

# *Astérisque*

HANS GRAUERT

## **Über die Deformation von Pseudogruppenstrukturen**

*Astérisque*, tome 32-33 (1976), p. 141-150

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1976\\_\\_32-33\\_\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__32-33__141_0)

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Über die Deformation von Pseudogruppenstrukturen

von

Hans Grauert

in Göttingen

1. Einleitung. Es seien  $Y, X, B$  komplexe Räume (eventuell mit nilpotenten Elementen),  $Y$  sei kompakt,  $0 \in B$  ein fest vorgegebener Aufpunkt (base point). Ferner sei  $\pi : X \rightarrow B$  eine platte eigentliche holomorphe Abbildung. Die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf  $B$ , die in einem festen Punkte  $t \in B$  eine Nullstelle haben, sei mit  $\underline{m}_t$  bezeichnet. Es sei  $\underline{H}(X)$  die Strukturgarbe von  $X$  und  $\hat{m}_t \in \underline{H}(X)$  die kohärente Idealgarbe, die durch Liftung der Keime von  $\underline{m}_t$  nach  $\underline{H}(X)$  entsteht. Wir bezeichnen dann  $\pi^{-1}(t)$  mit  $X_t$  und versehen  $X_t$  mit der Strukturgarbe  $\underline{H}(X)/\hat{m}_t|_{X_t}$ . Die analytische Menge  $X_t$  wird dadurch zu einem kompakten komplexen Raum. Er heißt die Faser von  $\pi$  über  $t$ . Ist nun noch  $X_0 = Y$ , so wird  $(X, \pi)$  eine holomorphe Deformation von  $Y$  genannt.

Wir betrachten einen weiteren komplexen Raum  $B'$ , der mit einem Aufpunkt  $0' \in B'$  versehen ist. Es sei  $\phi : B' \rightarrow B$ ,  $0' \rightarrow 0$  eine holomorphe Abbildung. Durch Bildung des Faserproduktes läßt sich dann die Familie  $\pi : X \rightarrow B$  nach  $B'$  zu einer Familie  $\pi' : X' \rightarrow B'$  liften. Die Abbildung  $\pi'$  ist wieder eigentlich, platt, holomorph. Man hat  $\pi'^{-1}(0') = Y$ , so daß  $(X', \pi')$  wieder eine holomorphe Deformation von  $Y$  ist.

Wir nennen  $(X, \pi)$  vollständig in  $O$ , wenn jede andere holomorphe Deformation von  $X_0$  in der Nähe des Aufpunktes durch Liften zu erhalten ist. Diese Eigenschaft definieren wir für jeden anderen Punkt  $t \in B$  genauso. Ferner nennen wir  $(X, \pi)$  in  $t \in B$  versell, wenn  $(X, \pi)$  in  $t$  vollständig ist und außerdem stets das totale Differential der Liftungsabbildung  $\phi$  im Aufpunkt von  $B'$  eindeutig bestimmt ist.

Holomorphe Deformationen von  $Y$ , die in  $O$  vollständig sind, erhalten also jede andere holomorphe Deformation von  $Y$  (lokal gesehen). Man kann leicht zeigen, daß eine in  $O$  verselle Deformation von  $Y$  bis auf eine naheliegende Isomorphie in der Nähe von  $O$  eindeutig bestimmt ist.

Die Existenz von versellen Deformationen von  $Y$  wurde für den Sonderfall, daß  $Y$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist, zuerst von Kuranishi [6] gezeigt. In diesem Fall ist ebenfalls  $X_t$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, wenn  $t$  aus einer Umgebung  $U(O) \in B$  ist. Im allgemeinen Fall wurde der Existenzbeweis von Douady [2], Forster und Knorr [3], Palamadov [7] und Grauert [4] unabhängig voneinander durchgeführt.

2. Beweisidee. Im folgenden gebe ich in groben Zügen meine Beweisidee, da sie für die Definition der Pseudogruppenstrukturen wesentlich ist. Wir stellen von dem komplexen Raum  $Y$  zunächst eine Aufbereitung her: Wir zerschneiden ihn in kleine Teile und gewinnen

durch Verkleben der Teile  $Y$  zurück. Indem die Teile deformiert und wieder verklebt werden, erhalten wir sodann die Deformation von  $Y$ .

Eine Aufbereitung ist ein System  $S = (U_1, \phi_1, Q_1, \underline{f}_1, \underline{G}_1, T_{1_1 1_2}, H_{1_1 1_2})$ ,

wobei die Indizes von  $1, \dots, 1_*$  laufen. Dabei sind:

- 1)  $\underline{U} = \{U_1\}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ ;
- 2)  $Q_1 \subset \mathbb{C}^N$  offene Quader;
- 3)  $\phi_1 : U_1 \supset Y_1 \subset Q_1$  biholomorphe Abbildungen auf komplexe Unterräume  $Y_1$  von  $Q_1$ ;

$$4) \underline{f}_1 = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ \vdots \\ f_m^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{sind } m\text{-tupel von beschränkten holomorphen}$$

Funktionen in  $Q_1$ . Die Komponenten  $f_i^{(1)}$  erzeugen gerade die Idealgarbe von  $Y_1$ ;

$$5) \underline{G}_1 = \begin{pmatrix} \underline{g}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{g}_l^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{sind beschränkte holomorphe } (l, m)\text{-Matrizen}$$

über  $Q_1$ . Die Zeilen  $\underline{g}_i^{(1)}$  erzeugen gerade die Relationengarbe von  $\underline{f}_1$ ;

- 6) Es sind  $T_{1_1 1_2} \subset Q_{1_1 1_2}$  offene Teilbereiche mit  $\phi_{1_2}(U_{1_1 1_2}) =$

$$Y_{1_2} \cap T_{1_1 1_2};$$

- 7)  $H_{1_1 1_2} : T_{1_1 1_2} \rightarrow T_{1_2 1_1}$  sind biholomorphe Abbildungen mit

$$Y_{1_2} \cap T_{1_1 1_2} \rightarrow Y_{1_1} \cap T_{1_2 1_1} \quad \text{gleich} \quad \phi_{1_1} \circ \phi_{1_2}^{-1}, \text{ so daß durch}$$

die Verklebung von  $Q_{1_2}$  mit  $Q_{1_1}$  ein Hausdorffraum entsteht.

Eine "kleine" Deformation wird sodann durch ein Tripel  $(\tilde{f}_1, \tilde{G}_1, \tilde{H}_{1_1 1_2})$  gegeben, bei dem  $\tilde{f}_1$  m-tupel holomorpher Funktionen in  $Q_1$  in der Nähe von  $\underline{f}_1$ ,  $\tilde{G}_1$  holomorphe  $(1,m)$ -Matrizen über  $Q_1$  in der Nähe von  $\underline{G}_1$  mit  $\tilde{G}_1 \circ \tilde{f}_1 = 0$  und  $\tilde{H}_{1_1 1_2} : T_{1_1 1_2} \rightarrow \mathbb{C}^N$  holomorphe Abbildungen in der Nähe von  $H_{1_1 1_2}$  sind, die  $T'_{1_1 1_2} \rightarrow T_{1_2 1_1}$  und  $T'_{1_1 1_2} \wedge \tilde{Y}_{1_2}$  in  $\tilde{Y}_{1_1}$  abbilden. Dabei ist  $\tilde{Y}_{1_1}$  der von  $\tilde{f}_1$  definierte komplexe Unterraum von  $Q_2$  und  $T'_{1_1 1_2} \subset T_{1_1 1_2}$  bezeichnet einen festen wenig von  $T_{1_1 1_2}$  verschiedenen Teilbereich.

Die Menge aller "kleinen" Deformationen bildet nun einen banach-analytischen Raum  $\underline{B}$ . Durch Verkleben aller  $\tilde{Y}_1$  mittels  $\tilde{H}_{1_1 1_2}$  (nach einer Verkleinerung von  $\tilde{Y}_1$ ) erhält man sodann zu jedem Punkt von  $\underline{B}$  einen kompakten komplexen Raum und sogar eine Familie  $\pi : X \rightarrow \underline{B}$ . Die  $\underline{G}_1$  sorgen dabei für die Platteheit. Die verselle Deformation ist dann eine endlich dimensionale Unterfamilie von  $\underline{X} \rightarrow \underline{B}$ , wobei die Aufbereitung allerdings geeignet zu wählen ist.

3. Pseudogruppenstrukturen. Im folgenden soll eine natürlich vorerst nur vorläufige Idee gegeben werden, wie Pseudogruppenstrukturen auf komplexen Räumen zu definieren sind, so daß eine Deformationstheorie möglich ist. Es sei eine Aufbereitung von  $Y$  vorgegeben.

- 1)  $\underline{O}$  bezeichne die Strukturgarbe des  $\mathbb{C}^N$  und  $\underline{F}_1 \subset m \underline{O} = \underline{O} \oplus \dots \oplus \underline{O}$  eine banach-analytische Untergarbe über  $Q_1$ . Diese Garben brauchen nicht analytische Untergarben zu sein und sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Ist  $U \subset Q_1$  eine offene Teilmenge, so ist die Menge der beschränkten Schnitte

$\Gamma_b(U, \underline{F}_1) \subset \Gamma_b(U, m \underline{O}) \cap K(\underline{f}_1 | U)$  stets eine banach-analytische Untermenge. Dabei bezeichnet  $K(\underline{f}_1 | U) \subset \Gamma_b(U, m \underline{O})$  eine offene Umgebung von  $\underline{f}_1 | U$  und in der Norm von  $\Gamma_b(U, m \underline{O})$  dürfen endlich viele Ableitungen eingehen.

Die Garben  $\underline{F}_1$  müssen sodann noch folgende Eigenschaften haben:

- a)  $\underline{f}_1 \in \Gamma_b(Q_1, \underline{F}_1)$
- b) Ist  $U \subset Q_1$  offen,  $A$  eine holomorphe invertierbare  $(m, m)$ -Matrix über  $U$ , so ist  $A \circ (\underline{F}_1 | U) \subset \underline{F}_1 | U$ .
- c) Es gibt eine banach-analytische Untergarbe  $\hat{\underline{G}}_1 \subset \underline{F}_1 \oplus \text{lm } \underline{O}$  mit  $(\underline{f}_1, \underline{G}_1) \in \Gamma(Q_1, \hat{\underline{G}}_1)$ , so daß für jedes  $\underline{f} \in \Gamma(U, \underline{F}_1)$  die Garbe  $\hat{\underline{G}}_{\underline{f}} = \{\sigma \in \text{lm } \underline{O}_z : (\underline{f}, \sigma) \in \hat{\underline{G}}_1, z \in U\}$  analytisch und kohärent ist und  $\sigma \circ \underline{f} = 0$  gilt für  $\sigma \in \hat{\underline{G}}_{\underline{f}}$ . (Untergarbe der Relationen).

2) Wir bezeichnen mit  $\underline{P}$  über dem  $\mathbb{C}^N$  die Garbe der Keime lokal-umkehrbarer lokaler holomorpher Abbildungen in den  $\mathbb{C}^N$ . Für jedes  $\underline{f}$  sei  $\underline{J}_{\underline{f}} \subset \underline{F}_1 \oplus \underline{P}$  eine banach-analytische Untergarbe, so daß folgendes gilt:

- a) Ist  $\underline{f} \in \Gamma(U, \underline{F}_1)$ ,  $U \subset Q_1$  so liegt  $(\underline{f}, \text{id})$  in  $\Gamma(U, \underline{J}_{\underline{f}})$ .
- b) In Garben  $\underline{J}_{\underline{f}} = \{\sigma \in \underline{P}_z : (\underline{f}, \sigma) \in \underline{J}_{\underline{f}}, z \in U\} \subset \underline{P} | U$  sind Untergarben von Pseudogruppen: sie können durch ein Garbendatum von Pseudogruppen definiert werden.
- c)  $\underline{J}_{\underline{f}}$  ändert sich nicht, wenn man  $\underline{f}$  mit einer invertierbaren holomorphen  $(m, m)$ -Matrix über  $U$  multipliziert.
- d) Ist  $F \in \Gamma(U, \underline{J}_{\underline{f}})$  injektiv, so folgt  $\underline{f} \circ F \in \Gamma(Q_1 \cap F^{-1}(U), \underline{F}_1)$
- e) es ist  $\underline{J}_{\underline{f} \circ F^{-1}} = F \circ \underline{J}_{\underline{f}} \circ F^{-1}$  in der Nähe der Identität.

3) Es seien banach-analytische Untergarben  $H_{-1,1,2} \subset F_{-1,2} \oplus P|T_{-1,1,2}$

mit folgenden Eigenschaften gegeben

- a)  $(\underline{f}_{-1,2}, H_{-1,1,2}) \in \Gamma(T_{-1,1,2}, H_{-1,1,2})$
- b) Die Garben  $H_{-1,1,2} \underline{f} = \{ \sigma \in P_{\underline{z}} : (\underline{f}, \sigma) \in H_{-1,1,2}, \underline{z} \in U \}$  für  $U \subset T_{-1,1,2}$  enthalten Schnittflächen über  $U$  und ändern sich nicht, wenn man  $\underline{f}$  mit einer invertierbaren holomorphen  $(m,m)$ -Matrix über  $U$  multipliziert. Strebt  $\underline{f}$  gegen  $\underline{f}_{-1,2}|U$  so möge man ferner die Schnittflächen  $H$  so wählen können, daß sie gegen  $H_{-1,1,2}$  streben.
- c) Es sei  $H \in \Gamma(U, H_{-1,1,2} \underline{f})$  injektiv und  $V = H(U) \wedge Q_{-1,1}$ . Dann ist  $\underline{f} \circ H^{-1} \in \Gamma(V, F_{-1,1})$  und  $J_{-1,1} \underline{f} \circ H^{-1} \circ H = H_{-1,1,2} \underline{f}$  in  $H^{-1}(V)$  und  $H \circ J_{-1,2} \underline{f} = H_{-1,1,2} \underline{f}$  (in gleichzeitiger Nähe von  $\text{id} \subset J_{-1,1}, J_{-1,2}$  und von  $H$ ).

Das Tripel  $(\underline{F}_{-1}, \underline{J}_{-1}, H_{-1,1,2})$  heißt eine Pseudogruppenstruktur zu der Aufbereitung  $S$ . Durch Vorgabe von  $\underline{F}_{-1}$  wird die Menge der lokalen Deformationen  $\tilde{Y}_1$  von  $Y_1$  eingeschränkt. Die  $\underline{J}_{-1}$  bewirken, daß weniger oft lokale Deformationen  $\tilde{Y}_1$  zueinander äquivalent sind, die  $H_{-1,1,2}$  beschränken schließlich die Verheftungsmöglichkeit. Die einzelnen Axiome bedeuten u. a. Verträglichkeiten zwischen den verschiedenen Strukturen.

Man kann zu unserer Pseudogruppenstruktur den Begriff der infinitesimalen Deformation wie in [4] definieren. Die infinitesimalen Deformationen bilden einen komplexen Vektorraum  $V$ . In ihm gibt es Klassen von äquivalenten Deformationen, die Vektoren eines Quotientenvektorraumes  $\underline{V}$  von  $V$  sind. Damit eine endlich dimensionale verselle

Deformation existiert muß  $\underline{V}$  sicher endlich dimensional sein. Doch dürfte diese Bedingung sicher noch nicht hinreichen, u. a. braucht man auch, daß  $H^1(Q_1, \underline{J}_1 \underline{f}) = 0$  ist, wenn  $\underline{f} \in \Gamma_b(Q_1, \underline{F}_1)$ . Vielleicht läßt sich das Problem mit Methoden lösen, die denen von [4] oder [2] ähnlich sind. Doch wird die Lösung sicher nicht in einer simplen Verallgemeinerung bestehen. Ich möchte das Problem hiermit stellen!

4. Klassische Spezialfälle. Wir wollen jetzt annehmen, daß  $Y$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist. Wir können dann  $N = \dim Y$  setzen,  $\phi_1 : U_1 \rightarrow Q_1$  ist dann ein komplexes Koordinatensystem in  $U_1$ . In diesem Falle ist  $\underline{F}_1 = 0$  und die  $\underline{J}_{10} \subset P|Q_1$  setzen sich zusammen zu einer Garbe  $\underline{J}$  von Keimen von lokalen biholomorphen Abbildungen von  $Y$  in  $Y$ . Natürlich ist  $\underline{J}$  eine Garbe von Pseudogruppen. Die Deformation von  $Y$  wird jetzt so bewerkstelligt, daß man die identische Verheftung von  $U_{11}$  und  $U_{12}$  durch eine biholomorphe Transformation  $F$  ersetzt, die eine Schnittfläche in  $\underline{J}$  ist.

Pseudogruppen wurden zum ersten Male 1909 von E. Cartan in einer Arbeit definiert, die in den Annales de École Normale Supérieure [1] erschien. Die Theorie der Deformation von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten mit Pseudogruppenstruktur wurde dann 1960 von K. Kodaira [5] entwickelt. Die Cartanschen Pseudogruppen sind "homogen": sie ändern ihre Struktur von Punkt zu Punkt nicht plötzlich, sie verhalten sich fast wie freie analytische Garben. Deshalb konnten Kodaira und später Spencer, Kuranishi u. a, die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen für die Pseudogruppenstrukturen ausnutzen. Natürlich ist die Garbe  $\underline{J}$  nicht analytisch, leider ist das

auch im allgemeinen nicht für die Garbe der infinitesimalen Transformationen zu  $\underline{J}$  der Fall.

Die Situation ändert sich, wenn wir eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $Y$  so deformieren wollen, daß ein komplexer Unterraum  $Y_1 \subset Y$  festbleibt. In diesem Falle deformieren wir zwar wieder mittels einer Garbe  $\underline{J}$  von Keimen von lokalen biholomorphen Abbildungen von  $Y$  in  $Y$ . Die lokalen biholomorphen Abbildungen sind jedoch jetzt diejenigen, die auf  $Y_1$  beschränkt die Identität sind. Deshalb ist  $\underline{J}$  nicht mehr homogen,  $\underline{J}$  ändert seine Struktur auf  $Y_1$  plötzlich. Die zugehörige Garbe der infinitesimalen Transformationen, besteht aus den Keimen von lokalen holomorphen Vektorfeldern, die auf  $Y_1$  verschwinden. Sie ist eine kohärente analytische Garbe!

Kohärente analytische Garben wurden im wesentlichen von H. Cartan in die komplexe Analysis eingeführt. Man muß also seine Ideen verwenden, um die Theorie der Pseudogruppenstrukturen zu vollenden!

Natürlich kann man auch kompakte komplexe Räume  $Y$  mit festen Unterräumen  $Y_1$  deformieren. Dieses zeigt, daß die Deformationstheorie für Vektorbündel  $V_0$  über einem festen kompakten komplexen Raum  $Z$  in unserem Konzept enthalten ist. Es sei  $Y_1 \subset V_0$  die Nullschnittfläche. Natürlich ist  $Y_1$  zu  $Z$  kanonisch isomorph. Mit  $\underline{H}$  bezeichnen wir dann die Strukturgarbe von  $V_0$  und mit  $\underline{m} \subset \underline{H}$  die Idealgarbe der Keime lokaler holomorpher Funktionen, die auf  $Y_1$  verschwinden. Wir versehen den Träger  $|Y_1|$  von  $Y_1$  sodann mit der

Strukturgarbe  $\underline{H}/\underline{m}^2|_{|Y_1|}$  und erhalten einen kompakten komplexen Raum  $Y$ . Unser  $Y_1$  ist ein komplexer Unterraum von  $Y$ . Man weiß, daß die Deformationen von  $Y$  mit festgehaltenem  $Y_1$  den Deformationen von  $V_0$  bijektiv entsprechen. Die Deformationstheorie von  $V_0$  ist also einfach die von  $Y$  mit festem  $Y_1$ !

L i t e r a t u r

- [1] Cartan, E.: Les groupes de transformations continus infinis simples. Ann. E. N. S. 26, 93 - 161 (1909).
- [2] Douady, A.: Le problème des modules locaux pour les espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques compacts. Ann. E. N. S. 7, 569 - 602.
- [3] Forster, und Knorr: Deformation kompakter komplexer Räume. Manuskript 1975.
- [4] Grauert, H.: Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. Invent. math. 25, 107 - 142 (1974).
- [5] Kodaira, K.: On deformations of some pseudogroup structures. Ann. Mathem. 71, 224 - 302 (1960).
- [6] Kuranishi: On locally complete Families of complex Analytic Structures. Ann. of Math. 75, 536 - 577 (1962)
- [7] Palamodow: Deformatschi kompleksnich Prostranstw. Manuskript 1975.

Hans GRAUERT  
Mathematics Institute University  
3400-GÖTTINGEN, RFA  
Bunsenstrasse 3-5