Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER

Classe d'homologie associée à un cycle

Astérisque, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki,
exp. nº VI, p. 101-151

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__101_0>

CLASSE D'HOMOLOGIE ASSOCIÉE A UN CYCLE

par Jean-Louis VERDIER

1. Homologie.

1.1. Homologie singulière.

Soient X un espace topologique séparé, Φ une famille de fermés sur X. Notons $S_\bullet^\Phi(X)$ le complexe des chaines singulières localement finies à supports dans Φ [4]. Lorsque Φ est la famille de tous les fermés (resp. des compacts) de X, on pose $S_\bullet^\Phi(X) = S_\bullet(X)$ (resp. $S_\bullet^\Phi(X) = S_\bullet^c(X)$). L'homologie de ce complexe est notée $H_\bullet^\Phi(X)$ et appelée l'homologie singulière à supports dans Φ.

Pour tout sous-espace $Y \hookrightarrow X$, on a une injection canonique $S_\bullet(Y) \hookrightarrow S_\bullet(X)$. On note $\tilde{S}_{\bullet\Phi}$ le faisceau simplicial associé au préfaisceau

$$U \longrightarrow S_\bullet^c(X) S_\bullet^c(X-U) .$$

On a un homomorphisme canonique

$$S_\bullet^\Phi(X) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, \tilde{S}_{\bullet X}) .$$

Il résulte des théorèmes de H. Cartan [4] qu'on a :

THÉORÈME 1.1.1. a) *Le faisceau $\tilde{S}_{\bullet X}$ est homotopiquement fin.*

b) *Pour toute famille Φ, paracompactifiante, l'homomorphisme canonique*

$$S_\bullet^\Phi(X) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, \tilde{S}_{\bullet X})$$

est une équivalence d'homotopie.

Rappelons qu'on dit que X est de Φ-*dimension finie* s'il existe un entier n tel que pour tout faisceau F, tel que $H^i_\Phi(X,F) = 0$ pour $i > n$ (cohomologie des faisceaux).

PROPOSITION 1.1.2.- *Soit X un espace localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute famille paracompactifiante Φ, X est de Φ-dimension* *finie.*

(ii) *Il existe un entier* n *et un recouvrement ouvert* $\mathcal{U}$ *tel que pour tout ouvert* U *, petit d'ordre* $\mathcal{U}$ *,* $H^i_c(U,\mathbb{Z}) = 0$ *pour* $i > n$ (*cohomologie des faisceaux*).

(iii) *Il existe un entier* n *et un recouvrement ouvert* $\mathcal{U}$ *tel que pour tout ouvert* U *, petit d'ordre* $\mathcal{U}$ *et paracompact, on ait* $H^p(U,\mathbb{Z}) = 0$ *pour* $p > n$.

Remarquons que la propriété (ii) ou (iii) est locale sur X et qu'un sous-espace fermé d'un espace de Φ dimension finie est de Φ-dimension finie. Nous renvoyons à [3] pour la démonstration. Un espace qui possède les propriétés de la proposition 1.1.2 est dit de *dimension finie.*

COROLLAIRE 1.1.3.- *Soient* X *un espace topologique,* $U \subset X$ *un ouvert.*

a) *L'homomorphisme canonique*

$$\tilde{S}_{\cdot U} \longrightarrow \tilde{S}_{\cdot X}|U$$

est un quasi-isomorphisme.

b) *Soit* Φ *une famille paracompactifiante de* U *telle que* U *soit de* Φ-*dimension finie. Alors l'homomorphisme canonique*

$$S^{\Phi}_{\cdot}(U) \longrightarrow R\Gamma_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot X})$$

est un quasi-isomorphisme, i.e. *induit des isomorphismes*

$$H^{\Phi}_i(U) \xrightarrow{\sim} H^{-i}_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot X}) \quad \forall i \quad ,$$

où le deuxième groupe est un groupe d'hypercohomologie de complexe de faisceaux.

La fibre en x de $\mathcal{H}_p(\tilde{S}_{\cdot X})$ est $H^c_p(X,X - \{x\}$ qui par excision est isomorphe à $H^c_p(U,U - \{x\})$ d'où a) . On en déduit que l'homomorphisme

$$R\Gamma_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot U}) \longrightarrow R\Gamma_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot X})$$

est un quasi-isomorphisme. Comme $\tilde{S}_{\cdot U}$ est homotopiquement fin (Théorème 1.1.1), l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot U}) \longrightarrow R\Gamma_{\Phi}(U,\tilde{S}_{\cdot U})$ est un quasi-isomorphisme [4] et l'assertion b) résulte alors de 1.1.1, b).

1.2. Complexe dualisant et homologie de Borel-Moore.

Soit X un espace localement compact de dimension finie. On dispose alors d'un complexe dualisant pour les faisceaux abéliens sur X, noté $\mathcal{T}_X$ [10]. C'est le seul complexe tel que

1.2.1. $$R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,F^{\bullet}),\mathbb{Z}) \simeq R\Gamma(X,R\,\underline{\mathrm{Hom}}(F_{\bullet},\mathcal{T}_X))$$

pour tout complexe de faisceaux $F_{\bullet}$ sur X [10]. L'homomorphisme de degré $H_0^c(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ peut s'interpréter comme un morphisme $R\Gamma_c(X,\tilde{S}_{\bullet X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, d'où par l'isomorphisme 1.2.1 un morphisme canonique $\tilde{S}_{\bullet X} \longrightarrow \mathcal{T}_X$.

On dit qu'un espace X possède la propriété :

(HLC) (homologiquement localement connexe) si, pour tout $x \in X$ et tout entier i, les systèmes projectifs $U \longmapsto \tilde{H}_i^c(U)$, U voisinage de x (groupes d'homologie réduite) sont essentiellement nuls.

(HPF) (homologiquement ponctuellement fini) si, pour tout $x \in X$ et tout entier i, $H_i^c(X,X-x)$ est de type fini.

(HDF) (homologiquement de dimension finie) s'il existe un entier n et un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ tel que $H_p^c(U) = 0$ pour $p > n$ et tout ouvert U petit d'ordre $\mathcal{U}$.

THÉORÈME 1.2.2.- Soit X un espace localement compact métrisable qui possède les propriétés HLC, HPF, HDF.

a) L'espace X est de dimension finie.

b) L'homomorphisme canonique $\tilde{S}_{\bullet X} \longrightarrow \mathcal{T}_X$ est un quasi-isomorphisme.

c) L'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow R\,\underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{S}_{\bullet X},\tilde{S}_{\bullet X})$ est un isomorphisme.

Il résulte de la propriété HLC que pour tout ouvert U, $H^p(U,\mathbb{Z})$ (cohomologie des faisceaux) est canoniquement isomorphe à $H^p_{sing}(U)$ (cohomologie singulière) [4]. Il résulte alors de HDF que pour tout ouvert suffisamment petit $H^p(U,\mathbb{Z}) = 0$ pour $p > n$ indépendant de U, d'où a) (1.1.2). On a donc, pour tout ouvert U, en vertu de 1.1.3, un quasi-isomorphisme $S_{\bullet}^c(U) \longrightarrow R\Gamma_c(U,\tilde{S}_{\bullet X})$, d'où un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^p(R\Gamma_c(U,\tilde{S}._X)) \xrightarrow{\sim} H^p_{sing}(U) = H^p(U,\mathbb{Z}) .$$

et en composant avec l'isomorphisme de dualité un isomorphisme

$$H^p(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^p(U,R\ \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{S}._X,\mathcal{T}_X)) \quad .$$

Le faisceau associé à $U \longmapsto H^p(U,\mathbb{Z})$ est nul pour $p \neq 0$ et $\mathbb{Z}$ pour $p = 0$. On a donc un isomorphisme de complexes de faisceaux :

1.2.3. $\quad \mathbb{Z} \longrightarrow R\ \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{S}._X,\mathcal{T}_X)$.

Il résulte des propriétés HLC et HPF que le complexe $\tilde{S}._X$ est cohomologiquement constructible donc isomorphe à son bidual [10]. D'où en dualisant 1.2.3 un isomorphisme canonique

$$\mathcal{T}_X \xrightarrow{\sim} \tilde{S}._X$$

et c) résulte alors de 1.2.3.

A tout espace localement compact X et toute famille de support Φ, on sait associer des groupes $HBM^{\Phi}_p(X)$ (homologie de Borel-Moore) [2]. On dispose d'homomorphisme fonctoriel

1.2.4. $\quad H^{\Phi}_p(X) \longrightarrow HBM^{\Phi}_p(X)$

et, par définition, lorsque X est de dimension finie on a

$$HBM^{\Phi}_p(X) = H^{-p}_{\Phi}(X,\mathcal{T}_X) \quad .$$

COROLLAIRE 1.2.5.- Soit X un espace localement compact métrisable HLC, HPF, HDF . Alors pour tout ouvert U , toute famille Φ paracompactifiante de U , l'homomorphisme canonique

$$H^{\Phi}_p(U) \longrightarrow HBM^{\Phi}_p(U)$$

est un isomorphisme.

1.3. Application aux ensembles sous-analytiques.

Tout espace topologique localement isomorphe à des ouverts de polyèdre de dimension bornée dénombrable à l'infini est métrisable HLC, HPF et HDF . En particulier, tout ensemble sous-analytique réel possède ces propriétés [5].

PROPOSITION 1.3.- Soit X un ensemble sous-analytique. L'homomorphisme canonique

$$H_p^{\Phi}(X) \longrightarrow HBM_p^{\Phi}(X)$$

est un isomorphisme lorsque Φ est une famille paracompactifiante, ou bien lorsque Φ possède la propriété :

(SA) tout fermé de Φ est contenu dans un fermé sous-analytique appartenant à Φ .

Le cas paracompactifiant résulte de 1.2.5, le cas (SA) se déduit, par passage à la limite inductive, du cas où Φ est la famille des fermés contenus dans un ensemble semi-analytique Y . On a alors $H_p^{\Phi}(X) = H_p(Y)$ et $HBM_p^{\Phi}(X) = HBM_p(Y)$ d'où le corollaire d'après ce qui précède.

COROLLAIRE 1.3.1.- Soient X un ensemble semi sous-analytique, $Y \subset X$ un sous-ensemble sous-analytique, Φ une famille paracompactifiante de X ou bien une famille qui possède la propriété (SA). On a une suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_p^{\Phi\cap Y}(Y) \longrightarrow H_p^{\Phi}(X) \longrightarrow H_p^{\Phi\cap X-Y}(X-Y) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}^{\Phi\cap Y}(Y) \longrightarrow \cdots$$

En effet on a une telle suite pour l'homologie de Borel-Moore.

COROLLAIRE 1.2.8.- Soient X un ensemble sous-analytique et Φ une famille paracompactifiante ou bien une famille possédant la propriété (SA). On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{K\in\Phi} \operatorname{Ext}(H_c^{p+1}(K,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \longrightarrow H_p^{\Phi}(X) \longrightarrow \varinjlim_{K\in\Phi} \operatorname{Hom}(H_c^{p}(K,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{p-1}^{c}(X),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_p^{c}(X),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \ .$$

En effet, la première suite exacte est toujours valable pour l'homologie de Borel-Moore [2] et la deuxième est valable pour l'homologie et la cohomologie singulière.

COROLLAIRE 1.2.3.- Soit X un sous-ensemble sous-analytique d'un ensemble sous-analytique compact. Alors les groupes $H_p(X)$, $H_p^c(X)$, $H_c^p(X,\mathbb{Z})$, $H^p(X,\mathbb{Z})$

sont de type fini.

En effet X est homéomorphe au complémentaire d'un sous-polyèdre fermé d'un polyèdre fini.

2. Constructibilité.

2.1. Faisceaux constructibles.

Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique, Λ un anneau commutatif noethérien, F un faisceau sur X de Λ-modules.

DÉFINITION 2.1.1.- On dit que F est analytiquement constructible, s'il existe une suite décroissante de sous-espaces analytiques fermés $\dots \subset X_2 \subset X_1 \subset X_0 = X$ telle que $F|X_i - X_{i-1}$ soit un faisceau de Λ-modules localement constant, de type fini.

Si X est algébrique et si les X_i sont fermés au sens de Zariski, on dit que F est algébriquement constructible.

On dit qu'un complexe de faisceaux est constructible s'il est cohomologiquement borné et si les faisceaux de cohomologie sont constructibles.

Désignons par $\mathrm{Const}(X,\Lambda)$ la catégorie des faisceaux analytiquement constructibles. C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux de Λ-modules, qui possède les propriétés suivantes :

(C_1) Si $u : F' \longrightarrow F$ est un morphisme de faisceaux constructibles alors $\ker u$ et $\operatorname{coker} u$ sont des faisceaux constructibles.

(C_2) La catégorie $\mathrm{Const}(X,\Lambda)$ est une sous-catégorie épaisse (i.e. stable par extension) de la catégorie des faisceaux.

(C_3) Si F et F' sont deux faisceaux constructibles, pour tout i le faisceau $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\Lambda}(F,F')$ est constructible.

(C_4) Pour tout couple $Y_1 \subset Y_2 \subset X$ de sous-espaces analytiques fermés tels que $Y_2 - Y_1$ soit lisse, tout faisceau localement constant sur $Y_2 - Y_1$, à fibre de type fini, prolongé par zéro sur X , est constructible.

(C_5) Soient F un faisceau constructible sur X et $K \subset X$ un compact. Il existe un voisinage ouvert $K \subset V$ et une filtration finie $F_\alpha \subset F|V$ par des sous-faisceaux constructibles sur V telle que les quotients successifs soient du type indiqué dans (C_3).

(C_6) L'image inverse d'un faisceau constructible est constructible.

La vérification de ces propriétés est laissée au lecteur.

2.2. Faisceaux localement constructibles.

THÉORÈME 2.2.1.- *Soient X un espace analytique (resp. une variété algébrique sur $\mathbb{C}$), F un faisceau sur X analytiquement (resp. algébriquement) constructible. Le plus grand ouvert de X sur lequel F est localement constant est dense et son complémentaire est un fermé analytique (resp. algébrique).*

Démontrons d'abord deux lemmes.

LEMME 2.2.2.- *Soient X et $\tilde{X}$ deux espaces topologiques, $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ une application continue propre et surjective, F un faisceau sur X dont les fibres sont des Λ-modules de type fini. Si f^*F est localement constant, F est localement constant.*

Soit $x \in X$. Comme la fibre F_x est un module de type fini sur un anneau noétherien, il existe un voisinage ouvert V de x et un morphisme de faisceau $u : M \longrightarrow F/V$ tel que M soit constant sur V et que u_x soit un isomorphisme. Le morphisme $f^*u : f^*M \longrightarrow f^*F/f^{1}(v)$ est tel que f^*u_y est un isomorphisme pour tout $y \in \tilde{X}$, $f(y) = x$. Comme f^*M et f^*F sont localement constant, l'ensemble des points $y \in f^{-1}(v)$ tels que fu_y soit un isomorphisme, est un ouvert voisinage de $f^{-1}(x)$ et par suite dont l'image est un voisinage W de x Donc u est un isomorphisme sur W et par suite F est localement constant.

LEMME 2.2.3.- *Soient X un espace analytique (resp. algébrique), $U \subset X$ un*

<u>ouvert dont le complémentaire est un fermé analytique</u> (resp. <u>algébrique</u>). <u>Alors les composantes connexes de</u> U <u>sont des ouverts de</u> X <u>dont le complémentaire est un fermé analytique</u> (resp. <u>algébrique</u>).

On peut supposer X réduit. Lorsque X est normal, U est connexe d'où le lemme dans ce cas. Sinon soient $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ le normalisé de X, $(\tilde{X}_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de X, $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}_i$ les composantes connexes de $\pi^{-1}(U)$. Comme les $\tilde{X}_i$ sont des fermés analytiques (resp. algébriques) de $\tilde{X}$, pour tout i, $\tilde{U}_i$ est le complémentaire dans $\tilde{X}_i$ d'un fermé analytique (resp. algébrique) Z_i. Soit V une composante connexe de U. Il existe un sous-ensemble $J \subset I$ tel que $\pi^{-1}(v) = \bigcup_{i\in J} \tilde{U}_i$. Donc V est le complémentaire de

$\bigcup_{i\in J} \pi(Z_i) \cup \bigcup_{i\in I-J} \pi(\tilde{X}_i)$ qui est un fermé analytique (resp. algébrique).

2.2.4. <u>Démonstration du théorème</u> 2.2.1.

On peut supposer que X est réduit. L'assertion est locale sur X pour la topologie ordinaire (resp. de Zariski). On peut donc, quitte à se restreindre à un ouvert de X supposer que $\dim X < +\infty$. On raisonne alors par récurrence sur $\dim X$. Le théorème est vrai lorsque $\dim X = 0$. Il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $Y = X - U$ soit un fermé analytique (resp. algébrique) et que F/U soit localement constant. Soit V le plus grand ouvert sur lequel F est localement constant. On a $U \subset V$ et par suite V est dense. Il s'agit de montrer que $V \cap Y$ est un ouvert de Y dont le complémentaire dans Y est analytique (resp. algébrique).

2.2.5. <u>Cas</u> X <u>lisse,</u> Y <u>diviseur à composantes locales lisses et à croisements normaux</u>.

Comme l'assertion est locale sur X, on se ramène au cas X connexe (dans le cas algébrique les composantes connexes sont des ouverts de Zariski), et par suite U est connexe. Le faisceau localement constant F/U est alors décrit par l'action de $\pi_1(U)$ sur un A-module M. Soit $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$ la décomposition de Y en ses composantes irréductibles globales. A chaque Y_i est associé un élément $g_i \in \pi_1(U)$ défini à conjugaison près. Soit $I_o \subset I$ l'ensemble des $i \in I$ tels que l'action de g_i sur M ne soit pas l'identité. Posons $\bigcup_{i \in I_o} Y_i$. Par ailleurs, par hypothèse de récurrence, il existe un fermé analytique (resp. algébrique) $Z \subset Y$ tel que le complémentaire de Z dans Y soit le plus grand ouvert sur lequel F/Y est localement constant. Posons $W = Y - (Y_o \cup Z)$. On a $V \cap Y \subset W$. Notons $j : U \longrightarrow X$ l'injection canonique et $m : F/Y \longrightarrow j_*(F/U)|Y$ le morphisme canonique. L'ouvert $V \cap Y$ est l'ensemble des points w de W où m_w est un isomorphisme. C'est donc une réunion de composantes connexes de W et par suite, c'est un fermé analytique (resp. algébrique) de Y (2.2.3).

2.2.6. Cas général.

Comme l'assertion est locale sur X, on peut supposer qu'il existe une variété lisse $\tilde{X}$, un morphisme propre et surjectif $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ tel que $f^{-1}(Y)$ soit un diviseur à composantes locales lisses et à croisements normaux. Posons $\tilde{F} = f^*F$. C'est un faisceau constructible sur $\tilde{X}$. Soit $\tilde{Z} \subset \tilde{X}$ le plus petit fermé en dehors duquel $\tilde{F}$ est localement constant. C'est un fermé analytique (resp. algébrique) de $\tilde{X}$. Il est clair que V est contenu dans le complémentaire de $f(\tilde{Z})$. Il résulte de 2.2.2 que V est le complémentaire de $f(\tilde{Z})$. Comme $f(\tilde{Z})$ est analytique (resp. algébrique) le théorème 2.2.1 est démontré.

COROLLAIRE 2.2.7.- <u>Soient</u> X <u>un espace analytique et</u> F <u>un faisceau sur</u> X <u>localement analytiquement constructible</u>. <u>Alors</u> F <u>est analytiquement constructible</u>.

2.3. Image directe d'un faisceau constructible.

THÉORÈME 2.3.1.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques</u> (resp. <u>deux variétés</u>

algébriques sur $\mathbb{C}$), $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, F un faisceau analytiquement (resp. algébriquement) constructible. Alors pour tout entier q, $R^q f_* F$ est un faisceau analytiquement (resp. algébriquement) constructible.

Nous démontrerons d'abord le théorème 2.3.1 dans le cas analytique. On peut supposer que X et Y sont réduits. Démontrons d'abord un lemme. On utilise les hypothèses et notations de 2.3.1.

LEMME 2.3.2.- Pour tout compact $K \subset Y$ et tout entier q, il existe un voisinage ouvert V de K et un ouvert dense $W \subset V$, dont le complémentaire est un fermé analytique de V, tel que $R^q f_* F$ soit localement constant sur W, de fibre de type fini en tout point de W.

Donnons-nous un compact $K \subset Y$. Par dévissage de F sur $f^{-1}(K)$ (2.1, propriété C_5), on voit qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque F est localement constant sur un ouvert lisse U de X à complémentaire analytique, prolongé par zéro sur X. On a alors $R^q f_* F = R^q f'_! F$ où f' désigne la restriction de f à U et $f'_!$ le foncteur image directe à support propre. Quitte à résoudre les singularités de X au voisinage de $f^{-1}(K)$, on peut supposer que le complémentaire D de U dans X est un diviseur à composantes locales lisses et à croisements normaux. Examinons différents cas

2.3.3. Démonstration du lemme 2.3.2 : cas $\dim Y = 0$.

On peut supposer Y réduit à un point. La variété lisse X est compacte et il s'agit de montrer que les $H^q(X,F)$ sont de type fini. On constate immédiatement que le faisceau F possède les propriétés suivantes :

(CC1) Pour tout $x \in X$, la fibre F_x est de type fini.

(CC2) Pour tout $x \in X$, les modules $H^q_{\{x\}}(X,F)$ sont de type fini.

(CC3) Pour tout $x \in X$, les systèmes projectifs $V \longmapsto H^q_c(V,F)$, V voisinage de x, sont essentiellement constants.

En d'autres termes, le faisceau F est cohomologiquement constructible [ ] .

Il résulte alors du théorème de Wilder que les $H^q(X,F)$ sont de type fini (loc. cit.). Pour démontrer 2.3.3, on peut aussi invoquer la triangulabilité de la paire (X,U) [5] ce qui permet dans ce cas d'éviter le recours à la résolution des singularités.

2.3.4. <u>Démonstration du lemme</u> 2.3.2 : <u>cas</u> Y <u>lisse</u>.

Pour tout $x \in X$, notons $n(x)$ le nombre de composantes irréductibles locales de D en x . Posons $R_p = \{x \in X \mid n(x) \geqslant p\}$; c'est un fermé analytique de X , et notons $\tilde{R}_p$ le normalisé de R_p ; c'est une variété lisse. Notons $\tilde{f}_p : \tilde{R}_p \longrightarrow Y$ le morphisme induit par f . C'est un morphisme propre. L'ensemble des points de $\tilde{R}_p$ où la différentielle $d\tilde{f}_p : T_{\tilde{R}_p} \longrightarrow f_p^* T_Y$ n'est pas surjective, est un fermé analytique Z_p de $\tilde{R}_p$. En vertu du théorème de Grauert, $\tilde{f}_p(Z_p)$ est un fermé analytique de Y . Posons $W_p = Y - \tilde{f}_p(Z_p)$. Il résulte du théorème de Sard que W_p est dense. Posons $W = \cap W_p$. C'est un ouvert dense de Y dont le complémentaire est un fermé analytique de Y et pour tout p , $\tilde{f}_p^{-1}(W) \longrightarrow W$ est une submersion. Il résulte alors du théorème d'Ereshmann que l'application induite par $f : U \cap f^{-1}(W) \longrightarrow W$ est une fibration C^∞-localement triviale. Pour tout q et tout $y \in W$ la fibre en y du faisceau $R^q f_* F$ est de type fini (2.3.3). Donc le faisceau $R^q f_* F$ est localement constant sur W , de fibre de type fini en tout point de W .

2.3.5. <u>Démonstration du lemme</u> 2.3.9 : <u>cas général</u>.

Soit $K \subset Y$ un compact. Il existe une variété lisse $\tilde{Y}$, un voisinage ouvert V' de K , un morphisme propre $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow V'$, un ouvert dense $W' \subset V'$, complémentaire d'un fermé analytique de V tel que π induise un isomorphisme de $\pi^{-1}(W')$ sur W' . Notons $\tilde{X}$ le produit fibré $X \times_Y \tilde{Y}$, $\tilde{F}$ l'image inverse de F sur $\tilde{X}$, $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ la deuxième projection. Comme f est propre, on a $\pi^* R^q \tilde{f}_* \tilde{F} = R^q \tilde{f}_* \tilde{F}$. Il existe un voisinage $\tilde{V}$ de $\pi^{-1}(K)$, qu'on peut toujours supposer, quitte à le diminuer, de la forme $\pi^{-1}(V)$ où $V \subset V'$ est un voisinage ouvert de K , et un ouvert dense $\tilde{W}$ de $\tilde{V}$ dont le complémentaire $\tilde{Z}$ est un fermé analytique de $\tilde{V}$ tel que $R^q\tilde{f}_*\tilde{F}$ soit localement constant de fibre de type fini sur $\tilde{W}$. Posons $Z = \pi(\tilde{Z})$. Comme π est propre, Z est un fermé analytique de V dont le complémentaire W'' est un ouvert dense. Posons $W = W' \cap W''$. C'est un ouvert dense de V dont le complémentaire est analytique dans V et tel que R^qf_*F soit localement constant sur W de fibre de type fini en tout point.

2.3.6. Démonstration du théorème 2.3.1 dans le cas analytique.

En vertu de 2.2.7, le théorème est local sur Y. On peut donc supposer que $\dim Y < +\infty$ et on procède alors par récurrence sur $\dim Y$. Le cas $\dim Y = 0$ résulte de 2.3.2. Supposons donc l'assertion démontrée pour $\dim Y < n$. Soit $y \in Y$. Il existe un voisinage V de y et un ouvert dense $W \subset V$ dont le complémentaire Z est analytique dans V, tel que R^qf_*F soit localement constant de fibre de type fini sur W. Si $y \notin Z$, W est un voisinage de y sur lequel R^qf_*F est analytiquement constructible. Si $y \in Z$, le faisceau $R^qf_*F|Z$ est, d'après le théorème de changement de base pour les applications continues et propres et l'hypothèse de recurrence, un faisceau localement analytiquement constructible. Quitte à diminuer V, on peut donc supposer que $R^qf_*F|Z$ est analytiquement constructible. Donc R^qf_*F est analytiquement constructible sur V.

2.4. Démonstration du théorème 2.3.1 dans le cas algébrique.

Dans le cas algébrique, la démonstration est simplifiée par le lemme suivant.

LEMME 2.4.1.- *Soient X une variété algébrique complexe, $U \subset X$ un ouvert de Zariski, F un faisceau sur X tel que F/U et $F/X-U$ soient algébriquement constructibles. Alors F est algébriquement constructible sur X.*

Résulte du fait que les fermés algébriques de U sont des traces sur U de fermés algébriques de X.

La démonstration de 2.3.1 dans le cas algébrique suit de près la démonstration dans le cas analytique. On peut supposer X et Y réduit et on procède par récurrence sur la dimension de Y. Dans le cas $\dim Y = 0$, cela résulte du théorème 2.3.1 dans le cas analytique. Supposons le théorème démontré lorsque $\dim Y < n$. Soit $V \subset Y$ l'ouvert de Zariski des points lisses de Y. En vertu de 2.4.1 et de l'hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $R^q f_* F/V$ est algébriquement constructible. On est donc ramené à démontrer le théorème 2.3.1 lorsque Y est lisse. Par dévissage sur F (2.1 propriété (C_5)), on peut supposer qu'il existe un ouvert de Zariski lisse $U \subset X$ tel que F soit localement constant sur U et nul en dehors de U. Quitte à résoudre les singularités, on peut supposer que le complémentaire de U est un diviseur à composante lisse et à croisements normaux. On poursuit alors la démonstration comme dans 2.3.4.

On peut aussi dans le cas algébrique raisonner par récurrence sur la dimension du support de F, appliquer le lemme de Chow pour se ramener au cas où f est un morphisme projectif, faire des projections successives pour se ramener au cas où la dimension des fibres est $\leqslant 1$, résoudre alors les singularités de la fibre générique ce qui est facile car c'est une courbe et conclure comme dans 2.3.4. On évite ainsi le recours à la résolution des singularités générales.

COROLLAIRE 2.4.2.- <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme de variétés algébriques complexes et</u> F <u>un faisceau algébriquement constructible sur</u> X. <u>Alors pour tout entier</u> q, <u>les</u> $R^q f_* F$ <u>sont algébriquement constructibles</u>.

D'après Nagata, il existe une variété $\tilde{X}$, un morphisme propre $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow Y$, un plongement ouvert $i : X \hookrightarrow \tilde{X}$ tels que $\tilde{f} \circ i = f$. On a alors une suite spectrale $R^q \tilde{f}_* R^q i_* F \Longrightarrow R^{p+q} f_* F$. Il suffit donc, en vertu de 2.2.1, de montrer que les $R^q i_* F$ sont algébriquement constructibles. On peut donc supposer que f est une immersion. On procède alors par récurrence sur la dimension du support de F. Par dévissage sur F (2.1 propriété C_5) on peut supposer que

F est localement constant sur un ouvert de Zariski lisse U de X et, quitte à remplacer Y par l'adhérence de Zariski de X, que f est une immersion ouverte. Supposons d'abord que $U = X$. En résolvant les singularités, on obtient une variété lisse $\tilde{Y}$, un morphisme propre $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$, une immersion ouverte $\tilde{f} : X \longrightarrow \tilde{Y}$ tels que $f = \pi \circ \tilde{f}$ et que $\tilde{Y} - X$ soit un diviseur à composantes lisses et à croisements normaux. La suite spectrale $R^{p+q}f_* \Leftarrow R^p\pi_* R^q\tilde{f}_*$ et 2.2.1 montrent qu'il suffit de faire voir que les $R^q\tilde{f}_*$ sont algébriquement constructibles ce qui est clair. Dans le cas général, notons j l'immersion de U dans X. On a un triangle distingué de complexes de faisceaux sur X :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & Rj_*(F/U) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & (Rj_*F|U)_{X-U} & \end{array}$$

Ces complexes sont algébriquement constructibles d'après ce qui précède. On obtient en appliquant Rf_* un triangle distingué de complexes de faisceaux sur Y :

$$\begin{array}{ccc} Rf_*F & \longrightarrow & R(f\circ j)_*(F/U) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & Rf_*((Rj_*F|U)_{X-U}) & \end{array}$$

D'après ce qui précède, le complexe $R(f\circ j)_*(F/U)$ est algébriquement constructible. Par hypothèse de récurrence $Rf_*((Rj_*F/U)_{X-U})$ est algébriquement constructible. Donc Rf_*F est algébriquement constructible.

2.5. Ext de faisceaux constructibles.

PROPOSITION 2.5.1.- *Soient X un espace analytique (resp. algébrique), F et G deux faisceaux analytiquement (resp. algébriquement) constructibles sur X. Pour tout entier q, le faisceau $\mathcal{E}xt^q(F,G)$ est analytiquement (resp. algé-*

briquement) constructible.

Nous examinerons d'abord différents cas particuliers.

2.5.2. 1er *cas*.- *Il existe un ouvert* $U \subset X$, *dense et lisse complémentaire d'un fermé analytique* (resp. *algébrique*) *tel que* F *soit constant de fibre* A *sur* U , G *localement constant sur* U , *et* F *et* G *nuls en dehors de* U .

Soit $i : U \hookrightarrow X$ l'immersion canonique. On a $\underline{Ext}^q(F,G) = R^q i_*(G/U)$. L'assertion est locale sur X . Quitte à se restreindre à des ouverts de X , on peut supposer qu'il existe une variété lisse $\tilde{X}$, une immersion ouverte $\tilde{i} : U \longrightarrow \tilde{X}$, un morphisme propre $\tilde{\pi} : \tilde{X} \longrightarrow X$ tel que $i = \tilde{\pi} \circ \tilde{i}$ et que $\tilde{X} - U$ soit un diviseur à composantes locales lisses et à croisements normaux. Il est clair que les $R^q\tilde{i}G$ sont constructibles. La suite spectrale

$$R^{p+q} i_* \Leftarrow R^p \tilde{\pi}_* \circ R^q \tilde{i}_*$$

et le théorème 2.3.1 permettent de conclure.

2.5.3. 2e *cas*.- *Il existe un ouvert* U *de* X, *complémentaire d'un fermé analytique* (resp. *algébrique*) *tel que* F *soit constant de fibre* A *sur* U , *nul en dehors de* U .

On procède par récurrence sur la dimension du support Z de G qu'on peut supposer finie, quitte à se localiser sur X . L'assertion est vraie lorsque $\dim Z = 0$. Par dévissage (2.2 propriété C_5) on peut donc supposer que G est localement constant sur un ouvert dense et lisse V de Z complémentaire d'un fermé analytique (resp. algébrique) et nul en dehors de V . Soit $j : Z \longrightarrow X$ l'injection canonique, on a $\underline{Ext}^q(F,G) = j_*\underline{Ext}^q(F/Z, G/Z)$ et par suite, quitte à remplacer X par Z , on peut supposer $Z = X$. Comme $\underline{Ext}^q(F,G)$ ne dépend que de G/U , on peut, quitte à remplacer G par G_U , supposer que $V \subset U$. Notons $\alpha : V \hookrightarrow U$, $\beta : V \hookrightarrow X$, $i : U \hookrightarrow X$ les injections canoniques. On a un triangle distingué de complexes de faisceaux sur X :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr] & & (R\beta_*G)_U \arrow[dl] \\
& H \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

D'après 2.5.2 $(R\beta_*G)_U$ est <u>constructible sur</u> X. Donc H <u>est constructible sur</u> X. Le support de H est $\overline{U-V}$. C'est un fermé analytique (resp. algébrique) de dimension $< \dim X$. Par hypothèse de récurrence, les $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,H)$ sont constructibles. Il suffit donc de montrer que les $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,R\beta_*G)_U)$ sont constructibles. On a $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,(R\beta_*G)_U) = \underline{H}^q(Ri_*(((R\beta_*G)_U)(U))$. De plus $((R\beta_*G)_U)|U = R\alpha_*G$ et $Ri_*(R\alpha_*G) = R\beta_*G$. Donc, d'après 2.5.2, $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,(R\beta_*G)_U)$ $= R^q\beta_*G$ est constructible.

2.5.4. 3e cas.- <u>Le faisceau</u> F <u>est localement constant sur un ouvert</u> U <u>de</u> X, <u>complémentaire d'un fermé analytique</u> (resp. <u>algébrique</u>) <u>et nul en dehors de</u> U.

Soit $i : U \hookrightarrow X$ l'injection canonique. On a une suite spectrale $R^pi_*\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U) \Rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}(F,G)$. Il suffit donc de montrer, en vertu de 2.5.3, que les $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)$ sont des restrictions à U de faisceaux <u>constructibles sur</u> X, où encore que le faisceau $i_!\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)$, obtenu en prolongeant par zéro en dehors de U le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)$, est <u>constructible sur</u> X. Démontrons cela par récurrence sur la dimension d du support Z de G, l'assertion étant triviale lorsque $d = 0$. On peut alors, par dévissage, supposer que G est localement constant sur un ouvert V de Z complémentaire d'un fermé analytique (resp. algébrique) et nul en dehors de V. Notons $\alpha : U \cap Z \hookrightarrow Z$ et $j : Z \longrightarrow X$ les injections canoniques. On a

$$i_!\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U) = j_*\alpha_!\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U\cap Z,G/U\cap Z) \quad ,$$

et par suite, quitte à remplacer Z par X, on peut supposer que $Z = X$, et quitte à remplacer G par G_U ce qui ne change pas sa restriction à U, on peut supposer que $V \subset U$. Il est clair que $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)/V$ est localement constant. Comme F/U est localement constant à fibre de type fini, pour tout $x \in U$ on a $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)_x = \mathrm{Ext}^q(F_x,G_x)$. Par suite $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F/U,G/U)$ est nul en dehors de V . Donc $i_! \underline{Ext}^q(F/U,G/U)$ est localement constant sur V et nul en dehors de V et est par suite constructible sur X .

2.5.5. 4e cas.- Cas général. Par dévissage sur F , on peut supposer qu'il existe un fermé analytique (resp. algébrique) $Y \hookrightarrow X$ et un ouvert W de Y complémentaire d'un fermé analytique (resp. algébrique).

[suite du texte page VI -17]

2.6. Constructibilité du complexe dualisant.

THÉORÈME 2.6.1.- Soient X un espace analytique (resp. une variété algébrique sur $\mathbb{C}$), $\mathcal{T}_X$ le complexe dualisant de X pour les faisceaux abéliens. Alors $\mathcal{T}_X$ est un complexe analytiquement (resp. algébriquement) $\mathbb{Z}$-constructible.

D'après 2.2.1 le problème est local sur X (resp. local pour la topologie de Zariski). On peut donc supposer que X est un sous-espace fermé d'une variété lisse Z . Le complexe $\mathcal{T}_Z$ est constructible : c'est un complexe dont le seul faisceau de cohomologie non nul est le faisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$ en degré $-2\dim Z$. Comme on a $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_X) = \mathcal{E}xt^{-q}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{T}_Z)$, les $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_X)$ sont constructibles (2.5.1), donc $\mathcal{T}_X$ est contructible.

Pour tout complexe de faisceaux abéliens F sur X , posons

$$D_X(F) = R\mathcal{H}om(F, \mathcal{T}_X) \quad .$$

COROLLAIRE 2.6.2.- Si F est constructible, $D_X F$ est constructible et le morphisme canonique $F \longrightarrow D_X D_X F$ est un quasi-isomorphisme.

La première assertion résulte de 2.6.1 et 2.5.1. Démontrons la deuxième assertion. Par dévissage sur F , on peut supposer que F est localement constant sur un ouvert lisse U d'un sous-espace analytique fermé Y de X tel que U - Y soit analytique et que F soit nul en dehors de U .

En remarquant que $D_Y D_Y F \simeq D_X D_X F$ on se ramène au cas X = Y . Il existe une variété lisse $\tilde{Y}$, un morphisme propre $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow \tilde{Y}$ tel que $\pi \circ j = i$ et que $\tilde{Y} - U$ soit un diviseur à croisements normaux. On a

$$D_Y F = .R_{i_*}(D_U(F/U)) = R\pi_*(R_{j_*} D_U(F/U)) = R\pi_*(.D_{\tilde{Y}}(\tilde{F})) \quad ,$$

en posant $\tilde{F} = j_!(F/U)$. Par suite $D_Y D_Y F = D_Y(R\pi_* D_{\tilde{Y}} \tilde{F})$. D'après le théorème de dualité relative appliqué au morphisme propre π [10] , on a

$$D_Y(R\pi_* D_{\tilde{Y}} \tilde{F}) = R\pi_*(D_{\tilde{Y}} D_{\tilde{Y}} \tilde{F}) \quad .$$

De plus $R\pi_* \tilde{F} = F$ et $R\pi_*$ transforme le morphisme canonique $\tilde{F} \longrightarrow D_{\tilde{Y}} D_{\tilde{Y}} \tilde{F}$

en le morphisme canonique $F \longrightarrow D_Y D_Y F$. On peut donc supposer $Y = \tilde{Y}$ et $F = \tilde{F}$. Le complexe $\mathcal{T}_Y$ est alors $\mathbb{Z}[2\dim Y]$ et l'assertion se vérifie immédiatement.

COROLLAIRE 2.6.3.- Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme analytique (resp. algébrique) et F un complexe de faisceaux constructible sur Y . Alors l'image inverse extraordinaire $f^! F[\ ]$ est un complexe constructible sur X et on a $f^! F = D_X f^* D_Y F$.

La première assertion résulte de 2.6.2 et de la deuxième assertion. La deuxième assertion est vraie pour tout complexe F sur Y telle que $F \longrightarrow D_Y D_Y F$ soit un isomorphisme. Elle résulte donc de 2.6.2.

COROLLAIRE 2.6.4.- Soit $Y \subset X$ un sous-espace analytique fermé d'un espace analytique. Alors $\mathcal{T}_X|Y \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_Y(\mathbb{Z}), \mathcal{T}_Y)$.

On a $\mathbb{Z} = R\mathcal{H}om(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_X)$ (2.6.2). Donc $\underset{\sim}{R\Gamma}_Y(\mathbb{Z}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{T}_X|Y, \underset{\sim}{R\Gamma}_Y(\mathcal{T}_X))$. Mais $\underset{\sim}{R\Gamma}_Y(\mathcal{T}_X) \simeq \mathcal{T}_Y$, d'où $\underset{\sim}{R\Gamma}_Y(\mathbb{Z}) \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{T}_X|Y, \mathcal{T}_Y)$, d'où le résultat par bidualité (2.6.2).

COROLLAIRE 2.6.5.- Soit $Y \subset X$ un sous-espace analytique (resp. algébrique) d'un espace analytique (resp. algébrique). Alors il existe un ouvert dense V de Y complémentaire d'un sous-espace analytique (resp. algébrique) fermé de Y , tel que $\mathcal{T}_X/Y$ soit localement constant de fibre en $y \in Y$: $\underset{\sim}{R\Gamma}_Y(\mathbb{Z})^*_y[2\dim Y]$.

Sur l'ouvert de lissité de Y_{red} , on a $\mathcal{T}_Y = \mathbb{Z}[2\dim Y]$. L'assertion résulte alors de 2.5.1.

COROLLAIRE 2.6.6.- Soit X un espace analytique. Pour tout entier q , le support du faisceau $\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_q(\mathcal{T}_X)$ est un sous-espace analytique fermé et on a $2\dim\operatorname{supp} H_q \leqslant q$.

La première assertion résulte du fait que $\mathcal{H}_q$ est constructible. La deuxième résulte de 2.6.5 appliqué à $Y = \operatorname{supp} \mathcal{H}_q$.

PROPOSITION 2.6.7.- Soient X un espace analytique, A un anneau commutatif noethérien, $\mathcal{T}_{X,A}$ le complexe dualisant pour la catégorie des faisceaux de A-modules. On a $\mathcal{T}_{X,A} \simeq \mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

La question étant locale, on peut supposer que X est un sous-espace fermé d'un espace lisse Z . Il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$R\mathcal{H}om_A(A_X, A) \longleftarrow R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

est un isomorphisme, ou encore que le morphisme canonique

$$R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}_U, \mathbb{Z}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}} A \longleftarrow R\mathcal{H}om_A(A_U, A)$$

où U est l'ouvert complémentaire de X , est un isomorphisme. Il s'agit donc de montrer que le morphisme canonique

$$Rj_*(\mathbb{Z}/U) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}} A \longrightarrow Rj_*(A/U)$$

où j est l'injection de U dans $\mathbb{Z}$, est un isomorphisme.

LEMME 2.6.8.- Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'espaces topologiques (resp. un morphisme de topos), A un anneau commutatif, $M^\bullet$ un complexe d'amplitude plate finie de faisceaux de A-modules sur X , N un A-module. On suppose que

1) Il existe un entier n tel que, pour tout faisceau de A-modules P , $R^n f_*(P) = 0$.

2) $Rf_*(M^\bullet)$ est un complexe d'amplitude plate finie.

3) Une des deux conditions suivantes est satisfaite

a) N possède une ∞-présentation finie ;

b) pour tout ensemble I , le morphisme canonique

$$Rf_*(M^\bullet)^{(I)} \longrightarrow Rf_*(M^{\bullet(I)})$$

est un isomorphisme.

Alors le morphisme canonique

$$Rf_*(M^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} N) \longleftarrow Rf_*(M^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} N$$

<u>est un isomorphisme</u>.

Soient $L_\bullet$ une résolution de N par des A-modules libres (qu'on peut supposer de type fini dans le cas a)), et i un entier. Il résulte de 1) et 2) qu'il existe un entier $m(i)$ tel que, en notant $L_{\bullet \leqslant m(i)}$ le tronqué à l'ordre $m(i)$ de $L_\bullet$, les morphismes canoniques

$$R^i f_*(M \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} L_{\bullet \leqslant m(i)}) \longrightarrow R^i f_*(M^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} N) \quad ,$$

$$\mathcal{H}^i(Rf_*(M^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} L_{\bullet \leqslant m(i)}) \longrightarrow \mathcal{H}^i(Rf_*(M^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} N) \quad ,$$

soient des isomorphismes. On peut donc remplacer N par un complexe borné de A-modules libres et on se ramène donc aussitôt au cas où N est un A-module libre, de type fini dans le cas a). Le lemme résulte alors de l'additivité de Rf_* dans le cas a) et de l'hypothèse b) dans le cas b).

Pour achever la démonstration de 2.6.7, il suffit de montrer que l'hypothèse 3) b) du lemme 2.6.8 est satisfaite car tout complexe borné de $\mathbb{Z}$-faisceaux est d'amplitude plate finie. Il existe un espace lisse Z , un morphisme propre $\pi : \tilde{Z} \longrightarrow Z$, un plongement ouvert $i : U \hookrightarrow \tilde{Z}$ tel que $j = \pi \circ i$ et que le complémentaire de U dans $\tilde{Z}$ soit un diviseur à composantes locales lisses et à croisements normaux. Pour tout complexe de faisceaux F sur $\tilde{Z}$ on a $R\pi_*(F^{(I)}) = R\pi_*(F)^{(I)}$ car π est propre et on a $Rj_* = R\pi_* \circ Ri_*$ de sorte qu'il suffit de montrer que le morphisme canonique $Ri_*(\mathbb{Z}^{(I)}/U) \longrightarrow Ri_*(\mathbb{Z}/U)^{(I)}$ est un isomorphisme ce qui se vérifie aussitôt.

2.7. <u>Faisceaux algébriquement constructibles et faisceaux étales constructibles</u>.

Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, l un nombre premier et n un entier > 0 . On dispose de la notion de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-faisceau étale et constructible [8] ; la catégorie de ces faisceaux est notée $\mathrm{const}(X_{et}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$.

On note $D^b_{const}(X_{ét}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de tous les faisceaux étales de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-modules sur X engendrée par les objets dont les faisceaux de cohomologie sont constructibles et nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On dispose de plus de la notion de complexes parfaits de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-faisceaux étales. C'est un complexe de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-faisceaux étales, d'amplitude plate finie, dont les faisceaux de cohomologie sont constructibles. La catégorie dérivée correspondante est notée $D_{parf}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$. C'est une sous-catégorie pleine de $D^b_{const}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$.

On note $Const(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ la catégorie des faisceaux transcendants (*) algébriquement constructibles et $D_{const}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ la sous-catégorie pleine de la sous-catégorie dérivée des faisceaux transcendants de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-modules engendrée par les objets dont les faisceaux de cohomologie sont algébriquement constructibles (2.1) et nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On note $D_{parf}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ la sous-catégorie pleine de la précédente engendrée par les objets d'amplitude plate finie.

On sait associer à un faisceau étale, un faisceau transcendant [ ] , d'où des foncteurs :

$$\begin{aligned}
&\pi^*_{n,l} : Const(X_{ét}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \longrightarrow Const(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad ;\\
(2.7.1)\quad &\pi^*_{n,l} : D_{Const}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \longrightarrow D_{Const}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad ;\\
&\pi^*_{n,l} : D_{parf}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \longrightarrow D_{parf}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

et la réduction modulo l^n fournit, pour tout entier $m \geqslant n$ des diagrammes commutatifs

$$(2.7.2)\qquad \begin{array}{ccc}
D_{parf}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*_{m,l}} & D_{parf}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
D_{parf}(X_{ét},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*_{n,l}} & D_{parf}(X_{alg},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})
\end{array}$$

(*) i.e. des faisceaux pour la topologie "ordinaire" ou "transcendante".

$$(2.7.3)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*_{m,l}} & \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}} \\ \mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*_{n,l}} & \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \end{array}$$

THÉORÈME 2.7.4.- _Pour tout_ m , _les foncteurs_ $\pi^*_{m,l}$ _sont des équivalences de catégories_.

Nous nous bornerons à donner des indications. Pour démontrer que les foncteurs sont pleinement fidèles, il suffit de le démontrer pour les catégories D_{const} et par dévissage des complexes, on est amené à montrer que, pour tout couple de faisceaux étales et constructibles, l'application

$$\pi^*_{n,l} : \mathrm{Ext}^q(F,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q(\pi^*_{n,l}F, \pi^*_{n,l}G)$$

est bijective. Ceci est une conséquence du théorème de comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie transcendante, comme on le voit en faisant des dévissages sur les faisceaux F_1 et G (2.1, propriété C 5) et des résolutions de singularités comme en (2.5). Pour démontrer que les foncteurs $\pi^*_{m,l}$ sont essentiellement surjectifs, il suffit, vu ce qui précède, de le démontrer pour les catégories Const , et c'est alors une conséquence facile du théorème d'existence de Riemann.

COROLLAIRE 2.7.5.- _Les foncteurs_ $\pi^*_{m,l}$ _commutent à la formation des images directes supérieures, à la formation des images directes à support propre, à la formation des_ Ext _locaux_.

Résulte immédiatement du fait que les $\pi^*_{m,l}$ commutent à la localisation étale.

Par un passage à la limite projective sur l'entier n expliqué dans la thèse de Jouanolou, on définit la catégorie $\mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) = \text{"}\varprojlim_n\text{"}\mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ et $D_{\mathrm{parf}}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) = \text{"}\varprojlim_n\text{"}D_{\mathrm{parf}}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$. Pour les catégories transcendantes correspondantes, on a le résultat suivant : les foncteurs de réduction modulo l^n permettent de définir des foncteurs

$$\rho : \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_n\text{"}\, \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad ,$$

$$\rho : D_{parf}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_n\text{"}\, D_{parf}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad .$$

On vérifie que ces foncteurs sont des équivalences de catégories. On obtient donc

COROLLAIRE 2.7.6.- Il existe des équivalences de catégories uniques à isomorphismes près :

$$\pi_l^* : \mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l)$$

$$\pi_l^* : D_{parf}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow D_{parf}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l)$$

telles que, pour tout n, on ait un diagramme commutatif à isomorphismes près,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) & \xrightarrow{\pi_l^*} & \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{n,l}^*} & \mathrm{Const}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D_{parf}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l) & \xrightarrow{\pi_l^*} & D_{parf}(X_{alg}, \mathbb{Z}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{parf}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{n,l}^*} & D_{parf}(X_{alg}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \end{array} \quad ,$$

où les foncteurs verticaux sont les foncteurs de réduction modulo l^n.
Les foncteurs π_l^* commutent à la formation des images directes, des images directes à supports propres, des Ext locaux.

Remarque 2.7.7.- On définit aussi en théorie étale la catégorie $\mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, {}_l)$ des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux étales et constructibles en localisant $\mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}_l)$ par rapport à la sous-catégorie des faisceaux de torsion. La catégorie $\mathrm{Const}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Q}_l)$ n'est pas équivalente à la catégorie des faisceaux transcendants de $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels algébriquement constructible. Cela provient de ce qu'une représentation d'un groupe π dans un espace vectoriel V de dimension finie sur Q_l ne laisse pas nécéssairement invariant un réseau de V .

2.8. <u>Comparaison du complexe dualisant avec le complexe dualisant étale.</u>

Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, l un nombre premier, n un entier, $T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ le complexe dualisant pour les $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-faisceaux étales [9] . Il résulte des théorèmes de comparaison [loc. cit.] que

$$H^0_c(X_{\acute{e}t},T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^0_c(X_{transc},\pi^*_{n,l}T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}})$$

est un isomorphisme. On a donc un morphisme d'intégration sur $X_{\acute{e}t}$:

$$\int_{X_{\acute{e}t}} : H^0_c(X_{transc},\pi^*_{n,l}T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$$

dont on déduit par le théorème de dualité de Poincaré un morphisme

$$\delta_{n,l} : \pi^*_{n,l}T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}} \longrightarrow T_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad ,$$

où le complexe de droite est le complexe dualisant pour les faisceaux transcendants de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules (2.6.7).

PROPOSITION 2.8.1.- a) <u>$T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ est un complexe parfait</u> (2.7) .

b) <u>$\delta_{n,l}$ est un isomorphisme.</u>

c) <u>Pour tout</u> $m \geqslant n$, <u>le morphisme de réduction modulo</u> l^n ,

$$T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \longrightarrow T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$$

<u>est un isomorphisme.</u>

a) La question est locale sur X ; on peut donc supposer que X est un fermé d'une variété algébrique lisse Y . On a alors

$$T_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}} = R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}_X, T_{Y_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}) \quad .$$

Le complexe $T_{Y_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mu_{l^n}^{\dim Y}[2\dim Y]$ [9] . Il est donc parfait. L'assertion résulte alors de 2.7.5 et 2.5.1.

b) Soit F un complexe parfait de faisceaux étales de $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$-modules.

La dualité étale [loc. cit.] nous donne un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(F,\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X_{\acute{e}t},F)\,,\,\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad .$$

Le théorème de comparaison nous fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X_{\acute{e}t},F),\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X_{transc},\pi^*_{n,l}F),\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad ;$$

et la dualité transcendante nous fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X_{transc},\pi^*_{n,l}F),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi^*_{n,l}F\,,\mathcal{T}_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad .$$

D'où en composant ces isomorphismes, un isomorphisme fonctoriel en F

$$\mathrm{Hom}(F,\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi^*_{n,l}F,\mathcal{T}_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \quad .$$

Lorsque $F = \mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$, cet isomorphisme transforme l'identité en $\Phi_{n,l}$.

Par suite $\Phi_{n,l}$ est un isomorphisme en vertu de 2.7.4.

c) Résulte de b) et de (2.6.7).

Remarque 2.8.2.- 1) Soit X une variété algébrique séparée de type fini sur un corps k algébriquement clos de caractéristique première à l . Le complexe $\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ est d'amplitude injective finie. Il est donc d'amplitude plate finie, car tout module injectif sur $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ est une somme directe $(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^{(I)}$. Par ailleurs, d'après le théorème de Deligne [1], la cohomologie de $\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ est constructible. Donc $\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}$ est un complexe parfait sans hypothèse sur le corps de base.

2) De même l'assertion c) de 2.8.1 est vraie sans hypothèse sur le corps de base. En examinant la démonstration de 2.6.7, on voit en effet qu'il suffit de pouvoir appliquer 2.6.8 au cas où f est un morphisme $X_{\acute{e}t} \longrightarrow Y_{\acute{e}t}$ induit par un morphisme de schémas lisses, où $A = M = \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ et où $N = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Les conditions 1) et 3) du lemme sont satisfaites. La condition 2) du lemme est satisfaite elle aussi, car le faisceau constant $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ sur $X_{\acute{e}t}$ est d'amplitude injective finie (par exemple, en vertu du théorème de dualité sur $X_{\acute{e}t}$), donc $Rf_*\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ est d'amplitude injective finie donc d'amplitude plate finie.

En passant à la limite sur l'entier n, on déduit de (2.8.1) c) (et de la remarque 2.8.2,2) dans le cas général) l'existence d'un complexe parfait $\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l} \in D_{parf}(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l)$ tel que, pour tout $F \in D_{parf}(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l)$, on ait un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\mathrm{Hom}(F,\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X_{\acute{e}t},F),\mathbb{Z}_l) .$$

De plus, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on a un isomorphisme

$$Rf_* R\mathcal{H}om(F,\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(Rf_! F, \mathcal{T}_{Y_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l}) .$$

De même, en passant à la limite sur l'entier n, on déduit de 2.8.1 b) un isomorphisme fonctoriel en X

$$(2.8.3) \qquad \Phi_l : \pi_l^* \mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l .$$

L'homologie étale localement finie de X, $H_i(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l)$ (resp. à support compact $H_i^c(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l)$) est définie comme étant l'hypercohomologie $H^{-i}(X_{\acute{e}t},\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l})$ (resp. $H_c^{-i}(X_{\acute{e}t},\mathcal{T}_{X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l})$) [7] . On déduit alors de l'isomorphisme 2.8.3 et de 2.7.6 le

COROLLAIRE 2.8.4.- <u>Pour les variétés algébriques séparée et de type fini sur</u> $\mathbb{C}$, <u>il existe des isomorphismes fonctoriels en</u> X <u>pour les morphismes propres</u>

$$H_i(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_i(X,\mathbb{Z}_l) \quad (\text{resp. } \underline{\text{fonctoriel en}}\ X ,$$
$$H_i^c(X_{\acute{e}t},\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_i^c(X,\mathbb{Z}_l))$$

<u>où l'homologie de gauche est l'homologie étale à coefficients dans</u> $\mathbb{Z}_l$ <u>et l'homologie de droite l'homologie singulière à coefficient dans</u> $\mathbb{Z}_l$.

3. Classe d'homologie d'un cycle.

3.1. Rappel sur la trace.

3.1.0. Soient X et Y des espaces analytiques, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, K un complexe borné de faisceaux de O_X-modules à cohomologie cohérente et d'amplitude plate finie sur Y ; d un entier tel que les dimensions des fibres de f soient $\leqslant d$, F un faisceau de $\mathbb{Z}$-modules sur X .

A toutes ces données variables (X,Y,f,K,d,F) , on se propose d'associer un morphisme de faisceaux abéliens

3.1.1. $$\mathrm{Tr}_{f,K} : R^{2d}f_!(f^*F) \longrightarrow F$$

où $f_!$ désigne le foncteur image directe à support propre [10], tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(VAR 0) : Le morphisme $\mathrm{Tr}_{f,K}$ dépend additivement du complexe K (additivité par rapport aux suites exactes).

(VAR 1) : Le morphisme $\mathrm{Tr}_{f,K}$ est fonctoriel en F et commute aux sommes directes quelconques de l'argument F .

(VAR 2) : La formation de $\mathrm{Tr}_{f,K}$ est compatible avec le changement de base $Y' \longrightarrow Y$.

(VAR 3) : La formation de $\mathrm{Tr}_{f,K}$ est compatible avec la composition des morphismes f .

(VAR 4) I) Lorsque f est fini, $d = 0$, $F = \mathbb{Z}$, posons, pour $y \in Y$

3.1.2. $$m_K(y) = \sum_{\substack{x, f(x) = y \\ i \in \mathbb{N}}} (-1)^i \dim H^i(K_{(x)} \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_y}{\otimes}} \mathbb{C}) \quad .$$

Le morphisme composé

$$F \xrightarrow{\text{can.}} f_*f^*F = f_!f^*F \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{f,K}} F$$

induit sur la fibre en $y \in Y$, la multiplication par $m_K(y)$.

II) Lorsque X est lisse, $Y = s_{\text{point}}$, $K = O_X$, $d = \dim X$, $F = \mathbb{Z}$, le morphisme

$$\mathrm{Tr}_{f,O_X} : H_c^{2d}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

THÉORÈME 3.1.3.- <u>Il est possible d'associer à tout</u> (X,Y,f,K,d,F) <u>un morphisme</u> $Tr_{f,K}$ <u>et un seul tel que les propriétés</u> (VARi) $0 \leqslant i \leqslant 4$ <u>soient satisfaites</u>.

Le morphisme $Tr_{f,K}$ est appelé le <u>morphisme trace pondéré</u> par K. Lorsque $K = 0_X$ on le supprime de la notation et le morphisme correspondant est appelé le morphisme trace. Lorsque Y est un point, on remplace f par X.

Ce théorème est une transcription du théorème de SGA, XVIII, §2. Nous nous bornerons à donner des indications. Démontrons l'unicité, ce qui nous permettra de préciser les définitions formelles des propriétés VARi). Pour vérifier l'unicité de $Tr_{f,K}$, il suffit de le faire sur les fibres en tout point $y \in Y$. Soient $y \in Y$, X_y la fibre de f en y, $i_y : X_y \hookrightarrow X$ l'injection canonique $f_y : X_y \longrightarrow \{y\}$ la projection sur un point. La compatibilité avec le changement de base VAR 2 implique dans ce cas que :

$$(Tr_{f,K})_y = Tr_{f_y,\mathbb{L}i_y^* K} .$$

On est donc ramené à démontrer l'unicité lorsque Y est un point. En filtrant le complexe K et en utilisant VAR 0, on se ramène au cas où K est un faisceau cohérent sur X.

En utilisant l'exactitude à droite de $R^{2d}f_!$ et VAR 1, on se ramène au cas où $F = \mathbb{Z}$.

Il résulte de VAR 4 et de VAR 2 que Tr_f est le morphisme canonique lorsque f est un plongement ouvert. Il résulte alors de VAR 3 que pour tout ouvert $U \subset X$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_c^{2d}(U,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "Tr_{U,K|U}"'] & H_c^{2d}(X,\mathbb{Z}) \arrow[dl, "Tr_{X,K}"] \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

En utilisant l'exactitude à droite de H_c^{2d} on voit alors que $Tr_{X,K}$ est connu lorsque les $Tr_{U_i,K|U_i}$ sont connus pour un recouvrement ouvert (U_i) de X. On peut donc localiser sur X

et supposer qu'il existe un morphisme fini $g : X \longrightarrow V$ sur un ouvert V de $\mathbb{C}^d$. Il résulte de VAR 3 que $Tr_{X,K} = Tr_V \circ Tr_{g,K}$ et Tr_V et $Tr_{g,K}$ sont déterminés par VAR 4, d'où l'unicité. Pour l'existence, nous laissons au lecteur le soin de transcrire SGA 4, XVIII.

Comme les fibres de X sont de dimension $\leqslant d$, pour tout faisceau F sur Y, le complexe $Rf_! f^*F[2d]$ a une cohomologie nulle en degré > 0 et sa cohomologie de degré 0 est $R^{2d}f_! f^*F$. Donc le morphisme 3.1.1. détermine et est déterminé par un morphisme de complexes encore noté

$$Tr_{f,K} : Rf_! f^*F[2d] \longrightarrow F ,$$

d'où en passant aux complexes de faisceaux sur Y, un morphisme de complexes.

3.1.4. $$Tr_{f,K} : (Rf_! f^*F^\bullet)[2d] \longrightarrow F$$

qui possède les propriétés VAR i), $0 \leqslant i \leqslant 4$. Ce morphisme est encore appelé la trace pondérée.

3.2. Homomorphisme de Gysin pour les morphismes plats.

Soient (X,Y,f,K,d) comme en 3.1.0. Notons $\mathcal{T}_Y$ le complexe dualisant de Y (1.2). Le morphisme

$$Tr_{f,K} : Rf_! f^*\mathcal{T}_Y[2d] \longrightarrow \mathcal{T}_Y$$

est un élément de $RHom(Rf_!(f^*\mathcal{T}_Y),\mathcal{T}_Y[-2d])$. Par dualité de Poincaré [10], ce dernier groupe est isomorphe à

$$RHom(f^*\mathcal{T}_Y,\mathcal{T}_X(-2d)) ,$$

d'où un morphisme

3.2.1. $$G_{f,K} : f^*\mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X(-2d) .$$

Soit Φ une famille de supports sur Y. Le morphisme $G_{f,K}$ induit un homomorphisme sur l'homologie (1.2).

3.2.2. $$f^*_K : H^{\Phi}_p(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{f^{-1}(\Phi)}_{p+2d}(X,\mathbb{Z})$$

appelé homomorphisme de Gysin pondéré par K.

Il résulte immédiatement des propriétés VAR i), $0 \leqslant i \leqslant 4$ (3.1) que les morphismes f^*_K possèdent les propriétés suivantes :

GYS 0) Les morphismes f^*_K dépendent additivement de K (par rapports aux suites exactes de complexes).

GYS 1) Pour tout diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "n"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

tout complexe K sur X et tout entier d tels que (X,Y,f,K,d) jouisse des propriétés décrites en 3.1.0, tout couple de familles de supports Φ sur Y et ψ sur Y', m-adaptées(*) , alors $(X',Y',g,\mathbb{L}n^*K,d)$ est comme en 3.1.0 et le diagramme

(3.2.3)
$$\begin{tikzcd} H^{g^{-1}(\psi)}_{*+2d}(X',\mathbb{Z}) \arrow[r, "n_*"] & H^{f^{-1}(\Phi)}_{*+2d}(X,\mathbb{Z}) \\ H^{\psi}_{*}(Y',\mathbb{Z}) \arrow[u, "g^*_{\mathbb{L}n^*K}"] \arrow[r, "m_*"] & H^{\Phi}_*(Y,\mathbb{Z}) \arrow[u, "f^*_K"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

GYS 2) Pour toutes données (X,Y,f,K,d) et (Y,Z,g,M,d') comme en 3.1.0, la donnée $(X,Z,g\circ f, K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_X}{\otimes}} \mathbb{L}f^*M, d+d')$ jouit des propriétés de 3.1.0 et on a

$$f^*_K \circ g^*_M = (g\circ f)^*_{K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_X}{\otimes}} \mathbb{L}f^*M} \quad .$$

GYS 3) Lorsque Y est connexe, f est fini, $d = 0$, les entiers $m_K(y)$, $y \in Y$ ne dépendent pas de y et l'homomorphisme composé

$$H^{\Phi}_*(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*_K} H^{f^{-1}(\Phi)}_*(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H^{\Phi}_*(Y,\mathbb{Z})$$

(*) i.e. pour tout fermé $Z \in \psi$, $m|_Z$ est propre et $m(Z) \in \Phi$.

est la multiplication par $m_K(y)$.

GYS 4) Lorsque X est lisse, Y est un point, $K = 0_X$, $d = \dim X$, alors
$$f^*(1\!\!1_Y) \in H_{2d}(X,\mathbb{Z}) = H_c^{2d}(X,\mathbb{Z})^*$$
est la forme linéaire déduite de l'intégration sur X des formes différentielles de degré $2d$ à support compact.

GYS 5) Lorsque f est un plongement ouvert, $K = 0_X$, $d = 0$, l'homomorphisme $f^* : H_*(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X,\mathbb{Z})$ est le morphisme de restriction à un ouvert (1.3.1).

3.3. Classe d'homologie fondamentale.

PROPOSITION 3.3.1.- *Soient* X *un espace analytique de dimension finie* d , $\tilde{X}$ *l'ouvert des points réguliers de dimension* d *de* X_{red} , $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ *le morphisme canonique,* $\mathcal{T}_X$ *le complexe dualisant de* X , $\mathcal{H}_{2d}(X)$ *le faisceau d'homologie de degré* $2d$ *(cohomologie de degré* $-2d$ *) de ce complexe. On a un isomorphisme*
$$\mathcal{H}_{2d}(X) \simeq \pi_*\mathbb{Z} \quad .$$

Pour des raisons de dimension, pour tout ouvert U de X , l'homomorphisme canonique $H_{2d}(U,X) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{H}_{2d}(X))$ est un isomorphisme. Pour tout ouvert ouvert U , on a une suite exacte (1.3.1) :
$$H_{2d}(U - U \cap \tilde{X},\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2d}(U,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2d}(U \cap \tilde{X},\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2d-1}(U - U\cap\tilde{X},\mathbb{Z})$$
Comme $U - U \cap \tilde{X}$ est un sous-ensemble analytique fermé de dimension $< d$, les groupes extrêmes sont nuls. L'homomorphisme canonique $\mathcal{H}_{2d}(X) \longrightarrow \pi_*\mathcal{H}_{2d}(\tilde{X})$ est donc un isomorphisme. Notons $[\tilde{X}] \in H_{2d}(X) = H_c^{2d}(\tilde{X})^*$ l'élément induit par l'intégration sur $\tilde{X}$ des formes différentielles. Cet élément détermine un homomorphisme $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H}_{2d}(\tilde{X})$ qui est un isomorphisme comme on le vérifie sur les ouverts de $\tilde{X}$ homéomorphes à des boules.

COROLLAIRE 3.3.2.- 1) *Si* X *est irréductible, le groupe* $H_{2d}(X)$ *est cyclique* infini.

2) Notons $\mathrm{Irr}_d(X)$ l'ensemble des composantes irréductibles de dimension d de X , $\tilde{S} = \coprod_{S \in \mathrm{Irr}_d(X)} S$, $p : \tilde{S} \longrightarrow X$ le morphisme canonique. On a $H_{2d}(\tilde{S}) = \prod_{S \in \mathrm{Irr}_d(X)} H_{2d}(S)$ et $p_* : H_{2d}(\tilde{S}) \longrightarrow H_{2d}(X)$ est un isomorphisme.

DEFINITION 3.3.3.- Soient X un espace analytique de dimension d , K un complexe borné de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules à cohomologie cohérente sur X , f la projection de X sur un point. On pose $[X,K] = f^*_K(1) \in H_{2d}(X,\mathbb{Z})$ (3.2.2). La classe $[X,K]$ est appelée la classe d'homologie fondatementale de X pondérée par K . On pose $[X] = [X,\mathcal{O}_X]$ et $[X]$ est appelée la classe d'homologie fondamentale de X .

Pour tout $x \in X$, notons $F(x)$ l'anneau total des fractions de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ et posons

$$l_K(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{long}_{F(x)} H^i(K(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} F(x)) \quad .$$

La fonction $x \longmapsto l_K(x)$ est localement constante sur l'ouvert des points réguliers de X_{red} . Pour tout $S \in \mathrm{Irr}_d(X)$, la fonction $x \longrightarrow l_K(x)$, $x \in S$ est donc constante sur un ouvert dense de S . Sa valeur est notée $l_K(S)$, et est appelée la longueur générique de K sur S .

PROPOSITION 3.3.4.- 1) La classe $[X,K]$ dépend additivement du complexe K .

2) Soient (X,Y,f,K,d) comme en 3.1.0 et M un complexe borné de faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules à cohomologie cohérente. Alors

$$f^*_K[Y,M] = [X, K \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathbb{L}f^*M] \quad .$$

3) Si X est lisse et connexe, $[X]$ est un générateur du groupe infini cyclique $H_{2d}(X)$.

4) Si X est irréductible et génériquement réduit, $[X]$ est l'unique élément de $H_{2d}(X)$ qui induit sur l'ouvert X_{reg} des points réguliers de X_{red} la classe $[X_{reg}]$.

5) <u>Dans la décomposition en produit de</u> 3.3.2, <u>on a</u>

$$[X,K] = (1_K(S).[S_{red}])_{S \in Irr_d(X)} \quad .$$

Les assertions 1), 2) et 3) résultent respectivement de GYS 0, GYS 2 et GYS 4. L'assertion 4) résulte de l'assertion 3) et de 3.3.1. Démontrons 5).

En vertu de 1) et de l'additivité de $1_K(S)$, on peut se ramener au cas où K est un faisceau cohérent sur X_{red} . Avec les notations de 3.3.2, il existe alors un ouvert V de X tel que :

a) V_{red} soit lisse équidimensionnel de dimension d et l'inclusion $i : V \hookrightarrow X$ induit une bijection sur les composantes irréductibles de dimension d ;

b) le morphisme p induise un homéomorphisme $p^{-1}(V) \longrightarrow V$;

c) $K|_V$ est libre sur O_{red} sur chacune des composantes connexes de V_{red} ;

d) le morphisme $V_{red} \hookrightarrow V$ admet une section $s : V \longrightarrow V_{red}$ telle que V soit plat sur V_{red} . Le morphisme de restriction $H_{2d}(X) \longrightarrow H_{2d}(V)$ est une bijection (3.3.2) et transforme $[X,K]$ en $[V,K|V]$ (GYS 5) . De même pour tout $s \in Irr_d(X)$ le morphisme $H_{2d}(S) \longrightarrow H_{2d}(V \cap S)$ est une bijection et transforme $[S,K/S]$ en $[V \cap S, K/V \cap S]$.

D'après GYS 1) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{2d}(\tilde{S}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, "(p^{-1})^*"'] & H_{2d}(X) \arrow[d, "i^*"] \\
 & H_{2d}(V)
\end{tikzcd}$$

On est donc ramené au cas $X = V$ et par GYS 5, on se ramène de plus au cas où V est connexe. Utilisant encore l'additivité en K , on peut supposer $K = O_{V_{red}}$. D'après l'assertion 2) on a $[V] = s^*[V_{red}]$ et en identifiant $H_{2d}(V)$ à $H_{2d}(V_{red})$ par s_* , il résulte de GYS 3 que $[V] = m_{O_V}[V_{red}]$. Par ailleurs, par additivité on a $[V] = 1_{O_V}(V)[V, O_{V_{red}}]$. L'assertion résulte alors du fait que $H_{2d}(V)$ est sans torsion et que $l_{0_V}(V) = m_{0_V}$.

PROPOSITION 3.3.5.- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces analytiques de dimension</u> $\leq d$, $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>, K <u>un complexe borné de</u> 0_X<u>-modules à cohomologie cohérente</u>. <u>Alors</u>

$$f_*([X,K]) = [Y,Rf_*K] \quad .$$

Par additivité, on peut supposer que K est un faisceau cohérent sur X_{red} . Comme $[X,K] = [X_{red},K]$ (3.3.4), on peut supposer X réduit. Comme f se factorise en $\tilde{f} : X \longrightarrow f(X)$ et $i : f(X) \hookrightarrow Y$ et que l'assertion est vraie pour i (3.3.4), on peut supposer Y réduit et $f(X) = Y$. Lorsque $\dim Y < d$ ou bien $\dim X < d$, les deux membres de l'égalité sont nuls pour des raisons de dimension. Il reste donc à examiner le cas $\dim X = \dim Y = d$. Il existe un ouvert $U \subset Y$ lisse de dimension telle que

1) $f^{-1}(U)$ soit lisse de dimension d ;

2) $K|f^{-1}(U)$ soit libre sur chaque composante connexe ;

3) $f|U : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit un revêtement étale trivial sur chaque composante connexe de U ;

4) la restriction à U induise un isomorphisme sur l'homologie de dimension 2d (3.3.2) .

Comme la classe fondamentale se localise (3.3.4) (2) et que les images directes de faisceaux cohérents et de classes d'homologie commutent à la localisation (GYS 5), on peut supposer Y = U . Il suffit alors de vérifier l'égalité après restriction aux composantes connexes de U (3.3.2). On peut donc supposer U connexe et f revêtement trivial et l'égalité résulte alors de (3.3.4) (5).

3.4. Cycles analytiques.

Soient X un espace analytique, p un entier, Φ une famille de supports sur X. Notons $Sp(X)$ l'ensemble des sous-espaces irréductibles et réduits de dimension p de X. On note $Z_p^{\Phi}(X)$ le groupe des combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers $\sum_{S \in Sp(X)} a_S |S|$ telles que l'ensemble des S tels que $a_S \neq 0$ soit localement fini et que $\bigcup_{S \in Sp(X), a_S \neq 0} S$ soit un fermé de Φ. Le groupe $Z_p^{\Phi}(X)$ est appelé le groupe des p-cycles analytiques de X à supports dans Φ.

Soit K un complexe borné de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules à cohomologie cohérente tel que, pour tout i, le support de $H^i(K)$ soit de dimension $\leq p$ et appartienne à Φ. On pose

3.4.1. $$|K|_p = \sum_{S \in Sp(X)} l_K(S).|S|$$

où $l_K(S)$ est la longueur générique de K sur S (cf. 3.3).

Soit Y un sous-espace analytique fermé de X de dimension $\leq p$ tel que l'ensemble sous-jacent appartienne à Φ. On pose $|Y|_p = |\mathcal{O}_Y|_p$. On note $|Y|_p = |Y|$ lorsqu'aucune confusion n'en résulte. En particulier si $d = \dim X$, le cycle $|X|_d = |X| \in Z_d(X)$ est appelé le cycle fondamental de X.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques, Φ et Ψ des familles de supports sur X et Y respectivment qui soient f-adaptées i.e. telles que, pour tout $z \in \Phi$, $f|Z$ soit propre et $f(Z) \in \Psi$. Il existe un et un seul homomorphisme

3.4.2. $$f_* : Z_p^{\Phi}(X) \longrightarrow Z_p^{\Psi}(Y)$$

tel que, pour tout complexe K, avec $|K|_p \in Z_p^{\Phi}(X)$ on ait

3.4.3. $$f_*(|K|_p) = |Rf_*K|_p \quad .$$

L'homomorphisme f_* est appelé l'homomorphisme d'image directe.

Soient (X,Y,f,K,d) comme en 3.1.0 et Ψ une famille de supports sur Y. Il existe un et un seul homomorphisme

3.4.4. $$f_K^* : Z_p^{\Psi}(Y) \longrightarrow Z_{p+d}^{f^{-1}(\Psi)}(X)$$

tel que, pour tout complexe M sur Y tel que $|M|_p \in Z_p^{\Psi}(Y)$ on ait

3.4.5. $$f_K^*|M|_p = |K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_X}{\otimes}} \mathbb{L}f^*M|_{p+d} \quad .$$

L'homomorphisme f_K^* est appelé <u>l'homomorphisme de Gysin</u> pondéré par K .

On a pour les homomorphismes f_* et f_K^* un comportement analogue à GYS 1 (3.2) vis-à-vis des carrés cartésiens.

THÉORÈME 3.4.6.- <u>Il existe une et une seule transformation naturelle</u>

$$Z_*^{\Phi}(X) \longrightarrow H_{2*}^{\Phi}(X)$$

<u>notée</u> $w \longmapsto [w]$ <u>qui commute aux images directes et aux homomorphismes de Gysin pondérés et telles que, lorsque</u> X <u>est un point, on ait</u> $[|X|] = 1 \in H_o(X) = \mathbb{Z}$;

Résulte de GYS 2 (3.2) et de 3.4.5 pour la commutation aux homomorphismes de Gysin et de (3.3.5) et (3.4.3) pour la commutation aux images directes.

3.4.7. Si $w \in Z_*^{\Phi}(X)$, $[w] \in H_{2p}^{\Phi}(X)$ s'appelle la classe d'homologie associée au cycle w . Soient Y un sous-espace de dim p et K un complexe borné de O_Y-modules à cohomologie cohérente. On pose $[|K|_p] = [Y,K] \in H_{2p}(X)$. Lorsque $Y = X$ on retrouve la classe fondamentale de X pondérée par K .

3.4.8. Soient X un espace analytique, Φ une famille de supports, D le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$, p un entier, K un complexe borné de $O_{X \times D}$-modules à cohomologie cohérente. On note $\bar{\Phi}$ la famille des fermés de $X \times D$ qui sont contenues un fermé $pr_2^{-1}(z)$ avec $Z \in \Phi$. On suppose que $\operatorname{supp} H^i(K) \subset \bar{\Phi}$ pour tout i et que les fibres de la projection de $\operatorname{supp} H^i(K)$ sur D sont de dimension $\leqslant d$. Pour tout $Z \in D$, on pose $K_Z = K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}} C$. C'est un complexe de O_X-modules.

3.4.9. On note $N_p^{\Phi}(X) \subset Z_p^{\Phi}(X)$ l'ensemble des éléments de la forme

$$|K_{Z_1}|_p - |K_{Z_2}|_p$$

où $Z_1, Z_2 \in D$ et K possède les propriétés de 3.4.8. Le sous-groupe $N_p^{\Phi}(X)$

est appelé le <u>sous-groupe des</u> <u>p-cycles analytiquement équivalent à zéro</u>. Le quotient, noté $C_p^{\Phi}(X)$, est appelé le groupe des <u>classes d'équivalence analytique de</u> <u>p-cycles</u>. On constate facilement que les homomorphismes d'images directes et de Gysin pondérés passent au quotient.

THÉORÈME 3.4.10.- <u>L'homomorphisme qui à un</u> <u>p-cycle associe sa classe d'homologie, se factorise par</u> $C_p^{\Phi}(X)$.

Soit K comme dans 3.4.8, il s'agit de montrer que $[|K_{z_1}|_p] = [|K_{z_2}|_p]$. Par additivité sur K, on peut se ramener à vérifier l'égalité lorsque K est un faisceau cohérent sur $X \times D$. Il existe alors un sous-espace fermé $W \subset X \times D$ dont les fibres sont de dimension $\leqslant p$, tel que K soit un O_W-module et tel que l'ensemble sous-jacent à W soit dans $\bar{\Phi}$. Pour tout z dans D, notons $i_z : W_z \longrightarrow X$ l'injection de la fibre W_z dans X. Le complexe K_z est un complexe de W_z-faisceau et on a (3.4.6) : $i_{z*}([W_z,K_z]) = |K_z|_p$.

Notons $\pi : W \longrightarrow D$ le morphisme induit par la deuxième projection. Le morphisme i_z se factorise en

$$W_z \xhookrightarrow{j} W \xhookrightarrow{1} X \times D \xrightarrow{pr_1} X .$$

Par suite le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{2p}(W_z) \arrow[r, "j_*"] \arrow[drr, "i_z^*"'] & H_{2p}^{\pi^{-1}(c)}(W) \arrow[r, "1_*"] & H_{2p}^{\bar{\Phi}\cap\pi^{-1}(c)}(X \times D) \arrow[d, "pr_{2*}"] \\
 & & H_{2p}^{\Phi}(X)
\end{tikzcd}$$

et pour montrer que $i_{z*}([W_z,K_z])$ ne dépend pas de $Z \in D$, il suffit de montrer que $j_{z*}([W_z,K_z]) \in H_{2p}^{\pi^{-1}(c)}(W)$ ne dépend pas de $z \in D$. D'après GYS 1 (3.2) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_{2p}(W_z) \arrow[r, "j_{z*}"] & H_{2p}^{\pi^{-1}(c)}(W) \\ \mathbb{Z} = H_o(\{z\}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "pr^*_{K_z}"] & H^c_o(D) \arrow[u, "\pi^*_K"'] \end{tikzcd}$$

et $[W_z, K_z] = pr^*_z(1)$. On a donc

$$j_{z*}[W_z, K_z] = \pi^*_K(1)$$

et cet élément indépendant de z .

3.5. Classe de cohomologie fondamentale. Intersection.

Nous étudions dans ce numéro la compatibilité entre l'intersection des cyclès et le cup ou le cap-produit des classes topologiques associées. L'idée d'utiliser systématiquement des complexes poids est due à Grothendieck et a été mise en forme par Deligne.

PROPOSITION 3.5.1.- Soient deux morphismes d'espaces analytiques $X \xhookrightarrow{i} Z \xrightarrow{g} Y$.

a). On suppose que i est un plongement fermé, que g est lisse et que les fibres de $g \circ i$ sont de codimension $\geqslant C$ dans les fibres de g . Alors, pour tout ouvert W de Z on a :

$$H^j_{W\cap X}(W, \mathbb{Z}) = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad j < 2C \quad .$$

b) Si de plus les fibres de $g \circ i$ sont de codimension $> C$ dans les fibres de g au-dessus d'un ouvert analytique dense de Y , alors

$$H^j_{W\cap X}(W, \mathbb{Z}) = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad j \leqslant 2C \quad .$$

L'assertion a) (resp. b)) équivaut à $\mathcal{H}^j_X(\mathbb{Z}) = 0$ pour $j < 2c$ (resp. $j \leqslant 2c$) . Elle est donc locale au voisinage de X . Soient $x \in X$, N la dimension relative de Z sur Y en x , $n = \dim Y$ en $f(x)$. On a $\dim_x X \leqslant n + N - 2c$ (resp. $\dim_x X < n + N - 2c$) dans le cas a) (resp. b)). Comme Z est lisse sur Y on a $Rg^!(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[2N]$ (cf. [9] pour le foncteur $Rg^!$; l'égalité est au sens des catégories dérivées). Pour tout j , on a $\mathcal{H}^j(Ri^!(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}^j_X(\mathbb{Z})$ et enfin on a $Ri^! Rg^! = Rf^!$. On a donc :

3.5.2. $$\mathcal{H}^j(Rf^!(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}^{j+2N}(\mathbb{Z}) \quad .$$

Par ailleurs, il résulte de la bidualité [10] que :

$$Rf^!(\mathbb{Z}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{T}_X , f^*\mathcal{T}_Y) \quad .$$

Comme $\mathcal{H}^j(\mathcal{T}_X) = 0$ pour $j < -2\dim X$ et $\mathcal{H}^j(\mathcal{T}_Y) = 0$ pour $j < 2n$, on a $\mathcal{H}^j(Rf^!(\mathbb{Z})) = 0$ pour $j < 2c - 2N$ (resp. $j < 2C - 2N$) dans le cas a) (resp. b)), d'où la proposition, en vertu de 3.5.2.

COROLLAIRE 3.5.3.- Soit $(W_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Z telle que $X - \bigcup_i W_i \cap X$ soit contenu dans un fermé F de X qui est fibre par fibre de codimension $\geq c$ et de codimension $> c$ au-dessus d'un ouvert analytique dense de Y . Alors l'homomorphisme canonique

$$H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_i H^{2c}_{X \cap W_i}(W_i,\mathbb{Z})$$

est injectif.

Posons $W = \bigcup_i W_i$. Il résulte de 3.5.1, a) que $H^{2c}_{X\cap W}(W,\mathbb{Z}) = \Gamma(W\cap X,\mathcal{H}^{2c}_X(\mathbb{Z}))$. Par suite l'homomorphisme canonique $H^{2c}_{X\cap W}(W,\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_i H^{2c}_{X\cap W_i}(W_i,\mathbb{Z})$ est injectif. Il suffit donc de montrer que $H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2c}_{X\cap W}(W,\mathbb{Z})$ est injectif. Comme on a un homomorphisme $H^{2c}_{X\cap W}(W,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2c}_{X-F}(Z - F,\mathbb{Z})$ il suffit de montrer que $H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2c}_{X-F}(Z - F,\mathbb{Z})$ est injectif. Comme on a une suite exacte

$$H^{2c}_F(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2c}_{X-F}(Z - F,\mathbb{Z}) \quad ,$$

l'assertion résulte de 3.5.1, b).

3.5.4. Soient $X \overset{i}{\hookrightarrow} Z \overset{g}{\hookrightarrow} Y$ deux morphismes d'espaces analytiques tels que i soit un plongement fermé, g un morphisme lisse de dimension relative N et que $\operatorname{codim}(X,Z)$ soit fibre par fibre (de g) $\leq c$. Posons $f = g \circ i$. Soit K un complexe borné de $\mathcal{O}_Z$-modules à cohomologie cohérente dont la cohomologie est à support dans X , d'amplitude plate finie sur $\mathcal{O}_Z$ (où, ce qui est équivalent, sur O_Y). Nous aurons besoin de la variante ci-après de l'homomorphisme trace.

PROPOSITION 3.5.6.- Il existe un et un seul homomorphisme trace.

$$Tr_{f,K} : R^{2(N-C)}f_!\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

compatible avec le changement de base, la localisation sur Z et telle que, lorsque Y est un point et X irréductible on ait

$$Tr_{f,K} = l_K(X).Tr_{X_{red}}$$

où $l_K(X)$ est la longueur générique de K sur X et $Tr_{X_{red}}$ la trace usuelle (3.1.3).

L'unicité est claire. Quitte à se localiser sur Z, on peut trouver une projection $u : Z \longrightarrow T$ de Z sur un Y-espace $T \xrightarrow{\pi} Y$ lisse sur Y, telle que $u \circ i : X \longrightarrow T$ soit un morphisme fini surjectif.

Pour tout $x \in X$, posons $m_K(x) = \sum\limits_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_T}{\otimes}} \mathbb{C})$. On constate alors qu'il existe un morphisme de faisceaux et un seul

$$Tr_{u \circ i,K} : u \circ i_*\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui induit sur chaque fibre en $t \in T$ un homomorphisme

$$\bigoplus_{x \mapsto t} \mathbb{Z}_x \longrightarrow \mathbb{Z}_t \quad \text{du type} \quad (a_x)_{(x \mapsto t)} \mapsto \sum_{x \mapsto t} a_x m_K(x) \ .$$

On pose alors $Tr_{f,K} = Tr_\pi \circ \pi_!(Tr_{u \circ i,K})$, où Tr_π est le morphisme trace ordinaire. Le morphisme cherché est ainsi défini au moins localement sur Z. Pour globaliser, on procède comme en [9] (XVIII 2.9).

On remarquera que, lorsque K provient d'un complexe de O_X-modules, le morphisme $T_{f,K}$ défini ici n'est autre que celui défini en 3.1.3.

3.5.7. Soient $X \overset{i}{\hookrightarrow} Z \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes d'espaces analytiques, tels que Z soit lisse sur Y, que i soit un plongement fermé et que, fibre par fibre, X soit de codimension $\geqslant C$. Soit K un complexe borné de O_Z-modules à cohomologie cohérente, d'amplitude plate finie, dont la cohomologie est à support dans X. Pour tout $z \in Z$, notons $N(z)$ la dimension relative de Z sur Y

en z . La fonction $N : z \longmapsto N(z)$ est localement constante sur Z . Rappelons que, par définition, on a :

3.5.8. $$H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X[-2c],\mathbb{Z})$$

où le terme de droite est un Hom dans la catégorie dérivée et où le crochet désigne le décalage des complexes. Par ailleurs, on a

3.5.9. $$g^!\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[2N]$$

et par suite

3.5.10. $$H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X[2N-2C],g^!\mathbb{Z}) \quad .$$

D'après le théorème de dualité pour le morphisme g [10] , on a un isomorphisme canonique :

3.5.11. $$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, g^!\mathbb{Z}[2C-2N]) = \mathrm{Hom}(Rg_!(\mathbb{Z}_X[2N-2C]),\mathbb{Z} \quad .$$

De plus on a, en posant $f = g \circ i$,

3.5.12. $$Rg_!(\mathbb{Z}_X[2N-2C]) = Rf_!(\mathbb{Z}[2N-2C]) \quad ,$$

d'où un isomorphisme canonique

3.5.13. $$H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(Rf_!\mathbb{Z}[2N-2C],\mathbb{Z}) \quad .$$

On déduit du morphisme trace, défini en 3.5.6, un morphisme de complexes encore noté :

3.5.14. $$\mathrm{Tr}_{f,K} : Rf_!\mathbb{Z}[2N-2C] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire un élément $\mathrm{Tr}_{f,K} \in \mathrm{Hom}(Rf_!\mathbb{Z}[2N-2C], \mathbb{Z})$.

DÉFINITION 3.5.15.- <u>On appelle classe fondamentale cohomologique de</u> X <u>dans</u> Z <u>pondérée par</u> K , <u>et on note</u> $cl(X,K)$ <u>l'élément de</u> $H^{2c}_X(Z,\mathbb{Z})$ <u>dont l'image par l'isomorphisme</u> 3.5.13 <u>est</u> $\mathrm{Tr}_{f,K}$.

On pose $cl(X,\mathcal{O}_X) = cl(X)$ et on l'appelle la classe fondamentale (cohomologique) de X dans Z .

THÉORÈME 3.5.16.- 1) $cl(X,K)$ <u>ne dépend que de</u> $i : X \hookrightarrow Z$ <u>et de</u> K <u>et non de la projection</u> $g : Z \longrightarrow Y$.

2) <u>Soit un diagramme commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

<u>avec</u> Z' <u>lisse sur</u> Y' . <u>Si</u> $X' = u^{-1}(X)$ <u>est encore fibre par fibre de codimension</u> $\geqslant C$, <u>alors</u>

$$cl(u^{-1}(X'), \mathbb{L}u^*K) = u^*cl(X,K) \quad .$$

3) <u>Soient de plus</u> $X' \xhookrightarrow{i'} Z' \xrightarrow{g'} Y^-, K'$ <u>des données comme</u> 3.5.7. <u>Alors</u> :

$$cl(X' \times_Y X, K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K') = cl(X,K) \cup cl(X',K') \quad .$$

4) <u>Soient</u> $X'' \subset Z$ <u>fibre par fibre de codimension</u> C'' , K'' <u>un complexe borné de</u> O_Z<u>-modules, d'amplitude plate finie, à cohomologie cohérente, dont la cohomologie est à support dans</u> X'' . <u>Supposons que</u> $X \cap X''$ <u>soit fibre par fibre de codimension</u> $\leqslant C + C''$. <u>Alors</u> :

$$cl(X \cap X'', K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K'') = cl(X,K) \cup cl(X'',K'') \quad .$$

Montrons que 2) $\Rightarrow$ 1) . Par changement de base on peut en vertu de 2) supposer Z réduit. Soient $g_i : Z \longrightarrow Y_i$, $i = 1,2$, deux projections et V_i l'ouvert des points lisses de Y_i . En vertu de 3.5.3, on peut se borner à vérifier l'égalité des classes correspondantes après restriction à $g_1(V_1) \cap g_2(V_2)$. On peut donc supposer Y_1 et Y_2 lisses. Mais alors Z est lisse et en vertu de 2), les classes correspondantes sont toutes deux égales à la classe relative à la projection de Z sur un point.

Montrons que 2) et 3) $\Rightarrow$ 4) . Il suffit, en effet, d'appliquer 2) au diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "g"'] & Z \times_Y Z \arrow[d, "g \times_Y g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

où δ est le morphisme diagonal.

Démontrons 3). Après quelques manipulations formelles, on constate que cela revient à montrer que $Tr_{f \times_Y f', K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K'} = Tr_{f,K} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Tr_{f,K'}$, ce qui se vérifie immédiatement. Il reste à démontrer 2).

Nous le ferons dans trois cas particuliers. Tout d'abord, lorsque le diagramme commutatif de 2) est cartésien, l'égalité cherchée est vraie car $Tr_{f,K}$ commute au changement de base. Supposons maintenant que le morphisme $g : Z \longrightarrow Y$ se factorise en deux morphismes lisses $Z \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h} Y$ et montrons que la classe relative à g est égale à la classe relative à g' (cas particulier de 2)). Posons $f' = g' \circ i$ et notons N' la dimension relative de Z' sur Y . D'après 3.5.15, l'égalité des classes équivaut à l'égalité des morphismes

$$Rf'_!(Tr_{f',K}[N']) \quad \text{et} \quad Tr_{f,K} \ ,$$

égalité qui se vérifie sur les faisceaux de cohomologie de degré maximum i.e.

3.5.17. $$R^{N'} f'_!(Tr_{f',K}) = Tr_{f,K} \ .$$

L'égalité 3.5.17 se vérifie fibre par fibre et comme $Tr_{f,K}$ commute au changement de base (3.5.6), on peut supposer que Y est un point. Par additivité, on peut alors supposer que K est un faisceau cohérent sur X_{red} . Mais alors les morphismes traces considérés ont été définis en 3.1.3 et 3.5.17 résulte de VAR 3). En dernier lieu, supposons maintenant que u soit un plongement fermé et que $Y = Y'$. Comme la vérification de 2) est locale sur Z (3.5.3), on peut supposer qu'il existe un morphisme lisse $g' : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d \times Y$ tel que $g = pr_2 \circ g'$ et que Z' se déduise de g' par le changement de base donné par la section nulle $s : Y \longrightarrow \mathbb{C}^d \times Y$:

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "g'"] & \\
Y \arrow[r, hook, "s"] & \mathbb{C}^d \times Y \arrow[r, "pr_2"] & Y
\end{tikzcd} \ .$$

La classe associée à g et alors la classe associée à g' d'après ce qui précède et, par changement de base, on obtient l'égalité cherchée. Dans le cas général on se ramène tout d'abord par changement de base au cas $Y' = Y$. Puis on factorise u en utilisant le graphe, en un plongement fermé suivi d'une projection. Le cas du plongement fermé a été traité précédemment. Examinons le cas de la projection. On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} Z' \times_Y Z & \xrightarrow{pr_2} & Z \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y & \end{array}$$

et il s'agit de montrer que $cl(Z' \times_Y X, \mathbb{L}pr_2^* K) = pr_2^* cl(X,K)$. Or on a d'après 3), $cl(Z' \times_Y X, \mathbb{L}pr_2^* K) = cl(Z' \times_Y X, O_{Z'} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} K) = cl(Z') \sqcup cl(X,K)$ et on constate immédiatement que $cl(Z') \in H^0(Z',\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est égale à 1 et que $cl(Z') \sqcup cl(X,K) = pr_2^* cl(X,K)$, d'où le théorème.

3.5.18. Etudions maintenant la relation entre la classe de cohomologie fondamentale et la classe d'homologie fondamentale. Reprenons les hypothèses et notations de 3.5.7. Soit Φ une famille de supports dans X . Rappelons qu'on a entre les complexes dualisant la relation $\mathcal{T}_X = i^! \mathcal{T}_Z$. Par suite le cup-produit par $cl(X,K) \in H_X^{2c}(Z,\mathbb{Z})$ envoie $H_p^{\Phi}(Z,\mathbb{Z}) = H_{\Phi}^{-p}(Z,\mathcal{T}_Z)$ dans

$$H_{p-2c}^{\Phi \cap X}(X,\mathbb{Z}) = H_{\Phi \cap X}^{-p+2c}(X,\mathcal{T}_X) = H_{\Phi \cap X}^{-p+2c}(X,i^! \mathcal{T}_Z) = H_{\Phi \cap X}^{-p+2c}(Z,\mathcal{T}_Z) \quad .$$

Ce cup-produit est appelé, dans ce cas particulier, le cap-<u>produit</u> et est noté

3.5.19. $$\cdot \cap cl(X,K) : H_p^{\Phi}(Z,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-2c}^{\Phi \cap X}(X,\mathbb{Z}) \quad .$$

En particulier, lorsque Φ est la famille des fermés d'un sous-espace fermé $W \subset Z$, on a un homomorphisme :

3.5.20. $$\cdot \cap cl(X,K) : H_p(W,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-2c}(X \cap W,\mathbb{Z}) \quad .$$

Soit M un complexe borné de O_W-modules à cohomologie cohérente d'amplitude plate finie sur O_Z , et supposons que K soit un complexe de O_X-modules. Le complexe $M \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}} K$ est alors un complexe borné à cohomologie cohérente de $O_{W \cap X}$-modules. Par suite les classes fondamentales d'homologie $[W,M] \in H_{2\dim W}(W,\mathbb{Z})$ et $[W \cap X, M \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}} K] \in H_{2\dim W \cap X}(W \cap X,\mathbb{Z})$ sont définies

(3.3.3).

COROLLAIRE 3.5.21.- <u>Si</u> $W \cap X$ <u>est fibre par fibre de codimension</u> $\geq C$ <u>dans</u> W, <u>alors on a</u> :

$$[W,M] \cap \mathrm{cl}(X,K) = [W \cap X, M \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K] \quad .$$

Supposons d'abord que $W = Z$ et $M = O_Z$. Posons $n = \dim Y$. Les classes $[Z,O_Z]$ et $\mathrm{cl}(X,K)$ s'interprètent comme des morphismes de complexes de faisceaux dans la catégorie dérivée :

3.5.22. $$\mathbb{Z}_X[2N+2n-2c] \xrightarrow{\mathrm{cl}(X,K)[2N+2n]} \mathbb{Z}[2N+2n] \xrightarrow{\quad [Z,O_Z] \quad} \mathcal{T}_Z$$

et le cap-produit s'interprète comme le morphisme

$$\mu \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[2N+2n-2c], \mathcal{T}_X)$$

dont l'image dans

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X[2N+2n-2c], \mathcal{T}_Z)$$

par l'isomorphisme de dualité $\Delta(i)$ pour le plongement i, est le morphisme composé. En appliquant le foncteur $Rg_!$ au diagramme 3.5.22 et en complétant par des morphismes canoniques d'adjonction, on obtient un diagramme commutatif (cf. 3.5.8 et 3.3.3) :

3.5.23. $$\begin{tikzcd} Rg_!\mathbb{Z}_X[2N+2n-2c] \arrow[r, "Rg_!\mathrm{cl}(X,K)"] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}_{f,K}[2n]"'] & Rg_!\mathbb{Z}[2N+2n] \arrow[r, "Rg_!{[Z,O_Z]}"] \arrow[d] & Rg_!\mathcal{T}_Z \arrow[d] \\ & {[2n]} \arrow[r, "{[Y,O_Y]}"] & \mathcal{T}_Y \end{tikzcd}$$

de sorte que l'image de $[Z,O_Z] \circ (\mathrm{cl}(X,K)[2N+2n])$ par l'isomorphisme d'adjonction $\Delta(g)$ pour le morphisme g, dans $\mathrm{Hom}(Rg_!\mathbb{Z}_X[2N+2n-2c], \mathcal{T}_Y)$ est $[Y,O_Y] \circ (\mathrm{Tr}_{f,K}[2n])$. Notons π_X (resp. π_Y) la projection de X (resp. Y) sur un point. En appliquant le foncteur $R\pi_{\cdot Y!}$ à la ligne du bas de 3.5.23 et en complétant le diagramme, on obtient un diagramme commutatif (3.1, VAR 3) et 3.3.3) :

3.5.24.
$$\begin{tikzcd}
R_{Y!}Rg_!\mathbb{Z}_X[2N+2n-2c] \arrow[r, "R\pi_{Y!}Tr_{f,K}{[2n]}"] \arrow[d, "\wr"] & R\cdot_!\mathbb{Z}[2n] \arrow[r, "R\pi_{Y!}({[Y,O_Y]})"] \arrow[d, "Tr_{\pi_Y}"'] & R\pi_{Y!}(\mathcal{T}_Y) \arrow[dl] \\
R\pi_{X!}\mathbb{Z}[2N+2n-2c] \arrow[r, "Tr_{X,K}"] & \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

de sorte que l'image de $[Y,O_Y]\circ(Tr_{f,K}[2n])$ par l'isomorphisme d'adjonction $\Delta(\pi_Y)$ pour le morphisme π_Y, dans $Hom(R\pi_{X!}\mathbb{Z}[2N+2n-2c],\mathbb{Z})$ est $Tr_{X,K}$. Comme on a $\Delta(\pi_Y)\circ\Delta(g)\circ\Delta(i) = \Delta(\pi_X)$, μ est la classe $[X,K]$ (3.3.3).

Dans le cas général, on a

$$[W,M]\cap cl(X,K) = ([Z]\cap cl(W,M))\cap cl(X,K) \quad ,$$

d'après ce qui précède ; puis

$$([Z]\cap cl(W,M))\cap cl(X,K) = [Z]\cap(cl(W,M)\cup cl(X,K))$$

car l'homologie est un module sur la cohomologie. D'après 3.5.20, on a donc :

$$[Z]\cap(cl(W,M)\cup cl(X,K)) = [Z]\cap cl(W\cap X, M\overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}}K) \quad ,$$

et à nouveau :

$$[Z]\cap cl(W\cap X, M\overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}}K) = [W\cap X, M\overset{\mathbb{L}}{\underset{O_Z}{\otimes}}K] \quad ,$$

d'où le corollaire.

3.6. Spécialisation de la classe fondamentale.

Soient X un espace analytique, $D\subset\mathbb{C}$ le disque unité, $\pi : X\longrightarrow D$ une fonction analytique. On suppose dans la suite de ce numéro que les fibres X_z, $z\in D$, de π sont de dimension $\leq d$ et que le faisceau $R^{2d}\pi_!\mathbb{Z})$ est localement constant sur $D-\{0\}$. Rappelons que, pour tout $z\in D$, la fibre $(R^{2d}\pi_!\mathbb{Z})_z$ n'est autre que $H^{2d}_c(X_z,\mathbb{Z})$. Donnons-nous un point $g\in D$, $g\neq 0$ qui ne variera pas dans la suite (un point "général"). On a deux morphismes d'évaluation de sections de faisceaux

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}_{\Psi}(X,\mathbb{Z}) = \Gamma(D,R^{2d}\pi_!\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e_g} & H^{2d}_c(X_g,\mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle e_o} & & \\ H^{2d}_c(X_o,\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

où Ψ est la famille des fermés de X propres sur D .

Comme $R^{2d}{}_!\mathbb{Z}$ est localement constant en dehors de $0 \in D$, e_o est une <u>bijection</u>. En passant aux duaux à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on obtient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}_{\Psi}(X,\mathbb{Z})^* & \xleftarrow{e^*_g} & H_{2d}(X_g,\mathbb{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle e^*_o} & & \\ H_{2d}(X_o,\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

DÉFINITION. 3.6.1.- <u>L'homomorphisme</u>

$$s = (e^*_o)^{-1} \; e^*_g : H_{2d}(X_g,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{2d}(X_o,\mathbb{Z})$$

<u>est appelé l'homomorphisme de spécialisation</u>.

Soit K un complexe borné de O_X-modules à cohomologie cohérente. Pour tout $z \in D$, posons $K_Z = K \overset{\mathbb{L}}{\underset{O_z}{\otimes}} \mathbb{C}$; c'est un complexe borné de O_{X_z}-modules à cohomologie cohérente.

PROPOSITION 3.6.2.- <u>On a</u> :

$$s([X_g,K_g]) = [X_o,K_o]$$

Notons $\pi^{-1}(c)$ la famille des fermés de X dont la projection est contenue dans un compact de D . Si $F \in \pi^{-1}(c)$ et $G \in \Psi$, alors $F \cap G$ est un compact de X . On a par suite un cap-produit.

$$H^{\pi^{-1}(c)}_{2d}(X,\mathbb{Z}) \otimes H^{2d}_{\Psi}(X)\mathbb{Z}). \longrightarrow H^{c}_{o}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

d'où un homomorphisme

$$H^{\pi^{-1}(c)}_{2d}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{u} H^{2d}_{\Psi}(X,\mathbb{Z})^* \quad .$$

On a de même, pour tout $z \in D$, un homomorphisme

$$H_{2d}(X_z,\mathbb{Z}) \xrightarrow{u_Z} H^{2d}_c(X_z,\mathbb{Z})^*$$

qui est d'ailleurs un isomorphisme. Notons $i_Z : X_z \longrightarrow X$ l'inclusion. La formule de projection

$$i_{z*}(\beta) \cap \alpha = i_{z*}(\alpha \cap i^*_z(\beta))$$

entraîne que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{2d}(X_z,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{u_Z} & H^{2d}_c(X_z,\mathbb{Z})^* \\ \downarrow i_{z*} & & \downarrow (i^*_z)^* \\ H^{\pi^{-1}(c)}_{2d}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{u} & H^{2d}_\Psi(X,\mathbb{Z})^* \end{array} \tag{3.6.3}$$

est commutatif. De plus la compatibilité de l'homomorphisme de Gysin avec le changement de base entraîne que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & [X_z,K_z] \\ \mathbb{Z} = H_o(pt) & \longrightarrow & H_{2d}(X_z,\mathbb{Z}) \\ \Vert\ \downarrow i_{z*} & & \downarrow i_{z*} \\ \mathbb{Z} = H^c_o(D) & \xrightarrow{\pi^*_K} & H^{\pi^{-1}(c)}_{2d}(X,\mathbb{Z}) \end{array} ,$$

est commutatif. On a donc, en remarquant que $(i^*_z)^* \circ u = e^*_z$,

$$e^*_z[X_z,K_z] = u.i_{z*}[X_z,K_z] = u\pi^*_K(1) \quad ;$$

d'où

$$e^*_o[X_o,K_o] = e^*_g[X_g,K_g] \quad .$$

PROPOSITION 3.6.4.- <u>Si les faisceaux</u> $R^{2d-1}\pi_!\mathbb{Z}$ <u>et</u> $R^{2d-2}\pi_!\mathbb{Z}$ <u>sont localement constants sur</u> $D - \{0\}$, <u>le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} H_{2d}(X_o,\mathbb{Z}) \arrow[dr, "i_{o*}"'] & & H_{2d}(X_g,\mathbb{Z}) \arrow[ll, "s"'] \arrow[dl, "i_{g*}"] \\ & H^{\pi^{-1}(c)}_{2d}(X,\mathbb{Z}) & \end{tikzcd}$$

<u>est commutatif et</u> i_{o*} <u>est un isomorphisme.</u>

Démontrons que i_{o*} est un isomorphisme. Posons $U = X - X_o$, $V = D - \{0\}$. D'après 1.3.1, i_{o*} est isomorphisme si $H_j^{\pi^{-1}(c)\cap U}(U,\mathbb{Z}) = 0$ pour $j = 2d+1$, 2d . On a $H_j^{\pi^{-1}(c)\cap U}(U,\mathbb{Z}) = H^{-j}_{\pi^{-1}(c)\cap U}(U,\mathcal{T}_X) = H^{-j}_{c(D)\cap V}(V,R\pi_*\mathcal{T}_X)$.

D'après le théorème de dualité pour le morphisme π , on a

$$R\pi_*\mathcal{T}_X \simeq R\pi_* R\mathcal{H}om(\mathbb{Z},\mathcal{T}_X) \simeq R\mathcal{H}om(R\pi_!\mathbb{Z},\mathcal{T}_D) \quad .$$

Le complexe $R\mathcal{H}om(R\pi_!\mathbb{Z},\mathcal{T}_D)$ a :

- une cohomologie nulle en degré $< -2d-2$;
- et une cohomologie localement constante en degré $-2d-2$, $-2d-1$, $-2d$.

L'assertion résulte alors du lemme suivant :

LEMME 3.6.5.- Soit F un faisceau localement constant sur $V = D - \{0\}$. Alors $H^p_{c(D)\cap V}(V,F) = 0$ pour tout p .

Par définition on a $H^p_{c(D)\cap V}(V,F) = H^p_c(D,Ri_*F)$ où $i : V \hookrightarrow D$ est l'injection. Notons $\bar{D}$ l'adhérence de D dans $\mathbb{C}$ et $\nu : V \hookrightarrow \bar{D}$ l'injection. La suite exacte de cohomologie à supports compacts donne alors :

$$0 \longrightarrow H^0_{c(D)\cap V}(V,F) \longrightarrow H^0(V,F) \longrightarrow H^0(\partial\bar{D},R\nu_*F/\partial\bar{D}) \longrightarrow H^1_{c(D)\cap V}(V,F)$$
$$\longrightarrow H^1(V,F) \longrightarrow H^1(\partial\bar{D},R\nu_*F/\partial\bar{D}) \longrightarrow H^2_{c(D)\cap V}(V,F) \longrightarrow 0 \quad .$$

Comme les homomorphismes $H^p(V,F) \longrightarrow H^p(\partial\bar{D},R\nu_*F/\partial\bar{D})$ sont bijectifs on a bien $H^p_{c(D)\cap V}(V,F) = 0$, d'où le lemme.

Achevons la démonstration de la proposition. Avec les notations de (3.6.3), on a $e_o^* = (i_o^*)\circ u_o$ et la commutativité de (3.6.3) entraîne $e_o^* = u\circ i_{o*}$. Comme i_{o*} et e_o^* sont des isomorphismes, u est un isomorphisme. On a alors $i_{o*}\circ s = i_{o*}\circ i_{o*}^{-1}\circ u^{-1}\circ e_g^* = u^{-1}\circ e_g^*$ et, d'après (3.6.3), $i_{o*}\circ s = i_{g*}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. ANGENIOL - Exposé n°7 du présent séminaire.

[2] A. BOREL et J.C. MOORE - Homology theory for locally compact spaces, Mich. Math. J., t.7, 1960, p.137-159.

[3] A. BOREL et al. Seminar on transformation groups, An. of Math. Studies n°46, Princeton Univ. Press. 1960.

[4] H. CARTAN - Séminaire E.N.S. 48-49 et 50-51.

[5] H. HIRONAKA - Subanalytic sets in "Number theory, algebraic geometry and commutative algebra", Volume in honor of Y. Akizuki (Kirokuniya publ. 1973).

[6] J.P. JOUANOLOU - Thèse, Faculté des Sciences Strasbourg.

[7] G. LAUMON - Exposé n°8 du présent séminaire.

[8] S.G.A. 4 - Springer Lecture Notes n°269, 270, 305.

[9] S.G.A. 6 - Springer Lecture Notes n°225.

[10] J.L. VERDIER - Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Séminaire Bourbaki, 18e année 65/66, n°300.