Astérisque

ARMAND BOREL

Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples

Astérisque, tome 32-33 (1976), p. 73-112

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__32-33__73_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 32-33 (1976)

COHOMOLOGIE DE SOUS-GROUPES DISCRETS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES SEMI-SIMPLES

Armand Borel

Cet exposé est consacré à quelques résultats et problèmes concernant la cohomologie de certains sous-groupes discrets de groupes semi-simples, à coefficients dans un espace vectoriel complexe. On y insiste principalement sur le cas de sous-groupes cocompacts et les liens existant entre la cohomologie d'Eilenberg-MacLane du sous-groupe discret Γ, la cohomologie d'Eilenberg-MacLane continue du groupe ambiant G et la décomposition de $L^2(G/\Gamma)$ en G-modules irréductibles. On considère successivement trois cas, dont le dernier englobe les deux premiers: G semi-simple réel (§§1, 2), G semi-simple p-adique (3.1, 3.2), et G produit de groupes d'un de ces deux types (3.3 à 3.9). L'exemple le plus important de la situation du §3, et en fait presque le cas général vu [29], est celui de sous-groupes S-arithmétiques d'un groupe semi-simple défini sur un corps de nombres k et anisotrope sur k; il fait l'objet du §4. En ce qui concerne les groupes arithmétiques ou S-arithmétiques en général, on s'est borné à quelques remarques dans le §5, surtout pour signaler quelques problèmes naturellement suggérés par les résultats du §4. Cet article est ainsi en large partie complémentaire de [4]. En cela, il diffère assez sensiblement de l'exposé oral, de titre "Cohomologie réelle des groupes arithmétiques", dans lequel on s'était borné aux groupes réels et on avait aussi passé en revue des résultats sur les sous-groupes arithmétiques non cocompacts de groupes semi-simples résumés dans [4] et des problèmes ouverts les concernant.

Deux exposés sur la cohomologie continue faits par G. Zuckerman à l'IAS au printemps 1975, et des discussions avec J-P. Serre m'ont été très utiles pour la préparation de cet article. Je les en remercie vivement.

§0. Notations.

0.1. Si un groupe G opère sur un ensemble A, alors A^G est l'ensemble des points fixes de G.

0.2. Les variétés réelles sont C^∞. Si X est une variété réelle, et V un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors $C^\infty(X)$ (resp. $C^\infty(X; V)$) est l'espace des fonctions C^∞ sur G, à valeurs complexes (resp. dans V) et Ω_X (resp. $\Omega_X(V)$) l'espace des formes différentielles C^∞ sur X à valeurs complexes (resp. dans V). On a donc des isomorphismes canoniques

$$C^\infty(X) \otimes V = C^\infty(X; V) \qquad \Omega_X \otimes V = \Omega_X(V) \ .$$

0.3. Si X est un espace localement compact totalement discontinu et V est comme ci-dessus, alors $C^\infty(X)$ (resp. $C^\infty(X; V)$) est l'espace des fonctions localement constantes sur X à valeurs complexes (resp. dans V).

0.4. Si G est un groupe localement compact unimodulaire, alors $\hat{G}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G muni de la topologie de Fell (cf. p. ex. [14; 38]).

Si π est une représentation unitaire, M_π désigne l'espace de π et

$[\pi] \in \hat{G}$ sa classe. On ne distinguera pas toujours soigneusement entre une représentation et sa classe et si $\pi \in \hat{G}$, on écrira aussi M_π pour l'espace d'un élément de π; on procèdera de même pour d'autres notions qui ne dépendent que de la classe d'équivalence, comme le caractère infinitésimal si G est de Lie.

0.5. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple, dont la composante neutre G^o est d'indice fini dans G et de centre fini. Si (π, E) est une représentation continue de G dans un espace vectoriel topologique complexe, on note E^∞ l'espace des vecteurs différentiables de E. Muni d'une topologie convenable, c'est un G-module différentiable et l'injection $E^\infty \longrightarrow E$ est continue. C'est aussi un module sur l'algèbre enveloppante $U(\underline{g})$ de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G. Supposons que G opère trivialement sur le centre $Z(\underline{g})$ de $U(\underline{g})$, via la représentation adjointe. Si π est unitaire et irréductible, il existe alors un caractère χ_π de $Z(\underline{g})$ tel que $\pi(z) = \chi_\pi(z).\mathrm{Id}$ sur E^∞ si $z \in Z(\underline{g})$, appelé le <u>caractère infinitésimal</u> de π. L'hypothèse faite sur G est satisfaite si l'image de G dans $\mathrm{Aut}(\underline{g} \otimes \mathbb{C})$ par la représentation adjointe est contenue dans $\mathrm{Ad}(\underline{g} \otimes \mathbb{C})$; cela a lieu en particulier si G est d'indice fini dans le groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe (en topologie de Zariski) défini sur $\mathbb{R}$, qui est le cas principalement en vue ici.

0.6. Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, dénombrable à l'infini, et soit (π, E) une représentation complexe continue de G. On note E^∞ l'ensemble des vecteurs fixes par un sous-groupe ouvert de G. Muni de la topologie discrète, c'est un G-module continu. La représentation (π, E) est admissible si E^U est de dimension finie pour tout sous-groupe ouvert U de G, et E^∞ est dense dans E.

0.7. Soient G un groupe localement compact unimodulaire et Γ un sous-groupe discret. On dit que Γ est cocompact (resp. de covolume fini) si G/Γ est compact (resp. de volume fini par rapport à toute mesure invariante).

0.8. Soient k un corps et $\underline{G}$ un groupe algébrique semi-simple défini sur k. On rappelle que les tores (algébriques) définis et déployés sur k maximaux de $\underline{G}$ sont conjugués par des éléments du groupe $\underline{G}(k)$ des points rationnels sur k de $\underline{G}$. Leur dimension commune est le k-rang $rg_k\underline{G}$ de $\underline{G}$ [6: §§4, 5].

§1. Remarques générales.

Dans ce §, sauf en 1.7, G est un groupe de Lie réel semi-simple, ayant un nombre fini de composantes connexes, dont la composante neutre G^o a un centre fini, K est un sous-groupe compact maximal de G, $X = K\backslash G$ et Γ est un sous-groupe discret de G.

1.1. Soit (r, V) une représentation complexe de dimension finie de G. Nous nous intéresserons à l'espace de cohomologie d'Eilenberg-MacLane $H^*(\Gamma; V)$ de Γ à coefficients dans le Γ-module V. Il est susceptible d'une définition purement algébrique, mais qui est en général assez peu utile. Aussi commencerons-nous par passer en revue d'autres interprétations de cet espace.

1.2. Le groupe Γ opère proprement sur X, qui est contractile. Supposons tout d'abord Γ sans torsion. Alors il opère librement et X/Γ est une variété. Le comorphisme $\sigma^o : \Omega_{X/\Gamma} \longrightarrow \Omega_X$ associé à la projection $\sigma : X \longrightarrow X/\Gamma$ identifie $\Omega_{X/\Gamma}$ à Ω_X^Γ. De plus (r, V) définit un système local (faisceau localement constant) $\widetilde{V}$ sur X/Γ, et σ^o induit un isomorphisme de l'espace $\Omega_{X/\Gamma}(\widetilde{V})$ des formes à valeurs dans $\widetilde{V}$ sur l'espace $\Omega_X(V)^\Gamma$. Vu que X est contractile, le théorème de de Rham entraîne les isomorphismes

$$H^*(\Gamma; V) = H^*((\Omega_X(V)^\Gamma) = H^*(X/\Gamma; \widetilde{V}) \quad . \tag{1}$$

Si Γ a de la torsion, alors le quotient X/Γ est une "V-variété" et $\widetilde{V}$ est un faisceau non nécessairement localement constant, mais ces égalités restent vraies.

1.3. Soit $(X_j)_{1 \leq j \leq N}$, où $N = \dim G$, une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à droite sur G. On suppose que, à l'origine, les X_j $(n = \dim X < j \leq N)$ (resp. $1 \leq j \leq n$) forment une base de l'algèbre de Lie $\underline{k}$ de K (resp. du complément orthogonal $\underline{p}$ de $\underline{k}$ dans l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G par rapport à la forme de Killing). Soit (ω^j) la base duale de l'espace des 1-formes invariantes à droite sur G. On envisage aussi les X_j et ω^j comme des champs de tenseurs sur G/Γ. Soit $\pi : G/\Gamma \longrightarrow X/\Gamma$ la projection naturelle. A $\omega \in \Omega_X^d(V)^\Gamma$ on associe la forme ω^o sur G définie par

(1) $$x \longmapsto r(x^{-1})\pi^{o}(\omega)(x)\ , \qquad (x \in G)\ .$$

On peut écrire

(2) $$\omega^{o} = \Sigma_I \tau_I^{o} \omega^{I}\ ,$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_d\}$, $(1 \leqq i_1 < \ldots < i_d \leqq n)$ et

(3) $$\omega^{I} = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_d}\ ,\ \tau_I^{o} \in C^{\infty}(G/\Gamma,\ V)\ .$$

Soit $A^{o}(G, \Gamma, V)$ l'espace des formes ainsi obtenues.

On envisage $C^{\infty}(G/\Gamma; V) = C^{\infty}(G/\Gamma) \otimes V$ comme un G-module via translations à gauche et r. Soit $C^{*}(\underline{g}, \underline{k}; C^{\infty}(G/\Gamma; V))$ l'espace des cochaînes relatives d'algèbre de Lie de $\underline{g}$ mod $\underline{k}$, à coefficients dans $C^{\infty}(G/\Gamma; V)$. Il s'identifie à l'espace des éléments annulés par $\underline{k}$ dans $\mathrm{Hom}_{K^{o}}(\Lambda \underline{p},\ C^{\infty}(G/\Gamma; V))$. Le groupe K opère naturellement sur cet espace, d'où une action naturelle de K/K^{o} sur ce complexe et sa cohomologie. On pose

(4) $$C^{*}(\underline{g},\ K; C^{\infty}(G/\Gamma; V)) = C^{*}(\underline{g},\ \underline{k};\ C^{\infty}(G/\Gamma; V))^{K/K^{o}}\ ,$$

(5) $$H^{*}(\underline{g},\ K; C^{\infty}(G/\Gamma; V)) = H^{*}(\underline{g},\ \underline{k};\ C^{\infty}(G/\Gamma; V))^{K/K^{o}}\ .$$

Des calculs simples (cf. [33: §3]) montrent que $A^{o}(G, \Gamma, V)$ s'identifie canoniquement à $C^{*}(\underline{g},\ K; C^{\infty}(G/\Gamma; V))$, d'où un isomorphisme

(6) $$H^*(\Gamma;\ V) = H^*(\underline{g},\ K;\ C^\infty(G/\Gamma \otimes V)) \ .$$

1.4. Supposons V muni d'une structure d'espace de Hilbert "admissible" i.e. invariante par K et telle que $dr(Y)$ soit hermitien pour $Y \in \underline{p}$, et X de la métrique riemannienne invariante qui, sur $\underline{p}$, est égale à la forme de Killing; on suppose aussi que les X_j $(1 \leq j \leq n)$ forment une base orthonormale de $\underline{p}$ à l'origine. Alors $A_o(G,\ \Gamma,\ V)$ est muni d'un produit scalaire (partiellement défini) donné par

(1) $$(\sigma,\ \tau) = \int_{G/\Gamma} \Sigma_I\, (\sigma_I,\ \tau_I) dx\ , \qquad (\sigma,\ \tau \in A_o^d(G,\ \Gamma,\ V)\ ,$$

où, dans les notations de 1.3(2), (3), on pose

(2) $$\sigma = \Sigma_I \sigma_I \omega^I\ , \qquad \tau = \Sigma_I \tau_I \omega^I \ .$$

Soient δ l'adjoint de la différentiation extérieure d par rapport à ce produit scalaire et $\Delta = \delta d + d\delta$ le laplacien. D'après une formule de Kuga [32: §6] on a

(3) $$(\Delta\omega)_I = (-C + dr(C)).\omega_I \ ,$$

où C est l'opérateur de Casimir et où $-C + dr(C)$ opère sur $C^\infty(G/\Gamma) \otimes V$ par

$$(-C + dr(C))(f \otimes v) = -C.f \otimes v + f \otimes dr(C).v) \qquad (f \in C^\infty(G/\Gamma);\ v \in V) \ .$$

1.5. Soit E un G-module différentiable. Par là on entend ici un espace vectoriel topologique localement convexe, séparé, quasi complet, sur lequel G opère continûment et dont tout élément est un vecteur différentiable. C'est donc aussi un $\underline{g}$-module. Soit $H_d^*(G; E)$ (resp. $H_{ct}^*(G; E)$) l'espace de cohomologie d'Eilenberg-MacLane de G à valeurs dans E, calculé à l'aide de cochaînes différentiables (resp. continues). D'après [20], ces deux espaces sont canoniquement isomorphes et d'après [17]:

$$H^*(\underline{g}, \underline{k}, E) = H_d^*(G^o, E) \quad . \tag{1}$$

Par conséquent, on a aussi

$$H^*(\Gamma; V) = H_{ct}(G; C^\infty(G/\Gamma, V)) = H_d(G; C^\infty(G/\Gamma, V)) \quad , \tag{2}$$

au moins si G est connexe, mais en fait cet isomorphisme peut aussi s'établir directement dans le cadre de la cohomologie continue [13; 20] par un lemme de Shapiro convenable, et cela sans supposer G connexe.

1.6. On sait que $H^*(\underline{g}, \underline{k}; V) = 0$ si V est irréductible non trivial. Supposons le trivial. L'inclusion $\mathbb{C} \hookrightarrow C^\infty(G/\Gamma)$ qui associe à $c \in \mathbb{C}$ la fonction constante égale à c induit donc un homomorphisme

$$H_d^*(G; \mathbb{C}) = H^*(\underline{g}, \underline{k}; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\Gamma; \mathbb{C}) \quad . \tag{1}$$

La construction de [16] de l'isomorphisme de van Est montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_d^*(G;\mathbb{C}) \arrow[rr, "a"] & & H^*(\Gamma;\mathbb{C}) \\ & H^*(\underline{g}, K;\mathbb{C}) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où a est l'homomorphisme de restriction, est commutatif.

1.7. Cas des groupes localement compacts. Une partie de 1.5, 1.6 admet une variante en termes de fonctions continues de portée plus générale, qui englobe aussi les cas considérés dans les §§3, 4, aussi l'indiquons-nous brièvement ici.

Dans ce n^o, on suppose que G est un groupe localement compact dénombrable à l'infini et Γ un sous-groupe discret de G. Admettons pour commencer que (r, V) soit seulement un Γ-module (complexe, de dimension finie). Soit $C(G; V)_\Gamma$ l'ensemble des fonctions continues $f : G \longrightarrow V$ telles que

$$f(x.\gamma) = r(\gamma^{-1}).f(x), \qquad (x \in G;\ \gamma \in \Gamma) \quad . \tag{1}$$

Les Prop. 3, 4 de [13] entraînent l'égalité

$$H^m(\Gamma; V) = H^m_{ct}(G; C(G; V)_\Gamma), \qquad (m \in \mathbb{Z}) \quad . \tag{2}$$

Supposons que (r, V) soit en fait un G-module. Alors

$$C(G; V)_\Gamma \cong C(G/\Gamma; V) \quad , \tag{3}$$

où le membre de droite désigne l'ensemble des fonctions continues sur G/Γ, à valeurs dans V. On retrouve donc 1.5(2), à cela près que C remplace C^∞. L'application $j_o : V \longrightarrow C(G/\Gamma; V)$ qui associe à v la fonction constante sur G/Γ de valeur v induit donc un homomorphisme

$$(4) \qquad j^m : H^m_{ct}(G; V) \longrightarrow H^m(\Gamma; V) \ , \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

qui généralise 1.6(1).

Si G/Γ est compact, j^m est injectif. En effet, dans ce cas G est unimodulaire et G/Γ possède une mesure positive invariante dx; l'ensemble des $f \in C(G/\Gamma; V)$ d'intégrale nulle par rapport à dx est alors un sous-G-module fermé, supplémentaire de $j_o(V)$, et notre assertion résulte de (2).

§2. Sous-groupes discrets cocompacts de groupes réels.

On conserves les hypothèses du §1. On suppose de plus que G opère trivialement sur le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (cf. 0.5) et que Γ est cocompact, (0.7).

2.1. Soit $L^2(G/\Gamma)$ l'espace des fonctions de carré sommable (pour une mesure de Haar) sur G/Γ. C'est un G-module unitaire et $L^2(G/\Gamma)^\infty = C^\infty(G/\Gamma)$. On sait que l'on a une décomposition en somme directe hilbertienne à multiplicités finies

$$(1) \qquad L^2(G/\Gamma) = \widetilde{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}} m(\pi, \Gamma)M_\pi \ ,$$

où $m(\pi, \Gamma)$ désigne donc la multiplicité de π dans $L^2(G/\Gamma)$, d'où aussi une décomposition en somme topologique

$$C^\infty(G/\Gamma) = \widetilde{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}} m(\pi, \Gamma) M_\pi^\infty \quad . \tag{2}$$

2.2. PROPOSITION. Soit V un G-module de dimension finie. On a

$$H^*(\Gamma; V) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m(\pi, \Gamma)\ H^*(\underline{g}, K; M_\pi^\infty \otimes V) \quad . \tag{1}$$

En particulier, l'injection $v \longmapsto 1 \otimes v$ dans V dans $C^\infty(G/\Gamma) \otimes V$ induit un homomorphisme injectif de $H^*(\underline{g}, K; V)$ dans $H^*(\Gamma; V)$.

Vu 1.4 et 2.1(2), le membre de gauche est la cohomologie d'un complexe qui s'écrit comme une somme topologique

$$C^*(\underline{g}, K; C^\infty(G/\Gamma) \otimes V) = \widetilde{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}} C^*(\underline{g}, K; M_\pi^\infty \otimes V) \quad ,$$

et le seul point non évident est le passage de la somme topologique à la somme directe algébrique. Pour cela, il suffit de savoir que l'image de l'opérateur cobord $d : C^{m-1} \longrightarrow (\ker d) \cap C^m$ est fermée. Or d est continu, et son conoyau $H^m(\Gamma : V)$ est de dimension finie, puisque G/Γ est compact; le fait que $\operatorname{Im} d$ est fermée résulte alors du Cor. 2 à la Prop. 4, p. 68 de [8: §4]. Pour cet argument, dans le cadre de la cohomologie continue, cf. [13: Prop. 6]. Une autre démonstration sera donnée plus bas (2.5(1)).

2.3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^m(\underline{g}, K; M_\pi \otimes V)$ s'identifie à un espace de formes harmoniques, i.e. de zéros du laplacien. Supposons V irréductible. Alors, vu 1.5

$$(1)\ \mathrm{Hom}_K(\Lambda^m \underline{p};\ M_\pi^\infty \otimes V) = C^m(\underline{g},\ K;\ M_\pi^\infty \otimes V) = H^m(\underline{g},\ K;\ M_\pi^\infty \otimes V), \quad \text{si } \chi_r(C) = \chi_\pi(C)\ ,$$

où C est l'opérateur de Casimir, et

$$(2) \qquad H^m(\underline{g}, K; M_\pi^\infty \otimes V) = 0\ , \quad \text{si } \chi_\pi(C) \neq \chi_r(C)\ .$$

Joint à 2.2, cela donne la formule suivante, due à Matsushima [30] lorsque G est connexe et $V = \mathbb{C}$:

$$(3) \qquad H^m(\Gamma; V) = \oplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi, \Gamma) \ \mathrm{Hom}_K(\Lambda^m \underline{p}; M_\pi^\infty \otimes V)\ ,$$

la somme étant étendue aux $\pi \in \hat{G}$ tels que

$$(4) \qquad \chi_\pi(C) = \chi_r(C)\ .$$

En fait, d'après D. Wigner (non publié) la somme ne porte que sur les $\pi \in \hat{G}$ tels que

$$(5) \qquad \chi_\pi(z) = \chi_{\check{r}}(z)\ , \qquad \text{pour tout } z \in Z(\underline{g})\ ,$$

où $\check{r}$ est la représentation contragrédiente de r.

La démonstration de Wigner (que je connais grâce à un exposé de G. Zuckerman à l'IAS) se plaçant dans le cadre de l'algèbre homologique, il s'impose de l'esquisser ici.

Vu 1.6(2), on peut aussi écrire 2.2 sous la forme

$$(6) \qquad H^m(\Gamma; V) = \oplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi, \Gamma)\ H_d^m(G; M_\pi^\infty \otimes V) \quad .$$

Notre assertion résulte donc de la proposition plus générale suivante

2.4. PROPOSITION (D. Wigner). Soient $\pi \in \hat{G}$ et (r, V) un G-module irréductible de dimension finie tels que $\chi_{\check{r}} \neq \chi_\pi$. Alors $H_d^m(G; M_\pi^\infty \otimes V) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a soit $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^m \underline{p};\ M_\pi^\infty \otimes V) = 0$ soit $\chi_{\check{r}}(C) \neq \chi_\pi(C)$.

On a

$$H_d^m(G; M_\pi^\infty \otimes V) = \mathrm{Ext}_G^m(\mathbb{C},\ M_\pi^\infty \otimes V) \quad ,$$

où Ext_G^* est calculé dans la catégorie des G-modules différentiables, pour une notion convenable de suite exacte [20]. Vu les égalités

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},\ M_\pi^\infty \otimes V) = (M_\pi^\infty \otimes V)^G = \mathrm{Hom}_G(V^*,\ M_\pi^\infty) \quad ,$$

où V^* est l'espace dual de V, on a aussi

$$H_d^m(G;\ M_\pi^\infty \otimes V) = \mathrm{Ext}_G^m(V^*,\ M_\pi^\infty)) \quad .$$

D'après Yoneda (cf. [28: Chap. III]), ce dernier module est l'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes admises

$$(8)\quad 0 \longrightarrow V^* \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{m-1} \longrightarrow M_\pi^\infty \longrightarrow 0\ ,$$

pour une relation d'équivalence convenable. Si maintenant $\chi_{\check{r}} \neq \chi_\pi$, il existe alors $z \in \mathcal{Z}(\underline{g})$ tel que $\chi_{\check{r}}(z) = 0$, $\chi_\pi(z) = 1$; cet élément définit un endomorphisme de (8), qui est zéro sur V^*, l'identité sur M_π^∞, ce qui entraîne que cette suite exacte représente l'élément zéro de $\mathrm{Ext}_G^m(V^*, M_\pi^\infty)$.

2.5. Remarques. (1) Supposons Γ sans torsion. La somme topologique M' des $M_\pi^\infty \otimes V$, où π parcourt les éléments de $\hat{G}$ tels que $\chi_\pi(C) \neq \chi_r(C)$ est aussi la somme topologique des espaces propres du laplacien Δ correspondant aux valeurs propres non nulles. Comme X/Γ est une variété compacte, ces valeurs propres sont de multiplicité finie et n'ont pas de point d'accumulation fini. Par suite Δ^{-1} est un opérateur continu sur M'. Il s'ensuit alors que $H^m(\underline{g}, K; M') = 0$ ce qui établit (6) à partir de 1.4 et 2.1(2) sans utiliser 2.2, au moins si Γ est sans torsion; sinon, on se ramène à ce cas en prenant un sous-groupe distingué d'indice fini dont l'image dans le groupe adjoint est sans torsion.

(2) Si l'on ne suppose pas que G opère trivialement sur $Z(\underline{g})$, alors le caractère infinitésimal d'une représentation unitaire irréductible est défini sur $Z(\underline{g})^{G/G^o}$; cette algèbre contient toujours l'opérateur de Casimir C, et ce que précède reste valable à condition de remplacer $Z(\underline{g})$ par $Z(\underline{g})^{G/G^o}$.

2.6. La relation entre représentations et cohomologie fournie par 2.2, 2.3 a été notamment exploitée dans l'étude de $H^1(\Gamma; \mathbb{C})$. Supposons G

connexe et simple en tant que groupe de Lie. Soit ℓ le rang de l'espace symétrique X, autrement dit la dimension des sous-algèbres maximales de $\underline{p}$. D'après Kajdan [24; 14] on a $H^1(\Gamma; \mathbb{C})$ si la représentation triviale 1 est un point isolé de $\hat{G}$ et cette condition est satisfaite lorsque $\ell \geq 2$ [24; 38] ou encore si $\ell = 1$ et G est de type $\mathbb{S}\mathbb{p}(n, 1)$, ou $\mathbb{F}_4$ avec sous-groupe compact maximal $\mathbb{S}\mathrm{pin}\ 9$ [25]. Cela implique déjà que dans ce cas $L^2(G/\Gamma)$ ne peut contenir d'élément π par rapport auquel le 1er groupe de cohomologie continue de G est non nul. En fait, on a plus généralement et plus précisément:

2.7. PROPOSITION. (i) <u>Soit</u> $\pi \in \hat{G}$. <u>Alors</u> $H^1_d(G, M^\infty_\pi) = 0$ <u>si</u> π <u>est séparée de la représentation triviale dans</u> $\hat{G}$.

(ii) <u>Si</u> G <u>est connexe de type</u> $\mathbb{S}\mathbb{O}(n, 1)$ (<u>resp</u>. $\mathbb{S}\mathbb{U}(n, 1)$), $\hat{G}$ <u>contient exactement</u> 1 <u>élément (resp</u>. 2 <u>éléments</u>) π <u>tels que</u> $H^1_d(G, M^\infty_\pi) \neq 0$. <u>Dans ces cas</u>, $H^1_d(G, M^\infty_\pi)$ <u>est de dimension</u> 1. <u>De plus</u> π <u>est non tempérée si</u> $n \geq 4$ (<u>resp</u>. $n \geq 2$).

(i) est dû à P. Delorme [15: Th. 3]; vu ce qui a été rappelé plus haut, il s'applique à tout $\pi \in \hat{G}$ si G est connexe simple non compact et non de l'un des types considérés dans (ii). Pour (ii), <u>voir</u> Hotta-Wallach [23] et, en ce qui concerne la dernière assertion, un article de K. Johnson et N. Wallach à paraître aux Trans. A.M.S.; l'article [15] établit aussi (ii) pour $\mathbb{S}\mathbb{O}(n, 1)^o$ et l'annonce en partie pour $\mathbb{S}\mathbb{U}(n, 1)$.

2.8. Cette proposition laisse donc ouverte la possibilité pour G de type $SO(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$ de posséder un sous-groupe Γ cocompact de 1er nombre de Betti non nul. Si G de type $SO(n, 1)$ ce nombre est la multiplicité dans $L^2(G/\Gamma)$ de l'élément π mentionné dans 2.7(ii). Si $n = 2$, on rencontre parmi ces groupes les groupes fondamentaux des surfaces de Riemann de genre $\geqq 2$, donc des Γ de 1er nombre de Betti non nul. Pour $n \leqq 3 \leqq 5$, les premiers exemples ont été donnés par E. B. Vinberg [36]. Plus récemment J. Millson [34] et W. Thurston (non publié) ont construit de tels groupes arithmétiques de congruence pour tout $n \geqq 3$. En fait, Thurston conjecture dans ce cas que tout quotient X/Γ admet un revêtement fini ayant un 1er nombre de Betti non nul. Millson et Thurston obtiennent plus précisément des Γ avec 1er nombre de Betti arbitrairement grand; mais cela résulte aussi d'un principe général simple (4.2), une fois obtenu un groupe de congruence de 1er nombre de Betti non nul.

Si G est de type $SU(n, 1)$, alors X s'identifie à un domaine borné symétrique, l'intérieur de la boule unité dans $\mathbf{C}^n$, et X/Γ est une variété projective compacte. Les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$ des deux éléments mentionnés dans 2.7(ii) sont égales aux dimensions de $H^{1,0}(X/\Gamma)$ et $H^{0,1}(X/\Gamma)$, donc sont égales entre elles [23]. Mais, pour $n \geqq 2$, on ne connait aucun exemple de Γ pour lequel elles sont non nulles. C'est aussi un des cas où l'on ne sait pas si G contient des sous-groupes discrets cocompacts ou de covolume fini non définissables arithmétiquement.

Les résultats précédents et la conjecture de Thurston suggèrent la question suivante:

(*) <u>Soit</u> $\pi \in \hat{G}$ <u>non séparée de la représentation triviale</u>. <u>Existe-t-il un sous-groupe d'indice fini</u> Γ' <u>de</u> Γ <u>tel que</u> $m(\pi, \Gamma') \neq 0$?

Une formulation adélique pour les sous-groupes arithmétiques de congruence sera indiquée en 4.3.

2.9. Supposons G connexe et $\pi \in \hat{G}$ dans la série discrète, ce qui implique que G et K ont même rang, donc aussi que la dimension de G/K est paire. De la conjecture de Blattner, établie dans [19] et 1.5(2), 2.3(1), (2) on tire que

$$\text{(1)} \qquad H_d^m(G, M_\pi^\infty \otimes V) = 0 \quad \text{si} \quad m \neq (\dim X)/2 \quad \text{ou si} \quad \chi_\pi \neq \chi_{\check{r}} ,$$

et que

$$\text{(2)} \qquad H_d^m(G, M_\pi^\infty \otimes V) = \mathbb{C} \quad \text{si} \quad \chi_\pi = \chi_{\check{r}} \quad \text{et} \quad m = (\dim X)/2 .$$

D'autre part, on sait (mais le rédacteur ne connait pas de référence) que si le poids dominant de r est suffisamment régulier, et si π est une représentation unitaire irréductible de caractère infinitésimal égal χ_r, alors π est dans la série discrète. Combinant cela avec 2.3(6), on voit que si le poids dominant de r est suffisamment régulier, alors $H^m(\Gamma; V) = 0$ si $m \neq \dim X/2$ et $\dim H^q(\Gamma; V)$ est la somme des multiplicités des représentations de la série discrète ayant $\chi_{\check{r}}$ pour caractère infinitésimal.

Je dois cette remarque à G. Zuckerman. Lorsque X est un domaine borné symétrique, ce résultat m'a été communiqué il y a plusieurs années par R. P. Langlands.

2.10. Du point de vue représentations, 2.2 montre que l'étude de $H^m(\Gamma; V)$ se subordonne naturellement à deux problèmes plus généraux:

1) <u>Déterminer les</u> $\pi \in \hat{G}$ <u>tels que</u>

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^m \underline{p},\ M_\pi^\infty \otimes V) \neq 0\ ,\quad \chi_\pi = \chi_{\check{r}}\ .$$

D'après un théorème général de Harish-Chandra, on sait que ces π sont en nombre fini. Mais, sauf dans les cas sus-mentionnés, et $G = SU(2, 1)$ [37], ils n'ont pas été déterminés complètement; [23] donne aussi des résultats lorsque X est hermitien symétrique.

2) <u>Déterminer les multiplicités</u> $m(\pi, \Gamma)$.

Une méthode générale pour les étudier est la formule des traces de Selberg. Supposons Γ sans torsion, G connexe, et soit $\pi \in \hat{G}$ un élément intégrable de la série discrète. Soient d_π le degré formel de π et $\nu(G/\Gamma)$ le volume de G/Γ, calculés par rapport à une même mesure de Haar sur G. Alors on a [26]

$$m(\pi, \Gamma) = \nu(G/\Gamma).d_\pi\ . \tag{1}$$

Le membre de gauche peut aussi s'interpréter comme la dimension d'un groupe de cohomologie convenable au moins si π est associée à un poids dominant assez régulier: dans ce cas, si T est un tore maximal de K, le quotient G/T admet une (en fait un nombre fini) structure complexe invariante par G, et $m(\pi, \Gamma)$ est la dimension d'un des groupes de cohomologie de $\Gamma\backslash G/T$ à coefficients dans le faisceau des germes de sections holomorphes d'un fibré holomorphe, les autres groupes étant nuls [35].

Cette égalité n'estpas nécessairement vraie si π est non intégrable, comme l'a tout d'abord signalé Langlands. En effet, si $G = \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ et si π est la représentation de plus petit degré formel de la série discrète holomorphe, alors $m(\pi, \Gamma)$ est le genre g de la courbe X/Γ, mais le membre de droite de (1) est égal à $g-1$ (cf. [37]). Cependant, pour d'autres groupes, il peut y avoir une infinité d'éléments non intégrables de la série discrète pour lesquels (1) est valable; cela se voit en reliant $m(\pi, \Gamma)$ à la dimension d'autres groupes de cohomologie [21, 22].

§3. Groupes p-adiques et groupes mixtes.

3.1. Soit k un corps local ultramétrique de corps résiduel fini. Soient $\underline{L}$ un k-groupe connexe semi-simple et $L = \underline{L}(k)$. Ce dernier est un groupe de Lie sur k, et un groupe topologique localement compact totalement discontinu dénombrable à l'infini pour la topologie associée à celle de k. Soit $\ell = \ell_k(\underline{L})$ le k-rang de $\underline{L}$ (0.8). On sait que L est compact si et seulement si $\ell = 0$, auquel cas $\underline{L}$ est dit anisotrope sur k; cela peut se présenter seulement si le revêtement universel de $\underline{L}$ est isomorphe (sur une extension de k), à un produit de groupes $\mathbf{SL}_n$ [10].

Supposons $\underline{L}$ presque simple sur k et $\ell > 0$. Soient $\underline{\tilde{L}}$ le revêtement universel de L et $\sigma : \underline{\tilde{L}} \longrightarrow \underline{L}$ l'isogénie centrale canonique. Tenant compte de [7: 6.4, 6.14] et du fait que la conjecture de Kneser-Tits est vraie sur un corps local, on voit que $L^o = \sigma(\underline{\widetilde{L}}(k))$ est le groupe dérivé de L, est fermé (ouvert d'indice fini en caractéristique zéro) et que L/L^o est compact commutatif. On utilisera aussi le fait, démontré par J. Tits (non publié), que tout sous-groupe ouvert propre de L^o est compact.

3.2. Soient Γ un sous-groupe discret de L et (r, V) une représentation complexe de dimension finie de Γ. On note $C^\infty(L; V)$ l'ensemble des fonctions localement constantes sur L, à valeurs dans V et on pose

$$(1) \qquad C^\infty(L; V)_\Gamma = \{f \in C^\infty(L; V) \mid f(x.\gamma) = r(\gamma)^{-1}.f(x), \quad (x \in L)\} .$$

Si r est la restriction d'une représentation complexe de L, on a donc un isomorphisme canonique

$$(2) \qquad C^\infty(L/\Gamma; V) = C^\infty(L; V)_\Gamma .$$

On a de nouveau [11]

$$(3) \qquad H^m(\Gamma; V) = H^m_{ct}(L; C^\infty(L; V)_\Gamma) .$$

Supposons dorénavant Γ cocompact et r unitaire. Alors si $f : L \longrightarrow V$ satisfait à la condition de (1), la fonction $x \longmapsto \|f(x)\|$ est invariante à droite par Γ. On note $L^2(L; V)_\Gamma$ l'ensemble de ces éléments qui sont de carré intégrable sur L/Γ. C'est un L-module unitaire admissible et on a comme dans 2.1,

$$(4) \qquad L^2(L, V)_\Gamma = \widetilde{\oplus}_{\pi \in \hat{L}} \; m(\pi, \Gamma) M_\pi ;$$

ce qui, en passant aux éléments différentiables, donne lieu à une somme directe algébrique

$$(5) \qquad L^{\infty}(L, V)_{\Gamma} = \oplus_{\pi\in\hat{L}} \; m(\pi, \Gamma) M_{\pi}^{\infty}$$

de L-modules admissibles (munis de la topologie discrète) d'où, vu (3),

$$(6) \qquad H^{m}(\Gamma; V) = \oplus_{\pi\in\hat{L}} \; m(\pi, \Gamma) \; H_{ct}^{m}(L; M_{\pi}^{\infty}) \quad .$$

Supposons $\underline{L}$ presque simple et simplement connexe. D'après W. Casselman [11] on a $H_{ct}^{m}(L; M_{\pi}^{\infty}) = 0$ sauf si $m = 0$ et π est triviale, ou $\ell > 0$, $m = \ell$ et π est la représentation spéciale, auxquels cas cet espace est de dimension 1.

Si $\underline{L}$ n'est pas simplement connexe, soient $\tilde{\underline{L}}$, σ et L^{o} comme en 3.1. La suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie continue [13: Prop. 5] entraîne donc

$$H_{ct}^{m}(L; M_{\pi}^{\infty}) = (H_{ct}^{m}(L^{o}; M_{\pi}^{\infty}))^{L/L^{o}} \quad .$$

Il s'ensuit, lorsque $\underline{L}$ est presque simple, que ce groupe est nul si $m \neq 0, \ell$, de dimension 1 si $m = 0$ et π est triviale et ne peut être non nul pour $m \neq 0$ que si $m = \ell > 0$ et la restriction de π à L^{o} est somme (nécessairement finie) de représentations spéciales.

On déduit alors de (5) que $H^{m}(\Gamma; V) = 0$ si $m \neq 0, \ell$, que $\dim H^{o}(\Gamma; V)$ est la multiplicité de la représentation triviale dans V, que $\dim H^{\ell}(\Gamma; V)$ est majorée par la multiplicité de la représentation spéciale de L^{o} dans

$C^\infty(L; V)_\Gamma$, et lui est égale si $\underline{\tilde{L}} = \underline{L}$. On a un résultat semblable si $\underline{L}$ n'est pas simple [11], qui est formellement contenu dans 3.7 ci-dessous.

3.3. Nous considérons maintenant un cas qui englobe ceux de 3.2 et du §2. Soit S un ensemble fini. On suppose donné pour chaque $i \in S$ soit un groupe G_i satisfaisant aux hypothèses imposés à G dans les §§1, 2 (cas archimédien), soit un corps local non archimédien k_i de caractéristique zéro, un groupe connexe semi-simple et presque simple $\underline{G}_i$ défini sur k_i et un sous-groupe ouvert G_i du groupe $\underline{G}_i(k_i)$ des points rationnels de $\underline{G}_i$ qui contient le sous-groupe dérivé G_i^o de $\underline{G}_i(k_i)$ (cf. 3.1) (cas ultramétrique). On désigne par S_∞ (resp. S_f) l'ensemble des $i \in S$ correspondants aux cas archimédiens (resp. ultramétriques). Si $S' \subset S$, on note $G_{S'}$ le produit des G_i pour $i \in S'$. On pose de plus

$$(1) \qquad G_\infty = \prod_{i \in S_\infty} G_i , \quad G_f = \prod_{i \in S_f} G_i , \quad G = G_S = G_\infty \times G_f .$$

On note K_∞ un sous-groupe compact maximal de G_∞, X_∞ le quotient $K_\infty \backslash G_\infty$ et $\underline{g}_\infty$ (resp. $\underline{k}_\infty$) l'algèbre de Lie de G_∞ (resp. K_∞). On suppose G non compact. Soient encore

$$(2) \qquad \ell_i = \mathrm{rg}_{k_i} \underline{G}_i , \quad (i \in S_f) , \quad \text{et} \quad \ell = \Sigma_{i \in S_f} \ell_i .$$

Si $S' \subset S$ et $\pi \in \hat{G}_{S'}$, alors π se factorise de façon unique en un produit hilbertien

(3) $\qquad \pi = \widetilde{\otimes}_{i \in S'} \pi_i \ , \qquad\qquad (\pi_i \in \hat{G}_i) \ .$

Lorsque $S' = S$, on écrira aussi

(4) $\qquad \pi = \pi_\infty \widetilde{\otimes} \pi_f \qquad\qquad (\pi_\infty = \widetilde{\otimes}_{i \in S_\infty} \pi_i ; \pi_f = \widetilde{\otimes}_{i \in S_f} \pi_i) \ .$

Si $S' \subset S_f$ et $G_i = G_i^o$ lorsque $\ell_i > 0$ $(i \in S')$, alors $\pi \in G_{S'}$ est dite <u>spéciale</u> si π_i est triviale ou spéciale suivant que G_i est compact ou non, i.e. suivant que ℓ_i est nul ou non.

3.4. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G qui est "irréductible", i.e. tel que la projection $pr_{S'} : G \longrightarrow G_{S'}$ soit injective, et d'image non discrète si $G_{S'}$ n'est pas cocompact, quel que soit $S' \subset S$, $S' \neq \emptyset, S$.

LEMME. <u>Si</u> $S' \subset S$, <u>soient</u> $\Gamma_{S'} = pr_{S'}\Gamma$ <u>et</u> $\overline{\Gamma}_{S'}$ <u>l'adhérence de</u> $\Gamma_{S'}$ <u>dans</u> $G_{S'}$. <u>Soit</u> $S' \subset S$ <u>tel que</u> $G_{S'}$ <u>et</u> $G/G_{S'}$ <u>soient non compacts</u>. <u>Si</u> $S' = \{i\} \subset S_f$, <u>alors</u> $\overline{\Gamma}_{S'}$ <u>contient</u> G_i^o. <u>Si</u> $S' \subset S_\infty$, <u>alors</u> $\overline{\Gamma}_{S'}$ <u>contient le produit des facteurs simples non compacts de</u> $G_{S'}^o$. <u>En particulier</u>, $\overline{\Gamma}_{S'}$ <u>est cocompact dans</u> $G_{S'}$.

Supposons $i \in S_f$. Par restriction des scalaires, on se ramène au cas où $k_i = \mathbb{Q}_p$, où p est la caractéristique résiduelle. Le groupe $\overline{\Gamma}_i$ est alors un sous-groupe de Lie sur $\mathbb{Q}_p$ de G_i [9: §8, n° 2, Thm. 2], non discret, dont l'algèbre de Lie $L(\overline{\Gamma}_i)$ est stable par Γ_i, opérant par la représentation adjointe. Mais Γ_i est Zariski-dense dans $\underline{G}_i(k)$ [39], donc $L(G_i) = L(\overline{\Gamma}_i)$

et $\overline{\Gamma}_i$ est un sous-groupe ouvert de G_i. La projection pr_i induit une application surjective de G/Γ sur $G_i/\overline{\Gamma}_i$, donc $\overline{\Gamma}_i$ n'est pas compact. Notre assertion résulte alors du résultat de Tits mentionné en 3.1.

Si $S' \subset S_\infty$ alors le théorème de densité de [1], appliqué au quotient de $G_{S'}$, par le plus grand sous-groupe invariant compact connexe de $G^o_{S'}$, montre que l'image de $\overline{\Gamma}_{S'}$ dans ce quotient en contient la composante neutre, d'où notre assertion dans ce cas.

Remarque. Le lemme admet une version plus générale dans laquelle Γ est de covolume fini et S' une partie quelconque de S telle que $G_{S'}$ et $G/G_{S'}$ soient non compacts. Sous cette forme, il entraîne immédiatement le théorème d'approximation forte pour les groupes presque simples et simplement connexes sur un corps de nombres qui ne sont pas de type $\mathbf{A}_n$.

3.5. Exactement comme en 2.2, on a de nouveau une décomposition en somme discrète à multiplicités finies

$$L^2(G/\Gamma) = \widetilde{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}}\, m(\pi, \Gamma)M_\pi \quad , \tag{1}$$

où de plus π admet les décompositions 3.3(3), (4).

LEMME. *Supposons* G_∞ *et* G_f *non compacts. Soit* $\pi \in \hat{G}$ *tel que* $M(\pi, \Gamma) \neq 0$ *et que* π_f *soit de dimension finie. Alors* π_∞ *est de dimension finie.*

Nous avons à montrer que $\ker \pi_\infty$ est cocompact, et notre hypothèse équivaut au fait que $N_f = \ker \pi_f$ est cocompact. Le groupe $\Gamma' = \Gamma \cap (G_\infty \times N_f)$ est cocompact dans G, et d'indice fini dans Γ. On a évidemment $(pr_{S_\infty} \Gamma')^- \times N_f = (\Gamma' . N_f)^-$.

M_π est réalisé comme un espace de fonctions sur G, invariantes à droite par Γ, sur lesquelles G opère par translations à gauche. Le groupe N_f opère trivialement à gauche, donc aussi à droite, puisqu'il est normal dans G. Par suite, $\overline{(\Gamma' . N_f)}$ opère trivialement à droite sur M_π et, vu ce qui précède, il en est de même pour $\overline{(pr\, \Gamma')}$. Mais, d'après 3.4, ce dernier groupe contient un sous-groupe H de G^o, normal dans G et cocompact dans G_∞, à savoir le produit des facteurs simples non compacts de G^o_∞. Comme H est distingué, il opère alors aussi trivialement à gauche sur M_π, donc est contenu dans $\ker \pi_\infty$.

Remarque. Un raisonnement semblable, utilisant la remarque de 3.4, montre plus précisément que si $\pi = \widetilde{\otimes}_i \pi_i$ apparait dans $L^2(G/\Gamma)$, et si $i, j \in S$ sont tels que G_i et G_j ne soient pas compacts, alors π_i est de dimension finie si et seulement si π_j l'est.

3.6. On dira qu'un sous-groupe Γ' de Γ est de S-congruence s'il contient un sous-groupe d'indice fini de la forme $\Gamma_U = \Gamma \cap (G \times U)$, où U est un sous-groupe compact ouvert de G_f. La projection pr_∞ identifie Γ' à un sous-groupe discret cocompact de G_∞. La proposition suivante a été obtenue en collaboration avec J-P. Serre.

PROPOSITION. On suppose G_∞ et G_f non compacts. Soit Γ_o un sous-groupe de S-congruence de Γ et soit $\sigma \in \hat{G}_\infty$ de dimension infinie qui intervienne dans $L^2(G_\infty/\Gamma_o)$. Soit N un entier. Alors il existe un sous-groupe de S-congruence Γ_U de Γ_o tel que la multiplicité de σ dans $L^2(G_\infty/\Gamma_U)$ soit $\geqq N$.

Si Γ' est d'indice fini dans Γ_o alors l'homomorphisme canonique $L^2(G_\infty/\Gamma_o) \longrightarrow L^2(G_\infty/\Gamma')$ est injectif. Quitte à remplacer Γ_o par un sous-groupe de S-congruence, et G_i par un sous-groupe d'indice fini si $i \in S_f$, on peut supposer que l'on a

$$\Gamma_o = \Gamma \cap (G_\infty \times U_o)\ , \quad \text{avec} \quad U_o = \prod_{i \in S_f} U_{oi}\ , \tag{1}$$

où U_{oi} est compact ouvert dans G_i et

$$U_{oi} = G_i \ \text{si}\ G_i \ \text{est compact,}\quad G_i = G_i^o \ \text{sinon} \qquad (i \in S_f)\ . \tag{2}$$

Dans la suite, on considère uniquement des sous-groupes compacts ouverts U de G_f de la forme

$$U = \prod_{i \in S_f} U_i\, ,\quad \text{où}\ U_i \subset G_i\ (i \in S_f)\ ,\ U_i = G_i \ \text{si}\ G_i \ \text{est compact.} \tag{3}$$

Vu la remarque à 3.4, $\Gamma_f = pr_f \Gamma$ est dense dans G_f, donc $\Gamma_f . U = G_f$ pour tout sous-groupe compact ouvert U de G_f, d'où

$$\Gamma . (G_\infty \times U) = G \quad \text{et} \quad G/\Gamma \cong (G_\infty \times U)/\Gamma_U\ . \tag{4}$$

La projection $(G_\infty \times U)/\Gamma_U = G_\infty/\Gamma_U$ induit donc un isomorphisme

$$L^2(G_\infty/\Gamma_U) \cong L^2(G/\Gamma)^U. \tag{5}$$

pour tout U du type (3). Vu 3.5, on a donc un isomorphisme de G_∞-modules

$$L^2(G_\infty/\Gamma_U) = \tilde{\bigoplus}_{\pi\in\hat{G}_\infty} m(\pi, \Gamma)\ M_{\pi_\infty} \otimes M_{\pi_f}^U . \tag{6}$$

De plus, vu 3.3(3)

$$M_{\pi_f} = \tilde{\bigotimes}_{i\in S_f} M_{\pi_i} \quad (\pi_i \in \hat{G}_i) \text{ donc } M_{\pi_f}^U = \bigotimes_{i\in S_f} M_{\pi_i}^{U_i} . \tag{7}$$

Appliquons cela en particulier à U_o. Il existe donc $\pi_o \in \hat{G}$ tel que

$$m(\pi_o, \Gamma) \neq 0,\ \pi_{o\infty} = \sigma \text{ et } M_{\pi_{oi}}^{U_{oi}} \neq 0 \text{ pour tout } i \in S_f . \tag{8}$$

Comme σ est de dimension infinie, il en est de même de π_f (3.5); il existe donc $j \in S_f$ tel que G_j soit non compact et π_j de dimension infinie. On peut alors trouver un sous-groupe ouvert V de U_{oj} tel que

$$\dim (M_{\pi_j})^V \geqq N .$$

Si $U = \prod_{i\in S_f} U_i$, avec $U_i = U_{oi}$ pour $i \neq j$ et $U_j = V$, alors (6), (7), (8) montrent que la multiplicité de σ dans $L^2(G_\infty/\Gamma_U)$ est $\geqq N$.

3.7. THÉORÈME. <u>On conserve les notations et hypothèses de</u> 3.3, 3.4 <u>et on suppose de plus que</u> $G_i = G_i^o$ <u>si</u> $i \in S_f$ <u>et</u> G_i <u>n'est pas compact.</u> <u>On a alors</u>

$$(1)\qquad H^m(\Gamma;\mathbb{C}) = H^m_{ct}(G_\infty;\mathbb{C}) \oplus \bigoplus' \mathrm{Hom}_{K_\infty}(\Lambda^{m-\ell}(\underline{g}_\infty/\underline{k}_\infty), M^\infty_{\pi_\infty}) , \qquad (m \in \mathbb{Z}) ,$$

<u>où la somme est étendue aux</u> $\pi \in \hat{G}$, $\pi \neq 1$ <u>tels que</u> χ_{π_∞} <u>soit trivial et</u> <u>que</u> π_f <u>soit spéciale</u> (3.3).

Pour $i \in S_f$ soit X_i l'immeuble de Bruhat-Tits de $\underline{G}_i$. Soient X_f le produit des X_i et $X = X_\infty \times X_f$. Ce dernier est un espace contractile sur lequel Γ opère proprement, donc $H^m(\Gamma;\mathbb{C}) = H^m(X/\Gamma;\mathbb{C})$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Le théorème coincide avec 2.2 si $G = G_\infty$, et s'y ramène immédiatement si G_f est compact. Si G_i est compact sauf pour un élément de S_f, notre assertion résulte des résultats de Casselman rappelés en 3.2. A partir de là on raisonne par récurrence sur Card S_f, en utilisant la suite spectrale (E_r) de la projection $pr_j : X/\Gamma \longrightarrow X_j/\Gamma_j$, où $j \in S_f$ est tel que G_j soit non compact. Soit C une chambre de X_j; si F est une face de C, notons B_F son fixateur dans G_j et soit $\Gamma_F = (G_{S(j)} \times B_F) \cap \Gamma$, où $S(j) = S - \{j\}$. Par projection Γ_F s'identifie à un sous-groupe discret de $G_{S(j)}$ et la paire $(G_{S(j)}, \Gamma_F)$ satisfait aux conditions imposées à G et Γ. Le groupe Γ_j est dense dans G_j (3.1), donc X_j/Γ_j s'identifie à C. Il s'ensuit que la terme E_2 de la suite spectrale (E_r) de $pr_j : X/\Gamma \longrightarrow X_j/\Gamma_j$ est la cohomologie de C relativement à un faisceau simplicial $F \longmapsto H^*(\Gamma_F;\mathbb{C})$, avec les homomorphismes de restriction évidents. En utilisant 3.2 et l'hypothèse de récurrence on trouve que la somme des termes de degré total m de E_2 est égale au membre de droite de (1) et que $E_2^{p,q} = 0$ si $p \neq 0, \ell_j$. En tenant compte de 1.7, on constate que $E_2^{o,q} = E_\infty^{o,q}$ $(q \in \mathbb{Z})$, d'où $E_2 = E_\infty$ et le théorème.

3.8. COROLLAIRE. <u>On supprime l'hypothèse que</u> $G_i = G_i^o$ <u>pour</u> G_i <u>non compact et</u> $i \in S_f$. <u>Supposons que</u> $m < \ell$. <u>Alors</u> $H^m(\Gamma; \mathbb{C}) = H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C})$.

Soit $G'_i = G_i^o$ si $i \in S_f$ et G_i est non compact, $G'_i = G_i$ sinon; soient $G' = \prod_i G'_i$ et $\Gamma' = \Gamma \cap G'$. Le groupe Γ' est un sous-groupe d'indice fini de Γ, donc $H^m(\Gamma; \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(\Gamma'; \mathbb{C})$ est injectif. Notre assertion résulte alors du théorème appliqué à (G', Γ').

3.9. <u>Relations avec la cohomologie continue</u>. Plaçons-nous de nouveau dans la situation de 3.7 et soit

$$Q^m = \varinjlim_U H^m(\Gamma_U; \mathbb{C}) \quad ,$$

où U parcourt les sous-groupes compacts ouverts de G_j, la limite étant prise par rapport aux homomorphismes de restriction. Le groupe G_j, opérant par automorphismes intérieurs, permute les groupes Γ_U, donc opère sur Q^m. En fait, Q^m est un G_j-module admissible, et

$$(Q^m)^U = H^m(\Gamma_U; \mathbb{C}) \quad . \tag{1}$$

Vu [13], le terme E_2 décrit dans 3.7 n'est autre que la cohomologie continue de G_j dans la somme des Q^m. Plus précisément

$$E_2^{r,s} = H^r_{ct}(G_j; Q^s) \quad ; \tag{2}$$

l'égalité $E_2 = E_\infty$ entraîne donc:

(3) $$H^*(\Gamma; \mathbb{C}) = H^*_{ct}(G_j; Q^*) ,$$

où Q^* est la somme directe des Q^m.

Sans distinguer un des facteurs ultramétriques de G, on peut interpréter 3.7 directement en termes de cohomologie continue. Tout d'abord, on a de façon générale (1.7)

(4) $$H^m(\Gamma; \mathbb{C}) = H^m_{ct}(G; C(G/\Gamma)) ,$$

où $C(G/\Gamma)$ est l'espace des fonctions continues sur G/Γ. Admettons que l'on peut remplacer $C(G/\Gamma)$ par $L^2(G/\Gamma)$. On obtient alors

$$H^m(\Gamma; \mathbb{C}) = \oplus_{\pi\in G}\, m(\pi, \Gamma)\; H^m_{ct}(G; M_\pi) ,$$

et on passe de là à 3.7 en admettant que l'on peut calculer $H^m_{ct}(G; M_\pi)$ par une règle de Künneth et en utilisant 3.2. Il est bien probable que cela peut être justifié (en remplaçant $C(G/\Gamma)$ par un sous-espace de vecteurs différentiables dans un sens convenable plutôt que par $L^2(G/\Gamma)$), mais il ne semble cependant pas à l'auteur que l'on puisse le faire sans ajouter aux "fondements" de la cohomologie continue publiés jusqu'à présent.

Remarquons que l'on peut aussi remplacer j par une partie quelconque S' de S_f dans (2), (3). Cela se voit en considérant la suite spectrale de la projection $X/\Gamma \longrightarrow X_{S'}/\Gamma_{S'}$, où $X_{S'}$ est le produit des X_i avec $i \in S'$.

§4. Groupes S-arithmétiques (cas anisotrope).

4.1. Dans ce paragraphe, on spécialise la situation précédente au cas (le plus important) des groupes S-arithmétiques sur un corps de nombres k. Soit $\underline{G}$ un k-groupe connexe absolument presque simple sur k, de k-rang nul. S désigne maintenant un ensemble fini de places de k qui contient l'ensemble S_∞ des places archimédiennes, k_i la complétion de k en $i \in S$, $\underline{G}_i$ le groupe $\underline{G}$ vu comme k_i-groupe et $G_i = \underline{G}(k_i)$. On est alors dans la situation du paragraphe précédent en prenant G égal au produit des G_i $(i \in S)$ et Γ égal à un sous-groupe S-arithmétique de $\underline{G}(k)$; autrement dit, si l'on fixe un plongement $\underline{G} \hookrightarrow \mathbb{GL}_n$ défini sur k, Γ est un sous-groupe de $\underline{G}(k)$ commensurable à $\underline{G}(o_S)$, où o_S est l'anneau des éléments de k entiers en dehors de S.

Supposons de plus $\underline{G}$ simplement connexe. Alors toutes les hypothèses de 3.7 sont satisfaites et 3.7(1) est valable. La formule ainsi obtenue était aussi connue de W. Casselman.

Remarquons encore que dans ce cas, si G_i n'est pas compact il est simple modulo son centre et ne contient aucun sous-groupe ouvert propre d'indice fini, donc n'a pas de représentation unitaire irréductible de dimension finie à part la représentation triviale. En particulier, si les G_i sont tous non compacts, la somme $\oplus'$ ne porte que sur des $\pi = \hat{\otimes}\, \pi_i$ avec π_i de dimension infinie pour tout i.

D'autre part, $\underline{G}(k)$ est la limite inductive de groupes S-arithmétiques, lorsque S parcourt une suite croissante d'ensembles de places de k dont la réunion est l'ensemble de toutes les places de k. Le corollaire 3.8 entraîne donc,

$$H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) = H^m(\Gamma; \mathbb{C}) = H^m(\underline{G}(k); \mathbb{C}) \ , \qquad (m \in \mathbb{Z}) \ , \tag{1}$$

si Γ est S-arithmétique et S assez grand, résultat d'abord obtenu en collaboration avec H. Garland par une méthode différente, annoncé dans [18], et aussi remarqué par Casselman.

4.2. Soit maintenant Γ_o un sous-groupe arithmétique de congruence de $\underline{G}$. Cela signifie que si l'on fixe une représentation matricielle sur k de $\underline{G}$ et désigne par Γ_S le groupe S-arithmétique des éléments de $\underline{G}(k)$ dont les coefficients sont entiers en dehors de S_f, alors $\Gamma_o \cap \Gamma_S$ est un sous-groupe de S-congruence de Γ_S, au sens de 3.6, pour un S convenable. Soit $\pi \in \hat{G}_\infty$ de dimension infinie qui apparaisse dans $L^2(G_\infty/\Gamma_o)$. Alors 3.6 entraîne l'existence d'un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ_o tel que π intervienne dans $L^2(G_\infty/\Gamma')$ avec une multiplicité arbitrairement grande. Supposons en particulier que $\underline{G}(k_v)$ soit isomorphe à $\mathbf{SO}(n, 1)$ ou $\mathbf{SU}(n, 1)$ pour une place archimédienne réelle et soit compact pour toute autre place archimédienne de k. Alors Γ_o s'identifie à un sous-groupe discret cocompact de $\mathbf{SO}(n, 1)$ ou $\mathbf{SU}(n, 1)$. Vu 2.8, ce qui précède montre que si $H^1(\Gamma_o; \mathbb{C}) \neq 0$, alors Γ_o possède des sous-groupes d'indice fini de premier nombre de Betti arbitrairement grand.

4.3. La formule 3.6(6) permet dans le cas présent de décrire le spectre d'un groupe arithmétique de congruence à partir celui d'un groupe S-arithmétique. On peut de manière similaire passer du spectre de $G(A)/G(k)$, où A est l'anneau des adèles de k, à celui d'un groupe arithmétique ou S-arithmétique. Supposons G simplement connexe (et anisotrope sur k comme précédemment). Alors $G(A) = G_\infty \times G(A_f)$, où A_f est l'anneau des adèles finies. Le groupe $G(k)$ s'identifie à un sous-groupe discret cocompact de $G(A)$. On peut écrire

(1) $$L^2(G(A)/G(k)) = \widetilde{\oplus}_{\pi \in G(A)^\wedge} m(\pi)\, M_\pi \quad ,$$

et

(2) $$M_\pi = M_{\pi_\infty} \widetilde{\otimes} M_{\pi_f} \qquad (\pi_\infty \in \hat{G}_\infty ;\ \pi_f \in G(A_f)^\wedge) \quad .$$

Supposons G presque simple sur k et G_∞ non compact. Alors, par approximation forte, on a $G(A) = G(k).(G_\infty \times U)$ quel que soit le sous-groupe compact ouvert U de $G(A_f)$, d'où l'on déduit comme en 3.6

(3) $$L^2(G_\infty/\Gamma_U) = \widetilde{\oplus}_{\pi \in G(A)^\wedge} m(\pi)\, M_{\pi_\infty} \otimes M^U_{\pi_f} , \qquad (\Gamma_U = G(k) \cap (G_\infty \times U)) \quad .$$

Pour un groupe arithmétique de congruence (i.e. un sous-groupe de $G(k)$ contenant un sous-groupe tel que Γ_U comme sous-groupe d'indice fini), la question de 2.8 prend alors la forme suivante:

<u>Soit</u> $\sigma \in \hat{G}_\infty$ <u>non séparée de la représentation triviale.</u>
<u>Existe-t-il</u> $\pi \in G(A)^\wedge$ <u>tel que</u> $m(\pi) \neq 0$ <u>et</u> $\pi_\infty = \sigma$?

4.4. Soient U un sous-groupe compact ouvert de G_f et $\Gamma_U = \underline{G}(o_S) \cap (G_\infty \times U)$. On déduit de 2.2 et 3.6(6),

$$(1) \qquad H^m(\Gamma_U; \mathbb{C}) = H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) \oplus \oplus' \operatorname{Hom}(\Lambda^m \underline{g}_\infty/\underline{k}_\infty, M^\infty_{\pi_\infty}) \otimes M^U_{\pi_f} ,$$

la somme étant étendue aux $\pi \in \hat{G}$ non triviaux tels que χ_{π_∞} soit trivial. On a par conséquent

$$(2) \quad Q^m = \varinjlim H^m(\Gamma_U; \mathbb{C}) = H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) \oplus \oplus' \operatorname{Hom}(\Lambda^m \underline{g}/\underline{k}_\infty, M^\infty_{\pi_\infty}) \otimes M_{\pi_f} ,$$

la somme portant sur les mêmes π que précédemment; cette égalité est aussi valable pour les structures naturelles de G_f-modules, étant entendu que G_f opère trivialement sur le premier terme de droite. Supposons encore G_∞ et les G_i $(i \in S_f)$ non compacts. Alors les M_{π_f} sont de dimension infinie (3.5), donc en particulier

$$(3) \qquad (Q^m)^{G_f} = H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) ,$$

ce qui, dans le cas présent où $\underline{G}$ est anisotrope sur k, répond affirmativement à une question posée par Serre.

§5. Groupes S-arithmétiques (cas général).

Nous conservons les hypothèses de 4.1, excepté que le k-rang ℓ de $\underline{G}$ est supposé non nul, sauf mention expresse du contraire.

5.1. Le quotient G/Γ est maintenant non compact, mais de mesure invariante finie, et l'homomorphisme de restriction $j^m : H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(\Gamma; \mathbb{C})$ n'est pas nécessairement injectif. Il existe une constante $c(G)$, calculable à partir de la structure de groupe algébrique de G et de l'algèbre de Lie de G_∞, telle que j^m soit bijectif pour $m \leqq c(G)$. Cela est établi dans [3] lorsque Γ est arithmétique et $G = G_\infty$; le cas général (annoncé dans [2]), s'en déduit à l'aide de la suite spectrale de 3.7. C'est l'analogue d'un théorème de Matsushima valable dans la situation du §2 [30]. On en déduit que $H^m_{ct}(G_\infty; \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(\underline{G}(k); \mathbb{C})$ est un isomorphisme pour $m \leqq c(G)$. Nous avons vu que si $\ell = 0$, c'est un isomorphisme pour tout m. Pour $\ell > 0$ et m quelconque, il n'est pas nécessairement injectif, mais je ne sais pas s'il est surjectif.

5.2. Supposons $k = \mathbb{Q}$, $\underline{G}$ presque simple sur k et simplement connexe comme précédemment, mais pas nécessairement absolument presque simple, et S_f réduit à une place $\{p\}$. Serre a posé la question d'étudier l'homomorphisme de restriction

$$H^m_{ct}(G_p; \mathbb{Q}_p) \longrightarrow H^m(\Gamma; \mathbb{Q}_p) \ , \tag{1}$$

où Γ est S-arithmétique ou arithmétique. D'après [13], le membre de gauche est la cohomologie de l'algèbre de Lie de G_p. Si $\underline{G}$ est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}$, les résultats de [3] entraînent que cet homomorphisme est trivial. Mais le cas en principe le plus intéressant est celui où $G = \mathbf{SL}_n$

(ou plus généralement où $G = R_{k/\mathbb{Q}}\, \mathbb{SL}_n$). En basses dimensions, i.e. en dessous de la constante $c(G)$ ci-dessus, l'isomorphisme j^m donne lieu (mais cela est loin d'être canonique) à un isomorphisme

$$(2) \qquad H^m(\Gamma; \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} H^m(\underline{g}_\infty, \underline{k}_\infty; \mathbb{Q}_p) ,$$

où $\underline{g}_\infty$, $\underline{k}_\infty$ sont envisagés comme des algèbres de Lie sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Cela laisse ouverte la possibilité que l'homomorphisme de (1) soit surjectif dans ces dimensions, de noyau l'algèbre de Lie de $\mathbb{SO}_n$. Si c'était le cas, on pourrait songer à s'en servir pour définir, au moins à une unité p-adique près, un s-ième régulateur p-adique lorsque $m = 2s+1$, d'une manière qui présenterait une certaine analogie formelle avec celle du s-ième régulateur à partir de la cohomologie complexe [4; 27].

5.3. La construction faite dans 3.7 vaut sans changement lorsque $\ell > 0$ et montre que $H^*(\Gamma; \mathbb{C})$ est l'aboutissement d'une suite spectrale (E_r) dans laquelle E_2 est la cohomologie de la chambre C par rapport au faisceau simplicial de 3.7. Mais j'ignore si $E_2 = E_\infty$. L'interprétation de E_2 en terms de cohomologie continue fournie par 3.9(2) est encore valable. De plus, [5: 4.12] montre que Q^s est somme directe d'un G_j-module à cohomologie continue nulle et du sous-G_j-module engendré par $H^s(\Gamma_C; \mathbb{C})$. Par définition Γ_C est le fixateur de C dans Γ, et est une généralisation naturelle du groupe de Hecke $\Gamma_o(p)$ (que l'on retrouve dans le cas où $G = \mathbb{SL}_2$, $\Gamma = \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z}[p^{-1}])$ et $S_f = \{p\}$). Pour aller plus loin dans cette voie, il faudrait obtenir des renseignements sur les constituants du G_j-module Q^s. Vu [5: 4.10], cela équivaut à étudier les constituants de $H^m(\Gamma_C; \mathbb{C})$, vu comme module sur l'algèbre de Hecke $H(G_j, B_C)$, où B_C est le fixateur de C dans G_j, i.e. un sous-groupe d'Iwahori de G_j. Une première question dans cet ordre d'idées est de savoir si 4.4(3) est valable en général.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., U.S.A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, "Density properties of certain subgroups of semi-simple groups," Annals of Math. (2) 72 (1960), 179-188.

[2] ———, "Cohomologie réelle stable de groupes S-arithmétiques," C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), 1700-1702.

[3] ———, "Stable real cohomology of arithmetic groups," Annales Sci. E.N.S. (4) 7 (1974), 237-272.

[4] ———, "Cohomology of arithmetic groups," Proc. Int. Cong. Math. Vancouver 1974.

[5] ———, "Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup" (to appear).

[6] ——— et J. Tits, "Groupes réductifs," Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965), 55-150.

[7] ——— et ———, "Homomorphismes 'abstraits' de groupes algébriques simples," Annals of Math. (2) 97 (1973), 499-571.

[8] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1 et 2, Act. Sci. Ind. 1189, Paris 1966, Hermann éd.

[9] ———, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2, 3, Act. Sci. Ind. 1349, Paris, Hermann éd. 1972.

[10] F. Bruhat et J. Tits, "Groupes algébriques simples sur un corps local: cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan," C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 867-869.

[11] W. Casselman, "On a p-adic vanishing theorem of Garland," Bull. A.M.S. 80 (1974), 1001-1004.

[12] ———, "Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups," (to appear).

[13] ——— and D. Wigner, "Continuous cohomology and a conjecture of Serre's," Inv. Mat. 25 (1974), 199-211.

[14] C. Delaroche et A. Kirillov, "Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kajdan)," Sém. Bourbaki 20e année (1967/68), Exp. 343, Benjamin New York.

[15] P. Delorme, "Sur la 1-cohomologie des représentations des groupes de Lie semi-simples," C.R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), 1101-1103.

[16] J. L. Dupont, "Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles," Preprint series 1974/75 no. 29, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 36 p.

[17] V. T. van Est, "On the algebraic cohomology concepts in Lie groups II," Proc. Konink. Nederl. Akad. v. Wet. Series A, 58 (1955), 286-294.

[18] H. Garland, "On the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups," Proc. Int. Congr. Math. Vancouver 1974.

[19] H. Hecht and W. Schmid, "A proof of Blattner's conjecture" (to appear).

[20] G. Hochschild and G. D. Mostow, "Cohomology of Lie groups," Ill. Jour. Math. 6 (1962), 367-401.

[21] R. Hotta and R. Parthasarathy, "A geometric meaning of the multiplicity of integrable discrete classes in $L^2(\Gamma\backslash G)$, Osaka J. Math. 10 (1973), 211-234.

[22] ——— and —————, "Multiplicity formulae for discrete series," Inv. Mat. 26 (1974), 133-178.

[23] ——— and N. Wallach, "On Matsushima's formula for the Betti numbers of locally symmetric spaces" (to appear).

[24] D. A. Kajdan, "On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups," Funct. Anal. and appl. 1 (1967), 63-65.

[25] B. Kostant, "On the existence and irreducibility of certain series of representations," Bull. A.M.S. 75 (1969), 627-642.

[26] R. P. Langlands, "Dimension of spaces of automorphic forms," Proc. Symp. pure math. 9 (1966), 235-252, A.M.S., Providence, R.I.

[27] S. Lichtenbaum, "Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory II, Springer Lecture Notes 342 (1973), 489-499.

[28] S. MacLane, Homology, Grund. math. Wiss. 144, Springer Verlag 1963.

[29] G. A. Margoulis, "Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature," Proc. Int. Congress Math. Vancouver, 1974.

[30] Y. Matsushima, "On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds," Osaka Math. J. 14 (1962), 1-20.

[31] ——————, "A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds," Jour. Diff. Geom. 1 (1967), 99-109.

[32] —————— and S. Murakami, "On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds," Annals of Math. (2) 78 (1963), 365-416.

[33] —————— and ——————, "On certain cohomology groups attached to hermitian symmetric spaces," Osaka Jour. Math 2 (1965), 1-35.

[34] J. Millson, "On the first Betti number of a compact constant negatively curved manifold" (to appear).

[35] W. Schmid, "On a conjecture of Langlands," Annals of Math. (2) 93 (1971), 1-42.

[36] E. B. Vinberg, "Some examples of crystallographic groups on Lobacevskii spaces," Mat. Sbornik 7 (1969), 617-622.

[37] N. Wallach, "On the Selberg trace formula in the case of compact quotient" (to appear).

[38] S. P. Wang, "The dual space of semi-simple Lie groups," Amer J. Math. XCI (1969), 921-937.

[39] ——————, "On density properties of S-subgroups of locally compact groups," Annals of Math. (2) 94 (1971), 325-329.

Armand BOREL
Institute for Advanced Study
PRINCETON, N.J. 08540, USA