Astérisque

GÉRARD LAUMON

Homologie étale

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 163-188

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__163_0>

HOMOLOGIE ÉTALE

par Gérard LAUMON

0. Rappels.

(0.1) Image à supports propres.

(0.1.1) Soit k un corps algébriquement clos. Soient X et Y deux k-schémas de type fini et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. D'après Nagata, il existe une compactification

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où $\bar{X}$ est un k-schéma de type fini, $\bar{f}$ est propre et i est une immersion ouverte.

Soient Λ un anneau de torsion et $i_!$ le foncteur "prolongement par zéro" de $D(X,\Lambda)$ dans $D(\bar{X},\Lambda)$. Alors le foncteur composé :

$$Rf_! = R\bar{f}_* \; i_! : D(X,\Lambda) \longrightarrow D(Y,\Lambda)$$

ne dépend pas de la compactification de f choisie.

Si $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme canonique, on pose pour tout $F \in \mathrm{Mod}(X,\Lambda)$

$$H_c^q(X,F) = \mathcal{H}^q(Rf_! F) \quad .$$

(0.1.2) Propriétés de $Rf_!$.

(a) commute au changement de base.

(b) commute à la composition.

(c) si les fibres de f sont de $\dim \leqslant d$, alors $R^i f_! F = 0$ pour tout $F \in \mathrm{Mod}(X,\Lambda)$ et $i > 2d$.

(d) si $F \in \mathrm{Mod}(X,\Lambda)$ est constructible, il en est de même de $Rf_! F$.

(0.2) Morphisme trace.

Soit $p = \mathrm{car}(k)$, supposons que la torsion de Λ est première à p . Considérons les triples (f,d,F) tels que

(i) $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme entre k-schémas de type fini.

(ii) $F \in \mathrm{Mod}(Y,\Lambda)$ et d est un entier.

(iii) il existe un ouvert U de X tel que $f_{|U} : U \longrightarrow Y$ soit plat, de présentation finie à fibres de dimension $\leq d$ et tel que les fibres de $f_{|X-U} : X-U \longrightarrow Y$ soient de dimensions $< d$.

THÉORÈME (0.2.1).- A tout triple (f,d,F) ci-dessus, on peut associer d'une façon et d'une seule un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : R^{2d}f_!f^*F(d) \longrightarrow F$$

tel que :

(Var 1) il soit fonctoriel en F .

(Var 2) il commute au changement de base.

(Var 3) il soit compatible à la composition.

(Var 4) (I) Si f est fini, localement libre de rang n et si $d = 0$, alors le morphisme composé

$$F \longrightarrow f_*f^*F = f_!f^*F \xrightarrow{\mathrm{Tr}_f} F$$

est la multiplication par n .

(II) Si K est un corps algébriquement clos de car p , si f est une courbe $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ et si $d = 1$, alors le morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : H^2_c(X,\Lambda(1)) \longrightarrow \Lambda$$

s'obtient de la façon suivante : soit $\bar{X}$ une courbe complète sur K contenant X_{red} comme ouvert dense, soit I l'ensemble des composantes irréductibles de X (ou $\bar{X}$) , pour tout $i \in I$, soient η_i le point générique de la composante irréductible i et $n_i = \lg(\mathcal{O}_{X,\eta_i})$. Alors si on identifie $H^2_c(X,\Lambda(1))$ à Λ^I par les isomorphismes

$$H^2_c(X,\Lambda(1)) \simeq H^2_c(X_{red},\Lambda(1)) \simeq H^2(\bar{X},\Lambda(1)) \simeq \Lambda^I$$

<u>le morphisme trace n'est autre que le morphisme</u>

$$t : \Lambda^I \longrightarrow \Lambda$$

<u>donné par</u> $t((a_i)) = \Sigma a_i n_i$.

(0.3) <u>Image inverse extraordinaire.</u>

THÉORÈME (0.3.1).- <u>Sous les hypothèses de</u> (0.2), <u>le foncteur</u>

$$Rf_! : D(X,\Lambda) \longrightarrow D(Y,\Lambda)$$

<u>admet un adjoint à droite partiel</u>

$$Rf^! : D^+(Y,\Lambda) \longrightarrow D^+(X,\Lambda)$$

<u>i.e. pour</u> $K \in D(X,\Lambda)$, $L \in D^+(Y,\Lambda)$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Hom}(Rf_!K,L) \simeq \mathrm{Hom}(K,Rf^!L)$$

<u>ceci fonctoriellement en</u> K <u>et</u> L .

(0.3.2) <u>Propriétés de</u> $Rf^!$.

(a) <u>Si</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>est une immersion fermée, alors</u> $Rf^! = R\Gamma_X$ <u>où</u> Γ_X est le foncteur "faisceau des germes de sections à support dans X ".

(b) Si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse de dimension relative d , alors $Rf_!$ admet pour adjoint à droite le foncteur

$$K \longmapsto f^*K(d)[2d]$$

avec pour flèche d'adjonction le morphisme trace (dualité de Poincaré).

(c) Si F est un faisceau de Λ-modules constructibles, $Rf^!F$ est à cohomologie bornée constructible (exposé 7).

<u>Remarque</u> (0.3.3).- On notera $D^c(X,\mathbb{Z}_\ell)$ la catégorielle des complexes constructibles de $\mathbb{Z}_\ell$- faisceaux. Tout ce qui a été dit auparavant s'étend à ces catégories (voir SGA 5) puisqu'on a les théorèmes de finitude pour $Rf_!$ et $Rf^!$.

1. Complexe dualisant.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p , soit ℓ un nombre premier $\neq p$.

DÉFINITION (1.1).- *Soit $\pi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ un k-schéma de type fini, on appelle complexe dualisant et on note $\mathcal{T}_X$, le complexe constructible de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux* $R\pi^! \mathbb{Z}_\ell \in D^c(X,\mathbb{Z}_\ell)$.

THEOREME (1.2).- (Deligne) - *Si on note $D_X(\cdot)$ le foncteur $R\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{T}_X)$ de $D^c(X,\mathbb{Z}_\ell)$ dans elle-même, alors le morphisme naturel*

$$\mathrm{Id} \longrightarrow D_X \circ D_X$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE (1.2.1).- *Soit x un point géométrique de X . Soient $V(x)$ l'hensélisé strict de X en x , $\{x\}$ l'image de x dans X et $\{\bar{x}\}$ son adhérence. Alors si $\delta = \dim\{\bar{x}\}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{T}_{X,x} \simeq R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_\ell),\mathbb{Z}_\ell)\,[2\delta](\delta)$$

et donc on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{q+2\delta+1}_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_\ell)\,,\,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \mathcal{H}_q\mathcal{T}_{X,x}(-\delta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^{q+2\delta}_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_\ell),\mathbb{Z}_\ell) \to 0$$

En effet $R\Gamma_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_\ell)$ est la fibre en x de $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}},\mathbb{Z}_\ell)$ où $\mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}}$ est le faisceau caractéristique de $\{\bar{x}\}$ dans X . Or $\mathbb{Z}_\ell \simeq R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_X,\mathcal{T}_X)$, donc $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}},\mathbb{Z}_\ell)$ est la fibre en x de

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}},R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_X,\mathcal{T}_X)) \simeq R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_X \otimes \mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}}\,,\,R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_{\ell,\{x\}},\mathcal{T}_X)\ .$$

Or $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_{\ell,\{\bar{x}\}}\,,\,\mathcal{T}_X) = \mathcal{T}_{\{\bar{x}\}}$ et donc on a un isomorphisme.

$$R\Gamma_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_e) \simeq R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_X \otimes \mathbb{Z}_{e,\{\bar{x}\}}, \mathcal{T}_{\{\bar{x}\}})_x \ .$$

Mais au voisinage de x, point générique de $\{\bar{x}\}$, $\mathcal{T}_{\{\bar{x}\}}$ est isomorphe à $\mu_e^{\otimes \delta}[2\delta]$ (car $\{\bar{x}\}$ est lisse au voisinage de x) ; d'autre part la cohomologie de $\mathcal{T}_X \otimes \mathbb{Z}_{e,\{\bar{x}\}}$ est localement constante au voisinage de x dans $\{\bar{x}\}$. Donc

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_X \otimes \mathbb{Z}_{e,\{\bar{x}\}}, \mathcal{T}_{\{\bar{x}\}})_x = R\,\mathrm{Hom}((\mathcal{T}_X \otimes \mathbb{Z}_{e,\{\bar{x}\}})_x, \mathcal{T}_{\{\bar{x}\},x})$$

d'où

$$R\Gamma_{\{x\}}(V(x),\mathbb{Z}_e) \simeq R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_{X,x},\mathbb{Z}_e)(\delta)[2\delta]$$

d'où par bidualité l'isomorphisme cherché.

(1.3) On en déduit les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \tau_q \longrightarrow \mathcal{H}_q\mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{L}_q \longrightarrow 0$$

où τ_q et $\mathcal{L}_q$ sont les faisceaux associés aux préfaisceaux suivants :

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}(H_c^{q+1}(U,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e)$$

et

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}(H_c^{q}(U,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e)$$

$q = 2d$, $\tau_{2d} = 0$, donc

$$\mathcal{H}_{2d}\mathcal{T}_X = \mathcal{L}_{2d} \ .$$

De plus si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, on a la suite spectrale de localisation

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{|\underline{i}| = p+1} H_c^q(U_{\underline{i}},\mathbb{Z}_e) \Longrightarrow H_c^{-p+q}(X,\mathbb{Z}_e)$$

où $\underline{i} = (i_o,\dots,i_k)$, $|\underline{i}| = k$ et $U_{\underline{i}} = U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

D'où la suite exacte :

$$\prod_{i,j} H_c^{2d}(U_i \cap U_j, \mathbb{Z}_e) \rightrightarrows \prod_i H_c^{2d}(U_i,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H^{2d}(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0$$

et par dualité la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_c^{2d}(X,\mathbb{Z}_e)^{\vee} \longrightarrow \prod_i H_c^{2d}(U_i,\mathbb{Z}_e)^{\vee} \rightrightarrows \prod_{i,j} H_c^{2d}(U_i \cap U_j, \mathbb{Z}_e)$$

donc $U \longmapsto \mathrm{Hom}(H_c^{2d}(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e)$ est déjà un faisceau et pour $U \subset X$ ouvert

$$\mathcal{H}_{2d}\mathcal{T}_X(U) = \mathrm{Hom}(H_c^{2d}(U,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e) .$$

PROPOSITION (1.4).- <u>Supposons</u> $\dim X = d$, <u>soient</u> $(C_i)_{i\in I}$ <u>les composantes irréductibles de dimension</u> d <u>de la normalisée de</u> X_{red} <u>et</u> $p_i : C_i \longrightarrow X$ <u>les projections canoniques. Alors le faisceau</u> $\mathcal{H}_q\mathcal{T}_X$ <u>est canoniquement isomorphe à</u> $\bigoplus_{i\in I} p_{i*}\mu_e^{\otimes d}$.

En effet si $U \subset X$ est un ouvert tel que U_{red} soit lisse et équidimensionnel de dim d , alors par dualité de Poincaré sur U ,

$$\mathrm{Hom}(H_c^{2d}(U,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e) \simeq \bigoplus_{\pi_0(U)} \mu_e^{\otimes d} .$$

Si $V \subset U \subset X$ sont deux ouverts de X tels que $\dim(U - V) < d$, on a pour des raisons de dimensions

$$H_c^{2d}(U,\mathbb{Z}_e) = H_c^{2d}(V,\mathbb{Z}_e) .$$

D'où clairement la conclusion.

PROPOSITION (1.5).- <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme entre schémas de type fini sur</u> k <u>et</u> $K \in D^b(Y,\mathbb{Z}_e)$ <u>supposée constructible. On a alors un isomorphisme canonique</u>

$$D_X f^* D_Y K \xrightarrow{\sim} Rf^! K .$$

Soit en effet $L \in D(X,\mathbb{Z}_e)$, on a $\mathrm{Hom}(L, D_X(f^*D_YK)) = \mathrm{Hom}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_YK, \mathcal{T}_X)$

or par définition de l'image inverse extraordinaire

$$\mathrm{Hom}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_YK, R\pi_X^!\mathbb{Z}_e) = \mathrm{Hom}(R\pi_{X!}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_YK),\mathbb{Z}_e)$$

mais

$$R\pi_{X!}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_YK) = R\pi_{Y!} \circ Rf_!(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_YK)$$

et donc par formule de projection

$$R\pi_{X!}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} f^*D_Y K) = R\pi_{Y!}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K)$$

par suite

$$\mathrm{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \mathrm{Hom}(R\pi_{Y!}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K), \mathbb{Z}_e)$$

et donc par dualité absolue sur Y

$$\mathrm{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \mathrm{Hom}(Rf_! L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D_Y K, \mathcal{T}_Y)$$

d'où par définition de D_Y et bidualité sur Y

$$\mathrm{Hom}(L, D_X f^* D_Y K) = \mathrm{Hom}(Rf_! L, D_Y(D_Y K)) = \mathrm{Hom}(Rf_! L, K)$$

ce qui démontre la proposition par unicité de l'adjoint.

2. Homologie.

DÉFINITION (2.1).- *Soit* X *un* k-*schéma de type fini* (k *algébriquement clos*). *On appelle homologie localement finie de* X *à valeurs dans* $\mathbb{Z}_e$, *le groupe gradué* $H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e) = \mathbb{H}^\circ(X,\mathcal{T}_X)$. *On a donc* $H_i(X,\mathbb{Z}_e) = \mathbb{H}^{-i}(X,\mathcal{T}_X)$.

PROPOSITION (2.2).- (i) *les* $H_i(X,\mathbb{Z}_e)$ *sont des* $\mathbb{Z}_e$-*modules de type fini.*

(ii) *On a un isomorphisme*

$$H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e) = H_\bullet R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e)$$

et, par suite, on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}(H_c^{i+1}(X,\mathbb{Z}_e)),\mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_i(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^i(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0$$

pour tout i.

(i) résulte du théorème de finitude de Deligne.

D'autre part $R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e) = R\pi_!\mathbb{Z}_e$ si $\pi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme canonique, donc par dualité :

$$R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e) = R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_e,\mathcal{T}_X)$$

d'où (ii) car

$$\begin{aligned} R\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_e,\mathcal{T}_X) &= R\Gamma(X,R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_e,\mathcal{T}_X)) \\ &= R\Gamma(X,\mathcal{T}_X) . \end{aligned}$$

(2.3) On déduit de (ii), par bidualité le résultat suivant

$$R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e) = R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma(X,\mathcal{T}_X),\mathbb{Z}_e)$$

donc les suites exactes pour tout i :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}(H_i(X,\mathbb{Z}_e)),\mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_c^{i+1}(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_{i+1}(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e) \longrightarrow 0 .$$

Par suite on a deux accouplements

① $$H_i(X,\mathbb{Z}_e) \otimes H_c^i(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow \mathbb{Z}_e$$

② $$\mathcal{T}ors(H_i(X,\mathbb{Z}_e)) \otimes \mathcal{T}ors(H_c^{i+1}(X,\mathbb{Z}_e)) \longrightarrow \mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e .$$

Le premier est parfait modulo torsion. Le second est parfait. On les note respectivement

$$(\alpha,\beta) \longmapsto \int_\alpha \beta$$

et

$$(\alpha,\beta) \longmapsto \mathrm{Tors}(\alpha,\beta) \quad .$$

On déduit du premier accouplement et du cup-produit :

$$\cup : R\Gamma(X,\mathbb{Z}_e) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e)$$

une structure de module de $H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$ sur l'anneau (pour le cup-produit) $H^\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$. Pour $\alpha \in H^\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$ et $\gamma \in H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$, on notera $\alpha \cap \gamma$ cette structure de module. On a par définition

$$\int_{\alpha\cap\gamma} \beta = \int_\gamma \alpha \cup \beta$$

pour tout $\beta \in H_c^\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$.

PROPOSITION (2.4).- <u>Si</u> $\dim X = d$, <u>on a</u> :

(i) $H_i(X,\mathbb{Z}_e) = 0$ <u>pour</u> $i < 0$ et $i > 2d$.

(ii) $H_o(X,\mathbb{Z}_e)$ <u>est le</u> $\mathbb{Z}_e$ <u>-module libre engendré par les composantes connexes propres de</u> X .

(iii) $H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d)$ <u>est le</u> $\mathbb{Z}_e$<u>-module libre engendré par les composantes irréductibles de dimension</u> d <u>de</u> X .

Comme $\mathrm{Tor}(H_c^o(X,\mathbb{Z}_e)) = 0$, on a $H_i(X,\mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_c^i(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e)$ pour $i < 0$, or $H_c^i(X,\mathbb{Z}_e) = 0$ pour $i < 0$, donc $H_i(X,\mathbb{Z}_e) = 0$ pour $i < 0$. Pour $i > 2d$, on a $H_c^i(X,\mathbb{Z}_e) = 0$, donc $H_i(X,\mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_c^i(X,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e)$ est aussi nul d'où (i) .

On a la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Tors}(H_c^1(X,\mathbb{Z}_e)),\mathbb{Q}_e/\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_o(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_c^o(X,\mathbb{Z}_e)^\vee \longrightarrow 0$$

donc pour montrer (ii), il suffit de voir que $\mathrm{Tors}(H_c^1(X,\mathbb{Z}_e)) = 0$. Or soit $\bar{X}$ un k-schéma propre contenant X comme ouvert, alors on a la suite exacte

$$H^o(\bar{X} - X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_c^1(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H^1(\bar{X},\mathbb{Z}_e)$$

comme H^0 est sans torsion, il suffit de voir que $H^1(\bar{X},\mathbb{Z}_e)$ est sans torsion, ce qui est bien connu.

Enfin, si $(C_i)_{i\in I}$ sont les composantes irréductibles de dimension d de la normalisée de X_{red} , on a vu que

$$\mathcal{H}_{2d}\mathcal{T}_X = \bigoplus_{i\in I} p_{i_*}\mu_e^{\otimes d}$$

où $p_i : C_i \longrightarrow X$ sont les projections canoniques, donc

$$H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d) = \bigoplus_{i\in I} \Gamma(C_i,\mathbb{Z}_e)$$

d'où (iii).

3. Classe fondamentale.

(3.0) Soit X un schéma de type fini de dimension d sur un corps algébriquement clos.

Soit $(C_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de dimension d de la normalisée de X_{red} . Soit $p_i : C_i \longrightarrow X$ la projection canonique et soit n_i la multiplicité générique de C_i dans X .

On a alors

$$H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d) = \bigoplus_{i\in I} \Gamma(C_i,\mathbb{Z}_e)$$

on a donc un élément canonique $[X]_h$ de $H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d)$ en posant

$$[X]_h = \sum_{i\in I} n_i 1_{C_i} .$$

DÉFINITION (3.1). $[X]_h$ est appelé la classe fondamentale de X .

PROPOSITION (3.2).- Si X est lisse, de dimension d , et équidimensionnel, alors $H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e)(-d)$ est le $H^\bullet(X,\mathbb{Z}_e)$ -module libre engendré par $[X]_h$.

En effet sous les hypothèses de la proposition $\mathcal{T}_X = \mu_e^{\otimes d}[2d]$, donc

$$H_i(X,\mathbb{Z}_e)(-d) = H^{2d-i}(X,\mathbb{Z}_e)$$

et en particulier

$$H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d) = H^0(X,\mathbb{Z}_e)$$

l'élément $[X]_h$ correspondant à 1_X .

Le cup-produit

$$H^j(X,\mathbb{Z}_e) \otimes H_{2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d) \longrightarrow H_{2d-j}(X,\mathbb{Z}_e)(-d)$$

se réinterprète alors comme le cup-produit

$$H^j(X,\mathbb{Z}_e) \otimes H^o(X,\mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\cup} H^j(X,\mathbb{Z}_e)$$

et comme $H^j(X,\mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \cup 1_X} H^j(X,\mathbb{Z}_e)$ est un isomorphisme, il en est de même de $H^j(X,\mathbb{Z}_e) \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \cap [X]_h} H_{2d-j}(X,\mathbb{Z}_e)(-d)$ d'où la conclusion.

4. Fonctorialité ordinaire - Kunneth - Formule de projection.

(4.0) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre schémas de type fini sur k algébriquement clos. On a alors un morphisme de complexes

$$R\Gamma_c(f) : R\Gamma_c(Y,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}_e)$$

par dualité, on en déduit un morphisme

$$f^* = H_\bullet(f) : H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_\bullet(Y,\mathbb{Z}_e)$$

qui est fonctoriel en f .

Soient X , Y deux k-schémas de type fini, on a un morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathcal{T}_X \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_{X \times Y} .$$

PROPOSITION (4.1).- C'est un isomorphisme de complexes et on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{r+s=i} H_r(X) \otimes H_s(Y) \longrightarrow H_i(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{r+s=i-1} \mathrm{Tor}(H_r(X),H_s(Y)) \longrightarrow 0$$

PROPOSITION (4.2).- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre k-schémas de type fini, pour tout $\alpha \in H_\bullet(X)$ et $\beta \in H_c^\bullet(Y)$ on a

$$f_*(\alpha \cap f^*\beta) = f_*(\alpha) \cap \beta .$$

En effet si $\alpha \in H_i(X)$, $\beta \in H_c^j(Y)$ alors pour tout $x \in H_c^{i-j}(Y)$, on a

$$\int_{f_*(\alpha \cap f^*\beta)} x = \int_{\alpha \cap f^*\beta} = \int_{\alpha} f^*x \cup f^*\beta$$

or f^* commute au cup-produit, donc

$$\int_{f_*(\alpha\cap f^*\beta)} x = \int_{\alpha} f^*(x \cup \beta) = \int_{f_*\alpha} x \cup \beta = \int_{(f_*\alpha)\cap\beta} x$$

d'où la conclusion.

5. Fonctorialité extraordinaire.

Considérons les couples (f,d) où f est un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ entre schémas de type fini sur un corps k algébriquement clos et où d est un entier tel que f vérifie la propriété :

$(*)_d$: il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $f_{|U}$ soit plat, de présentation finie à fibres de dimension $\leqslant d$ et tel que $f_{|X-U}$ soit à fibres de dimension $< d$.

THÉORÈME (5.1).- On peut associer à tout couple (f,d) ci-dessus un homomorphisme gradué de degré $2d$

$$f^* = H^!_\bullet(f) : H_\bullet(Y) \longrightarrow H_{\bullet + 2d}(X)(-d)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(EXTRA 1) compatibilité à la composition.

(EXTRA 2) changement de base propre.

(EXTRA 3) linéarité par rapport au cup-produit.

(EXTRA 4) Künneth : $(f \times g)^* = f^* \boxtimes g^*$.

(EXTRA 5) Normalisations

(I) Si f est fini localement libre de rang n et si $d = 0$, alors le morphisme composé

$$H_i(Y) \xrightarrow{f^*} H_i(X) \xrightarrow{f_*} H_i(Y)$$

est la multiplication par n.

(II) Si $Y = \mathrm{Spec}(k)$ et si $\dim X = d$, alors

$$f^*(1_Y) = [X]_h \in H_{2d}(X)(-d) .$$

En effet on dispose d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : Rf_!\mathbb{Z}_e(d)[2d] \longrightarrow \mathbb{Z}_e$$

d'où un morphisme

$$\mathrm{Tr}_f \otimes \mathrm{id} : Rf_!\mathbb{Z}_e(d)[2d] \overset{L}{\otimes} \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_Y$$

qui par la formule de projection se récrit

$$\mathrm{Tr}_f \otimes \mathrm{id} : Rf_!f^*\mathcal{T}_Y(d)[2d] \longrightarrow \mathcal{T}_Y$$

et donc par adjonction, fournit un morphisme

$$f^*\mathcal{T}_Y(d)[2d] \longrightarrow Rf^!\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X$$

d'où en passant à la cohomologie, des morphismes :

$$f^* : H_i(Y,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{i+2d}(X,\mathbb{Z}_e)(-d) \quad .$$

Les propriétés (EXTRA) résultant alors des propriétés (VAR) de Tr_f .

En particulier soit $\mathbb{P} \xrightarrow{\pi} X$ un fibré projectif de rang d , on a un morphisme

$$\pi^* : H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{\bullet+2d}(\mathbb{P},\mathbb{Z}_e)(-d)$$

d'où un morphisme

$$H_\bullet(X,\mathbb{Z}_e) \otimes_{H^\bullet(X,\mathbb{Z}_e)} H^\bullet(\mathbb{P},\mathbb{Z}_e) \longrightarrow H_{\bullet+2d}(\mathbb{P},\mathbb{Z}_e)(-d)$$

donné par $\alpha \otimes \beta \longmapsto \pi^*\alpha \cap \beta$.

PROPOSITION (5.2).- Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

Provient par dualité de l'énoncé correspondant en cohomologie.

6. Classe d'homologie associée à un cycle.

Soit X un schéma de type fini sur k algébriquement clos. On pose

$$\tilde{H}_i(X) = H_{2i}(X,\mathbb{Z}_e)(-i)$$

et

$$\tilde{H}_\bullet(X) = \bigoplus_i \tilde{H}_i(X) \ .$$

On note $Z(X)$ le groupe additif des cycles de X .

THÉORÈME (6.1).- Il existe un homomorphisme additif, fonctoriel pour les morphismes propres

$$cl_X : Z_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(X)$$

uniquement déterminé par la propriété : "pour tout X , l'image du cycle fondamental de X est la classe fondamentale".

De plus cl_X commute à la fonctorialité extraordinaire pour les morphismes plats.

1 - Soit en effet $Z \subset X$ un sous-schéma réduit irréductible, par fonctorialité si $i : Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion (qui est propre), on doit avoir

$$(*) \qquad cl_X([Z]) = i_*([Z]_h)$$

où $[Z]_h$ est la classe fondamentale de Z dans $\tilde{H}_\bullet(Z)$ et où $i_* : \tilde{H}_\bullet(Z) \to \tilde{H}_\bullet(X)$.

Ceci montre l'unicité de cl_X .

2 - Définissons donc cl_X par la formule $(*)$ et par additivité. Vérifions la fonctorialité ordinaire : soient $f : X \to Y$ un morphisme propre, $Z \subset X$ un sous-schéma intègre, $f(Z)$ l'image de Z muni de sa structure réduite. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|_Z"'] & X \arrow[d, "f"] \\ f(Z) \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif pour $d = \dim Z$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_d(Z) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_d(X) \\ {\scriptstyle (f_{|Z})_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \tilde{H}_d(f(Z)) & \xrightarrow{j_*} & \tilde{H}_d(Y) \end{array}$$

3 - Si $\dim f(X) < d$, on a $\tilde{H}_d(f(Z)) = 0$ et $f_*([Z]) = 0$ (dans $Z_\bullet(Y)$) donc on a $cl_Y(f_*([Z])) = 0$ et $f_* cl_X([Z]) = f_* \circ i_*([Z]_h) = j_* \circ (f_{|Z})_*([Z]_h) = 0$ donc on a bien dans ce cas $f_* cl_X([Z]) = cl_Y(f_*([Z]))$.

4 - Si $\dim f(Z) = d$ alors on est ramené par fonctorialité à vérifier que $(f_{|Z})_*([Z]_h) = [f_*([Z])]_h$ i.e. on peut supposer X , Y intègres, $\dim X = \dim Y$, $Y = f(X)$ et $Z = X$. Quitte à se restreindre à un ouvert de Y , ce qui ne change par l'homologie de dimension maximale, on peut supposer f fini et plat et il faut alors vérifier que

$$f_*([X]_h) = \deg f. [Y]_h$$

puisque

$$f_*([X]) = \deg f.[f(X)] = \deg f.[Y] \ .$$

Mais on a (EXTRA 5) (I), donc le composé

$$\tilde{H}_d(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}_d(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_d(Y)$$

est la multiplication par $\deg.f$.

Donc $f_*(f^*([Y]_h)) = \deg f.[Y]_h$. Or on a par (EXTRA 5)(II) et (EXTRA 1)

$$(**) \qquad f^*([Y]_h) = [X]_h$$

d'où la conclusion.

5 - Pour la fonctorialité extraordinaire pour les morphismes plats, on se ramène par linéarité à montrer que si Z est un sous-schéma intègre de Y et si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme plat, on a

$$cl_X(f^*[Z]) = f^* cl_Y([Z])$$

or on a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(Z) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|_{f(Z)}^{-1} = g"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, hook, "j"] & Y
\end{tikzcd}$$

Donc par changement de base on a

$$f^*cl_Y([Z]) = f^*i_*[Z]_h = j_*g^*[Z]_h$$

or $g^*[Z]_h = [f^{-1}(Z)]_h$ (c'est la formule (**) ci-dessus) donc

$$f^*cl_Y([Z]) = cl_X(f^*[Z])$$

ce qu'il fallait démontrer (on n'a pas ici à supposer $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$ si on fait la convention $\tilde{H}'_\bullet(\emptyset) = 0$).

<u>Rappel</u> (6.2).- Deux cycles $Z_1, Z_2 \in Z_n(X)$ sont dits algébriquement équivalents s'il existe une courbe lisse connexe C , un cycle $W \in Z_{n+1}(X\times C)$ tel que si $W = \sum_\alpha m_\alpha[W_\alpha]$ où $W_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} X\times C$ est un sous-schéma intègre alors $\pi_\alpha : W_\alpha \longrightarrow C$ restriction de la seconde projection soit plat, et s'il existe deux points fermés $t_1, t_2 \in C$ tels que

$$p_*(\sum_\alpha m_\alpha i_{\alpha *} \pi_\alpha^*([t_i])) = Z_i$$

pour $i = 1,2$ où $p : X \times C \longrightarrow X$ est la première projection.

THÉORÈME (6.3).- <u>Soient</u> $Z_1, Z_2 \in Z_n(X)$ <u>deux cycles algébriquement équivalents</u>. <u>Alors</u> $cl_X(Z_1) = cl_X(Z_2)$.

Par linéarité on peut supposer que $m_\alpha = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$, $m_{\alpha_0} = 1$ et donc $W = [W\alpha_0]$, i.e. on peut supposer que $W \overset{i}{\hookrightarrow} X \times C$ est un sous-schéma intègre. On note π la restriction de la seconde projection à W , par hypothèse $\pi : W \longrightarrow C$ est plate. Quitte à plonger C dans une courbe projective $\bar{C}$ qui contient C comme ouvert dense, à remplacer W par son adhérence $\bar{W}$ dans $X \times \bar{C}$ et à prolonger π en $\bar{\pi} : \bar{W} \longrightarrow \bar{C}$ qui restera plat, on peut supposer C propre/k .

Par fonctorialité ordinaire il suffit de montrer que

$$cl_W(\pi^*[t_1]) = cl_W(\pi^*[t_2]) \quad .$$

Comme π est plat, par fonctorialité extraordinaire

$$cl_W(\pi^*[t_i]) = \pi^* cl_C([t_i])$$

pour $i = 1,2$. Donc il suffit de montrer que $cl_C([t_1]) = cl_C([t_2])$ i.e. par dualité que pour tout

$$\sigma \in H^o(C,\mathbb{Z}_e)$$

on a $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ (C est propre et $H^1(C,\mathbb{Z}_e)$ est sans torsion donc $\tilde{H}_o(C) = \mathrm{Hom}(H^o(C,\mathbb{Z}_e),\mathbb{Z}_e))$ or ceci résulte de la connexité de C .

COROLLAIRE (6.3.1).- <u>Si</u> X <u>est un schéma de type fini</u>

$$cl_X : Z_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(X)$$

<u>se factorise à travers</u> $\Lambda_\bullet(X)$ <u>en une application additive notée encore</u>

$$cl_X : \Lambda_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(X)$$

<u>du groupe de Chow de</u> X <u>dans l'homologie localement finie de</u> X .

<u>Remarque</u> (6.4).- Si X est lisse et équidimensionnelle de dimension d sur k algébriquement clos on a en posant :

$$H^\bullet(X) = H^{2\bullet}(X,\mathbb{Z}_e)(\bullet)$$

l'isomorphisme

$$H^{d-i}(X) \xrightarrow{\ \cap [X]_h\ } \tilde{H}_i(X)$$

donc il existe pour $z \in \Lambda_i(X) = \Lambda^{d-i}(X)$ un unique élément $cl^X(z) \in \tilde{H}^{d-i}(X)$ tel que $cl^X(z) \cap [X]_h = cl_X(z)$. D'où une application classe

$$cl^X : \Lambda^\bullet(X) \longrightarrow H^\bullet(X)$$

quand X est lisse et équidimensionnel de dim d sur k .

7. Intersection.

(7.0) Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps k algébriquement clos. Soit $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble ses classes d'isomorphie des fibrés vectoriels sur X. Pour tout $c \in \mathcal{E}(X)$ et tout $i \in \{1,\dots,\mathrm{rg}\,c\}$, on se donne une indéterminée $C_{c,i}$. On appelle anneau des opérateurs de Chern universel l'anneau quotient

$$\mathbb{Z}[\{C_{c,i} \mid c \in \mathcal{E}(X), 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}\,c\}]/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est l'idéal engendré par les relations classiques que vérifient les classes de Chern. On note cet anneau $\mathrm{Och}^\bullet(X)$, il est gradué si l'on pose degré $(C_{c,i}) = i$.

Soit $H^\bullet(X) = \bigoplus_i H^{2i}(X,\mathbb{Z}_\ell(i))$ la théorie des classes de Chern l-adique fournit un homomorphisme d'anneaux gradués

$$\Phi_X : \mathrm{Och}^\bullet(X) \longrightarrow H^\bullet(X)$$

donné par $\Phi(C_{c,i}) = C_i(E)$ où E est un fibré vectoriel de la classe d'isomorphie c et $C_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z}_\ell(i))$ est sa i-ème classe de Chern (SGA 5).

L'anneau $\mathrm{Och}^\bullet(X)$ opère comme on l'a déjà vu sur $A_\bullet(X)$. D'autre part le cup-produit

$$\cap : H^{2i}(X,\mathbb{Z}_\ell(i)) \otimes H_{2j}(X,\mathbb{Z}_\ell(-j)) \longrightarrow H_{2(j-i)}(X,\mathbb{Z}_\ell(-(j-i)))$$

définit une opération de $\tilde{H}^\bullet(X)$ sur $\tilde{H}_\bullet(X)$.

THÉORÈME (7.1).- <u>L'application</u> $\mathrm{cl}_X : A_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(X)$ <u>est une application Φ-semi-linéaire du</u> $\mathrm{Och}^\bullet(X)$-<u>module</u> $A_\bullet(X)$ <u>dans le</u> $\tilde{H}^\bullet(X)$-<u>module</u> $\tilde{H}_\bullet(X)$.

1 - Par linéarité, on est ramené à vérifier que pour tout fibré E sur X, tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}\,E$ et tout sous-schéma fermé intègre Y de X, on a

$$(*) \qquad \mathrm{cl}_X(C_{c,i} \cdot y) = C_i(E) \cap \mathrm{cl}_X(y)$$

(avec les notations évidentes).

2 - Soit $i : Y \longrightarrow X$ l'inclusion, par les formules de projections pour i, on se ramène au cas $Y = X$ et $y = x$. Soit alors $p : \bar{X} \longrightarrow X$ la normalisation de X, alors de même, les formules de projections pour p permettent de supposer $X = \bar{X}$, i.e. X normal.

3 - Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$, le fibré projectif de E. Alors π^*E possède un quotient L de rang 1. Définissons N par la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

on a alors les formules

$$c_i(\pi^*E) = c_i(N) + c_1(L).c_{i-1}(N)$$

$$C_{\pi^*c,i} = C_{n,i} + C_{c,1}.C_{n,i-}$$

(avec les notations évidentes). Or les morphismes $\pi^* : \tilde{H}_\bullet(X) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(\mathbb{P}(E))$ et $\pi^* : A_\bullet(X) \longrightarrow A_\bullet(\mathbb{P}(E))$ sont injectifs, donc par récurrence sur le rang, on peut se ramener au cas $\operatorname{rg} E = 1$. En écrivant $E = E' \otimes (E'')^\vee$ où E', E'' sont des fibrés sur X de rang 1 ayant des sections, on peut supposer que E a des sections.

4 - Soient U le lieu lisse de X et $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion, comme $\dim(X - U) \leqslant d - 2$, si $d = \dim X$, (X est normal), on n'a que les fonctorialités extraordinaires

$$j^* : A_{d-1}(X) \longrightarrow A_{d-1}(U)$$

et

$$j^* : \tilde{H}_{2d-2}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{2d-2}(U)$$

sont injectives. Par suite, on est ramené au cas $X = U$, i.e. au cas X lisse.

5 - On peut donc supposer X lisse, E fibré de rang 1 sur X ayant une section σ, et on a à montrer

$$cl_X(C_{e,1}.x) = c_1(E) \frown cl_X(x) \quad .$$

Soit W le sous-schéma de X des zéros de σ, on a $C_{c,1}.x = w$, si w est la classe de $[W]$ dans $A_\bullet(X)$. On doit montrer que $cl^X(w) = c_1(E)$ dans $H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$, ce qui résulte de SGA 5.

THÉORÈME (7.2).- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-projectif d'un schéma X de type fini sur k dans un schéma quasi-projectif lisse sur k. Alors pour tout $v \in A_{\bullet}X$ et tout $w \in A^{\bullet}Y$ on a

$$cl_X(w \cdot_f v) = f^* cl^Y(w) \frown cl_X(v)$$

dans $\tilde{H}_{\bullet}(X)$ i.e. l'application

$$cl_X : A_{\bullet}X \longrightarrow \tilde{H}_{\bullet}(X)$$

du $A^{\bullet}Y$-module $A_{\bullet}X$ dans le $\tilde{H}^{\bullet}(X)$-module $\tilde{H}_{\bullet}(X)$ est f^*cl - semi-linéaire où $f^* \, cl^Y : A^{\bullet}Y \xrightarrow{cl^Y} \tilde{H}^{\bullet}(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{H}^{\bullet}(X)$ est le morphisme d'anneaux composé de la classe cohomologique et de la fonctorialité pour f.

COROLLAIRE (7.2.1).- Si X est un schéma quasi-projectif lisse sur k algébriquement clos, l'application

$$cl^X : A^{\bullet}X \longrightarrow \tilde{H}^{\bullet}(X)$$

est un homomorphisme d'anneaux.

(7.2.2) Preuve du théorème.

1 - Par linéarité et par le "moving lemma", on peut supposer que v (resp w) est la classe du cycle associé à un sous-schéma intègre V de dimension p de X (resp W de codimension q de Y) et que V et W sont en bonne position (i.e. que toutes les composantes irréductibles de $V \cap f^{-1}(W)$ sont de dimension $p-q$).

2 - En utilisant la formule de projection pour l'inclusion $V \hookrightarrow X$, on est ramené au cas où $V = X$ et $v = x$ est la classe fondamentale de X dans $A_{\bullet}X$.

3 - On peut alors supposer que f est une immersion. En effet comme f est quasi-projectif, il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_Y = P \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où i est une immersion et π est la projection canonique. Comme i est une immersion fermée, on a par hypothèse

$$cl_X(\pi^* w \cdot_i x) = i^* cl^P(\pi^* w) \cap cl_X(x) \quad .$$

Or $cl^P \circ \pi^* = \pi^* \circ cl^Y$ (en effet comme π est plat, $cl_P \circ \pi^* = \pi^* \circ cl_Y$ donc il suffit de voir que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda^{\bullet} Y \arrow[rr, "cl^Y"] \arrow[dl] \arrow[dd, equal] & & \widetilde{H}^{\bullet}(Y) \arrow[dl, "\pi^*"'] \arrow[dd, "\cap [Y]_h"] \\
\Lambda^{\bullet} P \arrow[rr, "cl^P"] \arrow[dd, equal] & & \widetilde{H}^{\bullet}(P) \arrow[dd, "\cap [P]_h"] & \\
 & \Lambda_{\bullet} Y \arrow[rr, "cl_Y"] \arrow[dl] & & \widetilde{H}_{\bullet}(Y) \arrow[dl, "\pi^*"] \\
\Lambda_{\bullet} P \arrow[rr, "cl_P"] & & \widetilde{H}_{\bullet}(P) &
\end{tikzcd}$$

Ce qui résulte de la forme $\pi^*[Y]_h = [P]_h$).

Par suite :

$$cl_X(w \cdot_f x) = cl_X(\pi^* w \cdot_i x) = f^* cl^Y(w) \cap cl_X(x) \quad .$$

4– On s'est donc ramené à la situation suivante : $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion d'un schéma intègre X dans un schéma lisse quasi-projectif sur k, $W \hookrightarrow Y$ est un sous-schéma intègre fermé en bonne position par rapport à X. On note n la dimension de X, q la codimension de W dans Y, de sorte que $W \cap X$ est de dimension pure $n-q$. On veut montrer dans cette situation la formule

$$cl_X(w \cdot_f x) = f^* cl^Y(w) \cap cl_X(x) \quad .$$

5 – Pour cela on va être amené à se localiser le long de W. Plus précisément

soit $i : W \hookrightarrow Y$ l'inclusion et soit $\mathcal{T}_Y$ le complexe dualisant de Y, $\mathcal{T}_Y = \mathbb{Z}_e[2d](d)$ où $d = \dim Y$ puisque Y est lisse. Le complexe dualisant $\mathcal{T}_W$ de W n'est autre que $Ri^!\mathcal{T}_Y$ par suite

$$H_i(W,\mathbb{Z}_e) = \mathbb{H}^{-i}(W,\mathcal{T}_W) = \mathbb{H}_W^{-i}(Y,\mathcal{T}_Y)$$

donc

$$H_i(W,\mathbb{Z}_e) \cong H_W^{2(d-i)}(Y,\mathbb{Z}_e)(d)$$

et donc

$$\tilde{H}_i(W) \cong \tilde{H}_W^{(d-i)}(Y)$$

où

$$\tilde{H}_W^j(Y) \cong H_W^{2j}(Y,\mathbb{Z}_e)(j) \quad .$$

On a par suite un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_i(W) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \tilde{H}_i(Y) \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\tilde{H}_W^{(d-i)}(Y) \arrow[r, "\alpha"] & \tilde{H}^{d-i}(Y)
\end{tikzcd}$$

où α est l'application canonique, donc comme $cl_Y(w) = i_* cl_W(w)$ il existe un élément canonique $cl_W^Y(w) \in \tilde{H}_W^q(Y)$ tel que $\alpha(cl_W^Y(w)) = cl^Y(w)$, c'est l'image de $cl_W(w)$ par l'isomorphisme $\tilde{H}_{d-q}(W) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_W^q(Y)$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_W^q(Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f^*"'] & \tilde{H}^q(Y) \arrow[d, "f^*"] \\
\tilde{H}_{X\cap W}^q(X) \arrow[r, "\beta"] & \tilde{H}^q(X)
\end{tikzcd}$$

où α et β sont les flèches canoniques, donc on a un élément

$$f^*(cl_W^Y(w)) \in \tilde{H}_{W\cap X}^q(X)$$

tel que

$$\beta(f^*(cl_W^Y(w))) = f^* cl^Y(w) \quad .$$

On peut définir un cup-produit

$$\tilde{H}_{W\cap X}^i(X) \otimes \tilde{H}_j(X) \xrightarrow{\cap} \tilde{H}_{j-i}(X\cap W)$$

et on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}^q_{W\cap X}(X)\otimes \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\ \cap\ } & \tilde{H}_{n-q}(X\cap W) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \beta\otimes \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_*} \\
\tilde{H}^q(X)\otimes \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\ \cap\ } & \tilde{H}_{n-q}(X)
\end{array}$$

Par suite, on est ramené à montrer la formule suivante :

$$(*) \qquad \mathrm{cl}_{X\cap W}(w\cdot_f x) = f^*\mathrm{cl}^Y_W(w)\cap \mathrm{cl}_X(x) \quad .$$

<u>Lemme de localisation</u> (7.2.3).- <u>Soit</u> $U\subset Y$ <u>un ouvert, on notera</u> $X_U = X\cap U$, $W_U = W\cap U$, $f_U : X_U \hookrightarrow U$ <u>la restriction de</u> f , w_U <u>la classe de</u> W_U <u>dans</u> $A^\bullet U$, x_U <u>la classe de</u> X_U <u>dans</u> $A_\bullet X_U$ et $(*)_U$ <u>la formule</u>

$$\mathrm{cl}_{X_U\cap W_U}(w_U\cdot_{f_U} x_U) = f_U^*\mathrm{cl}^U_{W_U}(w_U)\cap \mathrm{cl}_{X_U}(x_U) \quad .$$

<u>Alors la formule</u> $(*)$ <u>est vérifiée si et seulement si la formule</u> $(*)_U$ <u>est vraie pour</u> U <u>parcourant un recouvrement ouvert de</u> Y .

En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Y et pour tout $U\in\mathcal{U}$, $j_U : U \hookrightarrow Y$ l'inclusion. De la suite spectrale de Mayer-Vietoris, on déduit que l'application

$$\tilde{H}_{n-q}(X\cap W) \xrightarrow{\ \prod_{U\in\mathcal{U}} j_U^*\ } \bigoplus_{U\in\mathcal{U}} \tilde{H}_{n-q}(U\cap X\cap W)$$

est injective. Par suite la formule $(*)$ est vérifiée si et seulement si les formules $j_U^*((*)) = (*)_U$ sont vérifiées pour tout $U\in\mathcal{U}$.

6 - Pour montrer la formule $(*)$, on peut supposer que $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée (en effet X est localement fermé, donc l'assertion résulte du lemme de localisation).

7 - Pour démontrer la formule $(*)$, on peut supposer W lisse, localement intersection complète de diviseurs lisses. Pour cela on se ramène à la diagonale. Posons $X' = X\times W$, $Y' = Y\times Y$, $f' = f\times i : X' \hookrightarrow Y'$ où $i : W \hookrightarrow Y$ est l'inclusion, $W' = \Delta_Y$ (où Δ_Y est la diagonale de $Y\times Y$) et soient w'

la classe de W' dans $A^{\bullet}Y'$ et x' la classe de X' dans $A_{\bullet}X'$. Comme Δ_Y est lisse, localement intersection de diviseurs lisses dans $Y \times Y$ (Y est lisse), on doit montrer que la formule

$$(*)' \qquad cl_{X' \cap W'}(w' \cdot_f x') = f'^* cl_{W'}^{Y'}(w') \cap cl_{X'}(x')$$

entraîne la formule $(*)$. On a le lemme suivant

LEMME (7.2.4).- <u>Soient</u> Y <u>un</u> k-<u>schéma lisse quasi-projectif sur</u> k, $Z_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} Y$ <u>un sous-schéma fermé intègre</u> ($\alpha = 1,2$). <u>Alors</u> :

$$i_1^* cl_{Z_2}^Y(z_2) \cap cl_{Z_1}(z_1) = [cl_{Z_1}^Y(z_1) \cup cl_{Z_2}^Y(z_2)] \cap cl_Y(y)$$

$$= i_2^* cl_{Z_1}^Y(z_1) \cap cl_{Z_2}(z_2)$$

<u>où</u> z_α <u>est la classe de</u> Z_α <u>dans</u> $A_{\bullet}Z_\alpha$ <u>et</u> y <u>la classe de</u> Y <u>dans</u> $A_{\bullet}Y$.

Appliquons ce lemme à la situation

$$X' = X \times W \xrightarrow{f'} Y' = Y \times Y \xleftarrow{\delta} \Delta_Y = W'$$

où δ est l'immersion diagonale.

On obtient la relation

$$f'^* cl_{W'}^{Y'}(w') \cap cl_{X'}(x') = \delta^* cl_{X'}^{Y'}(x') \cap cl_{W'}(w')$$

d'où d'après $(*)'$

$$\delta^* cl_{X'}^{Y'}(x') \cap cl_{W'}(w') = cl_{X' \cap W'}(x' \cdot_{f'} w')$$

ceci dans $\tilde{H}_{\bullet}(\Delta_Y) = \tilde{H}_{\bullet}(W')$. Or la première projection induit un isomorphisme $\pi : \Delta_Y \xrightarrow{\sim} Y$. Appliquons π_* à la relation ci-dessus, on obtient

$$\pi_* \delta^* cl_{X \times W}^{Y \times Y}(x \otimes w) \cap cl_Y(y) = cl_{X \cap W}(x \cdot_f w)$$

car π_* commute à la classe homologique et que $\pi_*(x' \cdot_{f'} w') = x \cdot_f w$. Or on a

$$\pi_* \delta^* cl_{X \times W}^{Y \times Y}(x \otimes w) = cl_X^Y(x) \cup cl_W^Y(w)$$

donc on obtient

$$cl_{X \cap W}(x \cdot_f w) = [cl_X^Y(x) \cup cl_W^Y(w)] \cap cl_Y(y)$$

$$= f^* cl_W^Y(w) \cap [cl_X^Y(x) \cap cl_Y(y)]$$

$$= f^* cl_W^Y(w) \cap cl_X(x)$$

ce qui n'est autre que la formule (*) .

8 - En appliquant de nouveau le lemme de localisation on peut supposer W lisse et <u>globalement</u> intersection complète de diviseurs lisses, i.e. qu'il existe une filtration

$$W = W_q \subset W_{q-1} \subset \dots \subset W_o = Y$$

où W_{i+1} est un diviseur lisse dans W_i .

On note alors

$$\begin{array}{ccc} X \cap W_i & \xrightarrow{g_i} & X \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W_i & \xrightarrow{h_i} & Y \end{array}$$

les inclusions.

Supposons que, pour tout i , on ait la formule

$$(*)_i \qquad \mathrm{cl}_{(X\cap W_i)\cap W_{i+1}}(w_{i+} \cdot_{f_i} (w_i \cdot_f x)) = f_i^* \mathrm{cl}^{W_i}_{W_{i+1}}(w_{i+1}) \cap \mathrm{cl}_{X\cap W_i}(w_i \cdot_f x)$$

c'est-à-dire la formule (*) pour l'inclusion $f_i : X \cap W_i \longrightarrow W_i$ et le sous-schéma intègre W_{i+1} de W_i , alors

$$\mathrm{cl}_{X\cap W_{i+1}}(w_{i+1} \cdot_f x) = f_i^* \mathrm{cl}^{W_i}_{W_{i+1}}(w_{i+1}) \cap \mathrm{cl}_{X\cap W_i}(w_i \cdot_f x)$$

et donc

$$\mathrm{cl}_{X\cap W}(w \cdot_f x) = f^*_{q-1} \mathrm{cl}^{W_{q-1}}_{W_q}(w_q) \cap \Big[f^*_{q-2} \mathrm{cl}^{W_{q-2}}_{W_{q-1}}(w_{q-1}) \cap \Big[\dots$$

$$\dots\dots\dots \cap \Big[f^*_o \mathrm{cl}^Y_{W_1}(w_1) \cap \mathrm{cl}_X(x) \Big] \dots \Big] \Big]$$

ce qui n'est autre après avoir regroupé les termes que la formule a démontrés.

9 - Donc il suffit de démontrer $(*)_i$ pour tout i , c'est-à-dire démontrer la formule (*) dans la situation suivante : $f : X \hookrightarrow Y$ est une immersion et $W = D$ est un diviseur lisse de Y . Soit alors $E = \mathcal{O}_Y(D)$, alors si c est la classe d'isomorphie de E , on a $w = d = c_{c,1}$ et $d \cdot_f x = C_{f^*c,1} \cdot x$. Par suite $\mathrm{cl}^Y_D(d) = c_{1,D}(E) \in \tilde{H}^1_D(Y)$

est la classe de Chern à support de E , donc

$$f^*cl_D^Y(d) = C_{1,D\cap X}(f^*E) \in \tilde{H}^1_{D\cap X}(X)$$

est la classe de Chern de f^*E à support. On est ramené à montrer la formule

$$cl_{X\cap D}(C_{f^*c,1}.x) = C_{1,D\cap X}(f^*E)\cap cl_X(x)$$

ce qui est une variante à support du théorème précédent. Ceci achève la démonstration de notre théorème.