← i - 1 ;
                    pour i ← i + 1 tant que T[LIST[i]] = j et U[LIST[i]]≠k
                                                    et i ⩽ n faire
                    début si V[LIST[i]]≠RES alors début NB ← NB + 1 ;
                                            RES ← V[LIST[i]] fin fin ;
                si k = 1 alors NA ← NB sinon si NA ≠ NB
                alors ISO ← Faux
            fin
        fin
fin de TEST
```

Cette procédure TEST décrit une et une seule fois chaque sommet du graphe $G_1 \cup G_2$; elle opère donc en temps $O(n)$. Son exécution nécessite une mémoire de taille $O(n)$, les tableaux T,U,V,LIST étant tous de dimension n.

5.3.- On suppose maintenant que l'on dispose d'un algorithme calculant les orbites du groupe d'automorphismes d'un graphe ayant n sommets et m arêtes en temps $O(f(n+m))$ et place $O(g(n+m))$. Le théorème 4.5 montre que l'on peut en déduire un autre algorithme effectuant le même calcul pour des graphes étiquetés et ayant les mêmes performances.

Soit ORB(H,PART) une procédure construite à partir de cet algorithme calculant la partition PART des sommets du graphe étiqueté H, définie par les orbites de Aut(H).

Le calcul d'un isomorphisme entre deux graphes isomorphes G_1 et G_2 peut se faire à l'aide de la procédure suivante :

<u>procédure</u> DIS(G_1,G_2,PHI) ;
<u>commentaire</u> PHI est l'isomorphisme entre
les deux graphes G_1 et G_2 calculé par la
procédure ;
<u>début</u>
<u>commentaire</u> n est le nombre de sommets du graphe G_1 (ou de G_2)
Pi est le nombre de classes de la partition $PART_i$,

i ← O ; ORB($G_1 \cup G_2$,$PART_1$)
<u>pour</u> i ← i + 1 <u>tant que</u> <u>Pi</u> ≠ n <u>faire</u>
<u>début</u> choisir un sommet s_1 de G_1 et un sommet
s_2 de G_2 appartenant à une même classe
de $PART_i$ contenant plus de deux sommets ;
étiqueter par i les sommets s_1 et s_2 ;
<u>commentaire</u> on appelle H_i le graphe obtenu ;
ORB(H_i,$PART_{i+1}$)
<u>fin</u>
PHI ← $PART_i$
<u>fin</u> de DIS.

Cette procédure calcule bien un isomorphisme du graphe G_1 sur le graphe G_2 ; en effet, le calcul se termine lorsque chaque classe de $PART_i$ contient un seul sommet de G_1 et un seul sommet de G_2 ; la partition $PART_i$ est à chaque étape la partition d'automorphisme d'un graphe obtenu par étiquetage du graphe $G_1 \cup G_2$.

La procédure ORB est appelée au plus n fois lors de l'exécution de la procédure DIS. Le temps d'exécution de la procédure DIS est donc en O(nf(n+m)) si le temps d'exécution de la procédure ORB est en O(f(n + m)). De même, la procédure DIS utilise O(g(n + m)) mémoires si la procédure ORB en utilise O(g(n + m)).

Ces résultats se résument dans la proposition suivante :

<u>PROPOSITION</u>.- Tout algorithme calculant les orbites du groupe d'automorphis-

mes d'un graphe ayant p sommets et q arêtes en temps $O(f(p+q))$ et place $O(g(p+q)))$ permet de construire un isomorphisme entre deux graphes isomorphes G_1 et G_2 ayant n sommets et m arêtes en temps $O(nf(n+m))$ et place $O(g(n+m))$.

5.4.- Les propositions 5.2.3 et 5.3 admettent comme corollaire immédiat le théorème suivant :

THÉORÈME.- Le problème du test d'isomorphie de deux graphes se réduit au sens de KARP [11] au calcul des orbites du groupe d'automorphismes d'un graphe.

6.- RÉDUCTION DU TEST D'ISOMORPHIE DE DEUX GRAPHES PLANAIRES AU CALCUL D'UNE PARTITION D'IMPRIMITIVITÉ ASSOCIÉE A UNE ÉQUIVALENCE

Nous montrons dans ce paragraphe que le problème du test d'isomorphie de deux graphes planaires est un problème polynômial : il existe des algorithmes effectuant ce test en temps et place linéaires.

Nous ne donnons aucune démonstration des résultats énoncés, la plupart ayant déjà été publiés.

6.1.- Le théorème 5.4 étant applicable aux graphes planaires, nous nous intéressons donc uniquement au calcul de la partition d'automorphisme d'un graphe planaire. En fait, il est possible de se restreindre à la classe des graphes planaires 3-connexes, graphes dont tout ensemble disconnectant de sommets est au moins de cardinalité 3.

PROPOSITION.- La partition d'automorphisme d'un graphe planaire est reconstructible en temps linéaire à partir de la partition d'automorphisme de l'union disjointe de ses composantes 3-connexes.

6.2.- Les graphes planaires 3-connexes ont la particularité d'être entièrement caractérisés par leur représentation sur la sphère orientée.

<u>THÉORÈME</u> : (Whitney [12])- <u>Tout graphe planaire 3-connexe admet une représentation unique sur une sphère orientée</u>.

On déduit immédiatement de ce résultat que le calcul de la partition d'automorphisme d'un graphe planaire 3-connexe se réduit au calcul de la partition d'automorphisme d'une de ses représentations sur la sphère. Il est donc essentiel d'avoir une caractérisation des représentations d'un graphe sur une surface qui soit entièrement combinatoire. La notion de carte combinatoire introduite par JACQUES [10] et CORI [2] à la suite des travaux d'EDMONDS [3] permet de caractériser les représentations d'un graphe sur une surface de façon intrinsèque.

Une carte C est un triplet (B,α,σ) formé d'un ensemble B dont les éléments sont appelés <u>brins</u> et d'un couple de permutations (α,σ) du groupe symétrique agissant sur B, tel que α soit une involution sans point fixe. Une carte est dite connexe ssi le groupe de permutations engendré par α et σ est transitif.

On appelle <u>isomorphisme</u> d'une carte $C=(B,\alpha,\sigma)$ sur une carte $C'=(B',\alpha',\sigma')$ une bijection φ de B sur B' telle que :

$$\forall\, b \in B \quad b\alpha\varphi = b\varphi\alpha \quad \text{et} \quad b\sigma\varphi = b\varphi\sigma.$$

On appelle <u>automorphisme</u> tout isomorphisme d'une carte sur elle-même.

La partition d'automorphisme d'une carte planaire 3-connexe se construit à partir de l'équivalence d'indiscernabilité I_C : à tout brin b d'une carte C, on associe le triplet d'entiers (t,u,v) où t(resp. u,v) est la longueur du cycle de σ (resp. $\sigma\alpha$, $\alpha\sigma$) contenant b ; l'équivalence I_C est définie par :

$$b\, I_C\, b' \Leftrightarrow (t,u,v) = (t',u',v').$$

<u>PROPOSITION</u> [4,8].- La partition d'automorphisme d'une carte planaire

3-connexe $C = (B, \alpha, \sigma)$ est égale à la partition stable sous l'action du groupe engendré par les permutations α et σ la plus grossière contenue dans l'équivalence d'indiscernabilité.

La calcul de la partition d'automorphisme d'une carte planaire 3-connexe se réduit donc au calcul d'une partition d'imprimitivité associée à une équivalence.

6.3.- Etant donné une famille de k applications $f_1, \ldots, f_k$ d'un ensemble fini E de cardinalité n dans lui-même et une partition P de l'ensemble E, le calcul de la partition Q stable sous l'action des applications f_i la plus grossière contenue dans P peut se faire par la procédure suivante :

```
procédure RAF(P,f_1,...,f_k,Q) ;
début
commentaire on note #_i x le numéro de la classe
            de P_i contenant le point x, et p_i le
            nombre de classes de la partition P_i ;
i ← 0 ; p_o ← 1 ; P_1 ← P ;
pour i ← i + 1 tant que p_i ≠ p_{i-1} faire
     début ordonner lexicographiquement les
           points de E suivant le k+1-uplet
           (#_i x, #_i f_i(x),..., #_i f_k(x)) ;
           construire la partition P_{i+1} dont les
           classes sont formées par les points ayant
           le même k+1-uplet
     fin
Q ← P_i
fin de RAF ;
```

Cette procédure effectue le calcul de la partition Q à partir de la partition P en temps $O(kn^2)$.

Les réductions successives du problème du test d'isomorphie de deux graphes planaires permettent de déduire de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME [7].- Le problème du test d'isomorphie de deux graphes planaires est polynômial.

6.4.- Ce résultat admet un certain nombre de prolongements algorithmiques. L'utilisation de l'algorithme de Hopcroft de minimisation d'un automate fini [1] au lieu de la procédure RAF permet de tester l'isomorphie de deux graphes planaires en temps $O(n \log_2 n)$ où n est le nombre de sommets communs des deux graphes.

Une investigation plus fine des propriétés des graphes planaires permet d'obtenir des algorithmes linéaires tel l'algorithme de Hopcroft et Wong [9] qui opère une réduction simultanée des deux graphes ou l'algorithme que nous avons élaboré [6] qui utilise certaines propriétés spécifiques des cartes planaires 3-connexes.

7.- CONCLUSION

Les résultats présentés dans cet article mettent en évidence les liens profonds entre le groupe d'automorphismes d'un graphe et ses représentations sur une surface de genre minimum. Il nous semble impossible d'envisager une solution du problème du test d'isomorphie de deux graphes quelconques tant qu'il n'y aura aucun résultat sur les représentations minimales des graphes.

*
* *

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHO A.V , J.F. HOPCROFT, D.D ULLMANN : The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison-Wesley, 1974.

[2] CORI R. : Un code pour les graphes planaires et ses applications, Thèse, Paris, 1973.

[3] EDMONDS J.R : A combinatorial representation for oriented polyhedral surfaces M.A. Thesis University of Maryland USA, 1960.

[4] FONTET M. : Test d'isomorphie d'hypergraphes planaires 2 n d Professionnal conference on Automata Theory and Formal Languages (Kaiserslautern).Lecture notes in Computer Sciences 33, 93-98 (1975).

[5] FONTET M. : Test d'isomorphie de deux graphes planaires, Actes des Journées Informatique et Combinatoire, Bordeaux 1975.

[6] FONTET M. : A linear algorithm for testing isomorphism of planar graphs Third International Colloquim on Automata Languages and Programming,Edimburgh, juillet 1976.

[7] HOPCROFT J.F., R.E. TARJAN : Isomorphism of planar graphs in Complexity of Computer Computations R.E. Miller and J.W. Thatcher Eds Plenum Press, New-York, 131-152 (1972).

[8] HOPCROFT J.F, R.E. TARJAN : A V log V algorithm for isomorphism of triconnected planar graphs J. Comput. Syst. Sci. 7 , 323-331, (1973).

[9] HOPCROFT J.F, J.K WONG : A linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (Preliminary Report) 6th ACM SIGACT, 1974.

[10] JACQUES A. : Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques, Thèse Paris, 1969.

[11] KARP R.M : Réducibility among combinatorial problems in Complexity of Computer Computations R.E. Miller and J.W. Thatcher Eds Plenum Press, New-York, 85-103, (1972).

[12] WHITNEY H. : A set of topological invariants for graphs, Amer.J. Maths. 55, 231-235 (1933).

Max FONTET
Institut de Programmation
Université de Paris VI
4 place Jussieu
75005 PARIS