Astérisque

HENRI CARTAN

Brève analyse des travaux

Astérisque, tome 32-33 (1976), p. 3-27
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__32-33__3_0>

Henri CARTAN

CURRICULUM VITAE

1904 (8 juillet)	Né à Nancy
1923-26	Elève à l'Ecole Normale Supérieure
1926	Agrégé de mathématiques
1928	Docteur ès Sciences mathématiques
1928-29	Professeur au Lycée Malherbe à Caen
1929-31	Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Lille
1931-35	Chargé de cours, puis maître de conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg
1936-40	Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg
1940-49	Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris
1945-47	Détaché pour deux ans à la Faculté des Sciences de Strasbourg
1949-69	Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
1940-65	Chargé de l'enseignement des mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure
1969-75	Professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay, puis à l'Université de Paris-Sud
1967-70	Président de l'Union Mathématique Internationale.

Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Strasbourg, puis à l'Université Louis Pasteur.

Professeur honoraire à l'Université de Paris-Sud.

Foreign Honorary Member of the American Academy (Boston), 1950

Foreign Honorary Member of the London Mathematical Society, 1959

Membre de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres du Danemark, 1962

Membre correspondant de l'Académie des Sciences (Institut de France),1965

Associé étranger de l'Academia di Scienze, Lettere et Arti di Palermo,1967

Honorary Member of the Cambridge Philosophical Society, 1969

Foreign Member of the Royal Society of London, 1971

Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Göttingen, 1971

Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Madrid, 1971
Foreign Associate of the National Academy of Sciences (USA), 1972
Membre de l'Académie des Sciences (Institut de France), 1974
Membre correspondant de l'Académie Bavaroise des Sciences, 1974.

Docteur honoris causa de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich (1955), des Universités de Münster (1952), Oslo (1961), Sussex (1969), Cambridge (1969).

BRÈVE ANALYSE DES TRAVAUX

I. Fonctions analytiques

1) Fonctions d'une variable complexe.- C'est à elles que sont consacrés mes tout premiers travaux. Quelques Notes aux Comptes Rendus se rapportent à la fonction de croissance de Nevanlinna et à la répartition des valeurs des fonctions méromorphes. Dans ma Thèse [1], j'ai réussi à prouver, en la précisant, une inégalité conjecturée par André BLOCH: pour tout nombre réel $h>0$, les points du plan complexe où un polynôme unitaire de degré n est, en valeur absolue, au plus égal à h^n peuvent être enfermés dans des disques dont la somme des rayons est au plus égale à 2eh (e = base des logarithmes népériens). J'ai montré de plus que l'on peut considérablement généraliser ce résultat; cette généralisation a été ensuite reprise et utilisée par Ahlfors. L'inégalité de Bloch s'est révélée un instrument précieux dans l'étude de la répartition des valeurs d'une fonction analytique.

Dans [10], j'ai étudié la croissance d'un système de fonctions holomorphes, c'est-à-dire, en fait, d'une application holomorphe dans un espace projectif, généralisant à cette situation les théorèmes de NEVANLINNA. Cette étude a été reprise, d'une façon indépendante, par Hermann et Joachim WEYL.

C'est dans ma Thèse [1] que j'ai étudié les familles normales d'applications holomorphes d'un disque dans l'espace projectif $P_n(\mathbb{C})$ privé de n+2 hyperplans en position générique. Ce sujet semble redevenu d'actualité à la suite de quelques travaux récents (notamment de P. Kiernan et S. Kobayashi, Nagoya Math. J. 1973).

2) Problèmes d'itération et de limite pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes ([4], [9], [13])

J'ai notamment prouvé le résultat suivant: soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit f une application holomorphe $D \to D$. Si, dans l'adhérence de la suite des itérées f^k, il existe une transformation dont le Jacobien n'est pas identiquement nul, f est nécessairement un automorphisme de D. Ce résultat est susceptible de nombreuses applications; M. HERVÉ l'a utilisé avec succès à diverses occasions. En voici une application immédiate [9]: pour n = 1, s'il existe un point a du plan complexe $\mathbb{C}$, hors de D, et une courbe fermée de D dont l'indice par rapport à a soit non nul, si de plus f transforme cette courbe en une courbe dont l'indice est non nul, alors f est nécessairement un automorphisme de D. Autre application: pour n quelconque, si $f: D \to D$ possède un point fixe en lequel le Jacobien est de valeur absolue égale à 1, f est un automorphisme de D.

3) Automorphismes des domaines bornés ([3], [7], [15])

Que peut-on dire du groupe de tous les automorphismes holomorphes d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$? (Cf. aussi 4) ci-dessous). Soit G(a) le groupe d'isotropie d'un point $a \in D$, c'est-à-dire le sous-groupe formé des automorphismes qui laissent fixe le point a . Un premier résultat est le suivant: l'application qui, à chaque élément de G(a), associe la transformation linéaire tangente en a, est un isomorphisme de G(a) sur un sous-groupe (compact) du groupe linéaire $GL(n,\mathbb{C})$. J'ai prouvé cela à partir d'un lemme très simple, qui dit que si une transformation holomorphe f de D dans D (non supposée bijective) laisse fixe un point $a \in D$ et est tangente à l'identité en a, c'est l'application identique. Ce lemme est aussi valable pour les groupes formels (cf. le livre classique de BOCHNER et MARTIN). Il a aussi l'avantage de pouvoir s'appliquer tel quel aux fonctions holomorphes dans un espace de Banach complexe de dimension infinie, beaucoup étudiés aujourd'hui.

Le résultat précédent m'a conduit à une démonstration très simple du théorème suivant: soient D et D' deux domaines cerclés dont l'un au moins est supposé borné (un domaine D est dit cerclé s'il est stable par toute homothétie de rapport λ tel que $|\lambda| = 1$ et s'il contient l'origine) ; alors tout isomorphisme holomorphe $f: D \to D'$ qui transforme l'origine en l'origine est nécessairement linéaire . Ce théorème était auparavant connu dans des cas particuliers, ou sous des hypothèses restrictives relatives à la frontière (BEHNKE). Il est, lui aussi, valable dans un espace de Banach.

L'article [3] contient beaucoup d'autres résultats, notamment sur l'existence de développements en séries de types particuliers.

La détermination du groupe de tous les automorphismes d'un domaine cerclé borné a été faite complètement pour le cas de deux variables dans [7] . A part quelques types spéciaux de domaines cerclés (qui sont explicités), le groupe de tous les automorphismes se réduit au groupe d'isotropie de l'origine.

4) Groupes de transformations holomorphes en général.

Le groupe des automorphismes holomorphes d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est localement compact: c'est un résultat nullement évident que j'ai prouvé dans [9]. La question se posait ensuite de savoir si c'est un groupe de Lie. Ce problème ne doit pas être confondu avec le fameux cinquième problème de HILBERT, qui du reste n'était pas encore résolu à l'époque (1935). Dans [14], j'ai démontré le théorème fondamental suivant: tout "noyau" compact de groupe de transformations holomorphes, dans $\mathbb{C}^n$, est un noyau de groupe de Lie. Il en résulte d'une part que le groupe des automorphismes holomorphes d'un domaine borné est un groupe de Lie (à paramètres réels); d'autre part que le groupe des automorphismes d'une variété analytique complexe compacte est un groupe de Lie, comme BOCHNER l'a montré plus tard. Quant au théorème fondamental ci-dessus, publié en 1935, il fut retrouvé huit ans plus tard par MONTGOMERY sous une forme plus générale, valable pour les groupes de transformations différentiables; la méthode de Montgomery est essentiellement la même, mais en utilisant le théorème de BAIRE il réussit à l'appliquer au cas différentiable.

5) Domaines d'holomorphie et convexité ([6], [8]).

La notion de "domaine d'holomorphie" est bien connue aujourd'hui. Dans l'article [6], j'ai pour la première fois montré qu'un domaine d'holomorphie possède certaines propriétés de "convexité" par rapport aux fonctions holomorphes. Cette notion de "convexité" s'est, depuis lors, montrée féconde et elle est devenue classique. Dans [6], j'ai prouvé que la "convexité" est non seulement nécessaire pour que D soit un domaine d'holomorphie, mais qu'elle est suffisante pour certains domaines d'un type particulier (par exemple les domaines cerclés). Qu'elle soit suffisante dans le cas général a été démontré peu après par P. THULLEN. En mettant en commun nos idées, Thullen et moi avons écrit le mémoire [8] consacré à la théorie des domaines d'holomorphie. La notion de convexité holomorphe s'introduit aussi dans les problèmes d'approximation.

6) Problèmes de Cousin.

Le premier problème de Cousin (ou problème additif de Cousin) consiste à trouver une fonction méromorphe dont on se donne les parties principales (polaires). Le deuxième problème de Cousin (ou problème multiplicatif) consiste à trouver une fonction méromorphe admettant un "diviseur" donné (variété des zéros et des pôles avec leurs ordres de multiplicité). On sait aujourd'hui que le problème additif est toujours résoluble pour un domaine d'holomorphie, et plus généralement pour une "variété de Stein". Ce résultat a été prouvé pour la première fois par K. OKA. Avant Oka, j'avais vu (cf. une Note aux Comptes Rendus de 1934) que le problème additif pouvait se résoudre en utilisant l'intégrale d'André WEIL , mais comme à cette époque il manquait certaines techniques permettant d'appliquer l'intégrale de Weil au cas général des domaines d'holomorphie, je renonçai à publier ma démonstration. Par ailleurs, je savais que, dans le cas de deux variables, le premier problème de Cousin n'a pas toujours de solution pour un domaine qui n'est pas un domaine d'holomorphie. En revanche, pour trois variables, j'ai donné le premier exemple (cf. la Note [2]) d'ouvert qui n'est pas domaine d'holomorphie et dans lequel cependant le problème additif de Cousin est toujours résoluble; il s'agit de $\mathbb{C}^3$ privé de l'origine. Ma méthode de démonstration pour ce cas particulier (utilisation des séries de Laurent) a été utilisée plusieurs fois depuis dans des cas plus généraux, notamment par FRENKEL dans sa Thèse.

Aujourd'hui, les problèmes de Cousin trouvent leur solution naturelle dans le cadre de la théorie des faisceaux analytiques cohérents (voir ci-dessous, 7)).

7) <u>Théorie des faisceaux sur une variété analytique complexe.</u>

L'étude des problèmes globaux reltifs aux idéaux et modules de fonctions holomorphes m'a occupé plusieurs années, en partant des travaux d' OKA. Dès 1940, j'avais vu qu'un certain lemme sur les matrices holomorphes inversibles joue un rôle décisif dans ces questions. Ce lemme est énoncé et démontré en 1940 dans [19]; dans ce même travail, j'en fais diverses applications, et je prouve notamment que si des fonctions f_i (en nombre fini), holomorphes dans un domaine d'holomorphie D , n'ont aucun zéro commun dans D, il existe une relation $\sum_i c_i f_i = 1$ à coefficients c_i holomorphes dans D. Dans [22], j'introduis la notion de "cohérence" d'un système d'idéaux et je tente de démontrer les théorèmes fondamentaux de ce qui deviendra la théorie des faisceaux analytiques cohérents sur une variété de Stein; mais je n'y parviens pas dans le cas le plus général, faute de réussir à prouver une conjecture que K. OKA démontrera plus tard (1950) et qui, en langage d'aujourd'hui, exprime que le faisceau des germes de fonctions holomorphes est <u>cohérent</u>. Sitôt que j'eus connaissance de ce théorème d' OKA (publié avec beaucoup d'autres dans le volume 78 du Bulletin de la Société mathématique de France), je repris l'ensemble de la question dans [29] , en introduisant systématiquement la notion de <u>faisceau</u> (introduite alors par LERAY en Topologie) et celle de faisceau cohérent (mais pas encore dans le sens plus général et définitif qui sera celui de mon Séminaire 1951-52). Il s'agit essentiellement de ce qu'on appelle aujourd'hui les "théorèmes A et B ". Cependant, la formulation cohomologique générale du théorème B ne viendra que dans le Séminaire cité, à la suite de discussions avec J.P. SERRE. La conférence [35] est consacrée à une exposition d'ensemble de ces questions (sans démonstrations), avec indications sur les diverses applications qui en découlent pour la théorie globale des variétés de Stein, et en particulier pour les problèmes de Cousin.

8) <u>Un théorème de finitude pour la cohomologie</u>.

Il s'agit du résultat suivant, obtenu en collaboration avec J.P. SERRE (cf. la Note [6] aux Comptes Rendus, ainsi que mon Séminaire 1953-54): si X est une variété analytique complexe <u>compacte</u>, et F un faisceau analytique cohérent, les espaces de cohomologie $H^q(X,F)$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Le même résultat vaut, plus généralement, si X est un espace analytique compact.

Ce théorème n'est aujourd'hui que le point de départ du fameux théorème de Grauert qui dit que les images directes d'un faisceau analytique cohérent par une application holomorphe et propre sont des faisceaux cohérents.

9) La notion générale d'espace analytique.

C'est après 1950 qu'apparaît la nécessité de généraliser la notion de variété analytique complexe, pour y inclure des singularités d'un type particulier, comme on le fait en Géométrie algébrique. Par exemple, le quotient d'une variété analytique complexe par un groupe proprement discontinu d'automorphismes n'est pas une variété analytique en général (s'il y a des points fixes), mais c'est un espace analytique (cf. [38]). Dès 1951, BEHNKE et STEIN tentaient d'introduire une notion d'espace analytique en prenant comme modèles locaux des "revêtements ramifiés" d'ouverts de $\mathbb{C}^n$; mais leur définition était assez peu maniable. Ma première tentative date de mon Séminaire 1951-52 (Exposé XIII); j'ai repris cette définition des espaces analytiques dans mon Séminaire de 1953-54 en introduisant la notion générale d'espace annelé , qui a ensuite été popularisée par SERRE, puis par GRAUERT et GROTHENDIECK. En 1953-54, ma définition conduisait aux espaces analytiques normaux (c'est-à-dire tels que l'anneau associé à chaque point soit intégralement clos). C'est SERRE qui, le premier, attira l'attention sur l'utilité d'abandonner la condition restrictive de normalité. Ensuite GRAUERT puis GROTHENDIECK introduisirent la catégorie plus générale des espaces annelés dans lesquels l'anneau attaché à un point n'est plus nécessairement un anneau de germes de fonctions mais peut admettre des éléments nilpotents.

J'ai démontré dans [41] un théorème de "prolongement" des espaces analytiques normaux, suggéré par des travaux de W.L. BAILY, et qui s'applique à la compactification de SATAKE dans la théorie des fonctions automorphes.

10) Quotients d'espaces analytiques ([38], [44], et Séminaire 1953-54).

Tout quotient d'un espace annelé X est canoniquement muni d'une structure d'espace annelé (ayant une propriété universelle aisée à formuler). Le problème suivant se pose: lorsque X est un espace analytique, trouver des critères permettant d'affirmer que l'espace annelé quotient est aussi un espace analytique. J'ai montré que lorsque la relation d'équivalence est définie par un groupe proprement discontinu d'automorphismes de X, le quotient est toujours un espace analytique. Puis, dans [44], j'ai donné un critère valable pour toutes les relations d'équivalence "propres" et j'ai étendu au cas des espaces analytiques généraux un théorème prouvé (par une autre méthode) par K. STEIN dans le cas des variétés sans singularités, et que voici: si $f: X \to Y$ est une application holomorphe, et si les composantes connexes des fibres de f sont compactes, le quotient de X par la relation d'équivalence dont les classes sont les composantes connexes des fibres est un espace analytique. D'autres applications du critère sont données dans [44].

11) Fonctions automorphes et plongements.

Ayant défini le quotient d'un espace analytique X par un groupe G proprement discontinu d'automorphismes, il s'agissait de réaliser dans certains cas cet espace quotient comme sous-espace analytique d'espaces d'un type simple. Le premier cas que j'ai traité est celui où X est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ et où X/G est compact: en m'appuyant sur des résultats de M. HERVÉ (repris dans [40]), j'ai prouvé dans [38] que les formes automorphes d'un poids convenable fournissent un plongement de X/G comme sous-espace analytique (fermé) d'un espace projectif. Donc X/G s'identifie à l'espace analytique sous-jacent à une "variété algébrique projective". Au même moment, ce résultat était démontré tout autrement par KODAIRA, mais seulement dans le cas où G opère sans point fixe (la variété algébrique étant alors sans singularité). C'est par ma méthode que, plus tard, W.L. BAILY prouva la possibilité de réaliser dans l'espace projectif le compactifié de SATAKE du quotient X/G dans le cas où G est le groupe modulaire de SIEGEL; X/G est alors isomorphe à un ouvert de ZARISKI d'une variété algébrique projective. J'ai moi-même repris la question dans mon Séminaire 1957-58 et prouvé la réalisation projective de X/G non seulement pour le groupe modulaire, mais pour tous les groupes qui lui sont "commensurables".

12) Fibrés holomorphes.

Les premières indications relatives à l'utilisation de la théorie des faisceaux pour l'étude des fibrés holomorphes remontent à une conférence que j'ai faite au Séminaire BOURBAKI (décembre 1950). Ma contribution à la théorie a ensuite simplement consisté en une mise au point, au Colloque de Mexico (1956), des théorèmes fondamentaux de GRAUERT sur les espaces fibrés principaux dont la base est une variété de Stein, théorèmes dont la démonstration n'était pas encore publiée mais dont les grandes lignes m'avaient été communiquées par l'auteur. Dans la rédaction [42], j'ai donné des démonstrations complètes.

13) Variétés analytiques réelles. ([39], Notes aux Comptes Rendus [7]).

L'un des buts de [39] était de prouver l'analogue des théorèmes A et B pour les variétés analytiques réelles, dénombrables à l'infini. A cette époque le théorème de plongement de GRAUERT n'était pas encore connu; il a pour conséquence que les théorèmes que j'ai énoncés pour les variétés plongeables sont, en fait, toujours vrais. A partir de là on obtient, par les procédés usuels de passage du local au global, une série de résultats de caractère global; par exemple, une sous-variété analytique fermée d'une variété analytique réelle (dénombrable à l'infini) peut être définie globalement par un nombre fini d'équations analytiques. Toutefois, il est une propriété (d'ailleurs de caractère local) qui différencie le cas réel du cas complexe: le faisceau d'idéaux défini par un sous-ensemble analytique réel n'est pas toujours cohérent, contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe; j'en donne des contre-exemples dans [39], et je donne aussi un exemple d'un sous-ensemble analytique A de $\mathbb{R}^3$, de codimension un, tel que toute fonction analytique dans $\mathbb{R}^3$ qui s'annule identiquement sur A soit identiquement nulle. D'autres situations pathologiques son étudiées dans les Notes [7], écrites en collaboration avec F. BRUHAT.

II. Topologie algébrique

1) Fibrés et groupes d'homotopie.

Dans les Notes [5], en collaboration avec J.P. SERRE, nous introduisons l'opération qui consiste à "tuer" les groupes d'homotopie d'un espace X "par le bas", c'est-à-dire à construire un espace Y et une application $f: Y \to X$ de manière que les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$ soient nuls pour $i \leq n$ (n entier donné), et que $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$ soit un isomorphisme pour $i > n$. L'on peut choisir pour f une application fibrée (en construisant avec SERRE des espaces de chemins), et l'on a donc une suite spectrale reliant les homologies de X, de Y et de la fibre. Cette méthode permet le calcul (partiel) des groupes d'homotopie d'un espace à partir de ses groupes d'homologie.

2) Détermination des algèbres d'Eilenberg-MacLane $H_*(\pi, n)$ ([36] et mon Séminaire 1954-55).

Rappelons que $K(\pi, n)$ désigne un espace dont tous les groupes d'homotopie sont nuls, sauf π_n qui est isomorphe à un groupe abélien donné π. Un tel espace est un espace de HOPF et par suite ses groupes d'homologie forment une algèbre graduée $H_*(\pi, n)$. Le problème du calcul explicite de ces algèbres avait été posé par EILENBERG et MACLANE. Je suis parvenu à ce calcul par des méthodes purement algébriques, basées sur la notion de "construction" , et qui permettent un calcul explicite. Les résultats s'énoncent particulièrement bien lorsqu'on prend comme anneau de coefficients le corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments (p premier). Le cas où p = 2 et où le groupe π est cyclique avait été entièrement résolu par J.P. SERRE, par une méthode un peu différente. A l'occasion de ces calculs j'ai été amené à introduire la notion d'algèbre graduée à puissances divisées ; l'algèbre d'Eilenberg-MacLane possède de telles "puissances divisées". C'est une notion qui s'est avérée utile dans d'autres domaines, et notamment dans la théorie des groupes formels (DIEUDONNÉ, CARTIER).

3) Suite spectrale d'un espace où opère un groupe discret (cf. Notes aux Comptes Rendus [3]).

On considère un groupe G opérant sans point fixe, de façon proprement discontinue, dans un espace topologique X. Dans une Note commune, J. LERAY et moi avions envisagé le cas où le groupe est fini. J'ai étudié ensuite le cas général, qui a de nombreuses applications. On trouve une exposition de cette question au Chapitre XVI de mon livre "Homological Algebra" écrit en collaboration avec S. EILENBERG.

4) Cohomologie des espaces homogènes de groupes de Lie [31]

Il s'agit de la cohomologie à coefficients réels d'un espace homogène G/g , G étant un groupe de Lie compact connexe et g un sous-groupe fermé connexe de G. La méthode utilisée est celle de l' "algèbre de Weil" d'une algèbre de Lie. J'obtiens pour la première fois une détermination complète de la cohomologie réelle de G/g ; il suffit de connaître la "transgression" dans l'algèbre de Lie de G , et l'homomorphisme $I(G) \to I(g)$ (où $I(G)$ désigne l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie de G, invariants par le groupe adjoint ; de même pour $I(g)$). Ces résultats ont été ensuite repris par A. BOREL qui les a en partie étendus au cas plus difficile de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. A ce sujet, on peut consulter le rapport de BOREL dans le Bulletin de l'A.M.S. (vol. 61, 1955, p. 397-432).

5) <u>Opérations de STEENROD</u>.

La première démonstration de la formule du produit pour les "carrés de Steenrod", improprement appelée "Cartan formula" puisque c'est WU-Wen-Tsün qui m'avait proposé de prouver cette formule, se trouve donnée dans la Note aux Comptes Rendus [4]. Son seul mérite est d'avoir suggéré à STEENROD une démonstration de la formule analogue $\mathcal{P}_p^k(xy) = \sum_{i+j=k} \mathcal{P}_p^i(x)\mathcal{P}_p^j(y)$ pour les opérations de Steenrod modulo p (p premier impair). Aujourd'hui on a de meilleures démonstrations de ces relations.

Dans [37], je détermine explicitement les relations multiplicatives existant entre les générateurs St_p^i de l'algèbre de Steenrod pour p premier impair (le cas $p = 2$ avait été traité par J. ADEM; le cas où p est impair a ensuite été traité indépendamment par J. ADEM au moyen d'une méthode différente de la mienne).

6) <u>Cohomologie à coefficients dans un faisceau</u>.

Cette notion maintenant fondamentale, aussi bien en Topologie qu'en Analyse, avait été introduite par J. LERAY d'une façon relativement compliquée. Dans mon Séminaire de 1950-51 j'en donne la première exposition axiomatique, qui est aujourd'hui adoptée (voir par exemple le livre classique de R. GODEMENT). Cette présentation a permis ultérieurement de faire rentrer la théorie des faisceaux (de groupes abéliens) dans celle des "catégories abéliennes" et de lui appliquer les méthodes de l'Algèbre homologique (foncteurs dérivés, etc...). D'autre part, c'est dans le cadre de la cohomologie à valeurs dans un faisceau que j'ai placé le théorème de DE RHAM (relatif au calcul de la cohomologie réelle d'une variété différentiable au moyen des formes différentielles), ainsi que la "dualité" de POINCARÉ des variétés topologiques, triangulables ou non. Ces idées sont devenues courantes; elles ont permis à P. DOLBEAULT d'étudier le complexe de d"-cohomologie d'une variété analytique complexe.

III.- Théorie du potentiel ([20], [21], [24], [25], [30])

C'est sous l'influence de M. BRELOT que je me suis intéressé pendant la guerre aux problèmes de la théorie du potentiel (potentiel newtonien et généralisations diverses). J'ai utilisé d'une manière systématique la notion d'énergie, en commençant par prouver le théorème suivant: l'espace des distributions positives d'énergie finie, muni de la norme déduite de l'énergie, est complet. Ce fut l'occasion d'employer la méthode de projection sur un sous-ensemble convexe et complet (dans un espace fonctionnel). Le théorème précédent suggéra à J. DENY d'introduire en théorie du potentiel les distributions de SCHWARTZ; il prouva que l'espace vectoriel de toutes les distributions d'énergie finie (et plus seulement les distributions positives) est complet.

J'ai aussi introduit la notion de topologie fine (la moins fine rendant continues les fonctions surharmoniques), qui s'est avérée utile notamment dans les questions d'effilement à la frontière, et, plus récemment, dans les nouveaux développements axiomatiques de la théorie du potentiel en relation avec les Probabilités.

J'ai donné la première démonstration d'un théorème que désirait BRELOT, et qui se formule ainsi: la limite d'une suite décroissante (ou, plus généralement, d'un ensemble filtrant décroissant) de fonctions surharmoniques, si elle n'est pas identiquement $-\infty$, ne diffère d'une fonction surharmonique que sur un ensemble de capacité extérieure nulle.

Enfin, je crois avoir été le premier à introduire une théorie du potentiel dans les espaces homogènes [21].

IV. Algèbre homologique

Ecrit entre 1950 et 1953, paru seulement en 1956, le livre "Homological Algebra" est dû à une longue collaboration avec Samuel EILENBERG. On y expose pour la première fois une théorie qui englobe diverses théories particulières (homologie des groupes, homologie des algèbres associatives, homologie des algèbres de Lie, syzygies de HILBERT, etc...), en les plaçant dans le cadre général des foncteurs additifs et de leurs foncteurs "dérivés". Les foncteurs $\mathrm{Tor}_n(A,B)$ (foncteurs dérivés gauches du produit tensoriel $A \otimes B$) sont introduits dans cet ouvrage, ainsi que les foncteurs $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ (foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{Hom}(A,B)$). Auparavant, seul le foncteur $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ avait été explicitement considéré dans la littérature (Eilenberg-MacLane). On montre notamment le rôle qu'ils jouent dans la "formule de Künneth", qui est pour la première fois énoncée en termes invariants.

Cet ouvrage de 400 pages semble avoir servi de catalyseur:

il a été à l'origine de rapides développements tant en Algèbre pure qu'en Géométrie algébrique et en Géométrie analytique. Le terme lui-même d' "algèbre homologique", donné comme titre à notre livre, a fait fortune. Dans ce livre nous avions traité le cas des modules sur un anneau; mais l'exposition avait été conduite de telle sorte qu'elle pouvait immédiatement se transposer à d'autres cas, comme il était d'ailleurs indiqué dans l'Appendice à notre livre écrit par D. BUCHSBAUM. Il devait revenir à GROTHENDIECK d'introduire et d'étudier systématiquement les "catégories abéliennes", ce qui permit aussitôt, par exemple, d'intégrer dans l'Algèbre homologique la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau de groupes abéliens. C'est aussi GROTHENDIECK qui, à la suite de SERRE, introduisit systématiquement l'Algèbre homologique comme un nouvel outil puissant en Gémoétrie algébrique et en Géométrie analytique. Faut-il mentionner, à ce sujet, l'immense ouvrage de DIEUDONNÉ et GROTHENDIECK, les fameux E.G.A. (éléments de Géométrie algébrique) ? Les élèves de GROTHENDIECK (et, pour n'en citer qu'un, Pierre DELIGNE) ont montré tout le parti que l'on peut tirer des méthodes d'Algèbre homologique, non seulement pour explorer de nouveaux domaines, mais aussi pour résoudre des problèmes anciens et justement réputés difficiles.

V. Divers

1) Théorie des filtres. J'ai introduit en 1937 la notion de filtre dans deux Notes aux Comptes Rendus. Cette notion est devenue d'un usage courant en Topologie générale, ainsi que celle d'ultrafiltre qui lui est liée. Cette dernière intervient aussi dans certaines théories logiques.

2) Théorie de Galois des corps non commutatifs [26]. La théorie a ensuite été étendue aux anneaux simples, notamment par DIEUDONNÉ.

3) Analyse harmonique. Il s'agit d'un article écrit en collaboration avec R. GODEMENT [27]. C'est l'une des premières présentations "modernes" de la transformation de Fourier dans le cadre général des groupes abéliens localement compacts, sans faire appel à la théorie "classique".

4) Classes de fonctions indéfiniment dérivables ([17], [18]).

J'ai établi par voie élémentaire de nouvelles inégalités entre les dérivées successives d'une fonction d'une variable réelle. Puis, en collaboration avec S. MANDELBROJT, nous les avons appliquées à la solution définitive du problème de l'équivalence de deux classes de fonctions (chacune des classes étant définies par des majorations données des dérivées successives).

5) Extension et simplification d'un théorème de RADO ([34]).

J'ai formulé ce théorème de la manière suivante: une fonction continue f qui est holomorphe en tout point z où $f(z) \neq 0$ est holomorphe aussi aux points où $f(z) = 0$. La démonstration que j'en ai donnée est très simple et basée sur la théorie du potentiel. De là on déduit le théorème de RADO sous sa forme usuelle (i.e: une fonction holomorphe qui tend vers zéro à la frontière est identiquement nulle, sous des hypothèses convenables relatives à la frontière). De plus, sous la forme où je l'énonce, le théorème s'étend trivialement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, et même aux fonctions dans un ouvert d'un espace de Banach.

VI. Collaboration au Traité de N. BOURBAKI

Pendant vingt ans, de 1935 à 1954, j'ai participé au travail collectif d'élaboration des "Eléments de mathématiques" de Nicolas BOURBAKI. Ceci doit être mentionné dans cette Notice, non pour évoquer ma contribution personnelle qu'il est d'ailleurs bien difficile d'évaluer, mais pour dire tout l'enrichissement que j'en ai retiré. Ce travail en commun avec des hommes de caractères très divers, à la forte personnalité, mus par une commune exigence de perfection, m'a beaucoup appris, et je dois à ces amis une grande partie de ma culture mathématique.

LISTE DES TRAVAUX

I. 37 Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

On ne mentionne ici que les plus importantes parmi celles dont le sujet n'a pas fait l'objet d'une publication ultérieure.

[1] Deux Notes sur les filtres (205, 1937, p. 595 et p. 777)

[2] Sur le premier problème de Cousin (207, 1938, p. 558)

[3] Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe (226, 1948, p. 148 et p. 303)

[4] Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod (230, 1950, p. 425)

[5] Deux Notes (en collaboration avec J.P. SERRE) sur "Espaces fibrés et homotopie" (234, 1952, p. 288 et p. 393)

[6] Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes (en collaboration avec J.P. SERRE, 237, 1953, p. 128)

[7] Deux Notes (en collaboration avec F. BRUHAT) sur les sous-ensembles analytiques réels (244, 1957, p. 988 et p. 1123)

II. Mémoires originaux.

[1] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires (Thèse, Ann. Ec. Normale, 45, 1928, p. 255-346)

[2] Sur les fonctions de deux variables complexes (Bull. Sciences Math., 54, 1930, p. 99-116)

[3] Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique (J. de Math., 9e série, 10, 1931, p. 1-114)

[4] Sur les fonctions de deux variables complexes: les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D (Bull. Soc. Math. de France, 58, 1930, p. 199-219)

[5] Sur les variétés définies par une relation entière (Bull. Sciences Math., 55, 1931, p. 24-32 et p. 47-64)

[6] Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes (Bull. Soc. Math. de France, 59, 1931, p. 46-69)

[7] Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés (Math. Ann, 106, 1932, p. 540-573)

[8] Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Komplexen Veränderlichen (en collab. avec P. THULLEN, Math. Ann, 106, 1932, p. 617-647)

[9] Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné (Math. Zeitsch., 35, 1932, p. 760-773)

[10] Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données (Mathematica (Cluj), 7, 1933, p. 5-29)

[11] Sur les transformations localement topologiques (Acta Szeged, 6, 1933, p. 85-104)

[12] Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes (Bull. Sciences Math., 57, 1933, p. 333-344)

[13] Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes (Composition Math., 1, 1934, p. 223-227)

[14] Sur les groupes de transformations analytiques (Collection à la mémoire de J. HERBRAND, éd. Hermann, Actual. Scient. et Ind., fasc. 9, 1935)

[15] Sur les fonctions de n variables complexes: les transformations du produit topologique de deux domaines bornés (Bull. Soc. Math. de France, 64, 1936, p. 37-48)

[16] Un théorème sur les groupes ordonnés (Bull. Sciences Math., 63, 1939, p. 201-205)

[17] Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables (en collaboration avec S. MANDELBROJT, Acta Math., 72, 1940, p. 31-49)

[18] Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives (Public. Inst. Math. Strasbourg, n° 867 des Actualités Scient. et Ind., Hermann, 1940)

[19] Sur les matrices holomorphes de n variables complexes (J. de Math., 19, 1940, p. 1-26)

[20] Sur les fondements de la théorie du potentiel (Bull. Soc. Math. de France, 69, 1941, p. 71-96)

[21] La théorie générale du potentiel dans les espaces homogènes (Bull. Sciences Math., 66, 1942, p. 126-132 et 136-144)

[22] Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (Ann. Ecole Normale, 61, 1944, p. 149-197)

[23] Méthodes modernes en Topologie algébrique (Comm. Math. Helv., 18, 1945-46, p. 1-15)

[24] Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels (Bull. Soc. Math. de France, 73, 1945, p. 74-106)

[25] Théorie générale du balayage en potentiel newtonien (Ann. de Grenoble, XXII, 1946, p. 59-77)

[26] Théorie de Galois pour les corps non commutatifs (Ann. Ecole Normale, 64, 1947, p. 59-77)

[27] Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts (en collab. avec R. GODEMENT, Ann. Ecole Normale, 64, 1947, p. 79-99)

[28] Sur un cas de prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables complexes (Ann. Acad. Scient. Fennicae, series A, 61, 1949, p. 3-6)

[29] Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes (Bull. Soc. Math. de France, 78, 1950, p. 29-64)

[30] Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique (en collab. avec Jacques DENY, Acta Szeged, XII, 1950, p. 81-100)

[31] Deux conférences de Topologie au Colloque de Bruxelles (juin 1950):
- Notions d'algèbre différentielle, etc.. (p. 15-28)
- La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal (p. 57-72)

[32] Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (Proc. Intern. Congr. Math. 1950, vol. I, p. 152-164)

[33] Extension du théorème des chaînes de syzygies (Rend. di Matem. e delle sue appl., Serie V, vol. XI, Roma 1952, p. 1-11)

[34] Sur une extension d'un théorème de Rado (Math. Ann., 125, 1952, p. 49-50)

[35] Variétés analytiques complexes et cohomologie (Colloque de Bruxelles 1953, p. 41-55)

[36] Deux Notes aux Proc. Nat. Acad. Sc. USA sur les groupes d'Eilenberg-MacLane $H(\pi,n)$ (40, 1954, p. 467-471 et p. 704-707)

[37] Sur l'itération des opérations de Steenrod (Comm. Math. Helv., 29, 1955, p. 40-58)

[38] Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes (Vol. jubilaire en l'honneur de S. LEFSCHETZ, Princeton Univ. Press, 1957, p. 90-102; article écrit en 1954).

[39] Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes (Bull. Soc. Math. de France, 85, 1957, p. 77-99)

[40] Fonctions automorphes et séries de Poincaré (J. d'Analyse Math., Jérusalem, vol. VI, 1958, p. 169-175)

[41] Prolongement des espaces analytiques normaux (Math. Ann., 136, 1958, p. 97-110)

[42] Espaces fibrés analytiques (Symp. Intern. Top. Alg., Mexico 1956, paru en 1958)

[43] Foundations of fibre bundles (en collab. avec S. EILENBERG (même référence)

[44] Quotients of complex analytic spaces (Intern. Coll. on Function Theory, Tata Inst., Bombay, 1960, p. 1-15)

[45] Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: les espaces analytiques (Proc. Int. Congr. Math., 1958, p. 32-52)

[46] Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques (Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, Florence, 1961, p. 24-29)

[47] Faisceaux analytiques cohérents (8 leçons faites en 1963 au Centro intern. matematico estivo)

[48] Some applications of the new theory of Banach analytic spaces (J. London Math. Soc., 41, 1966, p. 70-78)

[49] Sur le théorème de préparation de Weierstrass (Festschrift Weierstrass, Westdeutscher Verlag, 1966, p. 156-168)

[50] Structural stability of differentiable mappings (Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis, Tokyo, 1969, p. 1-10)

[51] Sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes dans un espace de Banach (Séminaire sur les espaces analytiques; éd. de l'Acad. de la Rép. Soc. de Roumanie, Bucarest 1971, p. 129-135)

III. Liste des Séminaires publiés (Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure)

1948-49 Topologie algébrique

1949-50 Espaces fibrés et homotopie

1950-51 Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux

1951-52 Fonctions analytiques de plusieurs variables

1953-54 Fonctions automorphes

1954-55 Algèbres d'Eilenberg-MacLane

1955-56 (en collaboration avec C. CHEVALLEY) Géométrie algébrique

1956-57 Quelques questions de Topologie

1957-58 Fonctions automorphes (avec la collaboration de I. SATAKE et R. GODEMENT)

1958-59 Invariant de Hopf, d'après J.F. ADAMS

1959-60 (en collaboration avec J.C. MOORE) Périodicité des groupes d'homotopie des groupes classiques

1960-61 Déformation de structures complexes; fondements de la Géométrie analytique (par A. GROTHENDIECK)

1961-62 et 1962-63 Topologie différentielle

1963-64 (en collaboration avec L. SCHWARTZ) Théorème d'Atiyah-Singer

---

IV. Livres

Homological Algebra (en collaboration avec S. EILENBERG) (Princeton Univ. Press, Math. Series, n° 19, 1956); traduit en langue russe.

Théorie élémentaire des fonctions analytiques (Hermann 1961); traduit en anglais, allemand, espagnol, russe, japonais.

Calcul différentiel; formes différentielles (Hermann 1967); traduit en anglais et en russe.

Introduction à la Géométrie analytique (en préparation; à paraître chez North-Holland)

V. Divers

[1] Les transformations analytiques et les domaines convexes (Assoc. Franç. Avanc. des Sciences, 1931, p. 30-31)

[2] Sur les transformations pseudo-conformes des domaines cerclés bornés (Congrès Int. des Math., Zürich 1932)

[3] Sur le fondement logique des Mathématiques (Revue Scientifique, n° 3216, janvier 1943, p. 3-11)

[4] Nombres réels et mesure des grandeurs (Bull. Assoc. Prof. de Math., n° 165, 1954, p. 29-35)

[5] Structures algébriques (ibid., n° 176, 1956, p. 288-298)

[6] Sur la notion de dimension (ibid., n° 187, 1957, p. 1-12)

[7] Volume des polyèdres (ibid., n° 194, 1958, p. 1-12)

[8] Emil Artin (Abh. Math. Sem. Hamburg, 28, 1965, p. 1-5)

[9] Les travaux de Georges de Rham sur les variétés différentiables (Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer 1970, p. 1-11)

VI. Exposés au Séminaire Bourbaki

(Les numéros renvoient à la numérotation globale du Séminaire Bourbaki)

1, 8, 12. Les travaux de Koszul (1948-49)

34. Espaces fibrés analytiques complexes (1950)

73. Mémoire de Gleason sur le 5e problème de Hilbert (1953)

84. Fonctions et variétés algébroïdes, d'après Hirzebruch (1953)

115. Sur un mémoire inédit de Grauert (1955)

125. Théorie spectrale des **C**-algèbres commutatives, d'après Waelbroeck (1956)

137. Espaces fibrés analytiques, d'après Grauert (1956)

296. Thèse de Douady (1965)

337. Travaux de Karoubi sur la K-théorie (1968)

354. Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, d'après Ramis (1969)