Astérisque

ARNAUD DENJOY
GUSTAVE CHOQUET (réd.)

Arnaud Denjoy : évocation de l'homme et de l'œuvre

Astérisque, tome 28-29 (1975)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__28-29__1_0>

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ARNAUD DENJOY

Né à Auch (Gers), le 5 janvier 1884.

Elève de l'Ecole Normale Supérieure (1902-1905).

Agrégé de mathématiques (1905)

Pensionnaire de la Fondation Thiers (1906-1909).

Docteur ès sciences mathématiques (1909).

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier (1909-1919), en mission à partir de septembre 1917.

Professeur ordinaire d'algèbre supérieure, calcul différentiel, calcul intégral et théorie des fonctions à l'Université d'Utrecht (1917-1922).

Professeur de mathématiques générales à la Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg, maintenu en mission (1919-1925).

Chargé de cours (1922-1925), maître de conférences (1925-1931), professeur de mathématiques générales (1931-1933), et professeur de calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Paris en 1933, puis titulaire de la chaire de "Théorie des fonctions et topologie".

Membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1942.

Jubilé scientifique en 1955.

Décédé à Paris, le 21 janvier 1974.

TABLE DES MATIÈRES

Le Comité de Rédaction d'Astérisque tient à exprimer ses remerciements à Monsieur Gustave CHOQUET pour le soin qu'il a pris à rassembler ces textes.

AVANT-PROPOS

Arnaud Denjoy, né à Auch (Gers) le 5 janvier 1884, est décédé à Paris le 21 janvier 1974.(1)

Lorsque disparaît un mathématicien d'une telle stature, l'un des meilleurs hommages que puisse lui rendre la communauté mathématique consiste à publier une édition de ses oeuvres scientifiques complètes. Celle-ci constitue désormais un outil de travail, à la fois pour les mathématiciens qui peuvent commodément y découvrir des facettes mal connues de cette oeuvre, et pour les philosophes et historiens des sciences qui vont pouvoir, sans recherches bibliographiques fastidieuses, analyser la naissance et le développement des concepts et des méthodes introduits par le disparu.

Arnaud Denjoy a frustré sa postérité de ce pieux devoir en rassemblant lui-même vers 1956 l'essentiel de ses oeuvres scientifiques en plusieurs volumes qui parurent chez Gauthier-Villars :

<u>Articles et mémoires</u> (en 2 volumes)

<u>Un demi-siècle</u> (1907-1956) <u>de Notes communiquées aux Académies</u> (en 2 volumes).

Enfin un dernier volume réunissait ses mémoires fondamentaux sur "<u>La dérivation et son calcul inverse</u>" (1954).

---

(1) On trouvera dans ce volume une courte Notice biographique, et la Notice nécrologique lue par Henri Cartan à l'Académie des Sciences. On pourra consulter aussi la Notice rédigée par Gustave Choquet dans l'annuaire 1975 de l'Association amicale des Anciens Elèves de l'Ecole Normale Supérieure, ainsi que la plaquette éditée en 1955 à l'occasion du Jubilé d'Arnaud Denjoy.

Le présent fascicule d'Astérisque consacré à Denjoy n'est donc qu'un humble hommage à celui qui, avec Borel, Baire et Lebesgue, créa l'école française de "Théorie des fonctions de variable réelle", et qui sut certainement le mieux réaliser une synthèse des idées fécondes, topologiques et métriques, introduites par Borel, Baire et Lebesgue.

Ce fascicule a été conçu pour constituer, à la fois un guide dans l'oeuvre de Denjoy, une évocation des aspects multiples et souvent mal connus de l'homme hors série qu'il était, et une incitation à relire des travaux qui restent remarquables à divers titres. Tels les mémoires sur la dérivation et son calcul inverse dont le style admirable peut constituer une excellente nourriture pour des jeunes chercheurs habitués à des rédactions squelettiques et sans motivation apparente ; tels aussi les nombreux travaux qui sont à la frontière de la théorie des fonctions $f(z)$ et de la théorie topologique et métrique des ensembles plans.

On y a juxtaposé plusieurs textes où Arnaud Denjoy parle de lui-même et de son oeuvre, l'ensemble de ses Notes aux Comptes Rendus depuis 1956, et quelques textes récents de Henri Cartan et H.Rosenberg. Ceux-ci montrent que, dans une direction au moins, l'oeuvre de Denjoy continue à inspirer des recherches contemporaines.

Arnaud Denjoy eut toute sa vie une grande fidélité aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris ; il encourageait ses disciples à y annoncer leurs découvertes ; lui-même en fit un grand usage et négligea parfois pendant longtemps de développer les résultats qu'il y avait annoncés. Ce fut le cas par exemple pour ses énoncés difficiles sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques ; il ne les développa que fort tard, après que quelques mathématiciens eurent émis des doutes sur leur légitimité.

Les Notes reproduites ici, postérieures à 1956, concernent essentiellement la théorie de la mesure et le théorème de Vitali, ainsi que les équations différentielles périodiques. Ce dernier sujet ne cessa jamais de l'intéresser ; j'ai eu souvent l'impression qu'il y pensait constamment ; aussi les Notes qui le concernent, même les plus récentes (1966) pourraient-elles contenir des perles encore inaperçues.

Le chapitre II se termine par un texte qui révèlera un aspect de Denjoy assez surprenant pour ceux qui n'ont connu de lui que les écrits mathématiques : "Rome 1908" est un récit de voyage ; il nous fait mieux comprendre ce conseil que lui adressait au lycée d'Auch son professeur de rhétorique : "Denjoy, vous avez beaucoup d'idées pour votre âge ; ne faites pas de mathématiques, vous pouvez devenir quelqu'un".

De fait, il avait des dons multiples ; ses intérêts étaient extrêmement variés. Il laisse une étonnante collection de manuscrits où, durant toute sa vie, d'abord de son écriture serrée de grand myope, puis plus tard lorsque sa vue s'affaiblit encore, avec sa vénérable machine à écrire Oliver, il nota ses réflexions sur l'art, la poésie, la science et la philosophie, la psychologie et la politique.Il succomba même un moment aux séductions de la politique puisqu'il fut pendant quelques années Conseiller Général dans le Gers. Son programme politique devait être bien convaincant, car lui-même était loin d'être un orateur. Sa forte myopie et sa voix trop faible l'en empêchaient.

Je l'entendis à plusieurs reprises regretter de ne pas avoir lu suffisamment et d'avoir perdu ainsi des occasions d'élargir son horizon mathématique. Il est exact qu'il lisait très peu de publications mathématiques, et presque exclusivement les tirés à part qu'on lui adressait. Mais la variété de son oeuvre dans la partie la plus productrive de sa vie permet de douter de la justesse de cette auto-critique ; en fait son intuition géométrique exceptionnelle jointe à son grand pouvoir de concentration compensait probablement la rareté de ses contacts avec la littérature mathématique, et ces deux facteurs contribuèrent à préserver son originalité.

Plus tard, il est probable que son manque d'informations mathématiques, accentué encore par des difficultés de vision grandissantes, l'empêchèrent de se faire une idée correcte des développements récents de la Topologie, de l'Analyse, et tout particulièrement de l'Analyse fonctionnelle. C'est ainsi que l'étude critique de l'oeuvre et des tendances bourbakistes qu'il avait entreprise quelques années avant sa mort contient-elle, à côté de ses réflexions profondes et judicieuses, des jugements basés sur une information insuffisante.

Cet Avant-propos serait bien incomplet s'il ne comportait mes sincères remerciements :

- au Comité de Rédaction d'Astérisque qui a pris l'initiative de consacrer ce fascicule à Arnaud Denjoy,
- à Madame Froment-Mazaud qui a mis tout son dévouement à la préparation matérielle de ce fascicule,
- à Mademoiselle Lardeux qui s'est spontanément chargée du travail ingrat de la bibliographie depuis 1942.

Gustave CHOQUET

CHAPITRE I

BIBLIOGRAPHIE

La "Bibliographie complémentaire" que nous publions ci-dessous concerne l'essentiel des publications scientifiques d'Arnaud Denjoy depuis 1942.

Nous n'avons pas jugé utile de reproduire ici la bibliographie des Notes aux Comptes Rendus antérieures à 1956 ; celle-ci, accompagnée de tables analytiques fort commodes établies par A.Denjoy lui-même figure dans les deux recueils de ses oeuvres qu'il a publiés chez Gauthier-Villars :

- Articles et Mémoires (1955) en deux volumes :
  I. La variable complexe. II. Le champ réel. Notices.
- Un demi-siècle (1907-1956) de Notes communiquées aux Académies : I. La variable complexe. II. Le champ réel.

Nous avons reproduit au Chapitre II l'intégralité des 28 Notes publiées par Arnaud Denjoy aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris depuis 1956, répondant ainsi à un voeu qu'il avait formulé il y a trois ans.

BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE

1. Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris après 1957.

- Le phénomène ergodique et les trajectoires sur le tore, t.247, 1958, p.1072-1078.
- Les systèmes d'équations différentielles périodiques, t.247, 1958, p.1691-1696.

- Equations différentielles périodiques, t.247, 1958, p.1923-1928.
- Sur les équations différentielles périodiques, t.248, 1959, p.28-33.
- Les équations différentielles périodiques. Allure asymptotique des intégrales, t.248, 1959, p.325-330.
- Les équations différentielles périodiques. Points d'accumulation des intégrales, t.248, 1959, p.497-500.
- Les systèmes différentiels périodiques. Propriétés ergodiques et stabilité des trajectoires, t.248, 1959, p.1253- 1258.
- Les équations différentielles périodiques, t.249, 1959, p.590-591.
- La métrique de Stieltjes, t.249, 1959, p.2437-2442.
- L'intégrale de Stieltjes, t.250, 1960, p.23-29.
- Les fonctionnelles linéaires, t.250, 1960, p.250-255.
- Sur les trajectoires du tore, t.251, 1960, p.175-177.
- Rapports logiques associés pour l'inclusion ou l'exclusion vis-à-vis de p classes d'éléments dans un même espace, t.257, 1963, p.2594-2596.
- Métrique sans topologie. Définition des fonctions mesurables, non dogmatique, mais exigée par l'intégration, t.257, 1963, p.2776-2781.
- Métrique sans topologie. Le théorème général de Vitali, t.257, 1963, p.3071-3076.
- Métrique sans topologie. Espaces dénombrablement mesurables, où la mesure de tout voisinage est infinie, t.257, 1963, p.3536-3541.
- Métrique sans topologie. Le théorème de Vitali dans un espace dénombrablement mesurable, et où tous les voisinages sont de mesure infinie, t.257, 1963, p.3755-3761.
- Catégories définies par l'association de rapports logiques d'inclusion ou d'exclusion, vis-à-vis de p classes d'éléments

dans un même espace, t.258, 1964, p.765-767.

- Probabilités confirmant l'hypothèse de Riemann sur les zéros de $\zeta(s)$, t.259, 1964, p.3143-3145.
- Les degrés de nullité dans la mesure des ensembles parfaits linéaires, t.259, 1964, p.4449-4451.
- La nature du développement des nombres réels en fraction continue, t.260, 1965, p.6241-6246.
- L'extension au champ complexe de la fonction $\chi(x,\alpha)$ associée aux développements en fraction continue, t.260, 1965, p.6775-6780. Erratum, t.261, 1965, p.1587.
- D'après la topologie du tore à deux dimensions dans l'espace à trois, ergodicité des trajectoires sur le tore à trois dimensions dans l'espace à quatre, en l'absence de cycles, t.261, 1965, p.3917-3921 et 4293-4296.
- Ergodicité présentée pour les intégrales des systèmes de deux équations différentielles périodiques, en l'absence de solutions cycliques, t.261, 1965, p.4579-4582.
- L'ergodicité des trajectoires, t.263, 1966, p.67-68.
- Sur les ensembles dispersés, t.265, 1967, p.529-533.

2. Articles de périodiques ou d'ouvrages collectifs après 1942.

- Les continus et la représentation conforme, Bull. Soc. Math. France, t.70, 1942, p.97-124.
- Sur la représentation conforme des aires planes, Mathematica, Timisoara, t.20, 1944, p.73-89.
- Les ensembles rangés, Colloquium Math., Warszawa, t.1, 1948, p.174-176.
- Quelques propriétés des espaces rangés, Ann. Soc. Polon. Sc., t.21, 1948, p.187-195.
- Récurrence et antirécurrence, "Congrès international de philosophie des sciences (1949.Paris), Vol.3 : Philosophie, mathématiques,

mécanique", p.101-106. - Paris, Hermann, 1951 (Act. scient. et insd. , 1137).

- Une extension du théorème de Vitali, Amer. J. Math., t.73, 1951, p.314-356.

- L'insertion de nouveaux éléments dans un ensemble ordonné, Acad. Serbe Sc. , Publ. Inst. Math., t.4, 1952, p.31-50.

- A propos des théorèmes dits "de Janiszewski" (Communication consécutive à un exposé de C.Kuratowski), "Atti del quarto congresso dell'Unione Mathematica Italiana (1951.Taormina). Vol.2", p.363-365. - Roma, Casa Editrice Perrella, 1953.

- Approximation sommatoire de certaines séries analytiques, "Atti del quarta congresso dell'Unione Mathematica Italiana (1951. Taormina). Vol.2", p.89-94. - Roma, Casa Editrice Perrella, 1953.

- Une démonstration de l'identité fondamentale de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, J. Anal.Math. , Jérusalem, t.3, 1954, p.197-206.

- Le théorème de Vitali, Bull. Math. Soc. Sc. Math. et Phys. Rép. Pop. Roumaine, t.1, 1957, p.11-15.

- Sur le théorème de Vitali, Rev. Math. Pures et Appl., t.2, 1957, p.161-166.

- Préface de "PICCARD (Sophie). - Sur les bases des groupes d'ordre fini", p.V-VI. - Neuchatel, Secrétariat de l'Université, 1957, (Mémoires de l'Université de Neuchatel, 25).

- Solutions stables des équations différentielles du premier ordre, Bull. Soc. Math. et Phys. Rép. Pop. Serbie, t.9, 1957, p.139-143.

- DENJOY (Arnaud), FELIX (Lucienne) et MONTEL (Paul). - Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme; Ens. Math. Genève, 2e série, t.13, 1957, p.1-18 et 19-108.

- L'allure asymptotique des fonctions entières d'ordre fini (sommaire en russe), Izvest. na Mat. Inst. , Skopje, t.2, 1957, n°2, p.15-17.

- Sur les courbes définies par les équations différentielles (en chinois), Advancement in Math., t.4, 1958, p.161-187.
- Etude d'une fonction minkovskienne dans le plan complexe, Ann. Acad. Scient. Fenn. , Ser. A-1, 1958, n°250/7, 11 p.
- Sur une fonction imaginée par Minkowski, (sommaire en bulgare et en russe), Izvest. na Mat. Inst. Skopje, t.4, 1959, n°1, p.13-24.
- Principe de topologie plane (en russe), "Trudy Tret'ego vsesojuznogo mat. S"ezda (1956.Moskva), t.4, p.195-197. - Moskva, Izdatel'stvo Akad. Nauk SSSR, 1959.
- Les dérivées premières symétriques (sommaire en russe), "Sammelband der zu ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers", p.109-111. - Berlin, Akademie-Verlag, 1959.
- Les équations différentielles périodiques, "Actes du Symposium International R.J.Boškovic (1961. Dubrovnik), p.39-41. - Beograd 1962.
- Archimede analysis moderne, "Città di Siracusa celebrazioni Archimedee ... 1961. Vol.1 : Conferenze generale e simposio di geometria differenziale, Parte 1", p.47-59. - Gubbio, Ediz. "Oderisi", 1963.
- Les systèmes d'équations différentielles périodiques, "Bericht von der Dirichlet-Tagung", p.23-25. - Berlin, Akademie-Verlag, 1963.
- Théorie des fonctions de variables réelles, "La science contemporaine, Vol.2 : Le 20e siècle", p.35-41. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Histoire générale des Sciences, sous la direction de R.Taton, Tome 3) ; (en anglais) "History of Sciences : Science in the 20th century. Ed. R.Taton. Translated by A.J.Pomerans. - New York, Basic-Books, 1966.
- Sur une fonction de variable complexe rattachée au développement des nombres réels en fraction continue, "Sovremen.probl.

teor. analit. funkcij, Mezdun. konf. teor. analit. funkcij (1965. Erevan)",p.104-118. - Moskva, Izdatel'stvo Nauka, 1966.

- Catégories définies par l'association des rapports logiques d'inclusion ou d'exclusion, vis-à-vis de p classes d'éléments dans un même espace, Bul . Inst. Politehn. Iasi, Serie nova, t.11, 1965, n°3-4, p.7-10.

- A propos d'un théorème sur les fonctions quasi analytiques, Bull. Sc. Math., 2e série, t.95, 1971, p.331-339.

3. Livres après 1942.

- L'énumération transfinie. - Paris, Gauthier-Villars.

Livre I : La notion de rang. - 1946. - XXXVII + 206 p.

Livre II : L'arithmétisation du transfini. 1re partie : Les permutations spéciales. - 1952. - p.207-436. 2e partie : Les suites canoniques. - 1952. p.437-614.

Livre III : Etudes complémentaires sur l'ordination. - 1954. p.615-771.

Livre IV : Notes sur les sujets controversés. - 1954. p.773-971.

- Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. 4e partie : Les totalisations. Solution du problème de Fourier. - Paris, Gauthier-Villars, 1949.

Fascicule 1 : Les totalisations. p.327-481.

Fascicule 2 : Appendices et tables générales. p.483-715.

- Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. - Paris, Gauthier-Villars, 1954, 236 p.

- Articles et mémoires. - Paris, Gauthier-Villars, 1955.

Vol.1 : La variable complexe. X + p.1-507.

Vol.2 : Le champ réel. Notices. VI + p.509-1108.

- Jubilé scientifique d'Arnaud Denjoy.-Paris, Gauthier-Villars, 1956.

- Un demi-siècle (1907-1956) de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei, suivies par des observations et commentaires. - Paris, Gauthier-Villars, 1957.
Vol.1 : La variable complexe. p.1-221 + 1-58
Vol.2 : Le champ réel. p.223-589 + 59-99.

- Hommes, formes et le nombre. - Paris, A.Blanchard, 1964, 286 p.

Notice nécrologique sur ARNAUD DENJOY,

Membre de la Section de Géométrie,

par M. Henri Cartan.

Arnaud Denjoy nous a quittés le 21 janvier dernier; il venait d'atteindre l'âge de 90 ans. Son nom restera illustre dans l'histoire des mathématiques, car il eut l'audace de s'attaquer à quelques-uns des problèmes les plus difficiles de son temps et, qui plus est, de les résoudre.

Il était né à Auch le 5 janvier 1884. Élève au lycée de cette ville jusqu'en classe de troisième, il termine ensuite ses études secondaires à Montpellier. C'était un élève très doué pour les lettres; son professeur de rhétorique lui avait donné le conseil suivant : « Ne faites pas de mathématiques, vous pouvez devenir quelqu'un ». Denjoy ne suivit pas ce conseil; il eut, dans la classe de mathématiques spéciales de Montpellier, un professeur de mathématiques que « les exigences de la logique mettaient en fureur »; aussi, avec ses camarades, devait-il chercher à s'instruire dans des cours anciens et dans des livres. Après cette préparation un peu déficiente, Arnaud Denjoy entre à l'École Normale de la rue d'Ulm en 1902, à la faveur d'une démission; mais c'est avec le premier rang à l'agrégation qu'il en sort en 1905. Quatre ans plus tard il revient à Montpellier, comme maître de conférences, après avoir passé trois années à la Fondation Thiers et avoir soutenu une thèse de doctorat consacrée aux « produits canoniques d'ordre infini ». Au bout de cinq années d'enseignement à la Faculté des Sciences de Montpellier, il est pris par la guerre de 1914 et mobilisé dans le service auxiliaire; en 1917 il est mis en sursis d'appel pour être envoyé en mission aux Pays-Bas, une chaire lui ayant été offerte à l'Université d'Utrecht. Ses tout récents travaux sur la totalisation l'avaient en effet déjà rendu célèbre. Au plus fort de la guerre sous-marine, il rejoint son nouveau poste par mer, *via* l'Angleterre, et son bateau est torpillé à deux reprises. Il passe alors à Utrecht cinq années parmi les plus fructueuses, dont il s'est souvent plu à évoquer le souvenir. Ce fut l'époque des longues promenades à bicyclette le long des canaux et de la collaboration avec Julius Wolff. En 1922, Denjoy est appelé à la Faculté des Sciences de Paris, comme chargé de cours puis maître de conférences, et enfin comme professeur titulaire à partir de 1931. Il y occupe successivement plusieurs chaires, la dernière en date étant celle de théorie des fonctions, transformée pour la circonstance en « chaire de Théorie des fonctions et Topologie ». Il prend sa retraite en 1955, après 33 années d'enseignement à la Faculté. Il est alors âgé de 71 ans. A l'occasion de sa retraite, il reçoit les hommages du monde entier au cours d'une cérémonie organisée à la Maison internationale de la Cité universitaire par les soins de son jeune collègue Jean Favard, mort prématurément depuis.

Entre temps, Arnaud Denjoy était entré à l'Académie des Sciences, élu le 15 juin 1942 comme Membre de la Section de Géométrie. Agé alors de 58 ans, il y succédait au grand Henri Lebesgue dont il avait prolongé les travaux. Au cours de sa carrière de mathématicien, Denjoy fut élu par un grand nombre d'Académies et de Sociétés savantes étrangères; je citerai seulement la première en date : l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam en 1920; et l'une des dernières : l'Académie des Sciences de l'Union des Républiques Socialistes Soviétiques. Il faut dire que l'œuvre de Denjoy a eu un écho considérable dans des pays comme l'Union Soviétique et la Pologne et qu'elle y a suscité de nombreux travaux.

Denjoy avait été souvent invité à donner des enseignements à l'étranger, indépendamment de son séjour en Hollande, et notamment à l'Université Harvard en 1938. De 1954 à 1957 il avait exercé les fonctions de premier vice-président de l'Union mathématique internationale, reconstituée quelques années après la seconde guerre mondiale.

Les relations scientifiques qu'Arnaud Denjoy entretenait, fort nombreuses, avec les savants étrangers, eurent une conséquence curieuse : ayant organisé vers 1950 avec un collègue statisticien, alors ministre du gouvernement de Haïti, une visite dans cette île de deux grands médecins français, les professeurs Leriche et Laubry, il fut nommé peu après, lui citoyen français, attaché culturel en France de la République de Haïti. C'était avant la dictature qui sévit ensuite dans ce pays lointain.

Pour être complet, il faut dire aussi que Denjoy ne se désintéressait pas de la chose publique. Au temps de son séjour à la Faculté de Montpellier il fut conseiller municipal de cette ville, et entre les deux guerres il détint pendant vingt ans un mandat de conseiller général du département du Gers (son département natal). Il appartenait au parti radical-socialiste et avait des idées assez avancées pour l'époque. Je ne parlerai pas de la culture littéraire de Denjoy, qui était grande, et qui se manifeste dans le style de ses écrits scientifiques.

Il convient d'aborder enfin le chapitre de son œuvre mathématique. Arnaud Denjoy avait une conscience aiguë de l'importance des problèmes auxquels il s'était attaqué avec succès. Lui-même les avait classés par ordre d'intérêt. Il plaçait en tête, et ceci ne surprendra personne, le calcul des fonctions primitives auquel il a donné le nom de « totalisation ». La dérivée f' d'une fonction f d'une variable réelle peut présenter beaucoup d'irrégularités; non seulement elle peut n'être pas continue (ce qui est banal), mais elle n'est pas, en général, intégrable au sens de Lebesgue. L'intégration de Lebesgue, cet outil magnifique dont on se sert maintenant chaque jour, est donc inapte au calcul des primitives. Il faut le remplacer par une opération beaucoup plus subtile, la totalisation; elle est si subtile et complexe que depuis sa découverte par Denjoy elle n'a guère, à ce jour, reçu d'application concrète. Mais ceci n'enlève rien à l'importance de l'analyse très fine, faite par Denjoy, des propriétés de la dérivée d'une fonction continue, analyse qui dépasse de loin les recherches de ses prédécesseurs. Dans une série de longs mémoires il analyse la structure des nombres dérivés d'une fonction continue, introduisant au passage les nouvelles notions de fonction approximativement continue, de fonction à variation résoluble, de dérivée approximative. Cette série culmine avec deux mémoires publiés en 1916 et 1917 aux *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* : il y résout complètement le problème de la totalisation au moyen d'une suite d'opérations qui sont indexées par les ordinaux transfinis de Cantor. Pour une fonction donnée, ces opérations s'arrêtent pour un certain nombre transfini (qui dépend de la fonction), et le cardinal de ce nombre transfini est dénombrable. Ainsi Denjoy, après Baire, introduisait l'usage des nombres transfinis dans l'Analyse qu'il faut bien appeler classique. Lors de chacune de ces opérations numérotées transfiniment, l'on se trouve devant un ensemble fermé non dense qu'il s'agit de réduire d'une certaine manière au moyen de l'opération en question; Denjoy explique cela dans un langage imagé, que je voudrais citer pour donner une idée de son style :

« Supposons qu'à un certain stade on soit arrêté devant un ensemble fermé non dense H. Les champs où l'on a déjà intégré sont comme des biefs d'eau séparés par des vannes, des récifs, qui sont les points de H. Il s'agit de réunir ces biefs en résorbant les points intermédiaires de H. Il faut trouver et justifier une méthode permettant d'ouvrir au moins une brèche, de faire disparaître dans le flot qui le baigne au moins une aiguille, une petite barrière de récifs ».

Après la totalisation, Denjoy considérait que sa contribution la plus importante à l'Analyse était le calcul des coefficients d'une série trigonométrique en fonction de la somme f de cette série (supposée convergente). Ce calcul revient en fait à celui du terme constant du développement de Fourier de f, donc finalement au calcul d'une « primitive seconde généralisée ». C'est là un problème encore plus ardu que celui de la recherche des primitives déjà résolu au moyen de la totalisation. Mais Denjoy réussit, par des méthodes analogues, à surmonter les difficultés. Il y a encore des opérations numérotées par les nombres transfinis, et à chaque stade on doit s'attaquer à un ensemble fermé non dense. L'attaque est encore plus difficile que dans le cas de la totalisation; écoutons plutôt Denjoy s'exprimer comme un chef d'armée : « Il y a trois façons de livrer l'assaut à l'ensemble H : si les deux premières échouent, la troisième emporte sûrement la position. »

Ces travaux, menés avec succès de 1919 à 1921, furent repris plus tard dans un vaste ouvrage d'exposition, conçu pendant la deuxième guerre mondiale, achevé et publié après la guerre dans une série de 5 volumes parus chez Gauthier-Villars. A cette occasion, Denjoy fut amené à réfléchir plus profondément sur les nombres transfinis eux-mêmes; il nous a livré le résultat de ses réflexions dans 5 autres volumes.

Un autre point important de l'œuvre de Denjoy concerne les fonctions *quasi-analytiques*. Cette notion avait été introduite incidemment, d'une façon assez vague, par Émile Borel à propos de l'étude de la convergence de certaines séries de fonctions rationnelles d'une variable complexe. C'est Hadamard qui, en 1912, avait posé clairement le problème pour les fonctions d'une variable réelle, et d'une façon définitive; ce problème fait intervenir une suite infinie de nombres positifs $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$; une telle suite définit une classe de fonctions, et il s'agit de savoir à quelles conditions doit satisfaire la suite donnée pour que chaque fonction de la classe soit entièrement déterminée par la connaissance de sa valeur et de celles de ses dérivées en un seul point. (Lorsque $A_n = n!$, on obtient ainsi la classe des fonctions analytiques). C'est Denjoy qui, le premier en 1921, donna une réponse, devenue classique, au problème d'Hadamard : il suffit que la série $\sum_n (A_n)^{-1/n}$ soit divergente. A la vérité, Denjoy ne connaissait pas la formulation d'Hadamard; et s'il a donné l'énoncé que je viens de dire, il ne l'avait démontré que sous des hypothèses restrictives de régularité de la suite des A_n; mais l'idée était lancée, et quelques années plus tard, le problème fut entièrement résolu.

Le travail que Denjoy classait au quatrième rang dans l'ensemble de son œuvre est celui que bien des mathématiciens aujourd'hui auraient tendance à considérer comme le plus fondamental, car il est devenu le point de départ de recherches extrêmement fécondes. Il s'agit de son mémoire paru en 1932 au *Journal de Mathématiques*, où il étudie les solutions d'une équation différentielle sur la surface d'un tore; dans le langage d'aujourd'hui, il s'agit donc des *feuilletages* à une dimension du tore à deux dimensions. Une équation différentielle sur le tore définit un groupe de transformations du tore en lui-même dépendant d'un paramètre réel t, qu'on peut appeler le temps; et lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, chaque point du tore décrit une trajectoire. Il s'agit d'étudier la situation dans le cas où aucune de ces trajectoires n'est périodique. Poincaré avait posé la question de savoir si, dans ce cas, chaque trajectoire est partout dense, c'est-à-dire finit par passer, au bout d'un temps assez long, aussi près qu'on veut de n'importe quel point du tore. C'est ce que prouve Denjoy, en supposant que les données soient deux fois continûment différentiables. En revanche (et c'est là le point surprenant), si les données ne sont qu'une fois continûment différentiables, Denjoy montre que la conjecture de Poincaré est fausse; il montre même que si l'on considère l'ensemble des points de rencontre d'une trajectoire donnée avec un méridien M_0, ou plus exactement l'ensemble des points d'accumulation de ces points de rencontre, cet ensemble J est un ensemble parfait discontinu de Cantor que l'on peut se donner arbitrairement; d'une façon précise, étant donné arbitrairement un ensemble parfait J sur le méridien M_0, il existe une équation différentielle (à données seulement continues) pour laquelle l'une des trajectoires donne lieu à cet ensemble J.

Bien entendu, ce bref aperçu des travaux de Denjoy est loin d'être exhaustif. De plus il ne s'est pas contenté de faire des mathématiques; il nous a aussi livré ses idées sur la science mathématique et le rôle du mathématicien. « Pour moi, a-t-il écrit, les mathématiques demandent la même objectivité qu'une science expérimentale ». Il considérait que le mathématicien est un découvreur de phénomènes qui ont une existence indépendante de lui, et qu'il doit déceler les relations plus ou moins cachées qui existent entre eux. « Nous devons, disait-il encore, interroger la nature avec le vœu de recevoir ses enseignements et non point le désir de lui dicter nos réponses ».

Denjoy ne se contenta pas de découvrir de nouveaux domaines des mathématiques; il sut aussi susciter des vocations et encourager des disciples à découvrir eux aussi. Je me contenterai de rappeler qu'ayant décelé chez un jeune ami banquier des dons indiscutables il réussit à le convaincre d'entreprendre une carrière scientifique : grâce à Denjoy, l'analyse harmonique s'est enrichie des découvertes de Raphaël Salem, un collègue trop tôt disparu qui laisse un nom.

Arnaud Denjoy présida notre Académie en 1962. Nul plus que lui n'était convaincu de la nécessité de la réformer, afin que dans toutes les disciplines scientifiques les hommes les plus remarquables de notre pays soient appelés à se mettre au service de l'Académie lorsqu'ils sont encore dans la force de l'âge et en pleine activité. Comme Président, il avait soumis à l'Académie certaines suggestions, et ce fut pour lui une grande déception de constater qu'elles n'avaient pu déboucher sur aucune décision concrète. Souhaitons que les idées qu'il a semées trouvent un jour le terrain qui leur permettra de germer et de s'épanouir!

Depuis des années, il s'était retiré dans sa propriété de Cap d'Ail. Mais il continuait à séjourner chaque année à Paris pendant plusieurs mois et à suivre fidèlement les séances de l'Académie. Tous ceux qui l'ont connu, ici ou en dehors de l'Académie, conserveront le souvenir d'un homme d'une intégrité et d'une loyauté exemplaires, courageux devant les difficultés de la vie, dont la moindre n'était pas cette terrible myopie qui l'a tant gêné durant ces dernières années. L'Académie des Sciences s'honore d'avoir compté Arnaud Denjoy parmi ses membres; en lui rendant hommage aujourd'hui, elle prie sa famille d'accepter ses condoléances émues.

C.R.Acad.Sc.Paris,t.279(14 octobre 1974) Vie Académique,p.49-52

INTRODUCTION (*)

L'usage d'une Notice où un candidat à l'Académie expose lui-même les diverses parties de son œuvre et en fait valoir les mérites, est une tradition très respectable, puisqu'elle est celle d'un grand et illustre corps. Elle est également estimable parce qu'elle garantit que la cause de chacun des concurrents sera défendue sans omission ni défaillance par le plus zélé et le plus vigilant des avocats, savoir l'intéressé lui-même.

Par malheur ce plaidoyer inflige une périlleuse épreuve à la modestie naturelle du savant. Si celle-ci triomphe, la lumière dont l'œuvre aurait besoin pour prendre son relief, lui est avarement dispensée. Si la modestie succombe, l'auteur ne lasse plus la bienveillance, mais il fatigue la patience. Je m'excuse si la crainte du premier écueil m'a jeté sur le second.

* * *

Si une part de mon œuvre mathématique vient à sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Ce sont là des problèmes historiques, en raison de la place que tiennent dans l'histoire des mathématiques les découvertes auxquelles ils se rattachent, et aussi pour la concordance manifestée dans le passé entre les progrès de leur solution partielle et de vives impulsions reçues par la science. Le premier de ces problèmes est posé depuis l'invention du calcul différentiel et du calcul intégral ; l'autre, depuis que la puissance du développement trigonométrique a été révélée à l'Analyse par la théorie physique des cordes vibrantes.

Ma chance a été double: d'une part, que les solutions de ces problèmes aient attendu ma venue, ensuite, qu'elles se soient manifestées à moi.

Loin de moi la pensée de réduire le rôle de ceux qui m'ont précédé dans

---

(*) Introduction de la "Notice sur les travaux scientifiques de Arnaud Denjoy",p.5-12. - Paris, Hermann, 1934.

cette longue ascension vers les sommets visés. Si les travaux de mes devanciers, et ceux de M. Lebesgue qui les dominent tous, n'avaient pas préalablement aplani et jalonné de dures et laborieuses étapes, ma base de départ eût été sans doute trop éloignée du but pour que je pusse atteindre celui-ci par mon seul effort.

Cependant le dernier degré restant à franchir, et au pied duquel les tentatives antérieures s'étaient arrêtées, n'était pas sans présenter lui aussi de sérieuses difficultés à surmonter. Maintenant que le faîte est dominé, que l'on peut en mesurer l'élévation, peut-être estimera-t-on que le sommet était encore loin du point extrême précédemment atteint.

* * *

Les solutions que j'ai fournies ne rentrent pas dans la norme des mathématiques classiques. Aussi ont-elles été inégalement appréciées.

Tous les mathématiciens qui se sont engagés dans les voies neuves de la théorie des fonctions de variables réelles, et qui ont éprouvé la conviction de pénétrer dans un monde de vérités éclairant un champ immense de faits, tous ont souffert des sentiments d'indifférence, d'hostilité, d'aversion auxquels leurs découvertes se heurtaient auprès des savants fidèles aux études traditionnelles. Tous s'en sont amèrement plaints. Je n'échapperai pas à la règle commune, bien que, devant l'énorme développement de l'Analyse moderne, et la féconde invasion des idées nouvelles dans les vieux domaines paraissant le mieux réservés, les préventions d'il y a trente ou quarante ans soient aujourd'hui beaucoup atténuées, il convient équitablement de le reconnaître.

Ce que je reprocherais à ces dispositions dénuées de bienveillance à l'égard des nouvelles disciplines, c'est l'esprit, insuffisamment scientifique à mon sens, dont elles procèdent. Pour moi, les mathématiques demandent la même objectivité qu'une science expérimentale.

Leur sujet est *l'étude des phénomènes dont le nombre est le siège, et la détermination de leurs lois*. Sans doute, entre les mathématiques et les sciences de la matière, existe-t-il cette différence essentielle qu'une vérité se justifie obligatoirement par la déduction logique pour les premières, et par la simple constatation de quelques cas bien caractérisés pour les secondes. Mais, le mode de la démonstration mis à part, l'investigation se dirige dans tous ces ordres de connaissance par les mêmes voies de l'observation et de l'expérience, et l'attitude strictement scientifique de l'esprit à l'égard des faits qui s'offrent à lui doit être la même dans tous les domaines.

Nous devons interroger la nature avec le vœu de recevoir ses enseignements et non point le désir de lui dicter ses réponses. Notre ambition doit être de modeler nos idées sur ce qu'elle nous révèle, et non pas de fortifier en nous l'illusion qu'elle soit la servante empressée de nos jugements préconçus.

Si nos habitudes peuvent passer pour une seconde nature, nous devons cependant éviter de les confondre avec la nature elle-même. L'éducation scolaire que nous avons reçue, à laquelle nous devons beaucoup et qui mérite notre gratitude, nous a dotés de beaucoup de notions parfaitement élaborées, extrêmement précieuses. Mais il convient que le savant se demande si ces images excellemment agencées ne sont pas des répliques bien naïves, simplifiées à l'excès, de l'immense complexité des faits que la nature propose à notre examen.

Nous avons appris à calculer avec des polynomes, et à voir en eux les plus parfaits modèles pouvant exprimer les nombres variables. Nous observons que les fonctions analytiques se présentent comme des polynomes de degré infini, possédant beaucoup de propriétés des polynomes finis, et surtout la détermination dans tout leur domaine d'existence par leur série de Taylor en un point. De là à conclure que la fonction analytique est essentiellement « naturelle », il n'y a qu'un pas.

Les fonctions analytiques auraient pu limiter le champ des mathématiques si tout problème à données analytiques conduisait à des résultats analytiques. Malheureusement ceci est faux, nul ne l'ignore. Le non-analytique perce toutes les digues dont on voudrait enclore l'analytique. Pourquoi s'obstiner à ne pas voir que les fonctions analytiques — dont je nie si peu l'intérêt qu'une bonne partie de mon œuvre leur est consacrée — représentent un petit canton des mathématiques. Elles ont dans le champ des fonctions l'utilité, le rôle immense et l'extrême particularité des nombres rationnels parmi ceux qui forment le continu.

Mais la nature physique nous suggère-t-elle l'universalité, ou même simplement la vérité occasionnelle de la fonction analytique ?

Si la nature offrait le caractère des fonctions analytiques, la connaissance de l'univers résulterait de sa détermination dans un élément si minime soit-il. Peut-on aujourd'hui le penser ? D'ailleurs, de quel secours cette certitude serait-elle dans la recherche des lois physiques ?

Mais au contraire, un peu de réflexion montre à l'évidence que la nature ne nous enseigne nullement l'analyticité des fonctions, ni même leur continuité et encore moins leur dérivabilité.

On ne peut pas ouvrir les yeux sans voir du discontinu. Car, ce que l'on voit en ouvrant les yeux, l'ensemble des points qui arrêtent notre rayon visuel, présente une discontinuité chaque fois que ce rayon franchit le contour apparent d'un objet opaque. La discontinuité peut être finie ou infinie. Le profil d'un arbre peut se détacher sur une maison ou sur le ciel. La distance d'un point du panorama au centre de l'œil est une certaine fonction des coordonnées sphériques de la direction de visée. En première analyse, avant tout soupçon de l'existence de la diffraction, la fonction fournie par notre sensation naïve est non pas continue, mais *semi-continue* inférieurement par rapport à l'argument. Telle est la fonction la plus immédiate que la nature nous suggère.

Une table étant posée en plein soleil sur une terrain horizontal, la cote de la surface éclairée comptée parallèlement à la direction du soleil est zéro hors du contour limitant l'ombre de la table sur le sol. Elle est égale à la hauteur oblique de la table à l'intérieur de ce contour. Voilà une fonction « naturelle » z de deux coordonnées rectangulaires planes x, y, ne prenant que deux valeurs, une à l'intérieur d'un contour l'autre à l'extérieur. Il est vrai, nous disent les analystes classiques, qu'on peut remplacer cette fonction z par un polynome en x,y s'approchant d'elle aussi près qu'on le veut. Mais que vient faire ce polynome dans la question ? En quoi les calculs sont-ils plus simples sur lui que sur la fonction discontinue observée ?

Voilà pour la continuité. Passons à la dérivabilité. Si la dérivée traduisait une propriété de la nature, il faudrait qu'un phénomène, observé dans un champ de plus en plus étroit et avec un grossissement inversement proportionnel à la dimension du champ tendît à se montrer sous un aspect linéaire. Tout au contraire, à chaque modification importante du grossissement correspond un bouleversement total des apparences. C'est la négation même du concept de dérivée.

En résumé, s'il est commode de revêtir la nature de formes analytiques, il ne faut pas oublier un instant que cette sorte de représentation n'enserre que de fort loin la vérité. Il me paraît évident qu'il doit exister des modèles numériques discontinus, capables de figurer d'une façon beaucoup plus satisfaisante et avec un plus grand succès que les autres une foule de faits naturels. Aussi les lois du discontinu, bien moins élucidées que celles du continu, doivent-elles faire l'objet d'une investigation très étendue et très poussée, afin que la connaissance des deux ordres soit comparable et permette selon les cas le recours à l'un ou à l'autre d'après le caractère des questions physiques étudiées. Et le mathématicien doit se maintenir dans une disposition d'esprit objective et non point passionnelle, à l'égard des formes que revêt l'expression la plus juste de la vérité.

* * *

Dans toute théorie, il faut s'efforcer de trouver des idées dominantes, d'où l'explication d'une vaste famille de faits se montre aisée. Comment espérer rencontrer de ces notions nouvelles, d'autant plus utiles à l'Analyse que leur rôle se révèlera plus universel et nécessaire ? Le moyen le plus naturel d'approcher ce but me paraît être de se poser des problèmes dont les données sont le moins évoluées, le plus voisines de la source des concepts généraux. Le nombre est un univers doué de sa vie propre. Pour surprendre celle-ci dans toute sa pure spontanéité, il convient de l'étudier aussi loin que possible des sélections opérées par les hommes. Les notions qui se révèlent dans la solution des problèmes de cette nature font leurs preuves en naissant. C'est en effet leur propre efficacité à éclairer une difficulté profonde et de grand intérêt qui les amène au jour.

Mes principales recherches ont été inspirées par ces idées. J'en citerai deux exemples et les notions nouvelles correspondantes que j'en ai tirées.

1° En me proposant de calculer des fonctions primitives des dérivées premières ou secondes généralisées, j'ai été conduit à des méthodes qui m'ont permis d'accroître notablement le champ d'application du calcul intégral et de tracer la voie à son extension illimitée, en même temps que s'introduisaient d'elles-mêmes les notions très importantes de fonction approximativement continue, de fonction résoluble, de dérivée approximative, d'indice d'un ensemble parfait, etc...

2° L'étude des conditions inconnues sous lesquelles la fonction de variable complexe $\Sigma \frac{A_k}{z-a_k}$ ($\Sigma \mid A_k \mid$ fini) admet les a_k pour singularités effectives et non pas simplement formelles (problème de M. Borel), m'a donné la théorie autonome des fonctions quasi-analytiques (indéfiniment dérivables) de variables réelles.

*
* *

Jusqu'en 1925 environ, le développement de mon œuvre s'est poursuivi dans des conditions à peu près autonomes, tandis qu'à partir de cette époque, j'ai été plusieurs fois entraîné par l'initiative d'autrui à traiter des sujets suggérés par des conférences, des communications, des discussions auxquelles j'étais associé. La variété de mon œuvre, sinon son unité, en a profité.

Mon premier travail concerne les *fonctions entières* d'ordre infini. J'étais attiré par l'étude des fonctions d'une variable complexe uniformes ou inverses d'une fonction uniforme. On sait, d'après Poincaré, que la fonction analytique la plus générale est une fonction uniforme d'une fonction inverse d'uniforme.

Je suis passé des fonctions entières aux *fonctions uniformes à singularité discontinues non isolées* (Painlevé). Celles-ci conduisent souvent à des intégrales de Lebesgue dont les coefficients différentiels prennent les deux signes dans tout domaine où elles ne sont pas partout nulles. J'ai ainsi été guidé simultanément vers l'*Analysis situs* plane, la géométrie des ensembles ponctuels et l'étude des nombres dérivés.

Ayant gardé une très forte empreinte de l'enseignement de Baire sur les fonctions limites de fonctions continues, j'ai pu rapidement avancer dans le problème de l'*intégration des nombres dérivés non sommables*.

L'extension de l'intégrale de Lebesgue par la « totalisation » en ses nombreux modes, l'analyse de la nature des *nombres dérivés* de diverses espèces ont occupé dès lors une place prépondérante dans mon œuvre.

Elles en sont devenues la partie maîtresse, le dernier succès de mes méthodes étant le *calcul des coefficients de la série trigonométrique convergente la plus générale*.

J'ai obtenu encore d'importantes relations entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue.

Revenant en arrière, j'ai étudié les *séries absolument convergentes de fractions rationnelles* à pôles simples en z complexe.

J'ai obtenu à cette occasion le théorème fondamental d'une théorie des *fonctions quasi-analytiques* (1921) dans le champ réel.

J'ai ensuite élucidé dans un cas important le caractère nécessairement effectif ou éventuellement formel de la singularité constituée par un pôle de la série.

J'ai encore repris récemment ma ligne antérieure en étudiant de nouveaux problèmes d'Analysis situs et la théorie de Cauchy-Painlevé des fonctions analytiques uniformes continues sur un arc éventuellement singulier.

Mais j'étais incidemment conduit à résoudre des problèmes d'une autre inspiration.

En mécanique analytique, j'ai éclairci l'énigme léguée par Poincaré de la stabilité présentée par les *caractéristiques des équations différentielles à la surface du tore*.

J'ai trouvé (1929) la condition la plus générale que l'on connaisse pour la *convergence d'une suite* de fonctions appartenant à certaine famille *normale* et dont la convergence en une infinité de points est donnée.

J'ai étudié une *fonction* de variable réelle définie par *Minkowski*, j'en ai montré le lien avec une fonction de variable complexe transformée linéairement par le groupe modulaire.

En théorie abstraite du *calcul des probabilités*, j'ai formé un système d'une infinité de variables pondérées, conformément à la définition de M. Cantelli, etc.

Dans la première partie de cette Notice, j'explique l'objet et la portée de mes principaux résultats. Sans m'inquiéter ni de leur groupement logique, ni de leur chronologie, je les expose dans l'ordre d'intérêt décroissant où je crois que le public les rangerait lui-même.

Dans une seconde partie, je reviens sur ces mêmes sujets, pour les compléter par les résultats détaillés les indications bibliographiques et les commentaires utiles qui auraient alourdi la première partie.

Voici la suite des rubriques adoptées :

I. Calcul inverse de la dérivation (et propriétés des nombres dérivés).

Il s'agit là d'un mémoire de 372 pages (paru en quatre tranches), la plupart in-quarto, dont presque tous les résultats sont entièrement nouveaux. Pour que l'étendue de ce seul chapitre n'écrase pas le reste de la première partie, je réserve pour la seconde la plupart des développements exigés par le sujet.

II. Calcul des coefficients de la série trigonométrique convergente la plus générale.

III. Fonctions quasi-analytiques de variable réelle.

IV. Les caractéristiques des équations différentielles à la surface du tore.

V. Les singularités des séries de fractions rationnelles.

VI. La convergence des suites normales de fonctions analytiques.

VII. Les fonctions analytiques uniformes du point de vue de Cauchy et de Painlevé.

VIII. Les fonctions entières.

IX. L'analysis situs des continus plans.

X. Géométrie des ensembles. Propriétés générales des ensembles.

XI. Recherches complémentaires sur l'intégration.

XII. La fonction de Minkowski.

XIII. Les variables pondérées de M. Cantelli. Questions diverses.

MON OEUVRE MATHÉMATIQUE
SA GENÈSE ET SA PHILOSOPHIE (1)

En 1902, âgé de dix-huit ans, j'entrai à l'Ecole Normale Supérieure de Paris. A cette époque la destination de cet établissement était uniquement de recruter une élite de maîtres pour l'enseignement du second degré. Les études duraient trois années. Nous suivions à la Faculté des Sciences des cours préparatoires à nos examens, d'autre part à l'Ecole Normale, au Collège de France, des cours d'initiation à des doctrines modernes. La troisième année nous préparions le concours de l'agrégation au personnel des lycées.

Nous arrivions des classes de Mathématiques Spéciales informés du calcul différentiel, mais ignorant tout du calcul intégral. Borel nous révéla quelques notions fondamentales introduites par Cantor, l'inégalité des puissances infinies, celles du dénombrable et du continu, l'ensemble parfait totalement discontinu déduit de la trisection d'un segment de droite. Entourant chaque nombre fractionnaire p/q d'un intervalle de longueur q^{-3}, il nous montra que les nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$ pouvaient être contenus dans un ensemble d'intervalles de longueur totale aussi petite qu'on le voulait. En conséquence Borel déclarait que cet ensemble avait pour mesure zéro. Auparavant Cantor, Minkowski, Jordan, usant : pour la droite d'intervalles, pour le plan de cercles ou de carrés ayant tous même dimension, longueur, rayon, côté, avaient su définir une mesure extérieure des ensembles accrus de leurs points frontières étrangers à eux, et une mesure intérieure

---

(1) Envoyé à Moscou pour la cérémonie du 3 Mars 1971, où la Médaille Lomonossov devait être remise à A.Denjoy

des mêmes ensembles privés de tous leurs points frontières. Mais ils trouvaient pour un ensemble partout dense sur un intervalle [ab] une mesure extérieure égale à la longueur de celui-ci et une mesure intérieure nulle.

Le progrès réalisé par Borel était immense.

Au Collège de France, un cours annuellement mis à la charge d'un mathématicien de moins de trente ans, le cours Peccot, du nom de son fondateur, venait d'être créé. Borel en fut le premier bénéficiaire et le garda trois ans de suite, de 1901 à 1903. Il traita la théorie des ensembles appliquée à la théorie des fonctions, puis les fonctions entières. Pour conserver les leçons originales professées dans ce cours et ailleurs, il créa la fameuse "Collection de monographies sur la théorie des fonctions". Les premières brochures,fournies par Borel lui-même,parurent immédiatement. Cette même année, Baire avait soutenu sa Thèse de Doctorat, où il donnait la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction fût la somme d'une série convergente de fonctions continues. L'année suivante, celle de mon arrivée à Paris, Lebesgue accédait au Doctorat avec sa Thèse sur la nouvelle définition de l'intégrale et de la mesure des ensembles. Trois ans plus tard, à son tour, Fréchet intervenait avec toutes les notions fondamentales de sa future Analyse Générale.

J'arrivais à Paris au moment où cette ville était le centre d'une effervescence de conceptions originales, bouleversant, éjectant, les fondements de l'analyse alors classique. Celle-ci d'ailleurs se défendit furieusement.

Borel m'avait appris la mesure extérieure des ensembles. Il les englobait, comme il avait fait pour les nombres rationnels, dans une famille d'intervalles, ajustés à l'ensemble et dont il prenait le minimum de leur longueur totale. Il posait d'autre part le principe de l'additivité totale complète des mesures des ensembles disjoints, en infinité, et mesurables.

Borel m'enseigna l'importance des inégalités de grandeur ou de petitesse entre les fonctions infinies de l'une ou l'autre espèce. Quand leur croissance est régulière, il m'apprit l'ordre de leur primitive, de leur dérivée, et, si elles forment des séries, l'ordre de la somme de leurs premiers termes pour les divergentes, l'ordre de leurs restes pour les convergentes. Ces évaluations m'ont énormément servi pour créer des exemples vérifiant ou infirmant certaines propriétés démontrées ou présumées des fonctions de variable réelle ou complexe.

En 1904, ma seconde année d'Ecole, Baire reçut l'attribution du cours Peccot. Je suivis et rédigeai ses leçons, et elles aussi me marquèrent profondément. Je connus les diverses espèces d'ensembles découverts par Cantor, fermés, parfaits, sur ces derniers les points des deux espèces, leurs intervalles contigus, isolant l'ensemble. Pour les ensembles quelconques, leurs points d'accumulation, leur dérivé, formé par leurs points d'accumulation ; les dérivés successifs, fermés, et dont la suite des rangs entiers n'épuise pas la succession. Poursuivant au-delà elle introduit les nombres ordinaux transfinis. La succession des dérivés s'arrêtait, soit au vide, soit à un ensemble identique à son dérivé, c'est-à-dire parfait. Il y avait encore les ensembles réductibles, dont le dérivé est fermé et dénombrable, les ensembles non denses sur un ensemble parfait, les ensembles de première et seconde catégories, réunissant une infinité d'ensembles non denses, etc .. . Du côté des fonctions, la féconde distinction de la semi-continuité, inférieure ou supérieure, rencontrée dans le maximum et dans le minimum d'une même fonction autour de chaque point. Enfin la condition nécessaire et suffisante de ponctuelle discontinuité sur tout ensemble parfait, caractérisant les fonctions limites de fonctions continues.

L'analyse du problème était conduite progressivement de façon admirable.

Dans l'été de cette même année 1904, je fis une petite étude inspirée par mes notions nouvellement acquises ; f étant une fonction de variable réelle, je désigne par A la fonction égale au maximum de f en chaque point, par A' le minimum de A, par A'' le maximum de A', etc... . Je constatai aisément $A'=A'''$ ..., $A''=A^{(4)}=$ ..... . Pareillement I étant le minimum de f, I' le maximum de I, I'' le minimum de I' etc .... , alors $I'=I'''$, etc ... Je caractérisai à partir de f et de son entourage chacune de ces fonctions. Je démontrai cette propriété caractéristique des fonctions de classe 1 : $I'=A''$, $A'=I''$. Ce résultat, qui présageait ma future contribution à la théorie des fonctions de variables réelles, fit le sujet d'un petit article paru au Bulletin de la Société Mathématique de 1905.

En 1905 le cours Peccot fut attribué à Lebesgue. Je n'y assistai pas, étant absorbé par la préparation de l'agrégation. Inutile de dire que les bruyants échos de ces Leçons m'atteignirent. L'année scolaire suivante, libéré de tous concours, et d'abord muni d'une modeste bourse de Doctorat, puis à partir d'octobre 1906 hébergé confortablement à la Fondation Thiers, qui recrutait ses pensionnaires par cinq à la fois et les gardait chacun cinq ans, je pus donner libre cours à mes réflexions personnelles.

Les trois derniers docteurs cités plus haut rentrèrent dans leurs provinces où ils avaient des maîtrises de conférences dans des Facultés de Sciences. Seuls Fatou, Montel que je ne connaissais pas encore, pouvaient me servir de partenaires pour des échanges d'idées mathématiques.

xxxxxxxxxxx

Je m'intéressai d'abord aux fonctions entières d'une variable complexe, domaine où Hadamard douze ans plus tôt, Borel ensuite, avaient obtenu des résultats remarquables. En 1907 je publiai aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris une note où je signalais que les valeurs asymptotiques d'une fonction entière, c'est-à-dire les valeurs limites sur des chemins allant à l'infini, sont pour la fonction inverse des points critiques non algébriques, et ensuite ne pouvaient pas dépasser en quantité deux fois l'ordre supposé fini de la fonction. Je démontrai ceci dans des hypothèses particulières. Le résultat général fut établi vingt deux ans plus tard par Ahlfors.

Je devais un peu plus tard revenir aux fonctions entières $F(z)$ dont, à la suite de Poincaré, d'abord Hadamard, puis Borel, avaient considéré le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ sur le cercle $|z| = r$ dans ses rapports de croissance avec la suite r_n des modules des zéros a_n de $F(z)$. A la suite a_n Weierstrass avait attaché un produit infini $\Pi E(z/a_n, p_n)$, $E(u,p)$ désignant le produit de $(1-u)$ par la fonction dont le logarithme est $u + u^2/2 + .. + u^p/p$. Weierstrass prenant $p_n = n$ assurait la convergence absolue du produit, quelle que fut la suite r_n. Borel réduisit cet exposant p_n à $\log^2 n$ ce qui donnait encore un produit inutilement trop croissant. Je constatai que le module maximum de $E(u,p)$ pour $|u| = \omega$ vaut sensiblement ω^{p+1}/p pour $\omega<1$ et ω^p/p pour $\omega>1$, avec une précision très suffisante. J'en déduisis que, la suite r_n étant partagée en deux par le nombre r, la partie du produit correspondant respectivement aux $r_n < r$ et aux $r_n > r$ ayant pour modules maximums $A(r)$ et $B(r)$, augmenter la croissance de p_n ou la réduire, renforçait la croissance de $A(r)$ au détriment de celle de $B(r)$ ou inversement. Le meilleur exposant, à qualifier de canonique, rendait équivalents les ordres de $A(r)$ et de $B(r)$. Tel fut le sujet de ma Thèse soutenue en 1909.

Toutefois, pendant la précédente année 1908, j'avais pris parti dans une polémique sur la question, soulevée jadis par Painlevé dans sa Thèse, à savoir l'allure des fonctions d'une variable complexe, uniformes dans tout le plan, et pourvues d'un ensemble parfait totalement discontinu de singularités. Je donnai des exemples simples d'une fonction restant bornée sur un ensemble de longueur positive finie, puis d'une fonction continue sur un ensemble de longueur infinie et d'aire nulle. A cette occasion mon attention et celle d'autres français se portèrent sur les propriétés des ensembles plans parfaits totalement discontinus.

xxxxxxxxxxx

En octobre 1909 je m'établis à Montpellier, où je venais d'être nommé Maître de conférences à la Faculté des Sciences. Mes recherches ne devaient pas tarder à prendre un caractère plus personnel et plus indépendant. Je liquidai dès la fin de 1909 mes études sur les ensembles parfaits totalement discontinus plans et les fonctions analytiques uniformes dont ils constituaient les seules singularités. Néanmoins la théorie des fonctions uniformes d'une variable complexe me poussait vers la <u>topologie</u> du plan et particulièrement l'étude des frontières des régions où une fonction reste holomorphe (une région est connexe et formée de points intérieurs).

A ce moment le sujet était dominé par le problème de donner une démonstration correcte du célèbre <u>théorème de Jordan</u> sur la division du plan en deux régions par toute ligne homéomorphe à une circonférence. Beaucoup de raisonnements puérilement intuitifs prétendaient résoudre la question. On pouvait songer au quadrillage du plan, comme Jordan en avait donné l'exemple pour sa mesure des ensembles. J'observai que d'une part le tore, d'autre part la surface à un seul côté se prêtaient au quadrillage et que toute démonstration n'invoquant pas des caractères du plan excluant l'application du raisonnement aux deux variétés citées à l'instant ne pouvait pas être tenue pour satisfaisante.

Cantor a défini la continuité d'un ensemble fermé C par cette condition : Deux points quelconques A et B de l'ensemble peuvent être joints par une chaîne de points successifs appartenant à C , le premier étant A , le dernier B , et la distance de chacun au suivant étant inférieure à un nombre positif indépendant quelconque s . J'appelai ce caractère l'*uniconnexité* et je définis la *biconnexité* d'une façon équivalente à la suivante :

E désignant un ensemble fermé uniconnexe, tel un espace considéré à distance finie s , E sera dit *biconnexe* si, A et B étant deux points quelconques de E , C et C' deux uniconnexes quelconques situés dans E et joignant A et B ,on peut joindre l'uniconnexe C et l'uniconnexe C' par une chaîne d'uniconnexes joignant eux aussi A et B , l'écart de chaque uniconnexe au suivant étant inférieur à s . Ce caractère éliminait le tore.

D'autre part, on supposait possible de définir en chaque point, pour tout segment dirigé passant en ce point, un côté positif et un côté négatif, de façon que, pour toute suite de segments formant une ligne polygonale simple fermée, le côté positif de chaque segment se prolongeant par le côté positif du segment suivant, à la fin du parcours on retrouvât le même côté positif pour le segment de départ. J'écartais ainsi la surface à un seul côté.

J'établis dès lors en toute rigueur le théorème capital suivant valable pour toute variété biconnexe et orientée :

E et E' *étant deux ensembles du plan*, C et C' *étant* deux uniconnexes joignant l'un et l'autre deux points A et B, C étant en chacun de ses points à distance nulle de E, tout point de C' étant à distance nulle de E', il en résulte que la frontière de E et celle de E' sont des uniconnexes joignant A et B.

Brouwer avait aperçu ce théorème peu avant, mais sans l'appuyer d'une justification définie. Je l'ignorais d'ailleurs.

Les application venaient aussitôt en abondance. Ainsi : Un polygone divise le plan en deux régions.

Le polygone d'approximation d'une région dont la frontière est continue est un polygone simple. (J'appelle polygone d'approximation d'une région, dans un quadrillage du plan, la frontière d'un domaine à intérieur connexe, formé par les carrés fermés intérieurs à la région.)

Si deux continus C et C' ont en commun, soit un point, soit deux points, les points pouvant être remplacés par des continus ne divisant pas le plan et disjoints, si d'autre part C, abstraction faite du ou des points communs avec C', est totalement situé dans une région R' formée par le complémentaire de C', si pareillement C' abstraction faite de ses points communs avec C, est dans une région R formée par le complémentaire de C, l'ensemble commun à R et R' forme dans le premier cas une seule région, dans le second cas deux régions distinctes. J'étendis plus tard le théorème au cas d'un nombre quelconque p de points (ou continus) communs.

Divisant la courbe de Jordan en petits arcs de diamètre inférieur à s, immédiatement le théorème de Jordan sur les courbes simples fermées apparaissait.

Je donnai plus tard une seconde démonstration fondée sur le principe suivant :

Sur un polygone P soient quatre points A, B, C, D, énumérés dans l'ordre où on les rencontre sur P parcouru dans un certain sens, d'autre part, sur la courbe de Jordan disjointe de P soient quatre points A' , B' , C' , D' tels qu'il existe quatre continus disjoints entre eux et aussi, sauf par leurs extrémités, de P et de Γ , les points A' , B' , C' , D' , se rencontrent dans cet ordre sur Γ parcouru dans un certain sens.

En juillet 1910, je publiai l'exemple d'un continu plan dont tous les points étaient frontières à la fois pour trois régions, et même pour une infinité de régions. Je considérais qu'une droite devait couper le continu suivant un ensemble parfait totalement discontinu dont les intervalles contigus seraient répartis entre les trois régions ou leur infinité, avec enchevêtrement des uns avec les autres. Il suffisait de joindre progressivement, tour à tour, cycliquement, les intervalles attribués à une même région par des bras coudés rectangulaires, disjoints deux à deux.

Trois mois plus tôt, Brouwer, je l'ignorais, avait publié un exemple analogue.

Mes recherches sur la topologie du plan m'occupèrent du printemps de 1910 à l'automne de 1911. Elles m'avaient été suscitées, à moi comme les leurs à tous les topologistes de l'époque, par le fameux mémoire de Schoenflies, plein d'idées originales et fécondes, mais aussi de prétendus théorèmes, traduisant des intuitions simplistes démenties par la diversité des cas possibles.

xxxxxxxxxxx

Au début de l'année 1910, entre le point final mis à mes études sur les ensembles parfaits totalement discontinus dans les espaces cartésiens et l'engagement dans la topologie plane, le 7 mars 1910, j'avais publié aux Comptes Rendus une note de grande portée sur la mesure définie par Borel et Lebesgue pour les ensembles rectilignes.

L'idée géniale de Borel avait été d'englober l'ensemble à mesurer E dans un système, généralement infini, d'intervalles ajustés à E, ayant leur somme de longueurs inférieure à $m+a$, si m était le minimum de cette somme. D'après Lebesgue tous les ensembles rencontrés en Analyse par addition, croisement, fini ou infini, d'ensembles, étaient tous mesurables. Leur mesure s'identifiait donc à la mesure extérieure m de Borel.

En fait Borel et Lebesgue, comme pour vérifier la mesurabilité, plaçaient E sur un segment $[ab]$, prenaient le complémentaire E' de E sur $[ab]$, puis la mesure extérieure de E' en l'entourant d'un système d'intervalles de longueur totale inférieure à $m'+a$, m' étant le minimum de cette longueur. On faisait la somme $m+m'$. Le célèbre théorème de Borel-Lebesgue montrait que les intervalles utilisés contenant tous les points de $[ab]$, pouvaient être réduits à un nombre fini d'entre eux. Dès lors $m+m'$ n'était pas inférieur à $b-a$. Dans le cas de l'égalité la mesure de E était $b-a-m'$, soit m.

Pour obtenir la mesure extérieure d'un ensemble on pouvait utiliser indifféremment les intervalles "au sens large" (ce que j'ai appelé les segments) ou les intervalles "au sens étroit", extrémités exclues (ce que j'appelle les intervalles). Je fis ces réflexions bien simples, dont ni Borel ni Lebesgue, semble-t-il, n'avaient fait la remarque : 1°) si de $[ab]$ on retranche les intervalles contenant E', le reste de $[ab]$ est contenu dans E ; 2°) si les mesures extérieures sont prises en utilisant systématiquement des "intervalles", quand on enlève ceux dont la totalité contient E', il reste un ensemble fermé inclus dans E, de mesure supérieure à $b-a-m'-a$, soit à $m-a$. On réduit alors l'ensemble fermé à son noyau parfait épais en lui-même, c'est-à-dire ayant toutes ses portions de mesure positive P.

Ainsi la mesure intérieure des ensembles était le maximum des mesures des ensembles parfaits épais en eux-mêmes contenus dans l'ensemble à mesurer.

Quel immense progrès cette remarque très simple permettait de réaliser dans le parti à tirer de l'hypothèse que certaine propriété était vérifiée par une fonction sur un ensemble de mesure positive . Cela se traduisait par la validité de la propriété sur un ensemble parfait épais en lui-même et où la topologie des fonctions était la même que sur le continu.

L'application de ce principe en toute occasion propice fut désormais ma règle constante.

xxxxxxxxxxx

Le 1er avril 1912, dans une note publiée aux Comptes Rendus sous le titre "Une extension de l'intégrale de M.Lebesgue", je définissais la totalisation des fonctions non sommables . Le 15 avril suivant paraissait une seconde note sous le titre : "Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale".

La fonction à intégrer f , étant donnée sur un segment ab , je totalisais : d'une part des intégrales de Lebesgue prises sur des segments inférieurs à ab ou sur des portions d'un ensemble parfait, sur lesquels f était sommable ; d'autre part, si la totale était déjà calculée sur les intervalles contigus à l'ensemble P et si pour une portion Q de P ,la série des oscillations de la totale sur les contigus à Q formaient une série convergente, je totalisais les valeurs des totales sur les contigus à Q .
La totale prise entre a et $x < b$ avait pour dérivée f , sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

En vertu du théorème de Baire sur les fonctions limites de fonctions continues (et les dérivées sont de telles), l'ensemble S des points du segment ab ou d'un ensemble parfait P situé sur ab , autour desquels, sur le continu ou sur P seul, f est non sommable, S ,a priori fermé s'il existe, est non dense sur ab, sur P . En vertu d'un raisonnement d'un type souvent mis à contribution par Baire, l'ensemble C des points de P autour desquels la série des oscillations des totales sur les contigus à P diverge, C encore est non dense sur P.

On totalisait sur les segments de ab, ou entre les extrémités des portions de P situées sur les intervalles contigus à l'ensemble $S + C$.

On franchit successivement des étapes réunissant des chaînes transfinies d'opérations. L'étape s'arrête devant un ensemble parfait inclus dans les précédents et finissant par disparaître.

La totalisation est terminée. Ce que l'on a totalisé, ce sont des intégrales de Lebesgue prises sur des segments de ab ou sur des portions d'ensembles parfaits.

xxxxxxxxxxx

Dès la fin de 1913 je m'occupai d'exposer avec quelques développements la matière de mes deux notes d'avril 1912. Leurs six pages devaient foisonner en plus de 370. Le tout parut successivement en quatre fascicules dans des périodiques, les deux premiers sous le millésime de 1915, les derniers en 1916 et 1917. J'avais à peine remis le manuscrit du premier que la guerre éclata. Ma mauvaise vue m'ayant éliminé des troupes combattantes, je pus poursuivre l'élaboration de l'ouvrage que je concevais sous le titre de Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Ce travail rencontra, particulièrement chez les jeunes analystes, un accueil favorable parfois passionné. Il offrait au lecteur un style vraiment moderne, rompant avec les habitudes de l'Analyse classique, celle-ci regorgeant de théorèmes où les hypothèses, riches de conditions différentielles, semblent arrêtées en préalable connivence avec la conclusion. Désormais toute restriction amputant le caractère général d'une espèce était prohibée. Au contraire, sur le tronc de celle-ci des rameaux greffés permettaient de faire

participer d'autres espèces mineures aux propriétés de la première.
....

Ce mémoire a été rapidement apprécié du lecteur, et son intérêt s'est maintenu auprès de nombreux étudiants avancés ayant déjà satisfait à leur scolarité normale. En 1954, il fut reproduit par un procédé offset et groupé en un seul volume. J'en remis un exemplaire tout frais sorti des presses à l'un de vos illustres mathématiciens, venu à Paris pour fêter le centenaire de la naissance de Poincaré. Votre délégué en eut une véritable explosion de joie. Brandissant le livre, il s'écriait : "Il fut nos amours de jeunesse. Nous l'étudiâmes, nous le discutâmes phrase par phrase, etc ..".

Quels caractères présentait donc ce travail pour répondre ainsi aux aspirations instinctives des jeunes esprits voués aux mathématiques ? Quelle attente comblait-il ? Quels principes, intuitivement me guidant moi-même, emportaient l'adhésion de ces intelligences encore vierges ?

Depuis 1902 jusqu'à la guerre éclatée en 1914 les notions fondamentales introduites par Borel, Baire et Lebesgue, repoussées avec horreur par les mathématiciens classiques, avaient muri dans la pensée des mathématiciens accessibles aux novations. Et principalement en Russie, en Italie, et secrètement en Pologne, où l'oppression tsariste s'exerçait même dans l'enseignement supérieur des sciences. A Moscou, l'action fut menée par Egoroff et surtout Lusin, dont les futures découvertes devaient faire un des plus grands analystes du monde.

En 1914 vint la guerre, avec 4 ans de combats , où la science joua un rôle décisif. A peine arrêtée la nouvelle carte de l'Europe, dès 1920 les études scientifiques, entre autres mathématiques, prirent un essor de flambe.

<u>Distinguer ce qui est distinct et le traiter distinctement</u>

était un des besoins impérieux de ma pensée.

Dans la confusion d'esprit certains croient découvrir un esprit de synthèse. Je suis à l'opposé de cette illusion. Même en 1904, quand je rédigeais le cours de Baire, je demandais à celui-ci, d'ailleurs insoucieux de mon scrupule, de marquer la différence entre intervalle et segment. Comme je l'ai déjà dit, la même indifférence de Borel et de Lebesgue devait les empêcher d'apercevoir la définition intrinsèque de la mesure intérieure des ensembles. Sans ce complément capital mon mémoire n'aurait pu venir au jour.

Envisager la densité d'un ensemble E sur un ensemble fermé présentant des points isolés me paraît une aberration.

Dans la totalisation, la totale étant supposée obtenue sur les intervalles contigus à un ensemble fermé F, il me paraît saugrenu de traiter comme un cas unique celui où F est réductible et celui où F est parfait.

Je signale en passant que les néo- ou rétro-modernes enseignent à leurs infortunés pupilles que l'ensemble A des milieux des intervalles contigus à un ensemble parfait P est "dense par rapport" à l'ensemble B des points de première espèce de P. On prévoit le parti que cette pauvre jeunesse pourra tirer de pareilles définitions.

Voici encore un autre principe m'ayant guidé, sans avoir été aucunement posé *a priori*. L'exemple de ses applications montre que de le suivre fut pour moi une fructueuse discipline : Un résultat nouvellement acquis, ou ultérieurement rappelé à mon attention, devient pour moi un belvédère d'où je découvre ce qui à l'entour reste à élucider ou se prête à l'extension du théorème précédemment établi.

Au cours de l'impression du mémoire, et au grand mécontentement de l'éditeur, j'ai toujours demandé plusieurs épreuves successives, en général au moins quatre, et chaque fois, par la vertu du dernier principe, le texte recevait d'importants accroissements. Une partie de ceux-ci était rejetée au bas des pages, en des notes souvent fort longues, chevauchant de recto à verso ou inversement !

J'ai redouté de fatiguer le lecteur par un langage trop condensé. J'ai souvent, au cours d'un raisonnement, rappelé le sens des notations utilisées. Un de mes collègues hollandais, plus tard tristement victime des atrocités allemandes en son pays, m'affirmait n'avoir jamais trouvé un article mathématique plus facile à lire.

Enfin, marquant la séparation entre l'analyse moderne et l'ancienne, même si, comme il arrive avec les dérivées prenant les deux signes dans tout intervalle, une expression analytique accompagne la fonction, les propriétés de celle-ci sont directement déduites de ses caractères, en l'espèce de sa continuité approximative. Elles ne sont pas obtenues comme jadis par des artifices de calcul appliqués à la forme attribuée à la fonction. Et vraiment tout au long de mon mémoire, la fonction est essentiellement riemannienne: au nombre variable x correspond le nombre fonction y sans aucune condition d'expression formelle donnée à ce lien. Les néo- ou retromodernes sont tout à l'opposé de cette conception : notations, symboles, algèbre de logique, masquent derrière le formalisme la nature caractérielle des êtres mathématiques.

Les notions nouvelles créées : pour les ensembles, les épaisseurs, sur un intervalle, en un point, latérales, extrêmes, moyennes ; pour les fonctions, caractères approximatifs, prépondérants, d'épaisseur, résolubilité, sortes de variations par rapport à un ensemble parfait, toutes se sont introduites et définies d'elles-mêmes, par les problèmes dont elles avaient apporté la solution. Les conditions de leur naissance prouvaient leur réalité.

Les néo-modernes prétendent créer a priori des notions générales, par exemple en topologie, intégration ou mesure. Mais appliquées à des cas réels leurs définitions s'avèrent fausses. Elles offrent matière à des exercices sur leurs rapports logiques variant avec des hypothèses purement imaginaires. C'est de la fiction ignorant les faits.

XXXXXXXXXXX

LE MÉCANISME DES OPÉRATIONS MENTALES CHEZ LES MATHÉMATICIENS*)

Par ARNAUD DENJOY

Mesdames, Messieurs,

Je dois d'abord indiquer en deux mots le sens du titre donné à cette conférence. Les opérations de l'esprit, le raisonnement logique, l'effort de la recherche se déroulent dans l'intelligence du mathématicien selon des modes vraisemblablement communs à toutes les pensées actives. Mais, l'objet du travail mental du mathématicien étant à peu près exclusivement créé par son imagination avec l'emprunt le plus négligeable aux suggestions de nos sens externes, il n'est pas téméraire d'espérer que les conditions où notre machine cérébrale fonctionne apparaîtront avec une particulière netteté si nous les observons chez le mathématicien. La légèreté, la simplicité de l'appareil mis en oeuvre et que la charge des contingences extérieures n'alourdit pas, donnent à l'esprit de l'analyste une aisance d'allure lui permettant l'adoption de certaines pratiques dont l'asservissement aux données de la vie sensible rendrait l'usage difficile et pénible en d'autres domaines de connaissances ou d'investigation.

Ce sont toutes ces coutumes intellectuelles des mathématiciens, certaines communes à tous les esprits en travail d'invention, les autres spéciales à cette catégorie de savants, que je groupe sous le nom du mécanisme des opérations mentales chez les mathématiciens.

*

Je distinguerai dans mon sujet trois ordres d'idées: la Logique, la Raison, la Méthode en vue de l'invention.

*

Commençons par la logique. La plupart des mathématiciens se soumettent docilement aux règles de la logique, telles que les gens raisonnant juste les appliquent universellement. Aristote en a énoncé les principes. „Tous les hommes sont mortels. Socrate est homme. Donc Socrate est mortel". C'est le syllogisme. „Toute la Roumanie est comprise entre le 42e et le 46e degrés de latitude Nord. Bucarest

*) Conférence faite le 25 novembre 1947 à l'Institut de Science et Technique de Roumanie. (Salle Dalles).

est une ville roumaine. Donc la latitude de Bucarest est comprise entre le 42^e et le 46^e degrés de latitude Nord". „Les Roumains sont des gens charmants. Mme et M. X sont roumains. M. et Mme X sont un couple charmant". On considère une classe de majeure extension, la classe des gens charmants. Dans cette classe, une autre classe, formée par toute la population roumaine. M. et Mme X sont éléments de cette deuxième classe, intérieure à la première définie. Donc M. et Mme X sont dans celle-ci. En répétant les syllogismes on envisage une succession de classes composées d'éléments, chaque classe contenant la suivante, la première contenant donc toutes les ultérieures et en particulier tout élément de la dernière. C'est la forme descendante, synthétique, didactique du raisonnement. On commence par tracer le domaine global où l'on opérera. Dans celui-là on circonscrit une partie, dans celle-ci on regarde une subdivision, finalement on se trouve atteindre le point visé.

On pourrait procéder dans le sens inverse. Socrate est homme Il a donc tous les caractères de tous les hommes. Particulièrement il est mortel. Mais il pourrait appartenir à une classe qui ne serait ni incluse dans celle des hommes ni une extension de celle-là. Les Grecs croyaient que les divinités entraient en rapport direct avec certains êtres appartenant à la nature terrestre, gens, bêtes, plantes, sources. Socrate, avec son démon lui dictant ses pensées, appartenait à cette classe d'âmes inspirées par des révélations surhumaines. Les individus composant cette classe, étant l'objet de l'intérêt des dieux, sont exposés aux effets des passions, des ressentiments éprouvés par la tribu céleste. Voilà un caractère présenté par Socrate sans l'être semblablement par tous les hommes. Nous avons inclus Socrate dans une classe, celle des êtres visités par les dieux, classe distincte de celle des hommes, mais possédant des éléments étrangers à l'espèce humaine, donc non incluse en celle-ci. Toutes les propriétés caractérisant cette classe choisie par l'Olympe se rencontrent en Socrate, qui est un élément particulier de cette classe. Nous avons pratiqué le syllogisme ascendant, celui de l'analyse inventive, qui part d'une donnée précise et qui va vers l'inconnu des diverses propriétés présentées par cet élément donné.

Telle est en son essence la Logique d'Aristote. Mais les mathématiciens ne sont pas les seuls à se plier à ses lois. Existe-t-il en la Logique de cette école des usages propres aux mathématiciens?

*

Un biologue français fort connu a l'habitude de dire: „Les mathématiciens raisonnent toujours sur des cas particuliers".

La première fois que j'ai entendu cette phrase, j'en ai été surpris, je l'avoue. Je m'imaginais, au contraire, que mes confrères et moi envisagions, avec les ensembles de points de la géométrie, les fonctions numériques de l'Analyse, les espaces abstraits, des objets idéaux d'une généralité insurpassable. Je me suis demandé d'où venait le jugement énoncé et j'ai cru saisir la différence de point de vue entre le biologue et le mathématicien.

Les mathématiciens invoquent en effet l'existence d'un cas particulier pour justifier leur opinion quand il s'agit d'un raisonnement négatif, quand il s'agit de nier la légitimité d'une affirmation générale.

Voici un exemple d'une telle proposition: „Avant 1914 tous les citoyens français de la métropole étaient de race blanche". Je suppose que le biologue aurait estimé cette allégation parfaitement fondée s'il avait constaté qu'en parcourant les grandes villes de France, en interrogeant les divers hommes de couleur qu'il aurait rencontrés, il eût appris de tous qu'ils ne jouissaient pas des droits ni de la qualité de citoyens français. De son point de vue de biologue, il eût considéré que la loi formulée était valable.

Mais un mathématicien lui aurait dit: „Votre affirmation est fausse, car je connais et je vous cite un sous-préfet d'un arrondissement de Province qui est noir." Ce très savant biologue ne considère sans doute pas qu'une loi proclamée comme générale soit ruinée par la désignation d'un seul exemple la mettant en défaut.

•

Voici un procédé dont Poincaré fit sans doute le premier l'emploi et qui peut permettre soit de découvrir rapidement une faute de raisonnement, soit de prouver la vanité d'espérer démontrer une vérité témérairement présumée.

Il s'agit en celle-ci du postulat d'Euclide, tel qu'on l'enseigne dès le début de la géométrie élémentaire. Je le rappelle: Une ligne droite est tracée ou conçue. On considère un point étranger à la droite. Par cette droite et ce point passe un plan unique. Euclide affirme que par le point on peut mener une droite et une seule parallèle à la première, c'est-à-dire située dans le plan mentionné et telle que les deux droites, si loin qu'on les prolonge, ne se rencontreront pas. Cette affirmation n'a jamais été prouvée logiquement. Et précisément Poincaré a mis hors de doute que l'on puisse y parvenir.

Un médecin, fort distingué et dont les travaux ont fait progresser d'un grand pas nos connaissances des maladies épidemiques, ayant gardé de sa jeunesse un certain goût des réflexions mathématiques, m'envoya récemment une démonstration du postulat d'Euclide. Il admettait la quasi-certitude d'avoir commis une faute de raisonnement. Mais ni lui ni ses amis consultés ne découvraient celle-ci.

Pour la trouver sans peine, j'usai de l'artifice de Poincaré. On donne aux mots désignant les objets étudiés un sens différent de celui qui leur est normalement attribué. Ces mots dès lors définissent d'autres objets. On examine si les propriétés caractéristiques des premiers peuvent se transporter aux seconds, en les entendant elles aussi dans un nouveau sens. Une fois ces conditions réalisées, tout ce que le raisonnement logique démontrera pour les premiers objéts, sera vrai pour les seconds et la réciproque jouera. Si donc la seconde catégorie ne jouit pas d'une certaine propriété, il est inutile d'espérer pouvoir jamais démontrer que la propriété correspondante appartient à la première catégorie.

Et si un raisonnement est appliqué à celle-ci en vue d'établir cette propriété, la chaîne de propositions constituant ce raisonnement nécessairement faux trébuchera tout au moins et sans nul doute au moment où s'introduira dans la chaîne correspondante une proposition erronée pour la seconde catégorie d'objets.

Comment se définit une droite? C'est le plus court chemin d'un point à un autre. Cette définition est d'ailleurs bien empirique. Si les deux points sont joints par une ligne courbe, comment le mètre flexible qui devra épouser le tracé de la courbe gardera-t-il une longueur constamment égale à elle-même?

Poincaré dit ceci: J'appelle droite une demi-circonférence dont le diamètre est situé dans un plan invariable et qui à ses deux bouts tombe à pic sur ce plan. On dit que cette demi-circonférence est orthogonale au plan (c'est-à-dire le rencontre à angle droit). Et même, au lieu d'un plan, Poincaré considère une sphère, qualifiée par lui de fondamentale, puis, relativement à cette sphère, des arcs de cercle intérieurs à elle et arrêtés par leurs deux extrémités à cette sphère, en laquelle l'arc de cercle s'implante à pic.

Il faut, pour justifier l'analogie à la droite, avoir une façon inaccoutumée de mesurer les distances. Poincaré se sert d'un mètre dont la longueur examinée avec nos yeux ne reste pas constante dans ses déplacements. Mais, plus nous approchons de la surface de la sphère, plus le mètre se rapetisse, en sorte qu'une même longueur vue par nous est mesurée avec ce mètre variable par un nombre de plus en plus grand. C'est ainsi qu'une longueur mesurée en centimètres donne un nombre cent fois plus grand que si nous la mesurons en mètres. Poincaré montre qu'avec cette convention, ce qu'il appelle une droite, cet arc de cercle orthogonal à la sphère, est en effet le plus court chemin d'un point à un autre; et aussi, par deux points intérieurs à la sphère il ne passe qu'une seule des droites de Poincaré: d'un point intérieur à la sphère on ne peut mener qu'une droite de Poincaré perpendiculaire à une autre. Les droites de Poincaré s'appuyant sur ces deux dernières forment un plan de Poincaré qui, pour nos yeux est une calotte de sphère, limitée à la sphère fondamentale, et s'encastrant à celle-ci perpendiculairement.

Mais sur ces droites de Poincaré, s'éloigner indéfiniment, cela consiste à se rapprocher indéfiniment de la sphère fondamentale. Seulement, par un point intérieur à la sphère et situé en dehors d'une droite de Poincaré, on peut mener, dans le plan de Poincaré déterminé par la droite et le point, une infinité de droites de la même sorte qui, prolongées indéfiniment, ne rencontrent jamais la première. Et c'est pourquoi, au sujet de nos droites ordinaires, on ne pourra jamais démontrer le postulat d'Euclide par voie purement logique, parce que le raisonnement s'appliquerait mot pour mot, avec l'interprétation convenable naturellement, aux droites de Poincaré pour lesquelles la conclusion est fausse.

Cette conception du grand mathématicien français est-elle physiquement absurde? Les physiciens tendent à penser que notre univers est fini, doué d'une courbure; nous nous y déplaçons indéfiniment dans tous les sens comme feraient des êtres parfaitement plats à la surface d'une sphère. Si notre univers était une sphère, son rayon serait donné par tant de milliards de milliards accumulés de kilomètres, que le mètre de Poincaré serait d'une longueur parfaitement constante dans toute la partie de l'Univers accessible à nos moyens d'investigation, et dans ces limites le postulat d'Euclide aurait la valeur de la vérité d'expérience la mieux établie.

Mais je montrai tout de suite à mon médecin géomètre la faute qu'il commettait, en m'arrêtant au premier de ses théorèmes successifs qui n'était pas vrai pour les droites de Poincaré. Il admettait qu'un angle pût se déplacer dans un plan avec deux côtés constamment perpendiculaires à deux droites fixes, la grandeur de l'angle restant d'autre part constante. C'était là précisément qu'il commettait sa pétition de principe. Elle était immédiatement visible parce que les droites de Poincaré n'offrent pas la même possibilité.

*

Dans tout ce qui précède, la vieille Logique d'Aristote a été seule mise en oeuvre.

Au début du présent siècle, l'anglais Russell réussit à la rajeunir et à lui donner de l'extension en considérant, au lieu de ce mécanisme d'inclusions de classes s'emboitant les unes dans les autres, à la façon des tables gigognes, inclusions en quelque sorte verticales, les combinaisons horizontales de classes.

Un élément est dans la somme, dans la réunion de deux classes, s'il est dans l'une *ou* dans l'autre. Il est dans le produit logique des deux classes, s'il est dans l'une *et* dans l'autre.

Examinons la classe des hommes qui ont 1 mètre 70 de taille et la classe des hommes doués d'un bon estomac.

Un homme qui est dans la classe somme des deux précédentes ou bien aura 1 mètre 70 ou bien aura un bon estomac, ou bien il aura les deux.

S'il est dans la classe produit logique des deux premières, il aura à la fois 1 mètre 70 et un bon estomac.

Cette logique de Russell a beaucoup accru les ressources du raisonnement classique. En elle assurément il n'y a rien de contradictoire avec celui-ci, et bien des gens appliquaient, depuis que les hommes argumentent, des modes empruntés à la logique de Russell sans se douter qu'ils accomplissaient une action mentale hardie et rare.

C'est une véritable insurrection contre les vieux modes de raisonner qu'a dirigée le mathématicien hollandais Brouwer, prétendant rejeter de la logique légitime le principe du tiers exclu. Voici en quoi consiste celui-ci.

Quand la totalité des êtres d'une certaine espèce se partage en deux catégories relativement à certain caractère, Brouwer conteste que l'on puisse dire: puisque tel être est étranger à la première catégorie, c'est qu'il est certainement dans la seconde. Non, il faut montrer, selon Brouwer, par des preuves directes, comment l'être en question est effectivement dans cette seconde catégorie. Qu'il n'appartienne pas à la première ne suffit pas pour affirmer qu'il est dans la seconde, alors qu'on le sait présent dans la réunion des deux.

Un prestidigitateur vous montre un chapeau haut-de-forme, un chapeau dit „gibus", parfaitement vide. Vous mesurez la profondeur et la hauteur extérieure, de la coiffure. Il n'y a pas de double fond. L'artiste agite son foulard et l'introduit dans le chapeau. Il secoue le foulard. Un lapin jaillit du chapeau. Vous prétendez pouvoir dire: „Le lapin était dans le chapeau. Le foulard divisait l'intérieur du chapeau en deux zones, l'une extérieure au foulard, comprise entre la partie visible du chapeau et le foulard, l'autre englobée dans les plis du foulard. Tel est le raisonnement contesté par Brouwer. Le foulard partage le chapeau en deux zones complémentaires. Le fait que l'animal a été absent de l'une des zones ne suffit pas à prouver qu'il était dans l'autre.

Une personne avait annoncé qu'elle assisterait à cette conférence. Or cette personne n'est pas ici. Brouwer vous interdit d'en conclure qu'elle est ailleurs. Ailleurs, c'est l'ensemble des endroits distincts de celui-ci. Brouwer reconnait avec nous que la personne ne peut pas être à la fois ici et ailleurs. Mais il estime que, pour avoir le droit d'affirmer la présence de cette personne ailleurs, il faudrait désigner expressément l'endroit distinct de celui-ci et où se trouve cette personne. Logiquement nous ne souscrivons pas aux exigences de Brouwer. Psychologiquement toutefois, il faut concéder au géomètre hollandais que la certitude logique de la présence ailleurs de la personne absente d'ici ne nous satisfait qu'à demi. Nous aimerions savoir où précisément elle se trouve ailleurs. Il nous manque la certitude quiète.

II

Et maintenant passons à la Raison. Le mot „raison" a plusieurs sens. Il y a la ou les raisons d'un fait, d'un événement, à savoir un système de faits, de conditions expliquant la venue de ce qui a été constaté, enregistré. Il y a le raisonnement qui est une succession logique de propositions.

Mais nous voulons nous occuper de la Raison, ce que l'on nomme parfois avec une pensée de dérision: la Raison avec un grand R.

Cette Raison, c'est l'ensemble des jugements qui s'imposent à nous avec l'autorité d'une évidence indiscutable, les propositions que nous ne songeons pas à soumettre à l'examen critique, les postulats d'où nous déduisons par voie logique des vérités incontestables à nos yeux, et auxquels, dans nos analyses ascendantes, nous accrochons comme à un anneau scellé dans le roc la chaine de nos inductions pour en valider l'ensemble.

La Raison est propre à chacun, elle exprime la synthèse de notre expérience, de notre philosophie acquise. Pascal distinguait la Raison fine et la Raison géométrique. La Raison est un système de postulats. Géométrique, elle tient en un petit nombre de tels postulats, Pascal disait: „des principes", parfaitement précisés, spécifiés, et d'où toute notre connaissance peut dériver par les ressources de la Logique, la vieille logique de toujours.

La Raison fine se compose, toujours selon Pascal, d'une multitude de „petits" principes, la plupart informulés, noyés dans le flou de la pensée, mais se présentant à notre esprit, à l'instant de leur évocation, avec la clarté étincelante de la vérité intuitivement et directement perçue.

Cette Raison est essentiellement individuelle, sa valeur est avant tout subjective.

La Raison dira à l'un que le monde avec les prodiges dont la nature nous donne en tout lieu, en tout temps, le spectacle, ne peut être le fruit du hasard et que son admirable agencement est nécessairement l'oeuvre d'une pensée préalable. Celui-là sera déiste. Un autre songera au colossal déploiement d'énergie que les moindres parcelles de matière mettent continuellement en jeu, et admirera que la neutralisation mutuelle de ces forces, divergeant en tous sens avec une puissance démesurée, soit telle que l'univers ne présente que des résultantes d'intensité insignifiante au regard de leurs composantes élémentaires. Il imaginera que ces tentatives d'extrême violence, éperdument lancées vers d'innombrables buts dispersés en tous sens sont à tout instant filtrées par des chaines d'innombrables cribles successifs d'où seul le stable et le permanent sortent libérés. Et celui-là refusera d'invoquer l'hypothèse d'une divinité créatrice. La Raison, qui faisait du premier un croyant, fait du second un athée.

Et dans tous les domaines, politique, moral, social, la Raison de chacun lui dicte un système de principes. La Raison dira aux uns que la propriété du riche est sacrée, aux autres que le travail du pauvre est seul respectable.

La Raison a son sexe et son âge. La Raison de la fillette n'est pas celle de la jeune fille, elle-même autre que celle de la jeune femme: et celle de la femme mûre, celle de la femme âgée, celle de l'adolescent, de l'homme jeune, du vieillard, autant de Raisons distinctes, chacune façonnée par l'expérience personnelle et les leçons tirées de celle-ci.

La Raison de la jeunesse est appelée „les illusions" par les vieillards. La Raison de ceux-ci apparait aux êtres juvéniles comme un mensonge opposé aux suggestions impérieuses de la vie.

La Raison fine se rencontre-t-elle en mathématiques?

Oui, sans aucun doute. Et pour se rendre coupable de méfaits.

La Raison fine est celle qui prête aux êtres de la géométrie ou de l'analyse certaines qualités nullement inscrites dans leur définition, et que l'on suppose néanmoins inhérentes à la nature des êtres d'une telle catégorie, parce que les exemples les plus communément rencontrés d'individus appartenant à cette espèce, précisément présentaient ces caractères, logiquement étrangers aux conditions strictes exprimées dans la définition.

Les géomètres considèrent des surfaces dites „développables", à savoir engendrées par le mouvement d'une ligne droite mobile et tangentes à un même plan tout le long de cette ligne. Un cylindre, un cone de révolution en donnent l'exemple. Ou encore une surface de carton rigide, gauchi et forcé. Posée sur une table horizontale et chassée d'une chiquenaude, cette surface prendra un mouvement d'oscillation. Elle ne cessera pas de toucher la table tout le long d'une ligne droite, mobile à la fois sur le carton et sur la table. Celle-ci est le plan tangent jouissant de sa propriété tout au long d'une même droite génératrice de la surface développable.

D'autre part, on définit les surfaces „applicables sur un plan", c'est-à-dire telles qu'on puisse les étaler sur un plan sans les déchirer ni les replier sur elles-mêmes.

Les géomètres anciens montraient l'identité des deux classes. Et il est vrai que la surface développable est applicable sur un plan. Mais pour montrer qu'inversement toute surface applicable sur un plan est développable, les géomètres faisaient préalablement appel aux inspirations de leur Raison fine, qui les assurait: premièrement, de l'existence, en tout point d'une surface quelconque, d'un plan tangent à cette surface, deuxièmement, de la variation continue de ce plan avec son point de contact se déplaçant continûment sur la surface.

Or, le grand mathématicien français Lebesgue, alors tout jeune, à peine sorti de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, disait en tirant de sa poche un mouchoir chiffonné: „Voilà une surface applicable sur un plan". Car le mouchoir s'étale exactement sur un plan quand on le déplie. „Mais, ajoutait Lebesgue, d'après la science de nos jours, mon mouchoir frippé est une surface développable. Où sont donc ses génératrices rectilignes et le plan tangent constant le long de toute génératrice?".

Les géomètres anciens avaient ajouté au caractère de définition de la surface développable, caractère parfaitement spécifiée et auquel la Raison géométrique devait se tenir, des caractères implicites, existence, continuité du plan tangent, dont seule leur Raison fine se portait garante auprès d'eux. Et faute d'avoir expressément formulé ces caractères supplémentaires, leur raisonnement n'était pas juste logiquement.

Mais cette rectification apportée par Lebesgue était d'une importance si grande et si profonde qu'elle fut à l'origine des idées de ce géomètre sur la métrique des ensembles. La fameuse intégrale de Lebesgue s'ensuivit. Et toutes les mathématiques modernes en reçurent une formidable impulsion.

La Raison fine introduite en mathématique inspire la croyance que les espèces de la géométrie ou de l'Analyse sont justiciables de certaines règles de goût, de décence, de bonnes moeurs. Et les individus appartenant à ces mêmes espèces parce qu'ils en remplissent les strictes conditions d'admission, mais hirsutes et négligés dans leurs aspects, sont repoussés avec horreur par les délicats, inféodés à leur Raison fine. Mais c'est généralement parmi ces êtres défavorisés et disgraciés que la véritable nature de l'espèce se révèle de la façon la plus immédiate.

La Raison géométrique, c'est-à-dire l'effort de rattacher tous les jugements au moindre nombre possible de principes, d'où la logique seule, reniant la conviction intuitive, tirerait toutes nos vérités, cette Raison géométrique paralyserait la pensée dans les domaines étrangers aux mathématiques.

Et la Raison fine, invoquée par le mathématicien, ne lui répond que par des avis générateurs de raisonnements faux.

III

Passons maintenant à la Méthode inventive, utilisée par les mathématiciens. Elle est aisée à définir. Elle n'existe pas.

Le mathématicien, mis en présence d'une question difficile, fait manoeuvrer son esprit, use d'une tactique, en obéissant aux seules inspirations suggérées par la nature et la position du problème.

S'il réussit à vaincre, et s'il repasse plus tard dans sa mémoire, la chaine des étapes parcourues, il lui arrive de constater que les opérations effectuées dans son esprit peuvent être interprétées, de manière à fournir les éléments d'une instruction générale à l'intention de qui veut diriger sa pensée au cours d'une recherche.

Mais quand le sujet de son étude changera, le même mathématicien oubliera par quel moyen il avait triomphé dans une épreuve précédente, et de nouveau les seules conditions du cas opposé à son effort lui fourniront les éléments d'une attaque, éventuellement lui montreront les voies du succès.

Il y a des sciences où la méthode joue un rôle primordial: la critique des textes, les sciences historiques. Entre mathématiciens, la recommandation d'une méthode est dépourvue de tout effet utile. Vous savez qu'il ne faut pas donner de conseils, parce que ceux qui les suivent n'en ont pas besoin et ceux qui en ont besoin ne les suivent pas.

Après cet exorde contestant l'existence et l'utilité de la méthode en mathématiques, je vais tout de même vous citer des exemples, empruntés aux souvenirs d'un mathématicien que je connais., et qui renferment assurément en eux-mêmes le principe d'une méthode.

Le problème posé est du genre suivant: il s'agit de prouver que telle classe d'êtres mathématiques, la classe A, possède une certaine propriété P. La classe A est en général définie par un certain nombre de caractères. Voici la vérité dont il faut se pénétrer.

Si réellement les êtres de la classe A possèdent en effet la propriété P, celle-ci n'est en général, ni presque jamais, la conséquence de la totalité des caractères définissant A. La propriété P résulte presque toujours d'une partie simplement des caractères de A et quelquefois d'un seul de ces caractères. Et alors, l'idée enfermant en elle une méthode de recherche, est celle-ci: Tous les autres caractères de A, tous ceux qui ne concourent en aucune façon nécessaire à la vérité de la propriété P, loin de faciliter la recherche par la multiplicité de la connaissance qu'ils nous donnent de A, ne font qu'obscurcir dangereusement la question posée.

Ils égarent la pensée, occupée de se demander si ces caractères, superflus en réalité, ne contiennent pas en eux l'une des causes de la propriété observée ou conjecturée. Un homme souffre d'une affection interne. Un médecin serait-il avancé, pour découvrir la cause et la nature du mal, d'accumuler les renseignements sur la taille, la couleur des cheveux, le type céphalique du malade?

*

Poincaré, dans ses études de mécanique, avait étudié les mouvements d'un point soumis à des forces indépendantes du temps et assujetti à se déplacer à la surface d'un tore, c'est-à-dire d'un anneau circulaire, à section parfaitement ronde. Et la question était de savoir ce que deviendrait l'aspect du mouvement d'un point matériel quelconque placé à la surface du tore, quand le temps ne cesserait pas de croître indéfiniment, et si aucun mobile ne décrivait de cycle fermé. Deux possibilitées s'offraient a priori. Ou bien, au cours de son mouvement illimité, le point mobile reviendra indéfiniment souvent, indéfiniment près de tout point géométrique où il aura déjà passé. Ce sera l'accomplissement de l'éternel retour, la pensée chère à Nietzsche. Les savants disent que la trajectoire de chaque point est stable. Ou bien au contraire, et tout au moins pour certains points mobiles, toute position une fois occupée restera écartée du reste de la trajectoire indéfinie: elle en sera de plus en plus éloignée quand le temps grandira. Le mouvement de ces points est qualifié d'instable.

Croyant que, plus les conditions du phénomène se présenteraient sous forme harmonieuse, plus il y aurait de facilités à mettre en évidence la réponse cherchée, Poincaré avait supposé que les forces en jeu étaient de la nature la plus noble et la plus riche qui soit, ce que nous appelons la nature analytique. Mais cette corbeille de dons n'ajoutait rien au seul caractère efficace des forces. La méthode fructueuse fut de supposer sur les forces, strictement ce qui était nécessaire pour que le problème eût un sens, essentiellement la continuité du champ de forces. Dans ce cas le problème se résolvait simplement et dans le sens, prévu par Poincaré, de l'instabilité possible.

Puis on ajouta l'hypothèse de conditions différentielles du premier ordre, analogues pour une courbe à l'existence d'une tangente en chacun de ses points. La réponse s'obtint encore et elle fut du même sens que dans le cas précédent. L'instabilité était admissible. On passa ensuite à des caractères touchant aux différentielles du second ordre.

Cette fois, la réponse vint contredire la présomption de Poincaré et de Birkhoff. La stabilité était de règle. Ces géomètres illustres avaient supposé que les forces possédaient des différentielles de tous les ordres, et même davantage. Tous ces caractères offerts gracieusement ne servaient qu'à obscurcir le sujet.

On savait trop de choses sur les données. Il fallait détenir beaucoup moins d'informations pour voir clair dans la question.

•

Dans un autre problème, il s'agissait de trouver ce que nous appelons la primitive seconde d'une dérivée seconde généralisée. Le sens technique des mots importe peu. Cette recherche s'imposait pour obtenir la règle de calcul des coefficients des séries trigonométriques. Pour celles-ci, on avait une dérivée première intermédiaire d'une nature très commode: cette dérivée était „sommable". Dans le cas général, au contraire, la dérivée première, quand elle existait, présentait des caractères beaucoup moins simples et elle n'était pas sommable. Seulement quand le problème eût été résolu, on s'aperçut que dans les deux cas, le noyau de la difficulté était le même, beaucoup moins volumineux dans le premier cas, (celui de la série trigonométrique), mais tout aussi condensé et non moins indissociable; plus large et bien plus commode à observer dans le second cas. C'est en attaquant le problème le plus général, que l'on découvrit la solution. Les deux problèmes pourraient se comparer ainsi:

Une chaîne de montagnes nous sépare d'une contrée à atteindre. Il faut trouver le col par où le passage est possible. Le massif est coupé de failles, bordées de parois verticales, reliées par un sol plus ou moins chaotique. Une seconde chaîne dresse à une grande hauteur des parois imaginaires et translucides prolongeant vers le zénith celles de la première chaîne. Celle-ci est, en projection plane, identique de dessein à la seconde. La première, usée par une longue érosion, est d'un relief beaucoup moins marqué que la seconde, dont elle est le témoin dégénéré.

A chaque tentative pour franchir la chaine réelle, on s'engage dans une des tranchées sans nombre creusées par la nature dans les flancs du massif originel, et l'on aboutit invariablement, et en dépit de toute présomption contraire, au fond d'une impasse formée par une muraille de faible hauteur, mais impossible à escalader.

Quand la leçon de ces insuccès est suffisamment tirée, on se décide à observer avec du recul la seconde chaine, et alors, dans le profil de celle-ci, on aperçoit le défaut de la crête et la brèche, le col par où passera le chemin.

Ici encore trop de précisions sur les données du problème ont été nuisibles. La difficulté a été vaincue, parce qu'on lui a substitué une difficulté beaucoup plus considérable d'aspect, mais en réalité plus facile à aborder, parce que le nombre de ses faces d'attaque avait été réduit au minimum.

Telle est la leçon de méthode que les mathématiciens donnent à autrui, sans d'ailleurs savoir toujours en profiter eux-mêmes.

ROME 1908[1]

FEUILLETS JAUNIS

Depuis un demi-siècle, tous les quatre ans, avec la périodicité des anciennes olympiades, les mathématiciens du monde se réunissent en un vaste Congrès. Avant de se séparer ils fixent le lieu de leur prochaine assemblée. En avril 1908 le tour de Rome était venu. Nous fûmes quatre jeunes parisiens à vouloir nous rendre à ces assises de notre savoir.

Il y aura bientôt quarante ans de ce voyage. Mais certaines impressions m'en sont encore gravées dans la mémoire, comme sur une planche de métal les traits creusés par le burin.

Et depuis ce temps si lointain déjà, je n'ai jamais cessé d'entendre murmurés à mon oreille les mots où, les uns spontanément jaillis, les autres longuement médités, j'ai dès le début souhaité

---

(1) Avril 1964 : Ce récit a dû être entièrement composé dans les mois précédant la rédaction de ma notice sur Lebesgue, partiellement lue à la séance plénière de l'Institut en octobre 1946.

J'avais oublié l'existence de cette pièce achevée. Je la croyais demeurée à l'état d'ébauche, quand, à partir de 1957, ayant achevé la publication commencée en 1940, d'une série d'ouvrages mathématiques, je songeai maintes fois à décrire ce qui me restait de mes impressions de Rome en 1908.

Récemment, fouillant pour cet objet dans mes notes éparses, je découvris que mon travail projeté se trouvait depuis vingt ans achevé.

enchâsser, pour sauver leur netteté, les plus précieux joyaux de mes souvenirs.(1)

Nous partîmes de Paris un soir. La vitesse des trains en ce temps là était modeste. Le milieu du jour était passé quand le lendemain nous descendîmes en gare de Turin. Mais auparavant, à la sortie du Mont Cenis au dessus du Val d'Aoste, coupés par la barrière alpestre des firmaments troublés de brume, ceux du Nord et de l'Ouest atlantique, nous avions, stupéfaits, émus, subi l'extase d'un étincellement du jour inconnu de nous.

Quand trois ans plus tard, j'allai à Florence passer la quinzaine de Pâques, je m'étais promis à mon départ le bienheureux éblouissement de mon premier séjour sous le ciel italien. Mais depuis dix-huit mois j'étais établi à Montpellier, et la lumière du Languedoc avait par avance éteint les prestiges du soleil piémontais.

Nous finissons ce premier après-midi à Turin. Le style de cette ville est celui d'une ancienne capitale de dynastie vivant jadis sans faste, quasi bourgeoise et sage. Il y a cent ans, l'aile de la fortune la souleva dans un destin de rêve. Elle consomma sa ruine pour s'être liée imprudemment à l'aventure.

Une longue et large avenue descendant vers le Pô, qu'elle franchit pour buter ensuite aux collines fermant au nord la vallée, me rappelle en proportion grandiose une perspective d'Auch, ma ville natale. Au nord-ouest lointain, posée sur une cime, comme le Sacré Coeur au faîte de Montmartre, l'église de la Soperga a la blancheur d'une bulle expirée par le sommet du pic et restée attachée à lui.

---

(1) De ces phrases dont la mémoire m'offre souvent le retour intact, certaines sont entourées de guillemets ou mises en italiques.

Le troisième jour nous quittons Turin. Gênes passé, la voie disposée en haute corniche épouse les sinuosités des bords marins appelés Riviera du Levant. Midi flamboie au-dessus du paysage. La nature, rochers, bois, mer étincelante, déploie une féérie transposant un orchestre en ondes pour les yeux : sonorités et timbres vibrant sur les couleurs, mélodies en rayons pailletés, arpèges de lumière escaladant l'éther .... Les langues de feu s'échappent de toute pointe, crête de vague, cime d'arbre, arête de rocher.

Les tunnels se succèdent sans interruption. C'est une alternance continuelle de ténèbres opprimant les yeux et de bandeaux brutalement déchirés.

Durant ces éclaircies, parfois un bref et délicieux épisode nous enchante. Je me rappelle sur la pente abrupte précipitée à la mer, un pauvre cimetière de village pêcheur, "ses modestes tombes grises attirées par le gouffre, ayant à leur chevet une croix de guingois, troupeau de brebis dégringolantes, poursuivies de houlettes désorientées".

Au fond d'une baie, les silhouettes puissantes de navires de guerre. C'est La Spezzia.

Puis, de notre wagon nous contemplons au passage les quatre illustres monuments de Pise. Sous la splendeur de cette métropole ils devaient occuper le centre de la ville, au milieu de quartiers étendus, abondamment et somptueusement bâtis. De quelles richesses, de quel luxe puissant et aboli ces colosses de marbre ne témoignent-ils pas irrécusablement ? La défaite, les tributs, la servitude ont courbé l'orgueil de la cité. Le temps a délabré les palais et maisons d'où les possesseurs étaient exilés. Un jour tous ces décombres furent balayés. Et à leur place une immense pelouse nue isole les géants abandonnés, hors de la Pise actuelle.

Encore à notre gauche la montagne de Carrare, entaillée d'un large biseau, éclaire le pays de sa blancheur neigeuse.

Puis l'intérêt des sites bordant notre route fléchit. Les heures deviennent longues. L'attention jusqu'alors constamment sollicitée avait écarté fatigue et lassitude. Le fardeau de ce long trajet commence à peser sur nous.

La nuit vient et la lune est levée. Nous dînons. Rentrés dans notre compartiment nous n'échangeons plus que des propos languissants. Déjà inscrit en nous par l'effet continu, le vacarme du train lancé droit à son but nous berce. La voie longe la côte.

"Sous la nuit laiteuse les phosphores de la mer chatoient. Le galop de la vapeur nous emporte sur la campagne de Maremme ; en escorte, comme des cavaliers courant à la portière, l'astre pale voisin du zénith et ses rayons blancs traînant sur les flots."

L'approche de Rome nous émeut. Toute notre adolescence a puisé des récits, des exemples, des leçons dans l'histoire, les écrits, la politique des Romains. Plus tard l'origine de notre droit est apparue dans les lois de ce peuple, grand architecte de cités s'il en fut.

Nous évoquons les traits de notre vie sociale, remontant à lui sans interruption, caractères encore vifs il y a trente ans, grandement estompés après deux guerres et des révolutions ayant secoué la planète.

En un tiers de siècle les fondements de civilisations vieilles de deux millénaires ont été ruinés. Je pense à cette opposition si frappante dans ma jeunesse : fronts déférents et penchés devant ce qui se réclame de la propriété foncière, dédain sommaire pour ce qui s'autorise uniquement de l'esprit.

Depuis lors, posséder un bien est devenu une fiction. L'intelligence est aujourd'hui la source de toute puissance, prouvant sa mission et placée à son rang par les massacres, les ruines universelles, les fléaux d'apocalypse, qui seuls ont appelé le savant à la gloire. Ce que ses bienfaits n'avaient pas valu à la science, le respect, lui vient, s'écartant des valeurs douteuses et fragiles.

....

Le Congrès s'ouvrait le matin suivant notre arrivée nocturne. Je dois avouer que notre participation aux travaux scientifiques fut uniquement de sympathie et de voeux. Nous nous mêlâmes à la foule des congressistes dans les grandes manifestations collectives: la séance inaugurale présidée par le Roi lui-même, exemple qui eût semblé bien étrange au Président de la République française, et à ses concitoyens autant qu'elle le fut à moi-même ; puis les conférences en assemblée plénière quand,demandées aux plus illustres mathématiciens du monde, elles donnèrent leur tour à Poincaré et à Darboux, deux français ; encore l'inoubliable soirée offerte par la municipalité de Rome au musée du Capitole, dans les galeries bordées d'une haie de statues dressées sur leur socle et composant un des plus beaux ensembles de marbres légués par l'antiquité. Nous eûmes aussi la visite du Palatin sous la conduite du Directeur des fouilles romaines ; enfin une journée d'excursion à Tivoli et à Frascati pour nous montrer la villa d'Hadrien et les cascatelles.

Mais, dès les premières heures, entrés en possession des cartes et insignes nous assurant maints avantages ou franchises dans Rome, les musées, les chemins de fer d'Italie, nous nous ruâmes à l'exploration de la ville, à la recherche de cette foule de monuments et de vestiges dont tant de livres nous avaient si souvent, si longuement entretenus.

....

J'ai souvent fait rire les gens en leur disant : "J'ai visité Rome en six jours." Et en effet je ne disposais pas de sept. Au lieu de tendre au plus grand pourcentage de curiosités hâtivement inspectées, je me bornai à cueillir de brèves impressions, originelles et fortes, sur les monuments et ouvrages légués par l'architecture ou les autres arts, et dont le sens, l'intérêt me semblaient devoir fournir l'aliment le plus durable à la méditation et à la mémoire. D'ailleurs, voir en un clin d'oeil est le principe de maints artistes dont l'opinion me cautionnerait. Les arbres croissent mieux, plantés discrètement et non pas densément.

Je me rappelle ma visite, obligatoirement limitée à deux heures, au musée Pio Clementino, consacré à la sculpture antique au Vatican. Devant chaque statue un aller et retour de deux pas, les yeux s'attachant à l'effigie, pour voir dans une évolution oscillante, un visage délivrer expressivement sa pensée, un torse indiquer son allure. Et, au bout de chaque longue salle examinée, en un dernier parcours transversal, alternatif et lent, mes regards se fixant au dessus des deux files de socles bordant la pièce, je voyais ces rangées de profils s'animer de leur déplacement mutuel, et, dans ce balancement, accuser sa physionomie distinctive. La photographie emportée et plus tard consultée, loin de rester devant moi feuillet sans relief ni âme, produisait l'éveil immédiat de mes souvenirs assoupis, comme le commutateur subitement tourné fait jaillir dans une ampoule électrique en sommeil aussitôt une vive clarté.

Le lecteur familier avec Rome devine à ce que j'ai déjà dit quels furent en la ville et ses campagnes les principaux objets de mes pélerinages d'humanité. Je n'en écrirai pas davantage. Cette image encore m'est restée.

Un après-midi, passée une de ces ondées alternant maintes fois, sous le climat romain au temps de Pâques, avec d'éblouissantes embellies, je me rappelle avoir grimpé au faîte du Colisée pour gagner l'avantage d'un observatoire d'où l'archipel des sept collines émergeant des vals urbains, le Palatin venant en promontoire, et les ondulations de la Sabine jusqu'à l'horizon des monts d'Albe, se disciplinaient sous mes yeux. La pluie lavant de leurs poussières l'air, les feuillages, les roches, avait fait du paysage suburbain une mosaïque de laque diaprée. Tournant mes regards à l'opposé j'ai la curieuse chance de voir le soleil se coucher derrière Saint Pierre et le disque ardent appliquer autour du dôme l'auréole des bienheureux.

Retourné à Paris, je me surprends une première fois à dire, et je me plais ensuite à répéter :

"Rome, une douce main qui vous prend le coeur."

....

Et puis je me rendis cinq jours à Naples.

Je glisserai sur le mauvais souvenir gardé de la monstrueuse mendicité, dissimulée sous l'innocent commerce des mandolines en porcelaine et des fragments de corail, mais poussant ses instances jusqu'à la persécution, empoisonnant les jours autant que les moustiques en font avec les nuits. Je ne parlerai pas davantage de mes visites aux célèbres musées, aux ruines de Pompei.

Je conterai seulement une soirée inoubliable dont tout le faste fut ordonné par l'unique nature.

C'était le jeudi précédant Pâques. Les belles napolitaines, accomplissant très scrupuleusement leurs visites rituelles, avaient achalandé les églises les plus réputées. L'après-midi touchait à sa fin quand, m'étant rendu à la pointe du Pausilippe, presqu'île bordant à l'ouest par une haute falaise la merveilleuse baie, je pris le tramway revenant à Naples. La chaussée suivie courait parfois au ras du précipice, dont elle ne s'écarte guère jamais. S'approchant avec lenteur, la molle ondulation de la mer à nos pieds venait expirer en miettes d'écume sur l'affleurement des rochers. La longueur de la route sinueuse, les fréquents arrêts du vehicule firent que, parti avec le jour déjà très bas, j'atteignis le terme de la course par une nuit complète. Dans les deux heures du trajet la révolution s'était accomplie.

En face de moi, au delà de Naples j'avais le Vésuve, et sur ma droite, endigant le golfe à l'est, la presqu'île de Sorrente, plus haute que les Vosges. Ces montagnes cerneraient la perspective si les dimensions du cirque marin, fermé vers le sud par l'île de Capri, n'étaient pas vingt fois supérieures aux altitudes. Ici le grandiose se tempère d'équilibre et d'harmonie. Aussi peut-il revêtir grâce et suavité.

De notre gauche, par dessus la crête du Pausilippe dominant de haut notre position, le soleil en son déclin illumine de ses feux rasants tous les abords orientaux, donc opposés à nous, de Naples et de son golfe. Le volcan éclairé de la sorte se sépare en zônes horizontales tranchées, dont les teintes, de mollesse et langueur à la base, passant de l'aimer au vouloir, se durcissent aux abords du sommet, coiffé de son perpétuel panache fumeux. Du soleil, prêt à s'enfoncer par delà les flots de la mer thyrénienne, les derniers rayons mouillés peignent sur le décor de fond des montagnes les teintes changeantes des plumages irisés.

Au-dessous de nous l'ombre du Pausilippe ne cesse de s'allonger sur la mer calme et unie. Au-dessus de l'immense théâtre une auguste sérénité plane, appelée par la proche tombée du jour. Les barques promenant d'indolents passagers et que l'éloignement fait apparaître minuscules, ralentissent leur progrès. Les rameurs arrêtent leur mouvement. Les bruits s'éteignent pour ne plus troubler le recueillement qui gagne la nature, tandis que la région aérienne exposée aux feux du soleil monte avec les rayons inférieurs de l'astre. Une émanation d'harmonies silencieuses, jusqu'alors opprimée par l'énergie du jour, inspire de béatitude le panorama dont les couleurs, de toute violence affranchies, s'affinent et poudroient. Une sorte d'extase où s'abolit la mémoire des heures précédentes, chaudes et tumultueuses, semble pénétrer âmes et matière. Le temps est suspendu. La nature s'endort de son ravissement.

"Dans la symphonie et son adagio mourant, c'est le point d'orgue qui s'éternise."

Le soleil enfin a disparu. L'ombre surgit, occupant son empire. D'instant en instant plus épaisse, en quelques minutes elle est nuit devenue. Encore assez loin de nous les feux de la grande ville s'allument, et aussi un fin semis de lucioles aux divers points de l'horizon. Le tramway poursuit sa route et mes regards plongent vainement sur la masse indistincte et sombre de la mer. Mais une nouvelle clarté apparaît.

Tout au fond de la longue vallée de Castellamare la lune rose s'est levée. Elle monte, et, de notre vue, ses rayons atteignant la baie l'aspergent d'une pluie mauve jusqu'à nos pieds. Le spectacle s'anime d'une seconde vie. Dans son ascension le disque de la lune se dégage des brumes de l'horizon. Il renvoie dès lors l'image fidèle du soleil passé derrière la terre. Le reflet sur les eaux du golfe dirige vers nous une large lame d'or aux bosselures miroitantes, posée comme un flamboiement d'épée sur le satin bleu de la mer.

L'heure s'écoule, captivée, grisée d'une magnificence évoluant ses phases à nos yeux.

La lune est maintenant très haute ou bien elle a tourné. Le golfe, jusqu'à l'horizon après le bloc charbonneux de Capri, est un bassin aux bords sinueux et noirs dont une masse de diamants pales et limpides a rempli le fond.

L'âme du paysage est passée à la grave mélancolie. L'heure de la mer est close. La vie ardente de la nuit est toute désormais dans Naples.

....

....

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Arnaud Denjoy ne classait pas son théorème fondamental sur les "caractéristiques du tore" en tête de son oeuvre scientifique. Ce théorème, publié au J. de Math., 9 (11), 1932, p.333-375 dans son mémoire intitulé "Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore" est cependant, de toute son oeuvre, la partie qui continue à susciter le plus de recherches, en relation avec l'étude des feuilletages des variétés compactes.

Nous avons réuni ici quelques documents qui éclairent de jours variés cette partie de son oeuvre :

-. Son propre jugement tel qu'il le formulait dans sa Notice de 1934.

-. Deux courts exposés de H.Cartan et H.Rosenberg sur les prolongements du théorème de Denjoy.

-. Enfin un exposé d'ensemble de Denjoy (Belgrade, 1961), et la série des 13 Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences sur les équations différentielles périodiques postérieures à 1956.

— Les caractéristiques des équations différentielles a la surface du tore. (*)

J'ai élucidé une question posée il y a près de cinquante ans par Poincaré qui n'avait jamais cessé de songer à y répondre. Elle avait également résisté aux tentatives de plusieurs autres géomètres de premier plan, entre autres M. Hadamard et M. Birkhoff, le très éminent mathématicien d'Harvard.

On sait que M. Birkhoff s'est rendu célèbre en démontrant une proposition connue sous le nom de « dernier théorème de Poincaré » et que notre illustre compatriote, sentant sa fin prochaine, avait pour ainsi dire léguée aux investigations des mathématiciens. A peine le fascicule des *Rendiconti* de Palerme, renfermant l'article de Poincaré, était-il parvenu à M. Birkhoff, que celui-ci obtenait la solution tant cherchée par Poincaré. De ce jour, M. Birkhoff s'est fait le continuateur de Poincaré dans le domaine de la mécanique analytique, où il a édifié de belles théories universellement connues et admirées. Mais une partie de celles-ci repose sur le postulat qu'une certaine circonstance singulière, signalée par Poincaré, était incompatible avec le caractère analytique des données. L'importance capitale de cette hypothèse dans l'œuvre de M. Birkhoff laisse deviner l'obstination avec laquelle il a dû chercher à justifier ce postulat. L'insuccès de sa tentative, après les preuves qu'il a données de son génie mathématique, montre que la difficulté à vaincre ne pouvait être tenue pour banale.

Voici essentiellement la question qui se posait :

Dans ses études sur les équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt$$

où X, Y, Z sont des polynomes en x, y, z, Poincaré se pose le problème de déterminer les circonstances limites du mouvement du point x, y, z quand t croît indéfiniment, et quand la trajectoire n'aboutit pas à un zéro commun de X, Y, Z, tout au moins à un « nœud », ou à un « foyer »

(*) Extrait de la "Notice sur les travaux scientifiques de A.Denjoy" Paris, Hermann, 1934, p.23-26.

(un « col » ouvre une ambiguïté de voies au mouvement ultérieur, mais ne l'arrête pas).

Selon l'allure limite de la courbe, il y aura ou non stabilité à la Poisson, selon que chaque trajectoire repassera une infinité de fois infiniment près de son point de départ, ou qu'elle abandonnera au contraire à jamais n'importe laquelle de ses positions successives, dont elle demeurera ensuite éloignée d'une distance minimum positive croissante avec le temps. On conçoit l'importance de cette sorte de question dans les problèmes de la mécanique analytique et céleste.

Poincaré suppose plus particulièrement au sujet des équations (1) qu'il existe une surface algébrique $F(x, y, z) = 0$, contenant une famille de trajectoires à un paramètre. Dès lors, cette surface présente toujours des points singuliers pour l'ensemble des trajectoires, à moins que le genre de F ne soit égal à 1. Une transformation birationnelle ramène au cas du tore. Effectivement, il peut alors se faire que toute singularité des équations fasse défaut, et même que chaque trajectoire coupe tous les méridiens sous un angle supérieur à un nombre fixe. Si θ et φ sont les arguments du point M du tore sur le méridien et sur le parallèle se croisant en M, les équations (1) s'écrivent :

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta), \tag{2}$$

A étant continu, de périodes 2π en φ et θ (et, avec les hypothèses inutilement précises de Poincaré, homolorphe en φ et θ), enfin tel que, par un point du tore passe une trajectoire et une seule, soit $\theta = \psi(\varphi, \theta_0)$, si $\theta = \theta_0$ pour $\varphi = \varphi_0$. Deux trajectoires quelconques sont sans point commun à moins d'être confondues. Trois cas sont possibles :

Ou bien : *a*) Toutes les trajectoires sont des cycles fermés, s'enroulant les mêmes nombres de fois autour de l'axe du tore et autour du cercle moyen. Il y a stabilité.

b) Certaines trajectoires, mais non toutes, sont fermées. Les secondes admettent des cycles-limites, situés parmi les premières. Il n'y a pas stabilité, sauf pour les trajectoires cycliques elles-mêmes. Ces deux premiers cas ont leurs analogues dans le plan.

c) Il n'y a pas de trajectoire fermée. Poincaré en tire ces conclusions : Le méridien C_0 d'argument φ_0 étant coupé par une trajectoire I aux points successifs d'argument θ_0, $\theta_1 = \psi(\varphi_0 + 2\pi, \theta_0)\dots$, $\theta = \psi(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_0)$, 1° le rapport $\frac{\theta_n}{2n\pi}$ tend vers une limite irrationnelle α (indépendante de θ_0), 2° l'ordre mutuel des points $M_n(\theta_n, \varphi_0)$ sur C_0 est le même que celui des extrémités des arcs $2n\pi\alpha$ sur le cercle trigonométrique.

Cela étant, ou bien les points M_n seront partout denses sur C_0, chaque trajectoire sera partout dense sur le tore, et l'on aura la stabilité. Ou bien, éventualité remarquable, que Poincaré ne craint pas d'envisager, en 1885 !, l'ensemble J des points d'accumulation des M_n au lieu de coïncider avec C_0, sera parfait discontinu, c'est-à-dire conforme au type que Cantor a récemment défini. Il n'y aura pas stabilité (sauf pour les trajectoires coupant C_0 sur J).

Le cas de l'instabilité est-il compatible avec l'hypothèse faite par Poincaré sur A (φ, θ), supposé par lui holomorphe ?

Telle est la question que nul n'avait pu résoudre, ni affirmativement en constituant un exemple du cas singulier, ni négativement en montrant l'impossibilité de celui-ci.

Pour mieux analyser la question, j'ai rejeté toute hypothèse d'holomorphie sur A (φ, θ). Je suppose d'abord simplement la *continuité* de A (φ, θ), hypothèse entraînant la continuité de la fonction croissante $\theta_1(\theta)$ supposée unique. Je constate la *possibilité d'obtenir le cas singulier* et même de se donner indifféremment l'ensemble limite J.

Je suppose alors θ_1 doué en θ d'une *dérivée première continue* (condition réalisée si $\frac{\delta A}{\delta\theta}$ est continu en φ et θ). *Je peux encore réaliser* un exemple du *cas singulier*, mais avec beaucoup moins de latitude que dans le premier cas.

Je veux enfin construire un exemple où $\frac{d^2\theta_1}{d\theta^2}$ (et même $\frac{\delta^2 A}{\delta\theta^2}$) existe et est continu. Je n'aboutis pas et, en cherchant les raisons de mon échec, je démontre que *si la dérivée* $\frac{d\theta_1}{d\theta}$ *est à variation totale bornée* (cas moins restrictif que l'hypothèse de l'existence de $\frac{d^2\theta_1}{d\theta^2}$) *le cas d'instabilité est impossible*.

Mon raisonnement est très simple. Il est fondé sur cette remarque que le point μ_n ($2n\pi\alpha$) du cercle trigonométrique est extrêmement voisin du point μ_0 quand n est le dénominateur d'une réduite du développement de α en fraction continue, en sorte que le système σ_n des points μ_{-n+1}, μ_{-n+2}, ..., μ_{-1}, μ_0 tournant en bloc de $2n\pi\alpha$, éprouve, en négligeant le multiple entier de 2π, une libration d'ensemble si peu sensible que, σ'_n étant la nouvelle position de σ_n, les points de σ'_n alternent géométriquement avec ceux de σ_n. J'en tire, i_n étant le n^e conséquent d'un intervalle i contigu à J, et i_{-n} le n^e antécédent de i, l'inégalité $i_n\, i_{-n} > i^2\, e^V$, V étant la variation totale de $\log \frac{d\theta_1}{d\theta}$. Or, i restant fixe, i_n et i_{-n} tendent vers o. D'où l'impossibilité annoncée.

Ce résultat, publié aux Comptes Rendus le 7 mars 1932, et qui dissipait dans un sens favorable une énigme vieille de près d'un demi-siècle, fut d'autant plus remarqué que les travaux récents de Birkhoff sur les systèmes « ergodics » (présentant la stabilité à la Poisson), sur les « moyens mouvements », sont suivis avec une attention croissante et passionnée par beaucoup de mathématiciens de haute valeur dans nombre de pays. En particulier, l'Ecole d'Harvard a très chaleureusement salué ce succès. Voici ce qu'écrivait le 3 juillet 1932, l'éminent disciple de M. Birkhoff, M. Aurel Wintner : « L'exactitude de cette hypothèse qui est d'une grande importance pour la dynamique de Birkhoff, a été prouvée par Denjoy dans sa Note fondamentale mentionnée ci-dessus » (1).

(1) « The correctness of this conjecture which is of great importance for the dynamics of Birkhoff has been proved by Denjoy in his fundamental note mentioned above. » (*Remarks on the recurrent behavior of the characteristics on a torus.* AMERICAN JOURNAL OF MATH., vol. LIV, n° 3, July, 1932).

ACTUALITÉ DE A. DENJOY (*)

Par H. Rosenberg et H. Cartan (Paris XI)

Pour rendre justice aux travaux de DENJOY, je me permets de parler du développement des Mathématiques qui en ont résulté et pas seulement de ma contribution.

Je limite mes remarques à un mémoire de DENJOY sur les équations différentielles [4] . Ceci représente une petite partie de ses travaux ; DENJOY a considéré ce papier comme un "à côté", c'est-à-dire, il ne faisait pas partie de ses intérêts principaux.

Son papier est un des piliers de la théorie qualitative des équations différentielles. Il l'avait écrit pour répondre à une question posée par POINCARÉ dans [6] : si un champ de

---

(*) Cet article est extrait de "La Gazette des Mathématiciens" , février 1975, p.48-56, et contient les lettres que H.CARTAN et H.ROSENBERG ont consacrées à A.DENJOY.

de vecteurs défini sur le tore T^2 est holomorphe et sans orbite compacte, est-ce que chaque orbite est dense dans T^2 ?

DENJOY a démontré que la réponse est affirmative, et même si le champ est seulement de classe C^2. Il a construit un contre exemple de classe C^1, mais il a ignoré que ceci avait déjà été fait par P. BOHL en 1916 [2], (en fait, les spécialistes contemporains semble ignorer ce travail de BOHL aussi). Pour démontrer son théorème, DENJOY a fait une étude approfondie des difféomorphismes du cercle S^1. Les techniques analytiques qu'il a introduites étaient reprises par A. SCHWARTZ [10], R. SACKSTEDER [9], V.I. ARNOLD [1], et M. HERMAN, le côté topologique par moi et R. ROUSSARIE [8], P. SCHWEITZER [11], et W. THURSTON [13]. Je décris brièvement ces développements.

A. SCHWARTZ, en 1963, a étendu le résultat de DENJOY aux surfaces M de dimension deux. Il a démontré qu'un champ de vecteurs X, de classe C^2, défini sur une surface M^2, n'a pas d'ensemble minimal non trivial. Un ensemble minimal de X est un ensemble fermé, non vide, invariant par X, et minimal pour ces propriétés. Le théorème de SCHWARTZ dit qu'un ensemble minimal pour X, de classe C^2 sur M^2, est un zéro de X, une orbite périodique, ou tout M^2, auquel cas M^2 est le tore T^2 et X est topologiquement en flot linéaire. Sa démonstration repose intimement sur la démonstration de DENJOY. DENJOY a introduit les techniques qui permettent de comprendre les ensembles invariants d'un difféomorphisme de S^1. SCHWARTZ a repris la même démonstration, mais pour un difféomorphisme de S^1 défini sur un ouvert de S^1, et pas tout S^1. On appelle le théorème de SCHWARTZ le théorème de POINCARÉ-BENDIXON pour les surfaces ; mais quiconque a lu les papiers de DENJOY et SCHWARTZ sait que cette appellation est mauvaise.

R. SACKSTEDER a repris les mêmes techniques de DENJOY pour étudier les ensembles minimaux d'un pseudogroupe qui opère sur S^1 [9] . Ceci lui a permis d'étendre le théorème de SCHWARTZ aux feuilletages de codimension un,de classe C^2, sur les variétés fermées M^n. Un corollaire de ce théorème de SACKSTEDER est qu'un feuilletage de codimension un, de classe C^2, sur une variété fermée M^n est topologiquement équivalent à un feuilletage défini par une 1-forme ω , si le feuilletage n'a pas d'holonomie. Cette condition est vraie, par exemple, si les feuilles sont simplement connexes. Ce théorème de SACKSTEDER était fondamental pour la théorie qualitative des feuilletages, par exemple pour la classification des opérations localement libres du groupe R^{n-1} sur M^n [3].

Une question fondamentale posée par l'article de DENJOY, est de savoir si un difféomorphisme C^k de S^1 qui est topologiquement conjugué à une rotation est différentiablement conjugué à cette rotation. C'est V.I. ARNOLD qui a construit un difféomorphisme analytique de S^1, qui est topologiquement une rotation mais qui n'est pas C^1-conjugué à une rotation [1]. Ce travail d'ARNOLD est très profond mais c'est toujours les idées de DENJOY à la base.

M. HERMAN a poussé les résultats d'ARNOLD beaucoup plus loin ; il a très bien compris la structure de $\mathrm{Diff}^k(S^1) = G(k)$, le groupe des difféomorphismes de S^1, de classe C^k, qui conservent l'orientation. Pour $f \in G(k)$, il a défini un invariant $H^k(f) \in (0,\infty)$, et il a démontré que f est C^k conjugué à une rotation si et seulement si $H^k(f) < \infty$. Voici quelques théorèmes importants de HERMAN. Soit $\rho(f)$ le nombre de rotation de F, $R(\alpha)$ = la rotation de S^1 par α , O^k_α = l'orbite de $R(\alpha)$ par l'action de $G(k)$ par conjugaison

$= \{gR(\alpha)\, g^{-1} / g \in G(k)\}$, et

$$F^k_\alpha = \{ f \in G(k) \,/\, \rho(f) = \alpha \} = \rho^{-1}(\alpha).$$

Alors :

1. Si α est irrationnel et $1 \leq k < \infty$, O^k_α est maigre dans F^k_α pour la C^k-topologie.
2. Si α est un nombre entier de LIOUVILLE, alors $F^\infty_\alpha - O^\infty_\alpha$ est dense dans F^∞_α pour la C^∞-topologie.
3. Pour $b \leq k < \infty$, il existe $f \in g(k)$, tel que f n'est pas C^{k-1} conjugué à un élément de $G(k+1)$. Ceci généralise l'exemple de DENJOY d'un difféomorphisme de classe C^1 qui n'est pas conjugué à une rotation.
4. Soit $F^\infty_I = G(\infty) - \mathrm{int}\,(\rho^{-1}Q)$. C'est une propriété générique dans F^∞_I pour la C^∞-topologie, d'être C^ω-conjugué à une rotation mais pas C^1-conjugué.
5. Pour $4 \leq k < \infty$, et pour tout $n \geq 1$, il existe

   $f_1, \ldots f_n \in G(k)$, tels que $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout i,j et $(1, (f_i), \ldots, (f_n))$ sont indépendants sur Z, et pour tout i, f_i n'est pas C^{k-1} conjugué à une rotation. J'expliquerai l'intérêt de ce résultat plus loin.

Maintenant je parlerai du côté qualitatif de DENJOY. La façon dont je vous ai annoncé le théorème de DENJOY (il existe une orbite périodique ou bien chaque orbite est dense) n'est pas le théorème de DENJOY qu'on appelle le théorème de DENJOY aujourd'hui. Il avait considéré les équations de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, f de même signe sur le tore (c'est-à-dire f périodique). Cela veut dire que le champ de vecteurs admet une meridienne comme section. VAN KAMPEN en 1938 a montré que si chaque orbite est dense, le champ est topologiquement linéaire (c'est facile), et puis C.L. SIEGEL en 1945 [12], a démontré que le raisonnement de DENJOY marchait aussi bien pour les systèmes sur le tore

$$f(x,y)\ dx = g(x,y)\ dy$$

où f, g sont périodiques et sans zéros en commun. Ce théorème de SIEGEL est aussi très facile. Donc, on dit aujourd'hui que le théorème de DENJOY est : soit X un champ de vecteurs sur T^2 de classe C^2 et sans zéro. Alors X a une orbite périodique ou bien X est topologiquement linéaire. Une autre façon : soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage de T^2, de classe C^2, dont toutes les feuilles sont des droites R^1, alors $\mathfrak{F}$ est topologiquement équivalent au feuilletage linéaire donné par une 1-forme $\omega = adx + bdy$, où a et b sont des nombres réels.

En 1967, j'ai démontré que T^3, le tore de dimension trois, est la seule variété fermée de dimension trois qui admet un feuilletage de classe C^2, dont toutes les feuilles sont des plans R^2 [7]. Ensuite , R. ROUSSARIE et moi avons démontré que tout feuilletage de T^3 de classe C^2, par des plans R^2, est topologiquement linéaire, c'est-à-dire, donné par une 1-forme $\omega = adx + bdy + cdz$,(a,b,c, des nombres réels) [8]. Notre démonstration utilise le théorème de DENJOY pour T^2. Ce serait extrêmement utile de savoir si ce théorème est vrai en plus grandes dimensions. Par exemple, si c'est vrai en dimension 4 et 5, alors la conjecture de POINCARE est vraie en dimension trois : toute variété fermée de dimension trois, qui est simplement connexe, est homéomorphe à la sphère S^3.

R. MOUSSU a étendu dans sa thèse le théorème de ROUSSARIE et moi au feuilletages de T^3, sans composantes de REEB [5] . Ensuite, W. THURSTON a étendu ce théorème aux feuilletages de classe C^2, sans composantes de REEB, sur les variétés $M^2 \times S^1$, où M^2 est une variété orientable, fermée, de dimension deux [13]. Le théorème 5 de M. HERMAN, que j'ai cité, montre qu'il existe des feuilletages de T^3 par plans, de classe $C^k, k \geq 4$, qui ne sont pas C^{k-1}-conjugués aux feuilletages linéaires.

En 1971, P. SCHWEITZER a construit un champ de vecteurs sur la sphère S^3, de classe C^1, sans orbites compactes, donnant ainsi un contre-exemple à la conjecture de SEIFERT (voir mon séminaire BOURBAKI, juin 1973). L'outil de base dans sa construction est le champ de vecteurs de DENJOY sur le tore T^2, de classe C^1, sans orbites compactes et non linéaires. Le théorème de DENJOY, qui dit qu'un tel champ de classe C^2 n'existe pas, montre que la construction de SCHWEITZER ne peut pas se faire de la même façon en classe C^2. C'est une question ouverte de savoir si un champ de classe C^2 sur S^3 admet une orbite compacte.

J'espère que cette petite lettre vous montre l'importance d'un travail "de côté" de DENJOY.

Harold ROSENBERG

-[1]- V.I. ARNOLD : Small denominators I, Translations A.M.S. 2° serie, V 46, p. 213-284

-[2]- P. BOHL : Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen variabeln periodische Differentialgleichung erster Ordnung, Acta Math. 40,p.321-336(1916)

-[3]- G. CHATELET and ROSENBERG : Manifolds which admit R^n actions, Publications de I.H.E.S. n° 43, p. 245 - 260

-[4]- A. DENJOY : Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. Maths. Pures . Appl. 11 (1932) p. 333- 375

-[5]- R. MOUSSU : Thèse, Orsay, 1971

-[6]- H. POINCARÉ : Sur les courbes définies par les équations différentielles. Journal de Mathématiques pures et appliquées t. I, p. 167-244 (1885)

-[7]- H. ROSENBERG : Foliations by planes, Topology 6(1967) p. 131-138

-[8]- H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE : Topological equivalence of Reeb foliations, topology 9 (1970) , 231-242

-[9]- R. SACKSTEDER: Foliations and pseudo-groups, Amer. J. Math. 87 (1965) p. 79-102

-[10]- A. SCHWARTZ : A generalisation of the Poincaré-Bendixon theorem to closed two dimensional manifolds, Amer. J. Math. 85 (1963) p. 453-458

-[11]- P. SCHWEITZER : Counterexamples to the Seifert conjecture, Annals of Math. (1974) p. 386-400

-[12]- CL. SIEGEL : Note on differential equations on the torus, Annals of Maths. 46 (1945) 423-428

-[13]- W. THURSTON : Thèse, Berkeley , 1972.

*

* *

Je viens de prendre connaissance de la très intéressante lettre de Harold ROSENBERG. Je crois qu'il n'est pas tout à fait exact de dire que DENJOY considérait comme un "à côté" son mémoire de 1932 où il étudie les solutions d'une équation différentielle sur le tore. En effet, dans la Notice qu'il a écrite sur ses travaux, DENJOY le classe au quatrième rang de son oeuvre, par ordre d'importance décroissante, c'est-à-dire immédiatement après la totalisation, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique et le critère de quasi-analyticité.

Par ailleurs, il est intéressant de constater le jugement qu'HADAMARD il y a vingt ans, portait sur l'oeuvre de DENJOY : lors de la cérémonie du jubilé scientifique d'Arnaud DENJOY, le 15 juin 1955, Jacques HADAMARD, alors âgé de 89 ans, prononçait une très brève allocution dans laquelle il parlait uniquement du mémoire sur les équations différentielles. Il disait notamment : "Je veux remplir un devoir scientifique en évoquant, pour y associer votre oeuvre, l'auguste mémoire de POINCARÉ..... La recherche mathématique dans ce qu'elle a de plus élevé s'est souvent consacrée aux grands problèmes posés par celui qui fut notre Maître à tous. Mais parmi ceux qui s'y sont adonnés, aucun depuis un demi-siècle n'occupe un rang plus éminent que le savant que nous fêtons aujourd'hui, car il n'a pas craint de s'attaquer à l'un des problèmes que POINCARÉ avait eu nécessairement à se poser, dont la solution manquait à l'un des plus beaux chapitres, qu'il avait vainement cherché à résoudre, que d'autres, et des plus grands, nous le savons, avaient vainement cherchés après lui". Et HADAMARD cite alors les rechreches de POINCARÉ sur les courbes définies par des équations différentielles, et en particulier dans le cas où les courbes sont tracées sur le tore ; POINCARÉ pensait que, lorsqu'aucune trajectoire n'est compacte, on ne pouvait exclure a priori l'éventualité dans laquelle les points de rencontre d'une trajectoire avec un cercle méridien ne seraient pas partout denses sur ce cercle ; mais il n'avait pu trouver aucun exemple d'une telle circonstance. A cela il y avait une bonne raison, car une telle éventualité est exclue sous les hypothèses d'analyticité faites par POINCARÉ ; DENJOY a en effet montré, comme le dit ROSENBERG, que si les données sont de classe C^2 le cas anormal prévu par POINCARÉ ne peut se produire. En revanche il peut avoir lieu si les données sont de classe C^1. DENJOY montre même que si les trajectoires sont seulement supposées continues, alors l'ensemble des points de rencontre d'une trajectoire avec un cercle méridien peut avoir pour adhérence un ensemble de Cantor arbitrairement donné sur ce cercle.

Henri CARTAN

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PÉRIODIQUES (*)

Arnaud Denjoy, Paris

I. Soit l'équation

$$dy/dx = A(x, y)$$

la fonction A possédant en x et en y séparément la période 1. Le point (x, y) peut se représenter, avec tous ses congruents $(x+p, y+q)$ (p, q entiers) par un même point d'un tore de révolution non rencontré par son axe et où, par exemple, x désignera la longitude, y la latitude, les angles étant mesurés par les arcs de la circonférence de longueur 1.

On suppose la fonction A telle que, par tout point du tore il passe une trajectoire et une seule intégrant l'équation. Si aucune de ces trajectoires n'est un cycle, il existe un nombre irrationnel α tel que, l'intégrale passant par le point (x_σ, y_0) soit

$$y = f(x_0, y_0, x), \text{ avec } y_0 = f(x_0, y_0, x_0); \text{ et}$$

$$y - y_0 = \alpha(x - x_0) + h(x_0, y_0, x),$$

a fonction h étant bornée.

Si l'on suppose que chaque trajectoire est partout dense sur le tore (le cas exceptionnel envisagé par Poincaré se trouvant exclu), la fonction $h(x_0, y_0, x)$ est *presque périodique en* x, comme M. Z. Opial l'a signalé le premier[1]. On peut préciser ce résultat ainsi[2]:

Il existe une fonction $\eta(u)$, qui est un module de continuité d'une fonction des deux variables x et y, $\eta(u)$ tendant vers zéro avec u positif, de façon que P_m/Q_m étant la m^{eme} réduite du développement de α en fraction continue, tout intervalle $a < t < a + Q_m$ contient une presque période entière p, donnant

$$|h(x_0, y_0, x+p) - h(x_0, y_0, x)| < \eta(1/Q_m).$$

quels que soient x_0, y_0, x, dont l'entier p est indépendant.

---

[1] *Comptes Rendus*, 1960, t. 250, p. 3565.
[2] *ibid*, 1960, t. 251, p. 175.

(*) Extrait des "Actes du Symposium International R.J.Bošković 1961".

II. Dans une suite de Notes parues aux *Comptes Rendus* de l'Académie des sciences de Paris et réunies en un fascicule sous le titre „Les équations différentielles périodiques", j'ai étudié, particulièrement pour le cas de $r=3$, paraissant d'ailleurs présenter toutes les circonstances possibles du cas général, le problème suivant:

Soi $X(x_1 \ldots, x_{r-1})$ et $F(z, X)$ deux vecteurs à $r-1$ composantes. On suppose F doué de la période 1 en chacune des r variables z, x_i. On considère le système de $r-1$ équations différentielles

$$dX/dz = F(z, X). \tag{2}$$

On admet que par tout point $M_0(z_0, X_0)$ il passe une intégrale et une seule $X=f(M_0, z)$, avec $X_0=f(M_0, z_0)$.

Le point $M(z, X)$ est figuré sur le tore S^r à r dimensions dans l'espace U^{r+1} à $r+1$ dimensions. $C^{r-1}(z_0)$ désignera le tore à $r-1$ dimensions, section de S^r par le plan $z=z_0$. Pour $r=3$, $C^2(z_0)$ est un tore à 2 dimensions. Nous notons alors X comme $X(x, y) \ldots$, x désignant la longitude et y la latitude sur les tores $C^2(z_0)$.

La question de l'ergodicité est celle-ci: Le vecteur $(X-X_0)/(z-z_0)$ tend-il vers une limite $(v, 1)$ pour $z-z_0+\infty$ ou $-\infty$, et cette limite est-elle indépendante de M_0, comme dans le cas de $r=2$?

Il n'en est rien. Car, déjà pour $r=3$, il peut y avoir parmi les trajectoires une infinité de cycles, de périodes respectives p, q, n en x, y, z, les directions $(p/n,\ q/n,\ 1)$ distinctes étant en infinité.

Mais, en l'absence de cycles, il est possible (comme dans le cas de $r=2$ d'ailleurs) que les circonstances soient toutes différentes, et que peut-être l'ergodicité, aussi complète que ci-dessus, est-elle la règle.

Posons $X_n=f(M_0, z_0+n)$ (n entier), $M_n=(z_0, X_n)$.

Désignons par $T_+(M_0)$, $T_-(M_0)$ les parties de la trajectoire $T(M_0)$ passant par M_0 et correspondant respectivement à $z>z_0$ et à $z<z_0$; par $\Omega_+(M_0)$, $\Omega_-(M_0)$ les ensembles de points M_n où $T_+(M_0)$ $T_-(M_0)$, coupent $C^{r-1}(z_0)$, par $V_+^r(M_0)$, $V_-^r(M_0)$ les ensembles d'accumulation des arcs $M_n M_{n+1}$ de $T_+(M_0)$, de $T_-(M_0)$ respectivement, par $J_+^{r-1}(M_0)$, $J_-^{r-1}(M)$ ceux de $\Omega_+(M_0)$, $\Omega_-(M_0)$; Les V^r sont des continus, les J^{r-1} leurs sections par le tore $C^{r-1}(z_0)$.

Si M_0' est sur $V_+^r(M_0)$ ou sur $V_-^r(M_0)$, $T(M_0')$ est en totalité sur ce même continu.

Nous disons qu'un continu K de S^r est un *écheveau* de trajectoires pour l'équation (2) si, quelque soit M_0' sur K, les deux demi-trajectoires $T_+(M_0')$ et $T_-(M_0')$ sont situées et partout denses sur K.

Quelque soit M_0, si l'équation (2) n'admet pas de trajectoire cyclique, tout continu $V_+^r(M_0)$ et $V_-^r(M_0)$ renferme un écheveau.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Pour $K^1=V_+^r(M_0)$ il existe sur K^1 deux points M_0^1, I^1 tels que I^1 soit à distance positive $2d_1$ de $V_+^r(M^1)$ ou de $V_-^r(M^1)$. Pour tous les couples possibles (I^1, M^1), cette distance possède un maximum r_1. Nous supposons $2d_1>r_1/2$. $K^2=V_+^r(M^1)$ ou $V_-^r(M^1)$ n'est pas un écheveau. On répète le raisonnement sans arrêt.

Les K^n décroissent ils ont en commun un continu K. Les sphères ouvertes $c^{r+1}(I^n, d_n)$ de centre I^n et de rayon d_n dans U^{r+1} sont disjointes. Donc d_n, et aussi r_n tendant vers zéro. K est un écheveau.

K est coupé par $C^{r-1}(z_0)$ suivant un ensemble parfait $P^{r-1}(z_0)$.

Diverses questions se posent que je n'ai pas élucidées. Notons, comme je l'ai signalé, que deux écheveaux sont à distance positive l'un de l'autre ou identiques. Si S^r n'est pas un écheveau, tout écheveau est non dense sur S^3. Les P^{r-1} sont non denses sur leurs C^{r-1}.

1⁰ z_0 et X_0 étant quelconques, le passage de M_0 à M_1 opérère une transformation topologique de S^r et de chaque $C^{r-1}(z_0)$ en eux mêmes. Cette transformation et toutes ses itérées sont privées de point double. Tout écheveau Q, toute section $P^{r-1}(z_0)$ sont invariants par la substitution $M_1(M_0)$. La topologie des P^{r-1} doit être particulière.

Est-il possible qu'il existe deux écheveaux distincts? Chacun serait dans une région invariante de l'autre, ou dans la réunion de p régions se transformant cycliquement. Cela est-il possible?

2⁰ Un $V^r_+(M_0)$, un $V^r_-(M_0)$ ne sont-ils pas des écheveaux? S'il n'en est pas ainsi, dans l'un d'eux K, il existe deux points M_0' et I tels que I soit à distance positive $2d$ de $T(M_0')$. Si une suite M_{n_p} remplit ces conditions: $(a)\, M_{n_p}$, tend vers M_0' quand p croît, $(b)\, M_{n_p}$ est tel que si $n_p < n < n_p'$, M_n est éloigné de M_0' plus que M_{n_p} et de I de plus de d; $(c)\, M_{n_p}$, est dans $c^{r+1}(I, d)$, il s'en suit que $k_p = n_p' - n_p$ est infini avec p.

Si l'hypothèse faite sur K est impossible, M_0' étant à distance nulle de $T^r_+(I)$, I est à distance nulle de $T_-(M_0')$; K est un écheveau.

3⁰ $V^r_+(M_0)$, $V^r_-(M_0)$ sont indépendants de M_0 et par suite coïncident puisqu'il en est ainsi quand M_0 est sur un écheveau? Ce dernier V^r est unique. Le rapport $(X - X_0)/(z - z_0)$ tend vers un vecteur $\overrightarrow{(v, 1)}$, indépendamment de M_0.

4⁰ Soit Σ^r un tore omnicirculaire, comme S^r, à r dimensions dans U^{r+1}. Le point $\mu(z, Y)$ de Σ^r, où Y est le vecteur $(y_1, \ldots, y_{r-1})$ correspondra à $M(z, X)$ (la coordonnée z est la même), de façon que: μ est fonction univoque et continue de M; à deux points distincts μ, μ' de Σ^r correspondent sur S^r respectivement des points ou ensembles (fermés) disjoints. Enfin, si $\mu_0(z_0, X_0)$ correspond à $M_0(z_0, x_0)$, la trajectoire $T(M_0)$ sur S^r aura pour homologue sur Σ^r, la quasi hélice $\mu_0 + \overrightarrow{(v, 1)}\,(z - z_0)$.

L'écheveau de S^r aurait pour homologue la totalité de Σ^r. Il y aurait lieu de trouver une condition suffisante pour que l'écheveau coïncidât avec la totalité de S^r.

Ainsi serait-il constaté qu'en l'absence d'intégrale cyclique, les circonstances remarquables découvertes par Poincaré dans le cas élémentaire de l'équation (1) se retrouvent, avec les adaptations naturelles, dans le cas le plus général de l'équation (2).

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Le phénomène ergodique et les trajectoires sur le tore.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY.

Conditions élémentaires de réalisation du phénomène ergodique dans les intégrales des équations du premier ordre. Cas de l'équation périodique par rapport à la fonction et à la variable. Étude de l'écart entre l'intégrale et la fonction linéaire équivalente comme infiniment grand.

1. Le phénomène ergodique se manifeste dans les intégrales ou trajectoires de l'équation

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta) \tag{1}$$

sous des conditions d'autant plus intéressantes pour la Mécanique analytique qu'elles sont plus générales et avec des conséquences mieux établies.

1° Nous supposons la fonction $A(\varphi, \theta)$ *définie et continue* dans tout le plan P des (φ, θ); en outre, telle que *par tout point* (φ_0, θ_0) de P il passe *une trajectoire et une seule* $T'(\varphi_0, \theta_0)$ d'équation

$$\theta = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi), \tag{2}$$

φ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Cette hypothèse sera vérifiée si $A(\varphi, \theta)$ satisfait dans tout champ fini à la condition de Lipschitz. Mais on pourrait concevoir que celle-ci fût seulement justifiée autour des points étrangers à un ensemble fermé non dense de trajectoires, dont aucune ne bifurquerait pour des raisons spéciales (AM, II, p. 900) (1).

Par hypothèse : $\theta_0 = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0)$. Si $\theta'_0 = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi'_0)$, l'intégrale (2) est identique à $\theta = f(\varphi'_0, \theta'_0, \varphi)$; ainsi $\theta_0 = f(\varphi, \theta, \varphi_0)$.

2° Nous supposons que, φ_0 et θ_0 étant quelconques, $|\theta - \theta_0|$ *est borné avec* $|\varphi - \varphi_0|$; donc $|\theta - \theta_0| \leqq \mu(s)$ fini, si $|\varphi - \varphi_0| \leqq s$. Pour $|\varphi - \varphi_0| = s$, soient $u(s)$ et $v(s)$ le minimum et le maximum de $\theta - \theta_0$, puis $w(s) = v(s) - u(s)$ l'oscillation de $\theta - \theta_0$.

n étant un entier quelconque, posons $\varphi_n = \varphi_0 + ns$, $\theta_n = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_n)$; $\theta_n = f(\varphi_m, \theta_m, \varphi_n)$, quel que soit m, particulièrement pour $m = n \pm 1$. Donc

$$\frac{u(s)}{s} \leqq \frac{\theta_n - \theta_0}{\varphi_n - \varphi_n} \leqq \frac{v(s)}{s}. \tag{3}$$

Si $\varphi = \varphi_n + \sigma$, avec $0 < \sigma < s$: $|\theta - \theta_n| \leqq \mu(s)$.

Donc, $(\theta - \theta_0)/(\varphi - \varphi_0)$ a ses limites d'indétermination pour $|\varphi - \varphi_0|$ infini, situées sur le segment $[u(s)/s, v(s)/s]$, quel que soit s. Dès lors :

S'il existe une suite de nombres s pour lesquels $w(s)/s$ tend vers zéro, $(\theta - \theta_0)/(\varphi - \varphi_0)$ tend vers une limite α quand $|\varphi - \varphi_0|$ croît indéfiniment. Et, *quel que soit s : $u(s)/s \leqq \alpha \leqq v(s)/s$.*

En outre, les bornes $u(s)$, $v(s)$ pouvant, pour s donné quelconque, être indéfiniment approchées, *$u(s)/s$ et $v(s)/s$ tendent vers α et $w(s)/s$ tend vers zéro,* quelle que soit la façon dont s croît indéfiniment.

2. Passons au cas de $A(\varphi, \theta)$ *doublement périodique,* les hypothèses sur l'unicité de l'intégrale passant par un point quelconque (φ_0, θ_0) et sur la continuité de A étant conservées. A est borné, $|A(\varphi, \theta)| < K$, indépendamment de φ et de θ. On reprendrait les notations de mes études antérieures (AM, II, p. 771-823 et NA, p. 575-585 avec *Observations*, p. *68-69*), en faisant les deux périodes égales à 2π. Pour alléger les notations nous les réduirons à l'unité. $A(\varphi + p, \theta + q) = A(\varphi, \theta)$, quels que soient φ, θ et les entiers p, q. La théorie générale s'applique, les entiers positifs formant la suite des valeurs de s (AM, II, p. 887). Nous conservons la représentation distincte des points $(\varphi + p, \theta + q)$, pour un même couple (φ, θ) dans le plan P, pour observer la variation de la fonction $\theta - \alpha\varphi$, $\theta = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi)$ étant une intégrale (2) quelconque.

Mais nous figurons en même temps tous les points congruents $(\varphi + p, \theta + q)$ par un point unique M du tore circulaire S où φ désigne la longitude, θ la latitude, les angles étant mesurés par des arcs de la circonférence de longueur (et non pas de rayon) égale à 1. Les trajectoires $T(\varphi_0 + p, \theta_0 + q)$ d'équation $\theta = f(\varphi_0 + p, \theta_0 + q, \varphi)$ sont identiques sur S. Sur P les images $T'(\varphi_0 + p, \theta_0 + q)$ se déduisent de $T'(\varphi_0, \theta_0)$ par la translation $(\varphi, \varphi + p)$, $(\theta, \theta + q)$. Elles ne peuvent pas avoir de point commun sans coïncider. Mais alors $\alpha = q/p$ est rationnel. Ce cas n'offre aucune difficulté. Nous l'écartons et *supposons α irrationnel.* Les $T'(\varphi_0 + p, \theta_0 + q)$ sont toutes distinctes. Rappelons des résultats connus :

1° φ_0 étant fixe et θ_0 variable, $\gamma'_p(\varphi_0)$ et $\delta'_p(\varphi_0)$ désignant des minimums atteints :

$$-\gamma'_p(\varphi_0) \leqq f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0 + p) - \theta_0 - p\alpha \leqq \delta'_p(\varphi_0), \tag{4}$$

avec

$$0 \leqq \gamma'_p(\varphi_0), \qquad 0 \leqq \delta'_p(\varphi_0), \qquad \gamma'_p(\varphi_0) + \delta'_p(\varphi_0) < 1.$$

On en déduit en particulier l'existence d'au moins un nombre θ_0 tel que $f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0 + p) - \theta_0 = p\alpha$, (d'où résulte la présence de cycles si α est rationnel). Évidemment $\gamma'_p(\varphi_0)$ et $\delta'_p(\varphi_0)$ ont la période 1 en φ_0. D'autre part,

$$|f(\varphi_0, \theta_0, \varphi) - \theta_0 - \alpha(\varphi - \varphi_0)| < K + 1. \tag{5}$$

Appelons *hélice du tore* S une courbe d'équation $\theta-\theta_0=\beta(\varphi-\varphi_0)$, β indépendant de φ étant l'*inclinaison* de l'hélice : Toute trajectoire T sur S est une hélice d'inclinaison α, à un écart près borné en latitude.

2° Indépendamment de φ_0 et de θ_0, $f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0+p)-\theta_0$ et αp sont compris entre les mêmes entiers consécutifs k_p et k_p+1.

Soit $C(\varphi_0)$ le méridien de S de longitude φ_0 et $D(\varphi_0)$ la droite $\varphi=\varphi_0$ de P. Si $J(\varphi_0)$ est, sur $C(\varphi_0)$, l'ensemble d'accumulation des points (φ_0, θ_n) pour $\theta_n=f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0+n)$ $(n\pm\infty)$, $J(\varphi_0)$ est soit identique à $C(\varphi_0)$, soit, dans le cas singulier de Poincaré, parfait totalement discontinu. Dans le premier cas, les images $T'(\varphi_0+p, \theta_0+q)$ dans P d'une même trajectoire T de S, forment un ensemble partout dense dans P. Car elles coupent tout segment $\theta_0\leq\theta\leq\theta_0+1$ de $D(\varphi)$ en un ensemble partout dense. Dans le second cas, la réunion $\mathcal{J}$ des $J(\varphi_0)$ est non dense sur S, et son image totale $\mathcal{J}'$ est non dense dans P. $\mathcal{J}$ est formé de trajectoires dont chacune est partout dense sur $\mathcal{J}$. Si $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ est sur $\mathcal{J}$, l'ensemble des $T'(\varphi_0+p, \theta_0+q)$ est partout dense sur $\mathcal{J}'$. Si M_0 sur S est dans le complémentaire $I=S-\mathcal{J}$ de $\mathcal{J}$, chaque trajectoire $T'(\varphi_0+p, \theta_0+q)$ est isolée des autres.

3. Considérons un second tore Σ dont nous allons mettre en correspondance les points μ avec les points M de S, en vertu des conditions suivantes :

1° μ est *fonction continue* de M. En outre les deux points restent constamment dans les *méridiens de même longitude*. La longitude sur Σ sera donc notée φ; $\Gamma(\varphi)$ correspondra à $C(\varphi)$; t sera la latitude. Enfin, M *et* μ *partent* simultanément *du point* (o,o), sur S et sur Σ respectivement.

Nous représentons également Σ sur le plan Π des φ, t. La correspondance (M, μ) se précisera en celle des points de P et de Π; t est fonction $l(\varphi, \theta)$ de θ et θ est fonction $g(\varphi, t)$ de t, pour chaque valeur de φ.

Si (φ, θ) dans P et (φ, t) dans Π sont homologues, il en sera de même des points $(\varphi-p, \theta+q)$ et $(\varphi-p, t+q)$. Cette condition, remplie d'elle-même si $\mathcal{J}\equiv S$, est nouvelle si $\mathcal{J}\not\equiv S$.

2° *La trajectoire* T(o, o) *de* S *et l'hélice* H(o, o), *soit* $t=\alpha\varphi$, *de* Σ *sont homologues*.

H (o, o) est partout dense sur Σ.

L'homologue sur Σ d'une trajectoire $T(\varphi_0, \theta_0)$ de S, si elle ne se confond pas avec H(o, o) elle-même, ne peut pas couper celle-ci. Ce sera donc une hélice $H(\varphi_0, \theta_0)$. Si $\omega=f(\varphi_0, \theta_0, o)$, $H(\varphi_0, \theta_0)$ est aussi H(o, ω). Si (o, ω) sur P et (o, τ) sur Π sont homologues [$\tau=l(o, \omega)$ et $\omega=g(o, \tau)$], $H(\varphi, \theta)$ est $t=\tau+\alpha\varphi$, pour $\theta=f(o, \omega, \varphi)$, ou $\omega=f(\varphi, \theta, o)$.

Sur Π les images $H'(p, q)$ de H(o, o) sont les droites $t-q=\alpha(\varphi+p)$. Leur ensemble est aussi partout dense dans Π. Il en sera de même de l'ensemble des images $H'(\varphi_0-p, \theta_0+q)$ de toute trajectoire $T(\varphi_0, \theta_0)$ de S.

L'ordre mutuel des points de rencontre successifs, d'une part de T(o, o) avec un méridien quelconque $C(\varphi_0)$ et d'autre part de H(o, o) avec $\Gamma(\varphi_0)$

sont les mêmes (Poincaré). Dès lors $t = l(\varphi_0, \theta)$ est déterminé par la continuité de μ en M.

Si $\mathcal{J} \equiv S$, la trajectoire T(o, o) est elle aussi partout dense sur S; $g(\varphi, t)$ est donc déterminé et continu en t. Si $\mathcal{J} \not\equiv S$, et si $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ est dans I, donc sur un arc $i_n(\varphi_0)$ contigu à $J(\varphi_0)$, $T(\varphi_0, \theta_0)$ est non dense sur S. A la totalité de l'arc-segment $i_n(\varphi_0)$ il correspond sur $\Gamma(\varphi_0)$ un point unique $\lambda_n(\varphi_0)[\varphi_0, \chi_n(\varphi_0)]$. Les points $\lambda_n(\varphi_0)$ forment sur $\Gamma(\varphi_0)$ un ensemble partout dense $\eta(\varphi_0)$.

3 *b*. φ_0 étant déterminé, θ_0 variable et $\theta_i = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0 + i) = f(\varphi_0, \theta_{i-1}, \varphi_0 + 1)$, posons $\theta_1 - \theta_0 = k(\varphi_0, \theta_0)$; $k(\varphi_0, \theta_0)$ est continu et de période 1 en θ_0; θ_1 et θ_0 croissent solidairement d'une unité; $k(\varphi_0, \theta_0)$ a donc sa variation totale inférieure à 2, sur tout intervalle égal à 1. Remplaçons θ_0 par $g(\varphi_0, t_0)$. Dès lors $\theta_1 - \theta_0 = j(\varphi_0, t_0)$; j ayant en t_0 la période 1 est, comme g, indéterminé et discontinu en t_0 sur l'ensemble $\eta'(\varphi_0)$ de la droite $\Delta(\varphi_0)$ $(\varphi = \varphi_0)$ correspondant à l'ensemble $\eta(\varphi_0)$ de $\Gamma(\varphi_0)$; n étant entier positif, $\theta_n - \theta_0 = \sum_0^{n-1} j(\varphi_0, t_i)$, si $\theta_i = g(\varphi_0, t_i)$; $t_i = t_0 + \alpha i$. La dernière somme vaut donc (NA, II, p. 584) $n\int_0^1 j(\varphi_0, t)\,dt + 2\varepsilon(\varepsilon^2 < 1)$. On en conclut $\int_0^1 j(\varphi_0, t)\,dt = \alpha$. Et, si

$$\theta_p - \theta_0 = pk_p(\varphi_0, \theta_0) = pj_p(\varphi_0, t_0),$$

encore $\int_0^1 j_p(\varphi_0, t)\,dt = \alpha$, quels que soient φ_0 et p.

Posons $\theta_p - \theta_0 - p\alpha = \nu_p(\varphi_0, t_0)$; ν^+ désignant ν si $\nu \geqq 0$ et o si $\nu < 0$; ν^- étant ν si $\nu \leqq 0$ et o si $\nu > 0$:

$$\int_0^1 \nu^+(\varphi_0, t)\,dt = -\int_0^1 \nu^-(\varphi_0, t)\,dt = \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 |\theta_p - \theta_0 - p\alpha|\,dt. \tag{6}$$

Si $\omega = f(\varphi_0, \theta, 0)$, d'où résulte $\theta = f(0, \omega, \varphi_0)$, et si $\omega = g(0, \tau)$, $t = l(\varphi_0, \theta) = \tau + \alpha\varphi_0$. Dans les intégrales on peut remplacer t par $\tau + \alpha\varphi_0$ et dt par $d\tau$. Tirons les conséquences de ces faits.

4 *a*. Supposons que, *pour le couple associé particulier* φ_0, p, *l'un des deux nombres* $\gamma'_p(\varphi_0)$, $\delta'_p(\varphi_0)$ *soit nul*. Il s'ensuit que $\int_0^1 |\theta_p - \theta_0 - p\alpha|\,d\tau = 0$. Donc en tout point de continuité de θ_0 en τ, $\theta_p - \theta_0 = p\alpha$. Même dans le cas où $\mathcal{J}$ est non dense sur S, on peut remplir la condition de continuité avec tout point (φ_0, θ_0) de seconde espèce de $J(\varphi_0)$. Tous les points (φ_0, θ_n) sont alors eux aussi de seconde espèce sur $J(\varphi_0)$. Aussi, en donnant à θ_0 la valeur θ_{mp}, voit-on que $\theta_{(m+1)p} - \theta_{mp} = p\alpha$, en sorte que $\theta_{mp} = \theta_0 + mp\alpha$, quel que soit m entier. Les points $M_{mp}(\varphi_0, \theta_0 + mp\alpha)$ sont partout denses sur $C(\varphi_0)$. Soit n non

multiple de p. Sur $C(\varphi_0)$ le point $M_n(\varphi_0, \theta_n)$ est placé par rapport à tous les M_{mp} comme l'est sur $\Gamma(o)$ le point $(o, n\alpha)$ par rapport à l'ensemble des $(o, mp\alpha)$, pour toutes les valeurs de mp (Poincaré). Nécessairement $\theta_n = \theta_0 + n\alpha$ quel que soit n (et θ_0). Évidemment $\mathcal{T} \equiv S$.

Ainsi, du seul fait que l'un des minimums $\gamma'_p(\varphi_0)$, $\delta'_p(\varphi_0)$ est nul pour une valeur particulière de p, *il s'ensuit* $\gamma'_p(\varphi_0) = \delta'_p(\varphi_0) = o$, *pour* tout entier q.

On réalise ainsi ce cas, sans que, pour aucun nombre $\varphi'_0 \neq \varphi_0 + q$,

$$f(\varphi'_0, \theta_0, \varphi'_0 + 1) - \theta_0 = \alpha$$

indépendamment de θ_0. Nous prenons $\varphi_0 = o$ et nous définissons le système des trajectoires par l'ensemble de leurs parcours dans le champ $(o \leqq \theta_0 \leqq 1)$, et $(o \leqq \varphi \leqq 1)$. Soit d'abord $\theta' = \theta'(\varphi, \theta_0) = \theta_0 + \alpha \sin^2(\pi/2)\varphi$; et $\theta'_0 = \theta'(o, \theta_0) = \theta_0$, $\theta'_1 = \theta'(1, \theta_0) = \theta_0 + \alpha$, quel que soit θ_0. Chacune des courbes $\theta'(\varphi, \theta_0)$ est orthogonale en ses deux extrémités au méridien $C(o) = C(1)$ en sorte que chacun des arcs de trajectoire entre $\varphi = o$ et $\varphi = 1$ trouve en ses deux extrémités à se raccorder, avec continuité de la tangente à l'arc partant de cette même extrémité ou y aboutissant (comparez avec AM, II, p. 897-900); $d\theta'/d\varphi = (\pi/2)\alpha\,|\sin\pi\varphi|$, indépendamment de θ_0, est l'équation (1) correspondante. Mais,

$$\theta'(\varphi, \theta_0) - \theta'(\varphi, \eta_0) = \theta_0 - \eta_0$$

quel que soit φ, d'abord sur $o \leqq \varphi \leqq 1$, puis pour φ quelconque. La condition

$$\theta'(\varphi + 1, \theta_0) - \theta'(\varphi, \theta_0) = \alpha$$

est vérifiée par θ' quel que soit φ. Pour troubler cette constance, si

$$u_0 = \alpha \sin^2(\pi/2)\varphi, = \theta'(\varphi, o) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon > o,$$

nous adoptons $\theta = \theta(\varphi, \theta_0) = \theta'(\varphi, \theta_0) + \varepsilon\alpha \sin^2\pi(\theta' - u_0)\sin^2\pi\varphi$. Dès que $\varepsilon < 1/2$, θ croît avec θ_0, sur tout méridien $C(\varphi)$. Et il est faux que, sur le méridien $C(\varphi)$, si $\varphi \neq n$ entier, $f(\varphi, \theta_0, \varphi + 1) - \theta_0 = \alpha$ indépendamment de θ_0.

Ce premier cas est très accidentel. Si par un point quelconque $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ du méridien $C(\varphi_0)$ présentant cette particularité nous faisons passer l'hélice $K(\varphi_0, \theta_0)$ d'inclinaison α, soit $\theta - \theta_0 = \alpha(\varphi - \varphi_0)$, et si deux points M et B de S décrivent, le premier la trajectoire $T(M_0)$, le second l'hélice K de façon à se trouver toujours sur le même méridien tournant $C(\varphi)$ de S, les deux mobiles se rencontrent à chaque tour sur $C(\varphi_0)$.

Les circonstances suivantes sont générales.

4 *b*. Soit k_n l'entier défini par $k_n < \alpha n < k_n + 1$. Si $\theta_n = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0 + n)$, outre la relation $-\gamma'_n(\varphi_0) \leqq \theta_n - \theta_0 - n\alpha \leqq \delta'_n(\varphi_0)$, indépendante de θ_0 mais non pas de φ_0, les inégalités $k_n < \theta_n - \theta_0 - n\alpha < k_n + 1$ sont vérifiées indépendamment à la fois de θ_0 et de φ_0.

Soit P_m/Q_m *une réduite du développement de* α *en fraction continue normale.* $Q_m\alpha = P_m + \varepsilon_m/Q_{m+1}$, avec $\varepsilon_m^2 < 1$ et $(-1)^m\varepsilon_m > o$. *Prenons* $n = Q_m$. Alors,

$k_n = P_m$ si m est pair, $k_n = P_m - 1$ pour m impair. Dans le premier cas

$$-\frac{1}{n} < f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0 + n) - \theta_0 - n\alpha = \nu_n(\varphi_0\, \theta_0) < 1.$$

Dans le second cas

$$-1 < \nu_n(\varphi_0, \theta_0) < 1/n.$$

Convenons de dire qu'une fonction $s(t)$ possède la *pseudo-semi périodicité inférieure* (ou supérieure) s'il existe une suite de nombres associés positifs λ_m, ε_m, le premier croissant indéfiniment, le second tendant vers zéro, tels que $s(t+\lambda_m) - s(t) > -\varepsilon_m$ (ou $< \varepsilon_m$), indépendamment de t.

Avec $\omega = f(\varphi_0, \theta_0, 0)$, $\theta_0 = f(0, \omega, \varphi_0)$, soit

$$h(\varphi, \omega) = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi) - \alpha\varphi = f(0, \omega; \varphi) - \alpha\varphi.$$

Donc, $h(0, \omega) = \omega$ et $|h(\varphi, \omega)| < K + 1$ indépendamment de φ et de ω. Avec les suites $\lambda_m = Q_m$, $\varepsilon_m = 1/\lambda_{m+1}$ la fonction $h(\varphi, \omega)$ possède en φ les deux pseudo-semi-périodicités, inférieure pour m pair, supérieure pour m impair.

Si la famille de fonctions de t, savoir $s(t, u)$, où le paramètre u décrit un intervalle (u_0, u_1), vérifie, indépendamment de t la condition

$$\int_{u_0}^{u_1} |s(t + \lambda'_m, u) - s(t, u)|\, du < \varepsilon'_m,$$

$1/\lambda'_m$ et ε'_m positifs tendant vers 0 avec $1/m$, nous dirons que *la famille* $s(t, u)$ est par rapport à t *pseudo-périodique en mesure* (euclidienne de u) sur l'intervalle $u_0 < u < u_1$.

Pour $n = Q_m$, et d'après $\omega = g(0, \tau)$, $\theta = g(\varphi_0, t)$ $(t = \tau + \alpha\varphi_0)$

$$\int_0^1 |h(\varphi + n, \omega) - h(\varphi, \omega)|\, d\tau = \int_0^1 |f(0, \omega, \varphi + n) - f(0, \omega, \varphi) - n\alpha|\, d\tau$$
$$= \int_0^1 |f(\varphi, \theta, \varphi + n) - \theta - \alpha n|\, dt < \frac{2}{n}$$

la famille $h(\varphi, \omega)$ possède en φ la pseudo-périodicité en mesure (euclidienne de τ et non pas de ω; ou de t, mais non pas de θ).

Si l'on pouvait démontrer que, dans le cas d'une variation totale finie V de $\log d\theta_1/d\theta_0$, ou grâce à une hypothèse plus restrictive, ω est non seulement absolument continu en τ, donc $\omega = \int_0^\tau (d\omega/d\tau)\, d\tau$, mais encore $(d\omega/d\tau)^2$ est sommable, des conséquences très importantes en résulteraient. En effet, les correspondances (ω, τ), entre $C(0)$ et $\Gamma(0)$, (θ, t) entre $C(\varphi)$ et $\Gamma(\varphi)$, sont fixées, pour toute variation de $-\infty$ à $+\infty$ des nombres ω, τ, θ, t, par leur détermination dans les champs associés $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $0 \leqq \omega \leqq 1$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, $f(0, 0, \varphi) \leqq \theta \leqq f(0, 0, \varphi) + 1$ et $\alpha\varphi \leqq t \leqq \alpha(\varphi + 1)$. Car si l'un des nombres ω, τ, θ, t, qui croissent tous ensemble, s'augmente de 1, il en est de même des trois autres; $\omega-\tau$, $\theta-\omega$, $\theta-t$ ont la période 1. D'autre part $\log \partial\theta/\partial\omega = \int_0^{\varphi} \partial A(\varphi, \theta)/\partial\theta \, d\varphi$, où θ est remplacé par $f(0, \omega, \varphi)$ (AM, p. 907-908), la dérivée $\partial A/\partial\theta$ étant supposée continue. Et $t = \tau + \alpha\varphi$. Par hypothèse $\sigma^2 = \int_0^1 (d\omega/d\tau)^2 d\tau$ est fini. Donc si μ est le maximum de $|\partial A/\partial\theta|$, il s'ensuit $d\theta/dt < \mu . d\omega/d\tau$. Soit $n = Q_m$, par exemple m impair, et

$$\xi(\theta) = \nu_n^+(\varphi, \theta) = [f(0, \omega, \varphi + n) - f(0, \omega, \varphi - n\alpha]^+ = [\theta_n - \theta_0 - n\alpha]^+.$$

Nous avons trouvé : $D = \int_0^1 \xi(\theta)\, dt < 1/n$. Soit $D' = \int_0^1 \xi(\theta)\, d\theta = \int_0^1 \xi(\theta)(d\theta/dt) dt$. D'après l'inégalité de Schwarz, $D'^2 < \int_0^1 (d\theta/dt)^2 dt \int_0^1 \xi^2(\theta)\, dt$. D'après $0 \leqq \xi(\theta) < 1$, donc $\xi^2(\theta) < \xi(\theta)$, on trouve $D' < \mu\sigma\sqrt{D} < \mu\sigma/\sqrt{n}$. Or $|\log d\theta_n/d\theta_0| < V$, (NA, II, p. 585).

On en conclut l'impossibilité que $\nu_n'(\varphi)$ surpasse h si $h^2 > \mu\sigma(e^V - 1)/\sqrt{n}$.

Dès lors, *la différence* $h(\varphi, \omega_0) = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi) - \alpha\varphi = f(0, \omega_0, \varphi) - \alpha\varphi$, *excès de l'intégrale générale sur* $\alpha\varphi$, *est uniformément pseudo-périodique en* φ, en ce sens que, pour la suite $\lambda_m = Q_m$, $\varepsilon'_m \sim \lambda_m^{-1/4}$, l'inégalité $|h(\varphi + \lambda_m, \omega_0) - h(\varphi, \omega_0)| < \varepsilon'_m$ est vérifiée indépendamment de φ et de ω_0.

(*) Séance du 6 octobre 1958.

(1) AM désigne ici les deux volumes *Articles et Mémoires* et NA : *Un demi-siècle de Notes aux Académies*, recueils reproduisant mes travaux dispersés.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 247, p. 1072-1078, séance du 13 octobre 1958.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Les systèmes d'équations différentielles périodiques*. Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**.

Après un bref complément ajouté à la Note précédente sur le même sujet ($r=2$), l'auteur aborde l'étude du système de $r-1$ équations à coefficients périodiques par rapport aux $r-1$ fonctions inconnues et à la variable indépendante. Généralités. Premier examen du cas $r=3$.

I. J'ajoute ces quelques lignes en conclusion à ma dernière Note ([1]). Il faut traduire en conditions suffisantes remplies par $d\theta_1/d\theta_0$, puis par la fonction $A(\varphi, \theta)$, d'après $\log d\theta/d\theta_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} [\partial A(\varphi, \theta)/\partial\theta]\, d\varphi$ où $\theta = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi)$, les hypothèses relatives à $\omega(\tau)$ pour $\varphi = 0$, et solidairement à $d\theta/dt$ (pour φ_0 quelconque) à savoir : d'abord l'absolue continuité de $\omega(\tau)$ (transitivité forte de G. Birkhoff), puis l'existence pour $\omega(\tau)$ d'une dérivée à carré sommable, ou même de nombres de dérivés bornés. La continuité (exclusion du cas singulier de Poincaré) est assurée si V, variation totale de $\log d\theta_1/d\theta_0$ sur un intervalle $a < \theta_0 < a+1$ est finie. Il suffit pour cela que $V(\varphi)$, variation totale de $\partial A(\varphi, \theta)/\partial\theta$ en θ sur le même intervalle soit sommable, d'après $V \leq \int_0^{a+1} V(\varphi)\, d\varphi$. Enfin, problème capital, il faudrait déduire de $A(\varphi, \theta)$, sans intégrer l'équation, la valeur du coefficient de rotation α.

II. Le système de $r-1$ équations différentielles périodiques du premier ordre pour $r>2$ pose des problèmes difficiles. Je ne prétendrai nullement à les résoudre. J'énoncerai certaines d'entre eux, après avoir montré la complexité des cas possibles. Celle-ci ne doit pas cependant décourager l'effort des chercheurs. Car le sujet intéresse trop profondément la Mécanique analytique pour être négligé.

Soit $F(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{r-1})$ un vecteur à $r-1$ composantes, continu en les (φ, θ_m), admettant en chacune de ces r variables la période 1. Soient M^r et Θ^{r-1} les groupements respectifs de nombres (φ, θ_m) et (θ_m). On donne le système de $r-1$ équations :

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\Theta^{r-1}}{d\varphi} = F(M^r) = F(\varphi, \Theta^{r-1}).$$

On suppose que par tout point $M_0^r(\varphi_0, \Theta_0^{r-1})$ il passe une trajectoire $T(M_0^r)$ et une seule, $M^r = f(M_0^r, \varphi)$, avec $M_0^r = f(M_0^r, \varphi_0)$. Deux trajectoires ne peuvent avoir un point commun sans se confondre l'une avec l'autre sur tout leur parcours.

Deux représentations géométriques du système M^r sont à envisager.

D'une part, F prenant la même valeur pour tous les systèmes $(\varphi + q, \theta_m + q_m)$, où les q, q_m sont des entiers quelconques, ces systèmes auront une représentation unique par un point M^r d'un tore S^r omnicirculaire à r dimensions dans l'espace cartésien U^{r+1} à $r+1$ dimensions.

φ sera la longitude principale, $\theta_1, \ldots, \theta_{r-2}$ les longitudes secondaires, θ_{r-1} la latitude. Les angles sont mesurés par des arcs de la circonférence de longueur 1.

Cette figuration répond à la réalité physique. Car tous les systèmes conguents entre eux par les périodes définissent un même élément concret.

C'est une curiosité, dépourvue ici de tout intérêt, que de chercher l'expression analytique du point M^r décrivant S^r. Le lecteur examinera si la formule suivante est exacte.

Soit j_m $(m = 1, 2, \ldots, r+1)$ le vecteur unitaire porté par l'axe $O\theta_m$ (avec $\theta_r = \varphi$). Le vecteur OM^r étant $\sum_{m=1}^{m=r+1} A_m^{r+1} j_m$, et si $l_r > l_{r-1} + l_{r-2} + \ldots + l_0$, avec $l_0 = A_1^1 = 0$, on passe de OM^{i-1} à OM^i simplement en remplaçant $A_1^i j_1$ par $(l_i + A_1^i)(j_1 \cos 2\pi\theta_i + j_{i+1} \sin 2\pi\theta_i)$.

Le problème essentiel étant celui de la stabilité des trajectoires, l'étude fondamentale est celle de l'ensemble d'accumulation de chaque trajectoire $T(M_0^r)$. On entend par cet ensemble celui des points du tore S^r dans tout voisinage desquels $T(M_0^r)$ passe pour une suite infinie de valeurs de φ, chacune surpassant la précédente d'au moins $1 - \varepsilon$ (ε indépendant et $0 < \varepsilon < 1$) [Un cycle coïncide avec son ensemble d'accumulation]. On ramène la question à celle de l'ensemble d'accumulation des points de rencontre de $T(M_0^r)$ avec un tore-méridien $C^{r-1}(\varphi_0)$ de dimension $r-1$, section de S^r par $\varphi = \varphi_0$. Pour $\varphi = \varphi_0 + n$. $T(M_0^r)$ revient en un point M_n^r, sur $C^{r-1}(\varphi_0) \equiv C^{r-1}(\varphi_0 + n)$.

Tout point P de $C^{r-1}(\varphi_0)$ est aussi bien un point M_n^r qu'un point M_0^r. Car si, P étant d'abord pris pour M_0^r, on fait ensuite commencer la trajectoire T(P) au point P_{-n}, P devient un M_n^r.

La correspondance M_0^r, M_n^r est une transformation topologique (biuniforme et continue) de $C^{r-1}(\varphi_0)$ en lui-même; et de S^r en lui-même, quand φ_0 varie. La trajectoire $T(M_0^r)$ est dite *stable* si chacun de ses points (il suffit d'un seul) en est point d'accumulation, ou si l'ensemble M_n^r est dense en lui-même sur $C^{r-1}(\varphi_0)$.

D'autre part, on représentera le système (φ, θ_m) par le point N^r ayant ces r nombres pour coordonnées dans l'espace cartésien U^r à r dimensions. Un point M^r de S^r peut être figuré par l'un quelconque des points $(\varphi + q, \theta_m + q_m)$ en infinité. Mais si les coordonnées de M_0^r ont été choisies entre toutes les possibles, le point initial N_0^r est déterminé, et la trajectoire $T(M_0^r)$ décrite continûment par M^r sur S^r est figurée dans U^r par une ligne unique et déterminée $t(N_0^r)$, décrite continûment par un point N^r homologue caractérisé de M^r. Changer les coordonnées attribuées à M_0^r reviendra à substituer à $t(N_0^r)$ ses translations par $(\varphi_0+q, \theta_{m,0}+q_m)$. Ces diverses courbes couperont les plans $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_0+n$ en tous les représentatifs dans U^r des points M_n^r où $T(M_0^r)$ coupe $C^{r-1}(\varphi_0)$.

La représentation dans U^r est avantageuse si l'on s'intéresse à l'allure asymptotique du vecteur $\Theta^r-\Theta_0^r$ pour $|\varphi-\varphi_0|$ infini, particulièrement si l'on recherche l'ensemble d'accumulatiou du vecteur $(\Theta^r-\Theta_0^r)/(\varphi-\varphi_0)$, ensemble ne différant pas de celui des vecteurs $(\Theta_n^r-\Theta_0^r)/n$.

III. On peut penser que le cas de $r=3$ révèle dans leur essentiel les conditions rencontrées dans le cas général. Nous allons aborder cette étude particulière.

Soient : $F(x, y, z)$ un vecteur à deux composantes, continu, périodique de période 1 en x, y et z; M, X les systèmes de nombres (x, y, z), (x, y); enfin les équations différentielles :

$$\frac{dX}{dz}=F(M)=F(X, z),$$

d'intégrale générale $X=f(z_0, X_0, z)$ avec $X_0=f(z_0, X_0, z_0)$. Le tore S^3 est représenté dans U^3 par le cube $K_0(0\leqq(x, y, z)\leqq 1$ (et par un quelconque de ses congruents). Un point à i coordonnées nulles possède dans K_0, 2^i figurations.

Le tore à deux dimensions $C^2(0)$ sera considéré dans l'espace habituel. Quand z varie à partir de 0, le tore $C^2(z)$ disparaît immédiatement dans U^4 pour reparaître identique à $C^2(0)$ chaque fois que z passe par une valeur entière.

1. $C^2(0)$ coupé par les cercles $x=0$, $y=0$ est figuré dans le plan $z=0$ de U^3 par le carré G_0 base de K_0, avec les sommets $A_0(0, 0)$, $B_0(1, 0)$, $D_0(1, 1)$, $C_0(0, 1)$; $N_0(x_0, y_0, 0)$ décrivant G_0, l'extrémité $N_1(x_1, y_1, 1)$ de l'arc $0\leqq z\leqq 1$ de la trajectoire $t(N_0)$ décrit une figure G_1; $t(A_0)$, ..., $t(C_0)$ se terminent par $A_1(\xi_1, \eta_1)$, $B_1(\xi_1+1, \eta_1)$, $D_1(\xi_1+1, \eta_1+1)$, $C_1(\xi_1, \eta_1+1)$. Les côtés rectilignes $\lambda_0(A_0B_0)$, $\lambda'_0(C_0D_0)$, $\mu_0(A_0C_0)$, $\mu'_0(B_0D_0)$ de G_0 sont devenus des lignes $\lambda_1(A_1B_1)$, $\lambda'_1(C_1D_1)$, $\mu_1(A_1C_1)$, $\mu'_1(B_1D_1)$ limitant G_1; λ'_1 se déduit de λ_1 et μ'_1 de μ_1, par les translations respectives $(x, x; y, y+1)$ ou $(0, 1)$ et $(x, x+1; y, y)$ ou $(1, 0)$.

Le principe fondamental (p) est qu'une ligne simple l_0 décrite par N_0 dans G_0 se change dans G_1 en une ligne l_1 non seulement simple, mais encore ne présentant aucune corde de longueur entière, parallèle à l'un des axes Ox, Oy [sauf si les extrémités de l_0 sont deux points congrus $(x, 0)$ et $(x, 1)$, ou $(0, y)$ et $(1, y)$, ou $(0, 0)$ et $(1, 1)$; il en est alors de même pour les extrémités de l_1]. Ces principes s'appliquent à chacune des lignes λ_1, μ_1, $\lambda_1 + \mu_1$, $\lambda_1 + \mu'_1$. Ce principe peut encore s'énoncer ainsi, en (p') : l_1 est disjointe de toutes ses translations (p, q) (le même cas particulier étant réservé). Si ces principes étaient mis en défaut, les trajectoires $T(M_0)$, $T(M'_0)$ issues de deux points de $C^2(0)$ distincts, arriveraient confondues sur $C^2(0) = C^2(1)$, pour $z = 1$.

2. Réciproquement, considérons dans le plan $z = 1$ un domaine G'_1 vérifiant les conditions précédentes. Il est limité par quatre lignes λ_1, μ_1, $\lambda'_1 = \lambda_1 + (0,1)$, $\mu'_1 = \mu_1 + (1, 0)$, satisfaisant au principe (p). Toutes les translatées de λ_1 et de μ_1 sont disjointes, sauf éventuellement par leurs extrémités, qui sont les congruentes par $(0,1)$, $(1,0)$, $(1, 1)$ d'un même point A_1, (ξ_1, η_1). Il en résulte que ces lignes partagent le plan $z = 1$ en régions disjointes égales.

Chaque point N_0 de G_0 a un congruent et un seul dans G'_1, à moins que N_0 n'ait deux ou quatre congruents sur le contour de G'_1. Chacune des régions a l'aire 1.

Car si R est leur aire et d leur diamètre, celles, en nombre n^2, dont les quatre sommets appartiennent au carré de sommets opposés A_1 et $(\xi_1 + n, \eta_1 + n)$ ont une aire totale égale à $n^2 + 4\delta n d$ avec $\delta^2 < 1$, et à $n^2 R$ en même temps. Donc $R = 1$.

Établissons entre N_0 décrivant G_0 et N_1 décrivant G'_1 une correspondance continue, échangeant λ_0 et λ_1, μ_0 et μ_1. Bien entendu les points N_0 congruents, comme les points N_1 congruents, sont tenus pour identiques. Admettons maintenant la possibilité de joindre N_0 à son homologue N_1 par une ligne $t^1(N_0)$ où z croît de 0 à 1, orthogonale aux deux plans $z = 0$ et $z = 1$ (pour assurer les raccordements ultérieurs). En outre toutes les lignes $t^1(N_0)$, variant continûment avec N_0, et douées de tangentes uniformément continues, sont deux à deux disjointes. Nous relierons par exemple A_0 à A_1 par la ligne $[ux_1, uy_1, (2/\pi)\arcsin\sqrt{u}]$, u variant de 0 à 1. La même ligne translatée joindra B_0 à B_1, etc. La section par le plan de cote z des $t^1(N_0)$ quand N_0 décrit λ_0, μ_0 ... donnera des lignes $\lambda(z)$, $\mu(z)$ ... qui devront satisfaire au principe (p) et assureront le passage continu de λ_0, ... à λ_1, ... La section $G(z)$ par le plan de cote z de l'ensemble des $t^1 N_0$), N_0 décrivant la totalité de G_0 devra avoir les propriété) de G'_1.

Si maintenant N_1 a pour congruent ν^1_0 dans G_0, et si ν^2_1 est dans G'_1 le correspondant de ν^1_0, la translation de $t^1(\nu^1_0)$ amenant ν^1_0 sur N_1 donnera l'arc $t^2(N_0)$ de $t(N_0)$ dans l'intervalle $1 < z < 2$. Et ainsi de suite. dX/dz sera bien une fonction de X et de z remplissant les conditions imposées à l'équation (1). Nous en concluons la possibilité pour tout domaine G'_1 conforme aux hypothèses énoncées d'être le domaine G_1 relatif à une équation (1) (largement indéterminée, de toute évidence).

3. Examinons si les conditions imposées à G_1 réduisent beaucoup la complexité des configurations admissibles. Occupons-nous d'abord du principe (p).

C étant un arc de courbe d'extrémités P, Q, considérons les cordes de C parallèles à PQ, et soit E(C) l'ensemble de leurs longueurs. l désignant la longueur de PQ. S'il existait un nombre positif η indépendant de C, tel que E(C) contînt le segment $(0, \eta l)$, on en déduirait immédiatement que λ_1 ne pourrait rencontrer aucune des lignes $\xi_1 + up$, $\eta_1 + uq$ pour u entier $> 1/\eta$, ni leurs translations $(1, 0)$, p et q prenant toutes les valeurs entières. Mais *ce nombre* η *n'existe pas*. Montrons-le.

LEMME. — *Les lignes* L *et* L' *comprises dans la bande* $0 \leqq y \leqq h$ *et joignant respectivement* $I(a, 0)$ *à* $H(c, h)$ *et* $I'(a', 0)$ *à* $H'(c', h)$, *l'ensemble* E(L, L') *des mesures des segments (dirigés)* SS' *parallèles à* Ox, S *étant sur* L, S' *sur* L', *contient le segment* $(a' - a, b' - b)$.

Si la proposition est vraie quand L et L' sont remplacées par des lignes s'écartant de L et de L' de moins de ε positif, indépendant quelconque, elle sera encore exacte pour L et L'. Nous supposons que :

1° L et L' sont des lignes brisées contenues, sauf par leurs extrémités I, H, I' H', dans la bande $0 < y < h$;

2° L ni L' n'ont pas de côté horizontal;

3° Les ordonnées h_m des sommets maximums ou minimums de L et de L' sont toutes distinctes; $h_0 = 0 < h_1 < \ldots < h_{r-1} < h_r = h$.

Nous déplaçons continûment le segment SS' en partant de II'. Quand nous rencontrons sur L (sur L') un sommet maximum ou minimum, S (S') conserve son sens de parcours sur L (sur L'), S' (S) inverse le sien sur L' (sur L). Pour $h_{i-1} < y < h_i$, S et S' se déplacent dans un sens invariable sur L et sur L' à la fois.

Soit l_i quelconque vérifiant $h_{i-1} < l_i < h_i$. La droite $y = l_i$ coupe L et L' en des points $K_{i,p}$, $K'_{i,q}$ que nous numérotons en p et q dans l'ordre des rencontres sur L sur L' parcourus dans un sens constant de I en H, de I' en H'. La règle sera la suivante : Si pour un même $K_{i,p}$, SS' coïncide dans son déplacement avec plusieurs segments $K_{i,p}K'_{i,q}$, les indices q successifs croissent. Même règle en échangeant les K et les K', p et q. Le segment (dirigé) SS' passe ainsi continûment de $a' - a$ à $c' - c$.

1. Si C est une ligne située dans le demi-plan $y \geqq 0$ et d'extrémités $(a, 0)$, $(b, 0)$, avec $a < b$, l'ensemble E(C) contient le segment $(0, b - a)$. [Cette proposition et le lemme ont été établis par M. Choquet (²).]

Soit $\tau(ab, h)$ la ligne brisée de trois côtés $[x = a, y(h - y) \geqq 0]$, $(a \leqq x \leqq b, y = h)$, $[x = b, (h - y)y \geqq 0]$; $E(\tau)$ est effectivement le segment $(0, b - a)$.

2. C *et* C' *étant deux lignes situées dans le demi-plan* $y \geqq 0$, *ayant pour extrémités respectives* $I(a, 0)$, $J(b, 0)$ *et* $I'(a', 0)$, $J'(b', 0)$ $(b > a, b' > a')$, *pour ordonnées maximums* h *et* h', *l'ensemble* E(C, C') *des mesures des segments dirigés* SS' *parallèles à* Ox, S *étant sur* C, S' *sur* C', *contient :*

si $h > h'$, *les deux segments* $(a' - a, b' - a)$, *et* $(a' - b, b' - b)$;

si $h = h'$, *le segment* $(a' - b, b' - a)$.

E(C, C') est identique à ces segments si $C \equiv \tau(ab, h)$, $C' \equiv \tau(a'b', h')$.

3. *Exemple négatif.* — Sur le segment $PQ(0, 4n)$ de l'axe des x (n entier > 0), marquons, pour $0 \leqq p \leqq n-1$, les points $4p$, $4p+1$, $4p+(3/2)$, $4p+2$, $4p+3$, $4p+(7/2)$, $4(p+1)$. Ils séparent les segments $\gamma_{p.1}, \ldots, \gamma_{p.6}$. Si $h > h' > 0$, $k > k' > 0$, soit C la courbe composée des arcs $\tau(\gamma_{p.1}, h)$, $\tau(\gamma_{p.2}, -k')$, $\tau(\gamma_{p.3}, h')$, $\tau(\gamma_{p.4}, -k)$, $\tau(\gamma_{p.5}, h')$, $\tau(\gamma_{p.6}, -k')$. Pour C, $l = 4n$.

L'ensemble E(C) ne renferme aucun des intervalles $[4q+(5/2), 4q+3]$ soit $l[q/n + 5/(8n), (q/n) + 3/(4n)]$, pour $q = 0, 1, \ldots, n-1$. Le nombre η n'existe donc pas. Bien entendu, si les lignes de C perpendiculaires à ox sont modifiées infiniment peu, il en serait de même de la conclusion.

D'ailleurs les exemples que nous donnerons de domaines G_1 contredisent la conséquence que nous tirions plus haut d'une valeur non nulle de η.

(*) Séance du 10 novembre 1958.

(1) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1072.

(2) *Bull. de la Soc. math.*, 1943.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 247, p. 1691-1696, séance du 17 novembre 1958.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Équations différentielles périodiques.*

Note de M. **Arnaud Denjoy.**

Construction de domaines G_1 à configuration de plus en plus complexe. Un système de deux équations différentielles, périodiques par rapport aux inconnues et à la variable indépendante, définit des trajectoires sur le tore à trois dimensions dans l'espace à quatre. Chaque tore à deux dimensions, méridien du précédent, se transforme périodiquement en lui-même. Ces automorphismes sont représentés par les domaines G_1.

Ma dernière Note annonçait les exemples que je vais présenter de domaines G_1.

Dans le plan $P_1(z=1)$ le domaine G_1 est décrit par l'extrémité $N_1(x_1, y_1, 1)$ de l'arc $t^1(N_0)(0 \leqq z \leqq 1)$ sur la trajectoire $t(N_0)$; $N_0(x_0, y_0, 0)$ parcourt le carré G_0 de sommets $A_0B_0D_0C_0[A_0(0, 0), D_0(1, 1)]$. Je rapelle que $t(N_0)$ intègre un système $dx/dz = F_1(x, y, z)$, $dy/dz = F_2(x, y, z)$, F_1 et F_2 ayant la période 1 en x, y, z; $A_1(\xi_1, \eta_1, 1)$ correspond à A_0. Nous rapporterons le plan P_1 aux axes A_1u_0, A_1v_0, si $u_0 = x_1 - \xi_1$, $v_0 = y_1 - \eta_1$; G_1 est limité par les lignes λ_1, λ'_1, congruentes selon $(0, 1)$, joignant A_1 à B_1, C_1 à D_1, et par μ_1, μ'_1, congruentes par $(1, 0)$, joignant A_1 à C_1, B_1 à D_1.

Les domaines G_1 figurent des transformations topologiques du tore à deux dimensions $C^2(0)$ en lui-même. La complexité croissante et illimitée des types de domaines G_1 définis ci-après donnera une idée de la diversité des cas possibles.

1. A la ligne λ_1 imprimons toutes les translations $(r, 0)$, parallèles à A_1u_0. En vertu du principe (p) les lignes obtenues sont disjointes les unes des autres, sauf par leurs extrémités $(r, 0)$. Leur réunion forme une ligne simple Λ_1 indéfinie (de $u_0 - \infty$ à $u_0 + \infty$), invariante par les translations $(r, 0)$, disjointe de ses translatées par $(0, q)$ ($|q|$ entier $\geqq 1$). La translatée de Λ_1 par $(0, 1)$ donne Λ'_1 dont λ'_1 est l'arc C_1D_1. Entre Λ_1 et Λ'_1 s'étend une région V; μ_1 et μ'_1 sont dans V, sauf par leurs extrémités A_1, C_1 et B_1, D_1. Toute ligne tracée dans V est disjointe de ses translatées par (r, q) si $|q| \geqq 1$. Elle satisfera au principe (p) si elle est disjointe de ses translatées par $(r, 0)$.

Pareillement, imprimons à μ_1 et à μ'_1 toutes les translations $(0, q)$ parallèles à A_1v_0. Nous obtenons, par les réunions respectives, deux lignes simples Ω_1, Ω'_1, indéfinies (de $v_0 - \infty$ à $v_0 + \infty$), disjointes entre elles, et aussi de toutes les autres translatées par $(r, 0)$. Entre Ω_1 et Ω'_1 s'étend une région W dans laquelle se trouvent λ_1 et λ'_1 sauf par leurs extrémités A_1, B_1 et C_1, D_1. Toute ligne tracée dans W satisfera au principe (p) si elle est disjointe de ses translatées $(0, q)$.

2. Nous allons définir une suite de domaines $G_{1,i}$ ($i \geqq 0$). arrêtés à tel rang i que nous voudrons, et dont chacun se déduisant du précédent, en complique énormément la configuration.

$G_{1,0}$ sera le carré $A_1 B_1 D_1 C_1$ dont $\lambda_{1,0}, \ldots, \mu'_{1,0}$ sont les côtés.

$G_{1,i}$ est limité par $\lambda_{1,i}, \ldots, \mu'_{1,i}$, ces lignes ayant toujours leurs extrémités fixées aux sommets A_1, B_1, D_1, C_1 de $G_{1,0}$.

Relativement au domaine $G_{1,i}$ nous attachons à tout point (x_1, y_1) du plan P_1 deux nombres coordonnés u_i, v_i, uniques de chaque sorte. A (x_1+r, y_1+q) correspondent u_i+r, v_i+q, en sorte que pour définir u_i, v_i dans tout le plan, il suffit de les connaître dans le champ $(0 \leqq (u_i \text{ et } v_i) \leqq 1)$, qui constituera le domaine $G_{1,i}$; u_0, v_0 sont les coordonnées cartésiennes déjà introduites.

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \mu_{1,i} \quad (=1 \text{ sur } \mu'_{1,i}); \qquad v_i = 0 \quad \text{sur } \lambda_{1,i} \quad (=1 \text{ sur } \lambda'_{1,i}).$$

Soient $\Delta_i(u_i)$ et $Z_i(v_i)$ respectivement les lignes où les coordonnées spéciales restent constantes et valent u_i, v_i (quelconques, de $-\infty$ à $+\infty$). Ce sont des lignes simples, respectivement invariantes par les translations $(0, 1)$ (comme Ω_1) et $(1, 0)$ (comme Λ_1).

$G_{1,i}$ découpe sur $\Delta_i(u_i)$ pour $0 \leqq u_i \leqq 1$, sur $Z_i(v_i)$ pour $(0 \leqq v_i \leqq 1)$ des arcs $\delta_i(u_i)$, $\zeta_i(v_i)$ ayant respectivement leurs extrémités sur $\lambda_{1,i}(v_i=0)$, $\lambda'_{1,i}(v_i=1)$ et sur $\mu_{1,i}(u_i=0)$, $\mu'_{1,i}(u_i=1)$; $\lambda_{1,i}=\zeta_i(0)$; $\lambda'_{1,i}=\zeta_i(1)$; $\mu_{1,i}=\delta_i(0)$; $\mu'_{1,i}=\delta_i(1)$.

Pour se représenter les transformations correspondantes du tore $C^2(0)$ en lui-même, il faut réunir en un seul tous les points congruents du plan P_1. Chaque ligne $\delta_i(u_i)$ (et μ_1, μ'_1). $\zeta_i(v_i)$ (et λ_1, λ'_1) représente un contour fermé simple, déformation d'un méridien et d'un parallèle de $C^2(0)$; les Δ_i (et Ω_1, Ω'_1), Z_i (et Λ_1, Λ'_1) étant ces contours décrits une infinité de fois; $\delta_i(0)$ $(\equiv \mu_{1,i})$ et $\delta_i(1)$ $(\equiv \mu'_{1,i})$, $\zeta_i(0)$ $(\equiv \lambda_{1,i})$ et $\zeta_i(1)$ $(\equiv \lambda'_{1,i})$, représentent le même méridien, le même parallèle, déformés. Quand les $G_{1,i}$ se compliquent, on cesse s'imaginer facilement ce transfert de figures du plan P_1 au tore simple $C^2(0)$. A ceux qui voudraient réaliser physiquement ces tracés on devrait conseiller d'utiliser, soit en sa réalité, soit en moulage, une énorme chambre à air destinée à un bandage pour camion lourd.

3 Comment passons-nous de $G_{1,i}$ à $G_{1,i+1}$? Alternativement nous changeons tantôt les $\lambda_{1,i}$, $\lambda'_{1,i}$, conservant les $\mu_{1,i}$, $\mu'_{1,i}$, tantôt les $\mu_{1,i}$, $\mu'_{1,i}$, conservant les $\lambda_{1,i}$, $\lambda''_{1,i}$. Mais nous ne nous bornons pas à définir le contour de $G_{1,i+1}$ à partir de celui de $G_{1,i}$. Nous devons donner les nombres coordonnés u_{i+1}, v_{i+1} de tout point du plan P_1 en fonction des u_i, v_i. Nous introduisons des fonctions $f_i(t)$ vérifiant $f_i(t+1)=f_i(t)$ et $f_i(0)=0$, continues, à cela près quelconques, de signe constant ou variable. Si nous voulons réaliser une figuration la plus simple possible, nous prendrons $f_i(t)=P(t, k_i)=k_i \sin^2 \pi t$; k_i indépendant de t, est soit positif, soit négatif. L'entier q_i défini par $q_i - 1 < |k_i| \leqq q_i$ aura son rôle à jouer.

1° *i pair* $(\geqq 0)$. Nous faisons $u_{i+1}=u_i$; $v_{i+1}=v_i-f_{i+1}(u_i)$ donc $\mu_{1,i+1}\equiv\mu_{1,i}$; $\lambda_{1,i}$ et $\lambda'_{1,i}$ s'effacent et sont remplacés par $\lambda_{1,i+1}$ $[v_i=f_{i+1}(u_i)]$ et $\lambda'_{1,i+1}[v_i=f_{i+1}(u_i)+1]$ $(0 \leqq u_i \leqq 1)$. Ces lignes sont situées dans la bande W_i limitée par $\Delta_i(0)\equiv\Omega_{1,i}$ et $\Delta_i(1)\equiv\Omega'_{1,i}$;

$$\vec{\Delta}_{i+1}(u_{i+1}) \equiv \Delta_i(u_i) \qquad \text{pour} \quad u_{i+1}=u_i.$$

La différence $v_i - v_{i+1} = f_{i+1}(u_i)$ reste constante sur $\Delta_i(u_i)$, mais varie avec cette ligne; $\delta_{i+1}(u_{i+1})$ est, pour $u_i = u_{i+1}$, l'arc de $\Delta_i(u_i)$ compris entre le point où $\Delta_i(u_i)$, parcouru dans le sens des v_i croissants, rencontre $\lambda_{1,i+1}(v_{i+1}=0)$ et le point [congruent par (0,1)] où $\Delta_i(u_i)$ rencontre $\lambda'_{1,i+1}(v_{i+1}=1)$.

Les points des arcs $\delta_{j+1}(u_{i+1})$ où v_{i+1} prend une même valeur (comprise entre 0 et 1) forment l'arc $\zeta_{i+1}(v_{i+1})$. Celui-ci naît (pour $u_{i+1}=0$) et s'arrête (pour $u_{i+1}=1$) sur $\mu_{1,i} \equiv \mu_{1,i+1}$ et $\mu'_{1,i} \equiv \mu'_{1,i+1}$, comme $\zeta_i(v_i)$ pour $v_i = v_{i+1}$, et aux mêmes points [congruents par (1,0)], d'après $f_{i+1}(0)=0$.

2° *i impair.* — Nous faisons : $u_{i+1} = u_i - f_{i+1}(v_i)$; $v_{i+1} = v_i$; $\lambda_{1,i}$, $\lambda'_{1,i}$ restent inchangés. $\lambda_{1,i+1}$, $\lambda'_{1,i+1}$ leur sont identiques; $\mu_{1,i}$ et $\mu'_{1,i}$ s'effacent et sont remplacés par $\mu_{1,i+1}\,[u_i = f_{i+1}(v_i)]$ et $\mu_{1,i+1}[u_i = f_{i+1}(v_i)+1]$. Ces lignes sont situées dans V_i, bande comprise entre $\Lambda_{1,i} \equiv Z_i(0)$ et $\Lambda'_{1,i} = Z_i(1)$; $Z_{i+1}(v_{i+1}) \equiv Z_i(v_i)$ pour $v_i = v_{i+1}$. Sur cette ligne $u_i - u_{i+1} = f_{i+1}(v_i)$ a une valeur constante, dépendant de v_i seul. $\zeta_{i+1}(v_{i+1})$ est l'arc de $Z_i(v_i)$ limité par les points de rencontre de cette ligne avec $\mu_{1,i+1}(u_{i+1}=0)$ et $\mu'_{1,i+1}(u_{i+1}=1)$.

$\delta_{i+1}(u_{i+1})$, formé des points des $\zeta_{i+1}(v_{i+1})$ où u_{i+1} prend une valeur constante $[u_i = f_{i+1}(v_i) + u_{i+1}]$, et $\delta_i(u_i)$ pour $u_i = u_{i+1}$, naissent et s'arrêtent aux mêmes points [congruents par (1, 0)] sur $\lambda_{1,i+1} \equiv \lambda_{1,i}$, $(v_i = v_{i+1} = 0)$, sur $\lambda'_{1,i+1} \equiv \lambda'_{1,i}(v_i = v_{i+1} = 1)$, d'après $f_{i+1}(0)=0$.

Pour imaginer la génération successive des $G_{1,i}$, regardons les lignes $\lambda_{1,i}$, $\mu_{1,i}$ comme des fils composés d'une matière inélastique, non ruptible, indéfiniment extensible. Ces fils sont invariablement attachés à leurs deux extrémités, A_1 et B_1 pour $\lambda_{1,i}$, A_1 et C_1 pour $\mu_{1,i}$. Ils dessinent des poches, se poussant dans les régions V ou W où elles peuvent se propager. Bien entendu, toute déformation d'une ligne $\lambda_{1,i}$ ou $\mu_{1,i}$ est reproduite automatiquement par $\lambda'_{1,i}$, $\mu'_{1,i}$ et toutes leurs congruentes.

Nous pourrons supposer les figures tracées avec $f_i = P(t, k_i)$; k_i sera pour une même parité de i alternativement positif et négatif.

4. Considérons $G_{1,1}$. Ici $u_1 = u_0$, $v_1 = v_0 - f(u_0)$. Les segments $A_1C_1 \equiv \mu_{1,1} \equiv \mu_{1,0}$ et $B_1D_1 \equiv \mu'_{1,1} \equiv \mu'_{1,0}$ bordent $G_{1,1}$ comme $G_{1,0}$; $\lambda_{1,1}[v_0 = f_1(u_0)]$ et $\lambda'_{1,1}[v_0 = f_1(u_0)+1]$ s'étendent dans la bande W_0 comprise entre les droites indéfinies $u_0 = 0$ [qui est $\Omega_{1,1} \equiv \Delta_1(0) \equiv \Delta_0(0)$] et $u_0 = 1$ $[\Omega'_{1,1} \equiv \Delta_1(1) \equiv \Delta_0(1)]$. Avec $f_1(t) = P(t, k_1)$, $G_{1,1}$ est poussé vers le haut $(v_0 > 0)$ si $k_1 > 0$, vers le bas $(v_0 < 0)$ si $k_1 < 0$;

$\lambda_{1,1}$ forme une arche de hauteur k_1; $G_{1,1}$ empiète sur $q_1 + 1$ carrés congrus à $G_{1,0}$; $\delta_1(u_1)$ est le segment parallèle à A_1C_1, d'abscisse u_1 et limité par $\lambda_{1,1}$ et $\lambda'_{1,1}$. La ligne $Z_1(v_1)$ est la translation euclidienne $(0, v_1)$ de $\Lambda_{1,1}$; $\zeta_1(v_1)(0 \leqq (u_1, v_1) \leqq 1)$ va, comme $\zeta_0(u_0)$ pour $v_0 = v_1$, du point $(0, v_0)$ sur $A_1C_1 (\equiv \mu_{1,0})$ au point $(1, v_0)$ sur $B_1D_1 (= \mu'_{1,0})$; $\zeta_0(v_0)$ était le segment rectiligne joignant ces deux points.

$\Lambda_{1,1}$ et $\Lambda'_{1,1}$ forment deux séries d'arches égales à $\lambda_{1,1}$, se joignant par leurs pieds (sur $v_0 = 0$ et sur $v_0 = 1$). La région V_1 qui les sépare est remplie par les $Z_1(v_1)$ pour $0 \leqq v_1 \leqq 1$.

5. Passons à $G_{1,2}$. Ici $v_2 = v_1$; $u_2 = u_1 - f_2(v_1)$; $\lambda_{1,1}(v_1 = 0)$ est inchangé. C'est $\lambda_{1,2}(v_2 = 0)$. Si $f_2 = P(t, k_2)$ et $k_2 > 0$, le segment $\mu_{1,1}(\equiv A_1 C_1)$ s'étire vers la droite $(u_0 > 0)$, et il pénètre d'abord dans $G_{1,1}$; il sortirait de $G_{1,1}$, se propageant vers la gauche $(u_0 < 0)$, et ce serait $\mu'_{1,2}$ qui entrerait au départ dans $G_{1,1}$, si k_2 était < 0. La poche formée par $\mu_{1,2}$ contourne $\lambda_{1,1}$ par le haut $(v_0 > 0)$, redescend, franchit $B_1 D_1 (k_2 > 1)$ par un intervalle $e_2 g_2 [v_0(e_2) < v_0(g_2)]$. Dès ce moment, nous sommes engagés dans la poche dessinée par $\mu'_{1,2}$, déformée parallèlement à $\mu_{1,2}$; $G_{1,2}$ pénètre dans $q_2 + 1$ arches de V_1. Il empiète sur $(q_1 + 1)(q_2 + 1)$ carrés congruents à $G_{1,0}$ (dans la dernière arche, les carrés inférieurs peuvent ne pas être atteints).

$\mu_{1,2}$ évoque la perspective d'un dragon chinois dont la gueule s'ouvrirait en $A_1 C_1$ et dont les replis se dresseraient verticalement, s'engouffrant à partir du second dans le corps du dragon $\mu'_{1,2}$ pareil au premier et situé derrière lui, la même combinaison se répétant de l'infini inférieur à l'infini supérieur dans la limitation de W_2,

Que sera $\zeta_2(v_2)$? Cet arc appartient à la ligne $Z_1(v_1)$ pour $v_1 = v_2$. Partant de $(0, v_2)$ entre A_1 et C_1, elle rencontre $\mu_{1,2}$, puis $\mu'_{1,2}$, aux points extrêmes $(u_2 = 0$ et $u_2 = 1)$ de $\zeta_2(v_2)$, congruents par $(1, 0)$. Quant à $\delta_2(u_2)$, ayant mêmes extrémités que $\delta_1(u_1)$ si $u_1 = u_2$, l'une sur $\lambda_{1,1} \equiv \lambda_{1,2}$, l'autre sur $\lambda'_{1,1} \equiv \lambda_{1,2}$ (et à l'abscisse commune $u_0 = u_1 = u_2$, par rapport à $A_1 u_0$, $A_1 v_0$), elle réalise par $u_1 = f_2(v_1) + u_2$ une sorte de parallélisme (non euclidien) avec $\mu_{1,2}[u_1 = f_2(v_1)]$ et $\mu'_{1,2}[u_1 = f_2(v_1) + 1]$ entre lesquelles elle se tient.

6. Pour construire $G_{1,3}$, qui conserve les bords $\mu_{1,3} \equiv \mu'_{1,2}$ et $\mu'_{1,3} \equiv \mu'_{1,2}$ de $G_{1,2}$, on imagine d'abord ainsi W_2, par analogie avec V_1. Les arches de V_1 auraient (au-dessus de $v_0 = 1$) la hauteur $k_1 k_2$. Sur l'alignement horizontal (parallèle à $A_1 u_0$) de leur faîte s'abat une traverse également horizontale et indéfinie, effondrant V_1 sur elle-même, la mettant « en accordéon », réduisant sa hauteur de $k_1 k_2$ à k_2, tandis que la largeur de sa projection horizontale (sur $A_1 u_0$) passe de 1 à k_1. A cet écrasement, on applique ensuite la rotation de 90° du haut vers la droite, et autour du centre carré $G_{1,0}$. Ainsi a-t-on W_2.

C'est dans W_2 que s'étirent $\lambda_{1,2}(\equiv \lambda_{1,1})$ et $\lambda'_{1,2}(\equiv \lambda'_{1,1})$ pour devenir $\lambda_{1,3}$ et $\lambda'_{1,3}$. Nous chassons $G_{1,3}$ vers le bas (les v_0 négatifs), en prenant $f_3 = P(t, -k_3)$ $(k_3 > 0)$. Nous utiliserons plus commodément $\lambda'_{1,3}$, qui pénètre immédiatement dans $G_{1,2}$, tandis que $\lambda_{1,3}$ en sort. Au voisinage de D_1, $\lambda'_{1,3}$ tire vers le bas. La poche formée, poussée vers la droite (les $u_0 > 0$), s'enfonce entre g_2 et D_1. Dès lors elle se glisse entre $\mu_{1,2}$ et $\mu'_{1,2}$. Elle contourne la totalité de $\mu_{1,2}$ par la droite, revient apparaître entre B_1 et e_2. Passant sous B_1 elle pénètre dans le creux offert par $\lambda_{1,3}$, translaté de $\lambda'_{1,3}$ par $(0, -1)$. Cette insertion, de la poche dessinée par $\lambda'_{1,3}$ dans la poche égale faite par $\lambda_{1,3}$, celle-ci reculant (vers le bas) devant la première au fur et à mesure que celle-ci avance, la manœuvre s'en poursuit q_3 fois, autant qu'on l'a voulu. $G_{1,3}$ empiète sur $(q_2 + 1)$ $(q_1 + q_3 + 2)$ carrés congruents à $G_{1,3}$ et formant le rectangle de sommets opposés $(0, q_1 + 1)$ et $(q_2 + 1, -q_3 - 1)$. Une partie des carrés bordant le rectangle peut être disjointe de $G_{1,3}$, ce qui est sans importance, tout l'intérêt étant dans la grandeur des nombres q_i.

7. On pourra poursuivre, définir de la même manière un $G_{1,4}$, poussé vers la gauche (les u_0 négatifs), puis un $G_{1,5}$ remonté vers le haut (les v_0 positifs) etc. Solidairement avec les $\lambda_{1,i}$, $\lambda'_{1,i}$ d'une part, les $\mu_{1,i}$, $\mu'_{1,i}$ d'autre part, on tracera les lignes $\delta_{1,i}(u_i)$, $\zeta_{1,i}(v_i)$. On se rendra compte ainsi de la complexité possible de la transformation topologique la plus générale d'un tore $C_2(o)$ à deux dimensions changé en lui-même. Et dès le début, on pourra réaliser l'existence de cycles simples se fermant par un tour de z (de o à 1) sur S^3, et définissant des vecteurs N_0N_1 $(p, q, 1)$ distincts, en nombre sensiblement égal à celui des carrés congruents à $G_{1,0}$, traversés par $G_{1,i}$. La complexité de ce domaine permet en même temps d'accroître la divergence globale de ces vecteurs, différents les uns des autres, et dont chacun constitue une limite particulière pour les vecteurs N_0N_n/n.

Pour justifier la légitimité des domaines $G_{1,i}$, nous avons à construire pour chacun d'eux un système de trajectoires $t^1(N_0)$. La question de l'ensemble limite (variable avec N_0) du vecteur N_0N_n/n se pose ensuite.

8. Je complète un résultat établi dans ma dernière Note.

M. Choquet m'a signalé qu'on s'est demandé s'il existe des nombres α positifs, inférieurs à 1, tels que toute courbe C ayant une équation $y = f(x)$, avec $f(a) = f(b) = 0$, $b - a = l$, possède une corde parallèle à Ox et de longueur αl. La réponse est négative. Il n'existe pas de tel nombre.

Dans ma dernière Note, j'ai démontré, par la définition d'une certaine courbe C, que s'il existe un entier positif n tel que $n\alpha$ ait sa partie fractionnaire comprise entre 5/8 et 3/4, α ne jouit pas de la propriété souhaitée. Car la courbe C ne possède pas de corde de longueur comprise (mod. 4) entre 2,5 et 3. Cela élimine déjà tous les nombres α irrationnels et les fractions irréductibles r/s $(1 \leqq r \leqq s - 1)$, sauf pour $s = 8, 5, 4, 2$. Dès lors *a priori*, si le nombre α existait, en appliquant sa propriété à la corde de longueur αl, et en répétant l'opération, on trouverait que tous les nombres α^r (r entier positif quelconque) rempliraient la condition, ce dont nous venons de voir l'impossibilité dès $r = 4$.

A titre de vérification : 1° en remplaçant dans la construction de C la subdivision adoptée, pour l'intervalle $(4p, 4p+4)$, par celle des points $4p + x_i$, avec $x_i = 0$, $1 + \varepsilon$, $(3+\varepsilon)/2$, 2, $(5-\varepsilon)/2$, $3-\varepsilon$, 4, $(0 < \varepsilon < 1)$ on exclut les α pour lesquels la partie fractionnaire de $n\alpha$ peut appartenir à l'intervalle $(5-\varepsilon)/2$, $3 - \varepsilon$; $s = 8$ et pour $\varepsilon > 1/5$, $s = 5$ disparaissent. 2° $\alpha = 3/4$ est écarté par la courbe $y = \sin(2\pi x)/l$. Resteraient $\alpha = 1/4$ et $\alpha = 1/2$. 3° Si $\alpha = 1/16$, prenons $n = 11$, donc $l = 44$; $\alpha l = 11/4 = 2 + (3/4)$ vérifie $2,5 < l/16 < 3$. La courbe C n'a pas de corde égale à $(l/16)$. Réduisons C à son arc d'extrémités $x = 0$ et $x = 11$, celle-ci étant sur Ox. Maintenant $l = 11$; $\alpha = 1/4$ est exclu. Arrêtons C au point $x = 5,5$ encore situé sur Ox; $l = 11/2$, $\alpha = 1/2$ est exclu à son tour.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 247, p. 1923-1828, séance du 1er décembre 1958.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Sur les équations différentielles périodiques.*

Note de M. **Arnaud Denjoy.**

Continuation de l'étude de l'équation périodique $dX/dz = F(X, z)$, $X = (x, y)$. Le tore méridien $C^2(o)$ du tore S^3 de l'espace U^4 à quatre dimensions étant représenté par le carré G_0 dans le plan $z = 0$ de U^3, et un domaine G_1 du plan $z = 1$ vérifiant le principe (p), on construit un réseau de trajectoires changeant G_0 en G_1.

Dans ma dernière Note (¹), j'ai défini des domaines $G_{1,i}$ satisfaisant dans le plan $z = 1$ au principe (p). Nous devons montrer que les points N_1 de $G_{1,i}$ sont les extrémités d'arcs $t^1(N_0)$ intégrant un système différentiel $dX/dz = F(X, z)$. Nous étudierons la possibilité d'imposer à la liaison (N_0, N_1) diverses conditions remarquables.

1. Nous nous aidons des considérations suivantes :

Dans deux plans $z = c$, $z = d (c < d)$ soient $\Gamma(z = c)$ et $\Delta(z = d)$ deux ensembles décrits respectivement par les points $I(i, i', c)$, $J(j, j', d)$ se correspondant chacun à chacun, avec conservation des congruences par $(r, m, 0)$, enfin reliés par des arcs $\tau(I, J)$, disjoints et congruents en même temps que leurs extrémités. Nous dirons que ces arcs, décrits par le point $N(x, y, z)$, forment un *réseau normal*, si :

1° sur τ, z croît de c à d;

2° il y a variation continue de l'arc $\tau(I, J)$ avec I dans Γ (et J dans Δ), et de sa tangente avec x, y, z dans la bande $c \leqq z \leqq d$;

3° τ est, en ses extrémités I, J, orthogonal aux plans $z = c$, $z = d$.

Si $c = 0$, $\Gamma \equiv G_0$ parcouru par N_0, et $d = 1$, $\Delta \equiv G_1$ décrit par N_1, les $\tau(N_0, N_1)$ forment un volume où $F_1 = dx/dz$, $F_2 = dy/dz$, donc $dX/dz = F(X, z)$, sont définis en chaque point. Ces fonctions sont périodiques par $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sur la frontière de ce volume, nulles pour $z = 0$, $z = 1$, donc prolongeables dans tout l'espace U^3 par les translations (r, m, q). Le réseau normal $\tau(N_0, N_1)$ définit donc une équation $dX/dz = F$ périodique.

Si $c < d < g$, et si dans le plan $z = g$ un ensemble $\Delta(g)$, décrit par un point H, est en correspondance ponctuelle biuniforme avec Δ (et avec Γ), la réunion des deux réseaux normaux $\tau(I, J)$, $\tau(J, H)$ est un réseau normal d'arcs $\tau(I, H)$.

La substitution de $(z - c')/(d' - c')$ à $(z - c)/(d - c)$ change le réseau normal joignant Γ à Δ en un réseau normal joignant les projections Γ', Δ' de Γ, Δ sur les plans $z = c'$, $z = d'$.

Il sera commode de ramener toute construction de réseaux normaux aux plans extrêmes $z = 0$, $z = 1$. Un réseau sera souvent composé par un échelonnement de plusieurs réseaux se raccordant, chacun étant construit indépendamment avec les plans extrêmes $z = 0$, $z = 1$.

La solution se décompose en deux parties. D'abord, θ étant un nombre variant de 0 à 1, on définit dans un plan $z = g(\theta)$ variable ou non, un point $N(I, J, \theta)$ $[N(I, J, 0) \equiv I,\ N(I, J, 1) \equiv J]$ décrivant un ensemble

$$\Delta(\theta) \qquad [\Delta(0) = \Gamma,\ \Delta(1) = \Delta],$$

transformé topologique de Γ, et vérifiant toutes les conditions nécessaires de continuité simple ou différentielle par rapport à I (et J) et à θ.

Soit maintenant $X(\theta)$ le couple des coordonnées $x(\theta)$, $y(\theta)$ de $N(I, J, \theta)$. Le point $N[X(\theta), z]$, où θ est remplacé par $\sin^2(\pi z)/2$, décrit l'arc $\tau(I, J)$ d'un réseau normal reliant Γ à Δ, placés dans les plans extrêmes $z = 0$ et $z = 1$.

Mettons en œuvre ces idées.

2. Le point $N_1(x_1, y_1, 1)$ du plan $P(z = 1)$ est rapporté aux axes $A_1 u_0$, $A_1 v_0$, $(u_0 = x_1 - \xi_1,\ v_0 = y_1 - \eta_1)$, $A_1(\xi_1, \eta_1, 1)$ étant l'extrémité de l'arc $t^1(A_0)$. Les coordonnées curvilignes u_i, v_i relatives au domaine $G_{1,i}$ que nous voulons relier à G_0 se calculent à partir de u_0, v_0 par la suite des formules de transformation $[1 \leqq k \leqq 1;\ f_k(t+1) = f_k(t),\ f_k(0) = 0]$:

Si k est impair : $u_k = u_{k-1}$, $v_k = v_{k-1} - f_k(u_{k-1})$;

Si k est pair : $u_k = u_{k-1} - f_k(v_{k-1})$, $v_k = v_{k-1}$.

Mais inversement les formules se résolvent en

$$\begin{array}{lll} k \text{ impair : } & u_{k-1} = u_k, & v_{k-1} = v_k + f_k(u_k); \\ k \text{ pair : } & u_{k-1} = u_k + f_k(v_k), & v_{k-1} = v_k. \end{array}$$

Dès lors, les coordonnées curvilignes $u_i\ v_i$ d'un point N_1 étant données [et particulièrement pour les points du domaine $G_{1,i}$: $0 \leqq (u_i \text{ et } v_i) \leqq 1$] on obtient par la décroissance de k, de i à 1, les coordonnées cartésiennes $a_i = u_0(u_i, v_i)$ et $b_i = v_0(u_i, v_i)$ de N_1 par rapport aux axes $A_1 u_0$, $A_1 v_0$.

Si nous multiplions tous les f_k par un même nombre θ, nous obtenons (dans le plan $z = 1$) un domaine $G_{1,i}(\theta)$ du type de $G_{1,i} \equiv G_{1,i}(1)$; u_i et v_1 deviennent $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, avec les coordonnées cartésiennes $a_i(\theta)$, $b_i(\theta)$. Faisons tendre θ vers 0. Si u_0, v_0 sont invariables, $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$ tendent vers u_0, v_0. Si u_i, v_i sont laissés fixes, $a_i(\theta)$, $b_i(\theta)$ tendent vers u_i, v_i, et il en est de même de $\theta\xi_1 + a_i(\theta)$ et $\theta\eta_1 + b_i(\theta)$.

Supposons les $f_k(t)$ douées de dérivées continues. L'ensemble $\Delta = G_{1,i}$ est, par une transformation topologique vérifiant les conditions de continuité exigées, changé en $\Gamma[(0 \leqq (x \text{ et } y) \leqq 1,\ z = 1]$. En remplaçant θ par $\sin^2(\pi z)/2$, nous obtenons un réseau normal d'arcs $\tau(N_0, N_1)$, joignant le point $N_0(u_i, v_i, 0)$ de G_0 au point $N_1(\xi_1 + a_i,\ \eta_1 + b_i,\ 1)$ de $G_{1,i}$.

3. Dans le plan $z=1$, soit un domaine G_1 vérifiant le principe (p). Supposons les points $N_1(x_1, y_1, 1)$ de G_1 liés aux points $N_0(x_0, y_0, 0)$ de G_0 par les arcs $t^1(N_0)$ des trajectoires $t(N_0)$ intégrant un couple d'équations connues $dX/dz=F(X, z)$. On peut déduire de ces données de nouvelles liaisons (N_0, N_1) satisfaisant à des conditions posées *a priori*.

D'abord on convertira (s'il ne l'est déjà) le système $t^1(N_0)$ en un réseau normal $\tau(N_0, N_1)$ intégrant $dX/dz=F[X, \sin^2(\pi z)/2]\sin\pi z$. Puis on remontera la base de ce réseau de G_0 au carré $\Delta(d)$ formé des points (u, v, d) où u et v ont les valeurs x_0, y_0 des coordonnées de N_0 initialement lié à N_1. On a le réseau $\tau(\nu, N_1)$ et l'équation correspondante pour $d \leqq z \leqq 1$. Avec un réseau normal approprié $\tau(N_0, \nu)$ (les coordonnées variables de N_0 reprennent leurs noms x_0, y_0), on établit par le réseau normal $\tau(N_0, N_1)=\tau(N_0, \nu)+\tau(\nu, N_1)$ la liaison (N_0, N_1) satisfaisant aux conditions posées, et en même temps l'équation vérifiée dans la zone $0 \leqq z \leqq d$.

Soit donnée, entre les points $\nu_0(x_0, y_0, 0)$ de $\Gamma=\Delta(0)$ et $\nu_1(x_1, y_1, 1)$ de $\Delta=\Delta(1)$, une correspondance ne changeant pas les abscisses $(x_0=x_1)$, tandis que y_0 et y_1 croissent ensemble pour chaque valeur invariable de x_0. Les segments rectilignes $\nu_0\nu_1[x_0, (1-\theta)y_0+\theta y_1, z]$ pour $\theta=z$, sont disjoints. On en tire le réseau normal $\tau(\nu_0, \nu_1)$. Rappelons $\Delta(d)=G_0(d)[0 \leqq (x \text{ et } y) \leqq 1, z=d]$.

Supposons que, pour $0 \leqq x \leqq 1$, à certaines lignes données dans Γ, $y=y_{0,k}(x)$ $(0 \leqq k \leqq m)$, avec $y_{0,0}(x)=0$, $y_{0,m}(x)=1$, $y_{0,k}(x)$ croissant avec k, et en outre $y_{0,k}(0)=y_{0,k}(1)\, y'_{0,k}(0)=y'_{0,k}(1)$, il corresponde dans Δ des lignes $y=y_{1,k}(x)$, vérifiant les mêmes conditions que les $y_{0,k}(x)$. Nous supposons toutes ces fonctions douées de dérivées premières continues. Le problème de préciser et compléter la correspondance ν_0, ν_1 est évidemment très indéterminé. Décidons : $x_1=x_0$, quel que soit x_0, et, afin d'assurer la continuité de la dérivée de y_1 en y_0, sur le segment $y_{0,k-1}(x) \leqq y_0(x) \leqq y_{0,k}(x)$ $(1 \leqq k \leqq m)$, faisons $y_1(x)$ linéaire en $\sin^2[\pi(y_0-y_{0,k-1})/2(y_{0,k}-y_{0,k-1})]$. Dès lors le problème posé vient d'être résolu.

Soit donnée la correspondance entre k points $\nu_0^k(x_0^k, y_0^k, 0)$ intérieurs à Γ et k points $\nu_1^k(x_1^k, y_1^k, 1)$ intérieurs à $\Delta(1 \leqq k \leqq m-1)$. Nous supposons les y_0^k croissants avec k, les x_0^k inégaux, de même qu'entre eux respectivement les x_1^k et les y_1^k.

Pour $0 \leqq x \leqq 1$, traçons dans Γ les segments $y \equiv y_{0,k}(x) \equiv y_0^k$, avec $y_{0,0}(x)=0$, $y_{0,m}(x) \equiv 1$. Nous posons $y_{1,0}(x) \equiv 0$, $y_{1,m}(x) \equiv 1$. Dans Δ nous pouvons évidemment tracer une ligne $y(x)=y_{1,1}(x)$ $[y_{1,1}(0)=y_{1,1}(1)$; $y'_{1,1}(0)=y'_{1,1}(1)]$ passant par ν_1^1, laissant au-delà d'elle (vers les $y>0$) tous les ν_1^k pour $k>2$ et limitant avec $y_{1,0}=0$ une aire égale à $y_{0,1}$ (pour préparer éventuellement entre Γ et Δ une correspondance conservant les aires).

Ensuite, de proche en proche, nous traçons dans Δ la ligne $y=y_{1,k}(x)$ $[y_{1,k}(0)=y_{1,k}(1)$; $y'_{1,k}(0)=y'_{1,k}(1)]$ passant par ν_1^k et laissant entre cette ligne et la précédente une aire égale à $y_{0,k}-y_{0,k-1}$. Par la solution du dernier problème traité, nous obtenons un réseau normal appliquant Δ sur Γ, chacun des arcs étant dans un plan $x=x_0$, et les $\nu_1^k(x_1^k, y_1^k, 1)$ étant venus en des points $(x_1^k, y_0^k, 0)$, En remontant la base du réseau de Γ à $\Delta(d)(d<1)$, en échangeant le rôle des x et des y, on forme un réseau où les arcs restent dans des plans $y=y_0$. Après cette seconde étape les ν_1^k de Δ sont venus sur les ν_0^k de Γ.

4. Supposons le domaine G_1 du plan $z=1$ lié par un réseau normal connu $\tau(\nu, N_1)$ aux points $\nu(u, v, d)$ du carré $\Delta(d)$ $(0<d<1)$. Considérons la division du plan $z=1$ par les carrés congruents à G_0. [Le nombre de ces carrés pour lesquels $G_{1,i}$ empiète est sensiblement le même que pour les carrés congruents à $G_{1,0}$, soit $(q_1+q_3+\ldots)(q_2+q_4+\ldots)$ les indices ne dépassent pas i et le dernier terme est égal au nombre des entiers utilisés]. Soit $\gamma_1(r, m)$ la partie commune à G_1 et à l'un de ces carrés, congru à G_0 par $(r, m, 1)$; $\gamma_1(r, m)$ est congru à $\gamma_0(r, m)$ dans G_0. Les $\gamma_0(r, m)$ n'ont pas de points intérieurs communs et leur réunion forme G_0; $\gamma_1(r, m)$ est composé de points $N_1^{r,m}$, de coordonnées $x_1^{r,m}, y_1^{r,m}$, 1. Dans G_0, $\gamma_0(r, m)$ est formé des points $N_0^{r,m}$, de coordonnées $x_0^{r,m}=x_1^{r,m}-r$, $y_0^{r,m}=y_1^{r,m}-m$ et 0.

D'autre part, les points $\nu^{r,m}(u^{r,m}, v^{r,m}, 1)$ liés aux $N_1^{r,m}$ par le réseau $\tau(\nu^{r,m}, N_1^{r,m})$ donnent dans $\Delta(d)$ un ensemble $\delta(r, m)$. Dans chacun des $\delta(r, m)$ prenons un point particulier $\nu^{r,m}$ de façon que tous les $u^{r,m}$ d'une part, tous les $\nu^{r,m}$ d'autre part soient différents, ainsi que les abscisses $x_0^{r,m}$ et les ordonnées $y_0^{r,m}$ des $N_0^{r,m}$ congruents aux $N_1^{r,m}$ liés aux $\nu^{r,m}$ choisis. Nous savons former le réseau normal reliant $\Delta(d)$ à G_0, de façon que $\nu^{r,m}$ vienne en $N_0^{r,m}$. Les deux points extrêmes de l'arc $\tau(N_0^{r,m}, \nu^{r,m})+\tau(\nu^{r,m}, N_1^{r,m})$ étant congrus, la trajectoire $T(M_0^{r,m})$ sur S^3 est un cycle. La solution correspondante $X(z)=f(z, X_0^{r,m}, 0)$ est périodique, x, y s'accroissent de r, m quand z s'augmente de 1. Le vecteur N_0N_n/n, indépendamment de n, et sa limite (pour n infini) sont $(r, m, 1)$. Les limites sont distinctes pour ces divers cycles.

5. On peut choisir des $N_0^{r,m}$ sur le côté de G_0, sur AB et AC. Les lignes λ_1, μ_1 parcourues de A_1 à B_1, de A_1 à C_1 coupent les droites $y=m$ et $x=r(z=1)$, respectivement, en des successions de points dont les abscisses (les ordonnées) [toutes comprises dans un intervalle de longueur inférieure à 1, en vertu du principe (p)] ont pour parties fractionnaires des nombres $x_0^{r,m}(y_0^{r,m}=0)$ ou $y_0^{r,m}(x_0^{r,m}=0)$. Si une collection de ceux-ci croît (dans le déplacement de N_1 sur λ_1, sur μ_1) on assujettira la correspondance (N_0, N_1) à lier ensemble les $N_0^{r,m}(x_0^{r,m}, 0, 0)$ ou $(0, y_0^{r,m}, 0)$ et les $N_1^{r,m}$ conjointement distingués, les $N_0^{r,m}$ sur AB, sur AC, les $N_1^{r,m}$ sur λ_1, sur μ_1.

Si $G_1=G_{1,2}$, et si $f_1(t)$ [si $f_2(t)$] sont positives avec un seul maximum, le plus grand entier inférieur à lui étant q_1-1 (et q_2-1) $\lambda_{1,2}$ coupe q_1-1 droites $y=m$ ($\mu_{1,2}$ coupe q_2-1 droites $x=r$), en $2(q_1-1)$ [en $2(q_2-1)$] points d'abscisses (d'ordonnées) croissantes avec le déplacement de N_1 sur $\lambda_{1,2}$ (sur $\mu_{1,2}$), et comprises dans un intervalle de longueur 1. Les $q_1 - 1$ (les $q_2 - 1$) premières ou les $(q_1 - 1)$ [les $(q_2 - 1)$] dernières de leurs parties fractionnaires croissent et correspondent à des entiers m (ou r) distincts.

On interpole comme il a été dit la correspondance (N_0, ν), N_0 décrivant AB du BC, et $\nu(u, v, 1)$ décrivant les côtés $v = 0$, $u = 0$ de $\Delta(d)$. La périodicité définit la correspondance sur les deux autres côtés de G_0, de $\Delta(d)$. Nous joignons normalement (dans les plans $y = 0$ et 1, $x = 0$ et 1), les couples N_0, ν homologues, ce qui nous donne $\nu(u, v, z_0)$ sur le contour de $\Delta(z_0) \equiv G_0(z_0)$ $(0 \leqq z_0 \leqq d)$, pour N_0 sur le contour de G_0. Pour toute valeur de z_0, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont donnés pour $x = 0$ et 1, $y = 0$ et 1; ensuite leurs dérivées partielles en x et y doivent avoir les mêmes valeurs (comme u et v elles-mêmes) pour $u = 0$ et $u = 1$, pour $v = 0$ et $v = 1$. L'équation $D(u, v)/D(x, y) = 1$, définissant la conservation des aires sur les $C^2(z)$ successifs, admet sans doute une solution (et peut-être une seule) remplissant toutes ces conditions.

A $\partial\theta/\partial\theta_0$ sur le tore simple correspond ici $dX/dX_0 = D(x, y)/D(x_0, y_0)$, dont le logarithme est $\int_{z_0}^{z} \operatorname{div} F \, dz$. X étant remplacé dans $\operatorname{div} F$ par $X = f(z, X_0, z_0)$. L'hypothèse de la conservation des aires (vérifiée si F dérive d'un potentiel en x et y, pour chaque z) est bien particulière. Elle correspondrait dans le cas du tore simple à la conservation des longueurs sur le méridien, donc à $d\theta/d\varphi = F(\varphi)$ périodique, le nombre rotationnel α étant $\int_0^1 F(\varphi)\, d\varphi$.

La conservation des aires dans les plans intermédiaires $(0 \leqq z \leqq d)$ n'est pas réalisée dans notre construction (3). Sans doute pourrait-on l'obtenir sans autre condition que la jonction réalisée des couples $\nu^{r,m}$, $N_0^{r,m}$.

6. L'étude des arcs $t^n(N_0)$ de $t(N_0)$, aboutissant à $N_n(z = n)$ implique l'itération $(n - 1)$ fois de la liaison (N_0, N_1). Elle exige une définition très précise de celle-ci. Pour construire les réseaux réalisant de nouvelles hypothèses, on procédera ainsi. On relève en $\Delta(d')(0 < d' < 1)$ la base du dernier réseau obtenu, liant G_0 à G_1; $\gamma_1(r, m)$ est amené en $\delta^{r,m}(d')$ sur $\Delta(d')$. On joint maintenant $\Delta(d')$ à G_0 par des traits verticaux, (parallèles à Oz), dont persisteront définitivement ceux qui joignent $\nu^{r,m}(x_0^{r,m}, y_0^{r,m}, d')$ à $N_0^{r,m}$, congru à $N_1^{r,m}$; $\nu(u, v, d)$ est lié à $N_1(x_1, y_1, 1)$ par le réseau normal $\tau(\nu, N_1)$ et à $N_0(x_0, y_0, 0)$ par le trait vertical $x = u = x_0$, $y = v = y_0$; $\delta^{r,m}(d')$ est relié verticalement à $\delta^{r,m}(0)$, ce dernier ayant en commun avec $\gamma_0(r, m)$ le point $N_0^{r,m}$ et son entourage. Nous désignerons par $c(N, r)$ le cercle ayant son plan parallèle à Oxy, son centre en N et son rayon égal à r.

Prenons un des points cycliques $N_0^{r,m}$. Soit $\rho > 0$, moindre que la moitié de la distance de ce point à la frontière de l'ensemble $\gamma_0(r, m).\delta^{r,m}(0)$.

Si dist. $\nu\nu^{r,m}$ ($=$ dist. $N_0 N_0^{r,m}$) $\leqq r$, soit $g(r)$ le maximum de la distance $N_1 N_1^{r,m}$.

Si dist. $\nu\nu^{r,m} \geqq r$, soit $h(r)$ la minimum de la distance $N_1 N_1^{r,m}$; $g(r)$ et $h(r)$ croissent avec r, la correspondance (ν, N_1) étant uniforme dans les deux sens (et continue). Nous allons changer la liaison des cercles $c(\nu^{r,m}, \rho)$ et $c(N_0^{r,m}, \rho)$

par transformation radiale. A un point $N_0^{r,m} + r_0 e^{i\theta}$ correspondra un point $\nu^{r,m} + r e^{i\theta}$; de plus, r sera fonction $r(r_0)$ de r_0 seul. Le nouveau réseau normal joignant les deux cercles s'établira immédiatement.

Soit s vérifiant $s \leqq \rho/2$ et $g(s/2) \leqq \rho/2$. Pour $0 \leqq r_0 \leqq s$, nous faisons $r(r_0) = g(r_0/2)$; et, pour $s \leqq r_0 \leqq \rho$, $r(r_0)$ variera linéairement de $g(s/2)$ à ρ. Alors, si $r_0 \leqq s$, la distance $N_1 N_1^{r,m}$ sera inférieure à $r_0/2$, et il en sera de même de la distance à $N_0^{r,m}$ du point de G_0 congruent (par r, m) à N_1. Par suite la distance $N_2 N_2^{r,m}$ sera inférieure à $r_0/4$, etc. Le cycle $T(N_0^{r,m})$ sera attractif.

Si $s' \leqq \rho/2$ et $h(2s') \leqq \rho/2$, en faisant, pour $0 \leqq r_0 \leqq s'$, $r(r_0) = h(2r_0)$, le cycle devient répulsif.

On pourrait, suivant une direction issue de $N_0^{r,m}$ avoir l'attraction, et la répulsion suivant la direction perpendiculaire; r serait fonction de r_0 et de θ, passant continûment de $g(r_0/2)$ à $h(2r_0)$. Et enfin, pour les divers $N_0^{r,m}$, on adopterait soit l'attraction ou la répulsion uniformément, soit des mélanges des divers types.

Le lecteur usera de ces indications pour construire des exemples réalisant des hypothèses variées.

(1) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1923.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 248, p. 28-33, séance du 5 janvier 1959.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Les équations différentielles périodiques. Allure asymptotique des intégrales.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**.

Les trajectoires intégrant le système périodique $dX/dz = F(z, X)$ $[X = (x, y)]$ étant représentées dans l'espace cartésien U^3 des points (x, y, z), on étudie l'ensemble d'accumulation pour n infini des vecteurs $N_0 N_n/n$, $N_0(x_0, y_0, 0)$ fixe et $N_n(x_n, y_n, n)$ variable appartenant à la même trajectoire.

Comme nous l'avons dit dans notre première Note [1], on se place pour traiter cette question à deux points de vue différents, chacun étant corrélatif au mode de représentation des trajectoires intégrant l'équation, de période 1 en x, y, z :

$$\frac{dX}{dz} = F(z, X) \qquad [(X = X(x, y)].$$

1° Avec la figuration du point $N(x, y, z)$ dans l'espace cartésien U^3, on considère le vecteur OI_n, équipollent à $N_0 N_n$ (n entier), avec son origine $O(0,0,0)$ en celle de U^3 ; $N_0(x_0, y_0, 0)$ décrit le carré $G_0[0 \leqq (x_0 \text{ et } y_0) \leqq 1,\ z = 0]$, et $N_n(x_n, y_n, n)$ est l'extrémité de l'arc $t^n(N_0)(0 \leqq z \leqq n)$, sur l'image $t(N_0)$ de la trajectoire correspondant sur S^3 aux données initiales représentées par N_0 ; $I_n = I_n(N_0)$ est le point $(x_n - x_0, y_n - y_0, n)$. Soit

$$i_n\left[\frac{(x_n - x_0)}{n}, \frac{(y_n - y_1)}{n}, 1\right] = i_n(I_0)$$

l'extrémité du vecteur $O i_n$ équipollent à $N_0 N_n/n$. Ce sont les ensembles d'accumulation des $i_n(N_0)$ qu'il s'agit de déterminer pour les diverses positions de N_0 dans G_0, $|n|$ croissant, par valeurs soit positives, soit négatives, de n. Ces ensembles sont les mêmes que si n prenait toutes les valeurs réelles.

2° Avec la figuration du point $M(x, y, z)$ sur le tore S^3 de U^4, tous les points congrus $(x + r, y + m, z + q)$ ayant la même image M, on considère l'ensemble d'accumulation sur S^3 de la trajectoire $T(M_0)$, issue de $M_0(x_0, y_0, z_0)$, et particulièrement l'ensemble d'accumulation sur le méridien $C^2(z_0)$ de S^3 des points M_n de $T(M_0)$ pour $z = z_0 + n$. Solidairement avec la première étude nous faisons $z_0 = 0$.

Une solution périodique $X = J(z)$ est caractérisée par trois entiers premiers entre eux r, m, q. Au terme de la période, x, y, z se sont respectivement accrus de r, de m, de q. Dans U^3, l'arc $t^q(N_0)$ joint N_0 à N_q, translaté de N_0 par (r, m, q). Dans U^4, soit Z^3 l'axe non transverse de S^3 ; Z^3 est dans le plan équatorial de tout tore méridien $C^2(z)$ de S^3; $X^2(z)$ désignera l'axe non transverse de $C^2(z)$, et $Y^2(z)$ son cercle moyen central. Sur le cycle $T(M_0)$ figurant $J(z)$ sur S^3, le mobile $M(x, y, z)$ tourne q fois autour de Z^3 invariable, r fois autour de $X^2(z)$ et m fois autour de $Y^2(z)$, $X^2(z)$ et $Y^2(z)$ accompagnant le mouvement de $C^2(z)$ tandis que z croît de o à q.

Un cycle, et l'ensemble des q points distincts où il coupe $C^2(z_0)$, sont chacun identiques à leur ensemble d'accumulation.

1. Soient W_n et w_n les ensembles formés des points $I_n(N_0)(z=n)$ et $i_n(N_0)(z=1)$, N_0 décrivant la totalité de G_0. *La nature de l'ensemble W_n demanderait une étude approfondie.*

Pour l'équation différentielle unique $d\theta/d\varphi = F(\varphi, \theta)$, si φ_0 est constant, θ_n et θ_0 croissent ensemble, et de 1 conjointement (θ et φ sont mesurés en arcs de la circonférence de longueur 1); $\theta_n - \theta_0$ est donc inclus dans un intervalle $W_n(\varphi_0)$ inférieur à 2 en longueur ($\theta_n - \theta_0$ reste même compris entre deux entiers consécutifs *s'il n'y a pas de solution périodique, hypothèse dont le rôle est essentiel pour ce sujet*).

Les aires de G_0 et de G_n sont égales à 1. Il ne semble pas possible d'en rien conclure touchant l'aire de W_n.

L'exemple suivant fortifie ce doute. Soient $\nu_0(x_0, y_0, 0)$ et $\nu_n(u, v, n)$ décrivant respectivement les couronnes, égales pour l'aire, $\Gamma_0(x_0 + iy_0 = re^{i\theta}, 1 \leqq r \leqq 2)$ et $\Gamma_1(u + iv = r' e^{i\theta}, R - \varepsilon \leqq r' \leqq R)$; avec $2\varepsilon R - \varepsilon^2 = 3$. Supposons r' fonction linéaire croissante de r. L'extrémité du vecteur mené par O, équipolent à $\nu_0\nu_n$, décrit la couronne $\rho e^{i\theta}$, avec $R - 2 \leqq \rho \leqq R - 1 - \varepsilon$, dont l'aire est sensiblement pour ε petit, $3/\varepsilon$, si celle de Γ_0 et de Γ_1 est prise pour unité.

Soient $\overline{W}_n$ dans le plan $z = n$, $\overline{w}_n$ dans le plan $z = 1$, les plus petits domaines convexes renfermant W_n, w_n; n et p étant *positifs*, p fixe, n croissant, soit $n = sp + s'$ $(0 \leqq s' < p)$:

$$N_0N_n = \sum_{k=1}^{k=s} N_{(k-1)p}N_{kp} + N_{ps}N_{ps+1} + \ldots + N_{n-1}N_n.$$

Les s premiers vecteurs ont leurs extrémités dans W_p. Leur somme est $sV_p = spv_p$, les vecteurs V_p, v_p étant dans $\overline{W}_p$, dans $\overline{w}_p$. Les s' derniers sont dans W_1. Leur somme vaut $s'v_1$, v_1 étant dans $\overline{w}_1$. On en conclut immédiatement que, n croissant indéfiniment, l'ensemble d'accumulation $l^+(N_0)$ des points $i_n(N_0)$ est dans $\overline{w}_p$ quel que soit p. Notons $\overline{w}_{pp'} \subset \overline{w}_p \cdot \overline{w}_{p'}$, $\overline{w}_p \subset \overline{w}_1$, pour p, p' quelconques; $l^+(N_0) \subset \Pi \overline{w}_p = \overline{w}$, qui est convexe.

$\overline{w}$ contient les points $(r/q, m/q, 1)$ pour tout cycle de périodes (r, m, q). Pour que $l^+(N_0)$ se réduise à un point indépendant de N_0 comme avec l'équation unique, il faut et il suffit que le diamètre de w_n tende vers o quand n croît. Cela sera impossible s'il existe deux cycles à périodes différentes.

Pour avoir $l^-(N_0)$, ensemble d'accumulation des $i_n(N_0)$ pour n négatif décroissant, il faut inverser la liaison (N_0, N_1), en (N_0, N_{-1}). Dans le cas de G_0 changé en un domaine $G_{1,i}$, G_0 est décrit par $(u_i = x_0,\ v_i = y_0,\ o)$ et $G_{1,i}$ par $(\xi_1 + u_0 = x_1,\ \eta_1 + v_0 = y_1,\ 1)$. G_0 décrit par $(\xi_1 + u_0 = x_0,\ \eta_1 + v_0 = y_0,\ o)$ correspond à G_{-1} décrit par $(u_i = x_{-1},\ v_i = y_{-1},\ -1)$. Si $u_i = \varphi(u_0, v_0)$, $v_i = \psi(u_0, v_0)$, ce que nous écrivons $(u_i, v_i) = \Phi(u_0, v_0)$, il s'ensuit

$$(x_{-1}, y_{-1}) = \Phi(x_0 - \xi_1, y_0 - \eta_1).$$

En particulier, si $N_0 \equiv A_0$, N_{-1} est $[\Phi(-\xi_1, -\eta_1), -1]$,

2*a*. Examinons les cycles et les ensembles $l^+(N_0)$, $l^-(N_0)$, définis par les premiers domaines $G_{1,i}$. Avec $G_{1,1}$:

$$u_1 = u_0, \qquad v_1 = v_0 - f_1(u_0) \qquad \text{ou} \qquad u_0 = u_1,\ v_0 = v_1 + f_1(u_1),$$
$$x_1 - x_0 = \xi_1, \qquad y_1 - y_0 = \eta_1 + f_1(x_0),$$
$$x_n - x_0 = n\xi_1; \qquad y_n - y_0 = n\eta_1 + \sum_{k=0}^{k=n-1} f_1(x_0 + k\xi_1).$$

Le vecteur N_0N_n/n tend vers un point unique $[\xi_1, \eta_1 + \varphi(x_0), 1]$, le même pour tous les points M_0 du cercle $c^1(o, x_0)$, méridien $(x = x_0,\ z = o)$ de $C^2(o)$.

Au bout d'un tour décrit autour de Z^3, tout cercle $c^1(o, x_0)$ réapparaît sur C^2 (o) en coïncidence avec le méridien $c^1(o, x_0 + \xi_1)$. Pendant cette révolution, $c^1(o, x_0)$ a glissé d'une pièce sur lui-même de l'angle $\eta_1 + f_1(x_0)$.

Si ξ_1 est irrationnel, tous les cercles $c^1(o, x_0 + n\xi_1)$ sont distincts. *Il n'y a pas de cycle.* $\varphi(x_0) = \int_0^1 f_1(t)\,dt$ est indépendant de x_0. *Le vecteur* N_0N_n/n *a une position limite, indépendante de* N_0.

Si ξ_1 est rationnel, et vaut r/s (irréductible), $c^1(o, x_0)$ réapparaît sur $C^2(o)$ en s positions distinctes. Au bout de s tours autour de Z^3, $c^1(o, x_0)$ est revenu à sa position initiale, ayant glissé sur lui-même de l'angle $s[\eta + \varphi(x_0)]$ et avec $\varphi(x_0) = (1/s) \sum_{k=0}^{k=s-1} f_1[x_0 + (k/s)]$. Ce dernier angle dépend de x_0 [à moins que $f_1(t)$ ne soit une série trigonométrique en $2\pi t$, où manqueraient les termes de tous les rangs multiples de s, sauf le rang zéro]; $\eta_1 + \varphi(x_0)$ varie continûment et décrit un intervalle inférieur en longueur à l'oscillation de f_1.

Si $\eta_1 + \varphi(x_0)$, dont la période est $1/s$, prend une valeur rationnelle (i/js), i/j étant irréductible, tous les points de $c^1(o, x_0)$ décriront un cycle de périodes jr, i, js. A toute fraction irréductible i/j correspondent s cercles $c^1(o, x_0)$ (équidistants), se reproduisant cycliquement par chacun de leurs points avec le même système particulier de périodes. Les cycles sont partout denses sur S^3. En conséquence, le rapport N_0/N_n dépend de N_0.

Si $\eta_1 + \varphi(x_0)$ est irrationnel, les trajectoires des points de $c^1(0, x_0)$ ne se ferment pas.

2*b*. Mais déjà pour le domaine $G_{1,2}$, l'itération indéfinie de la liaison (N_0, N_1) ne donne pas de résultats immédiatement apparents. Avec $x_0 = u_2$, $y_0 = v_2$, $x_1 = \xi_1 + u_0$, $y = \eta_1 + v_0$:

$$u_0 = u_1, \qquad v_0 = v_1 + f_1(u_1); \qquad u_1 = u_2 + f_2(v_2), \qquad v_1 = v_2;$$
$$x_1 - x_0 = \xi_1 + f_2(y_0), \qquad y_1 - y_0 = \eta_1 + f_1[x_0 + f_2(y_0)] = \eta_1 + f_1(x_1 - \xi_1)$$

Nous observons que si $q_1 - 1$, $q_2 - 1$ sont les plus grands entiers inférieurs à l'oscillation de f_1, de f_2, d'une part l'équation $\xi_1 + f_2(y_0) = r$ entier a des solutions y_0 correspondant à $q_2 - 1$ valeurs consécutives de r. Pour ces valeurs de y_0, $f_1(x_1 - \xi_1) = f_1(x_0 - \xi_1)$, l'équation

$$y_1 - y_0 = m \text{ entier} = \eta_1 + f_1(x_0 - \xi_1)$$

a des solutions x_0 (comprises entre 0 et 1) correspondant à $q_1 - 1$ valeurs consécutives de m. Chaque couple (x_0, y_0) ainsi lié définit un point $N_0(x_0, y_0, 0)$ origine d'un cycle à périodes $(r, m, 1)$, et il y a $(q_1 - 1)(q_2 - 1)$ groupes distincts de ces périodes.

Nous avions montré la possibilité de réaliser ce même nombre de cycles primaires, par un procédé empirique, sans conservation des aires.

Pour les cycles à deux tours décrits autour de Z^3 avec les conditions

$$x_2 - x_0 = 2\xi_1 + f_2(y_0) + f_2(y_1) = r, \qquad y_2 - y_0 = 2\eta_1 + f_1(x_1 - \xi_1) + f_1(x_2 - \xi_1) = m,$$

on a deux équations en x_0 et y_0.

Voici ces équations :

$$2\xi_1 + f_2(y_0) + f_2[y_0 - \eta_1 - f_1(x_0 - \xi_1)] = r; \qquad 2\eta_1 + f_1[x_0 + f_2(y_0)] + f_1(x_0 - \xi_1) = m.$$

Les lignes correspondantes se croisent déjà aux points engendrant les cycles d'un tour; l'oscillation des seconds membres étant accrue, sans doute y a-t-il d'autres points communs, fournissant des cycles à périodes $(r, m, 2)$ (r et m non tous deux pairs).

Nous laissons au lecteur le soin de chercher le parti à tirer de ces observations.

3. α et β étant deux nombres irrationnels, linéairement indépendants (il n'existe pas de relation $a\alpha + b\beta + c = 0$ en nombres entiers a, b, c), il est possible de créer sur un exemple des conditions analogues au cas singulier de Poincaré pour l'équation unique. Le point $i_n(N_0)$ tendra vers $(\alpha, \beta, 1)$ indépendamment de N_0 et, sur $C^2(0)$, les points $M_n(x_n, y_n, n)$ appartenant à $T(M_0)$ ont leurs ensembles d'accumulation $J^2_+(M_0)$, $J^2_-(M_0)$, pour $n + \infty$ et $n - \infty$, iden-

tiques à la fois entre eux et à un ensemble parfait totalement discontinu J^2 indépendant de M_0.

Soient α_n, β_n les parties fractionnaires de $n\alpha$, de $n\beta$ [$(0 < (\alpha_n$ et $\beta_n) < 1$, sauf $\alpha_0 = \beta_0 = 0)$]. Les points (α_n, β_n) sont partout denses dans G_0. Au point $N_0(x_0, y_0, 0)$ de G_0 correspondra un point $N_1(x_1, y_1, 1)$, x_1 étant fonction de x_0 seul et y_1 fonction de y_0 seul. Il nous suffira de décrire la liaison $x_1(x_0)$, la liaison $y_1(y_0)$ étant toute pareille.

Donnons nous deux suites de nombres positifs ε_n, ε'_n (on peut faire varier n de 0 inclus à $+\infty$, ou de $-\infty$ à $+\infty$), vérifiant $\Sigma\varepsilon_n = 1 - a$, $\Sigma\varepsilon'_n = 1 - b$, avec $0 \leqq a$, $0 \leqq b$; ensuite $g(u)$, $h(v)$, deux fonctions continues croissantes, réalisant $g(0) = h(0) = 0$ et $g(1) = a$, $h(1) = b$.

(u, v) étant un point de G_0, nous changeons u en x_0 par la règle suivante : Pour $0 \leqq u \leqq 1$:

$$x_0(u) = \varepsilon_0 + (0\,\Sigma\, u)\,\varepsilon_n + \omega\,\varepsilon_p + g(u);$$

$(0\,\Sigma\, u)\,\varepsilon_n$ signifie [1] la somme des nombre ε_n relatifs aux points α_n situés sur l'intervalle $(0, u)$ (extrémités exclues); ω est nul si u diffère de tous les $\alpha_n (u \neq \alpha_p)$ et ω prend toutes les valeurs du segment $(0, 1)$ si $u = \alpha_p$. Posons

$$\xi_p = \varepsilon_0 + (0\,\Sigma\,\alpha_p)\,\varepsilon_n + g(\alpha_p).$$

Au point α_p correspond le segment $\eta_0^p\,(\xi_p \leqq x_0 \leqq \xi_p + \varepsilon_p)$; $x_0(0)$ décrit le segment $\eta_0^0\,(0, \varepsilon_0)$; $x_0(1) = 1$. Le segment $0 \leqq u \leqq 1$ est changé en $0 \leqq x_0 \leqq 1$, et $u(x_0)$ est continu, non décroissant, stationnaire sur les segments η_0^p (comparer avec AM, II, p. 897-899).

La définition se complète par $x_0(u + r) = r + x_0(u)$ (r entier); $u(x_0)$ est continu, pour toute valeur de x_0, et de période 1 en x_0.

Si l'on retire du semi-segment $(0 < x_0 \leqq 1)$ les intervalles η_0^p, il reste un ensemble parfait totalement discontinu γ_0 d'extrémités $(\varepsilon_0, 1)$, de longueur $g(u)$ sur l'intervalle $[0, x_0(u)]$.

La correspondance (x_0, x_1) $(0 \leqq x_0 \leqq 1)$ sera définie par $x_1 = x_0(u + \alpha)$ si $x_0 = x_0(u)$. Soit s_1 l'entier $\alpha - \alpha_1$; $x_0(u + \alpha) = s_1 + x_0(u + \alpha_1)$. Si $u + \alpha_1 < 1$, nous avons déjà l'expression de $x_0(u + \alpha_1)$. Si $u > 1 - \alpha_1$, $x_0(u + \alpha) = s_1 + 1 + x_0(u + \alpha_1 - 1)$. Pour $x_0 = 0$, $x_1 = s_1 + \xi_1$.

Soit $u = \alpha_p$; $\alpha_p + \alpha_1 = \alpha_{p+1}$ si $\alpha_p + \alpha_1 < 1$; sinon, $\alpha_p + \alpha_1 = 1 + \alpha_{p+1}$. L'ensemble parfait γ_0 a été changé en γ_1 par translation $(s_1 + \xi_1\ 0, 1)$. Les intervalles contigus η_0^p à γ_0 et η_1^{p+1} $(= \eta_0^{p+1})$ à γ_1 se correspondent. On fait sur eux varier x_1 linéairement en x_0, x_1 et x_0 croisent continûment ensemble; [on peut réaliser des correspondances où x_1 possède en x_0 une dérivée continue sur tout le segment $(0, 1)$ (AM. II, p. 900)].

Pareillement la fonction $y_0(v)$, changeant $0 \leqq v \leqq 1$ en $0 \leqq y_0 \leqq 1$, $y_0 - v$ étant périodique de période 1, fait apparaître sur Oy un ensemble parfait totalement discontinu γ'_0 de mêmes extrémités que le segment $[0, (\varepsilon'_0 \leqq y \leqq 1), 0]$.

Dans G_0, un ensemble parfait totalement discontinu Γ_0 est formé des points se projetant dans γ_0 sur Ox et dans γ'_0 sur Oy.

La correspondance $y_1(y_0)$ se définit par $y_1 = y_0(v+\beta)$ si $y_0 = y_0(v)$; y_1 croît avec y_0. Les segments joignant $N_0(x_0, y_0, 0)$ à $N_1(x_1, y_1, 1)$ sont disjoints. On en fait un réseau normal, définissant un système différentiel périodique.

γ'_0 se change en γ'_1 sur la droite $x = 0$, $z = 1$; Γ_0 devient Γ_1. Sur le parallèle $y = 0$, sur le méridien $x = 0$, de $C^2(0)$, respectivement γ_0 et γ_1, γ'_0 et γ'_1 sont représentés par les mêmes ensembles parfaits j, j'; J^2, ensemble parfait de $C^2(0)$ formé des points dont les méridiens et les parallèles rencontrent respectivement j et j', représente sur $C^2(0)$, Γ_0 et Γ_1.

Passons à l'itération de (N_0, N_1) et à l'ensemble des points de rencontre M_n de $T(M_0)$ avec $C^2(0)$.

$N_n(x_n, y_n, n)$ est défini par $x_n = x_0(u + n\alpha)$, $y_n = y_0(u + n\beta)$ si $x_0 = x_0(u)$, $y_0 = y_0(v)$. Soit $s_n = n\alpha - \alpha_n$; $x_n = s_n + x_0(u + \alpha_n)$ si $u < 1 - \alpha_n$ et $x_n = s_n + 1 + x_0(u + \alpha_n - 1)$ si $u > 1 - \alpha_n$(u, v est dans G_0). Donc x_n/n tend vers α; et de même y_n/n tend vers β. Le point $i_n(N_0)$ tend vers $(\alpha, \beta, 1)$ indépendamment de N_0.

D'autre part, si $u_n = u + \alpha_n$ (ou $u + \alpha_n - 1$), $v_n = v + \beta_n$ (ou $v + \beta_n - 1$), les points $(u_n, v_n, 0)$ sont situés et partout denses sur $G_0(n < 0$ ou $n < 0)$; $\mu_n[x_0(u_n), y_0(u_n), 0]$ est le point de G_0 congru à N_n.

Si $N_0[x_0(u), y_0(v), 0] = \mu_0$ est sur Γ_0, les μ_n sont tous et partout denses sur Γ_0; si M_0 est sur J^2 les M_n (aussi bien $n > 0$ et $n < 0$) sont tous, et partout denses, sur J^2

Si N_0 est étranger à Γ_0, les μ_n sont isolés, mais Γ_0 est leur ensemble d'accumulation, indépendamment de N_0. Si M_0 est étranger à J^2, les M_n sont isolés, et leur ensemble d'accumulation (soit pour $n + \infty$, soit pour $n - \infty$) est J^2, indépendamment de M_0.

(*) Séance du 12 janvier 1959.

(1) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1691.

(1) Cette notation est fréquemment utilisée dans mon *Mémoire sur la dérivation* où elle est introduite p. 10.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 248, p. 325-330, séance du 19 janvier 1959.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Les équations différentielles périodiques. Points d'accumulation des intégrales.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy.**

L'équation périodique $dX/dz = F(z, X)$ $[X = (x, y)]$ définissant sur le tore S^3, variété à trois dimensions, une famille de trajectoires, on étudie pour chacune d'elles, et pour ses points de rencontre avec un tore S^2 méridien de S^3, leurs ensembles d'accumulation.

Dans ma précédente Note ([1]), j'étudiais l'allure à l'infini des images $t(N_0)$ dans U^3 des trajectoires $T(M_0)$ intégrant sur le tore S^3 de U^4 le système périodique $dX/dz = F(z, X)$ $[X = (x, y)]$. Avec certains exemples particuliers nous avons noté les propriétés correspondantes présentées par les trajectoires $T(M_0)$ et par l'ensemble $\Omega(M_0)$ de leurs points de rencontre avec le tore $C^2(o)$, méridien de S^3. Nous devons passer maintenant aux considérations générales concernant les ensembles d'accumulation de $T(M_0)$ sur S^3, de $\Omega(M_0)$ sur $C^2(o)$. Nous désignons par $T_+(M_0)$, $T_-(M_0)$, par $\Omega_+(M_0)$, $\Omega_-(M_0)$ les parties de $T(M_0)$ correspondant à $z \geqq o$, à $z \leqq o$, l'ensemble des M_n pour $n \geqq o$, pour $n \leqq o$; $V_+^3(M_0)$, $V_-^3(M_0)$ seront les ensembles d'accumulation de $T_+(M_0)$, de $T_-(M_0)$ sur S^3; $J_+^2(M_0)$, $J_-^2(M_0)$, ceux de $\Omega_+(M_0)$, de $\Omega_-(M_0)$ sur $C^2(o)$.

Nous rappellerons les principaux faits constatés pour l'équation périodique simple $d\theta/d\varphi = F(\varphi, \theta)$. Le point $M(\varphi, \theta)$ décrit le tore S^2 dont $C^1(o)$ est le méridien $\varphi = o$. Nous poserons la question de la possibilité ou de l'impossibilité d'étendre ces propriétés au cas du couple d'équations. $V_+^2(M_0)$, ..., $J_+^1(M_0)$ seront les ensembles d'accumulation de $T_+(M_0)$..., de $\Omega_-(M_0)$ sur S^2, sur $C^1(o)$ qui contient $\Omega(M_0)$.

1° Qu'il y ait ou non des cycles, l'ensemble des nombres $(\theta_n - \theta_0)/n$ [des points $i_n(\theta_0)$ situés sur la droite $\varphi = 1$ dans le plan des φ, θ] possède un point d'accumulation unique α, indépendant de θ_0, le même pour $n + \infty$, et pour $n - \infty$.

Cette propriété n'a pas d'analogue avec le système double, puisque nous avons réalisé le cas de cycles partout denses sur S^3, et dont les périodes (r, m, q) forment des associations toutes différentes.

2° *S'il existe des cycles sur* S^2 (α rationnel), les ensembles $V_+^2(M_0)$, $V_-^2(M_0)$ sont généralement différents et ils dépendent de M_0.

Par exemple, soit H un ensemble de parallèles de S^2, H étant fermé, fini ou non, dénombrable ou non, partiellement continu on non dense.

On forme immédiatement une équation $d\theta/d\varphi = F$, possédant une famille de cycles identique à H. Celui-ci sépare sur S^2 des bandes B_m limitées par deux parallèles ϖ, ϖ' de H. Si M_0 est dans B_m, $V_+^2(M_0)$, $V_-^2(M_0)$ seront à volonté l'un (et le même pour B_m donné) ϖ, l'autre ϖ'. Sur $C^1(o)$, les M_n sont isolés si M_0 est étranger à H.

Avec le système de deux équations, s'il y a des cycles, et particulièrement des cycles de périodes diverses, les ensembles $V_+^3(M_0)$, $V_-^3(M_0)$ [et corrélativement $J_+^2(M_0)$, $J_-^2(M_0)$], très généralement différents, doivent pouvoir présenter des dispositions variant beaucoup avec M_0. Je soumets ce sujet d'étude au lecteur.

3° S'il n'existe pas de cycle sur S^2 (α irrationnel) : indépendamment de M_0, d'une part $V_+^2(M_0)$, $V_-^2(M_0)$, d'autre part $J_+^1(M_0)$, $J_-^1(M_0)$ sont identiques entre eux, et aussi à un ensemble V^2, à un ensemble J^1, indépendants de M_0, le dernier parfait.

Nous avons trouvé un exemple de système double, où l'absence de cycles s'accompagne de ce fait : $i_n(N_0)$ tend vers un point unique o, le même pour $n + \infty$ et pour $n - \infty$, et ce point est indépendant de N_0. *Ces conditions sont-elles des conséquences nécessaires de l'absence de cycles sur* S^3 ? Je pose la question.

4° Toujours en l'absence de cycle sur S^3 (α irrationnel), si M_0 est sur J^1, $\Omega(M_0)$ est partout dense sur J^1, $T(M_0)$ est partout dense sur V^2.

Dans le cas où J^1 est non dense sur $C^1(o)$, et V^2 non dense sur le tore S^2, j'ai signalé (AM, II, p. 896) que les contigus i_m de J^1 pouvaient se répartir en plusieurs séries distinctes, et même en une infinité, chacun des i_m étant (par la substitution θ_0, θ_1) le conséquent d'un contigu de la même série et le précédent d'un autre. Les i_m offrent la disposition mutuelle sur $C^1(o)$ des points $e^{i(\omega_p + n\alpha)}$ sur le cercle trigonométrique, les ω_p étant des irrationnelles deux à deux indépendantes (p et n entiers, $p > 0$, n quelconque).

Chacune de ces séries de contigus est la section par $C^1(o)$ d'une région R_p du complémentaire de V^2 sur S^2, chaque région R_p a pour frontière la totalité de V^2. Dans le plan, les exemples de continus, frontière commune de plus de deux régions ou d'une infinité de régions, sont assez laborieux à créer. Sur le tore S^2, l'opération est très simple.

Sur S^3, les ensembles $V_+^3(M_0)$, $V_-^3(M_0)$ sont aussi des continus, puisque les arcs M_0M_n et M_0M_{-n} de $T(M_0)$ sont des continus. Soit K l'un de ces continus, par exemple $V_+^3(M_0)$. On voit immédiatement que si $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ est sur K, $T(M'_0)$ est intégralement sur K.

En effet, M'_0 est point limite, pour k et $z_k + \infty$, d'une suite $P_k(u_k, v_k, z_k)$ située sur $T(M_0)$: n étant positif ou négatif, mais fixe, soient $M'_n(x'_n, y'_n, z'_0 + n)$ sur $T(M'_0)$ et $P_{k+n}(u_{k+n}, v_{k+n}, z_k + n)$ sur $T(M_0)$. Dès $k + n > 0$, P_{k+n} est sur $T_+(M_0)$, et pour $k + \infty$, en raison de la continuité de $F(x, y, z)$, l'arc P_kP_{k+n} de $T(M_0)$ tend vers l'arc $M'_0M'_n$ de $T(M'_0)$. Donc M'_n est sur K, $T(M'_0)$ est en totalité sur K.

Je pose ces deux questions :

a. $T_+(M'_0)$ et $T_-(M'_0)$ sont-ils nécessairement partout denses sur $K=V^3_+(M_0)$, sur $K=V^3_-(M_0)$?

b. Sinon, en est-il au moins ainsi quand l'ensemble $\Omega(M_0)$ est dense en lui-même? Nous disons en même temps que $T(M_0)$ est dense en lui-même, chacun de ses points lui étant accumulatif.

Convenons de dire qu'un continu K de S^3 est de l'espèce (E) s'il contient la trajectoire $T(M_0)$ de chacun de ses points M_0; $V^3_+(M_0)$ et $V^3_-(M_0)$ sont de l'espèce (E). Nous dirons qu'un continu K de l'espèce (E) est plus particulièrement de l'espèce (E_0) si, pour chacun de ses points M_0, $T_+(M_0)$ et $T_-(M_0)$ sont partout denses sur $K \equiv V^3_-(M_0) \equiv V^3_+(M_0)$.

Tout continu K *de* S^3, *ne contenant pas de cycle et appartenant à l'espèce* (E), *renferme un continu* K_0 *de l'espèce* (E_0).

Si K n'est pas dans (E_0) il existe sur K deux points M^1_0 et I_1, distants de $r_1 > 0$, tels que la sphère ouverte $\sigma(I_1, r_1)$ de U^4, ayant pour centre I_1 et pour rayon r_1, ne contient aucun point soit de $T_+(M^1_0)$, soit de $T_-(M_0)$. Le maximum de r_1 est atteint. Nous supposons r_1 égal à ce nombre. Les continus $V^3_+(M^1_0)$ et $V^3_-(M^1_0)$ sont dans K, disjoints de $\sigma(I_1, r_1)$, et ils sont de l'espèce (E). Si tous deux sont étrangers à (E_0), soit K_1 l'un d'eux; puis dans K_1, deux points M^2_0, I_2 de distance r_2 maximum, tels que $\sigma(I_2, r_2)$ ne contient aucun point soit de $T_+(M^2_0)$ soit de $T_-(M^2_0)$. Nous supposons K_1 identique au continu $V^3_+(M^1_0)$, $V^3_-(M^1_0)$ donnant le plus grand r_2; I_2 et $T(M^2_0)$ sont sur K_1, contenu dans K. Donc $r_2 \leqq r_1$. Si $V^3_+(M^2_0)$ et $V^3_-(M^2_0)$ sont tous deux étrangers à (E_0), on recommence. Et ainsi de suite.

Ou bien on est arrêté à un ensemble K_m appartenant à (E_0). Ou bien on continue indéfiniment. Les K_n décroissent. Les nombres r_n ne croissent pas. Or la sphère $\sigma(I_n, r_n)$ ne contenant aucun point de K_{n+1} et r_n décroissant, toutes les sphères $\sigma(I_n, r_n/2)$ sont disjointes. Donc r_n tend vers 0. Soit $K_\infty = \Pi K_n$; K_∞ est un continu (ou un point). Si M_0 est sur K_∞, $T(M_0)$ est dans tout K_n, donc dans K_∞. De plus la distance à $T_+(M_0)$ et à $T_-(M_0)$ de tout point I de K_∞ est inférieure à tout r_n. Elle est donc nulle. K_∞ est dans (E_0).

La section de K_∞ par $C^2(0)$ est un ensemble J^2 non fini, puisque K ne contenait pas de cycle. J^2, fermé, dense en lui-même, est parfait.

$$J^2_+(M_0) = J^2_-(M_0) = J^2,$$

indépendamment de M_0 sur J^2.

5° La disparition du cas singulier de Poincaré pour l'équation unique (avec α irrationnel) correspond au fait suivant : Il n'y a pas de trajectoire isolée.

Cela se produit quand $d\theta_1/d\theta_0$ est à variation bornée. *Y a-t-il, en l'absence* *de cycle, une condition vérifiée par* DX/DX_0 *entraînant que toute trajectoire* $T(M_0)$ *est dense en elle-même ?*

Sur $C^2(o)$, soit un ensemble $\Omega(M_0)$ isolé, s'il en existe. Nous pourrions donner l'indice o à celui des M_n dont la distance ρ aux autres est maximum. Pour $r < \rho$, la section quasi circulaire $c(M_0, r)$ de $\sigma(M_0, r)$ par $C^2(o)$ est à distance $\geqq \rho - r$ des points $M_n (n \neq o)$. Le transformé $c_n(r)$ de $c(M_0, r)$ pour $z = n$, est un ensemble ouvert contenant M_n, et à distance positive r_n de M_0. Mais $c_n(r)$ peut être extrêmement ramifié, et il est possible que $\eta(r)$, minimum de r, soit nul, quel que soit r. Si $\eta(r)$ est positif pour une valeur r' de r, en prenant $r < \eta(r')$, on aura des ensembles $c_n(r)$ tous disjoints.

Si donc les aires se conservent sur $C^2(z)$ pour z variable : ou bien quel que soit M_0, la trajectoire $T(M_0)$ est dense en elle-même; ou bien, si $T(M_0)$ est isolée, $\eta(r) = o$ quel que soit $r > o$.

Dernières remarques. — Les points $i_n(N_0)$ sur le plan $z = 1$ de U^3, les points M_n de $C^2(o)$, les arcs $T''_+(M_0)$ et $T''_-(M_0)$ de $T(M_0)$, limités par M_0, M_n, varient continûment avec N_0, avec M_0. Leurs ensembles d'accumulation sont dès lors soumis à des lois générales dont on trouvera en particulier l'étude dans la deuxième partie de mes *Leçons sur le Calcul des coefficients* [pour les $T(M_0)$, *voir* p. 214]. De ce point de vue, des problèmes se posent. Également la métrique peut intervenir. Existe-t-il, pour ces ensembles d'accumulation, des propriétés statistiques, c'est-à-dire vérifiées par tous les points initiaux M_0 [et par ceux de $\Omega(M_0)$] sur $C^2(o)$, exception faite d'un ensemble d'aire nulle?

J'arrêterai ici l'étude poursuivie dans cette suite de cinq Notes. Il m'a été dit que la question des systèmes différentiels périodiques avait attiré l'attention des mathématiciens intéressés par la mécanique analytique, sans toutefois qu'aucune publication ait révélé si le sujet a été abordé avec fruit. J'ai voulu conduire les chercheurs au seuil des problèmes à résoudre. J'ai souhaité les aider en leur présentant des exemples caractéristiques, et des méthodes permettant d'en construire bien d'autres.

(*) Séance du 19 janvier 1959.

(1) *Comptes rendus*, **248**, 1959, p. 28.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 248, p. 497-500, séance du 26 janvier 1959.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Les systèmes différentiels périodiques. Propriétés ergodiques et stabilité des trajectoires.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy.**

En l'absence de solutions périodiques, définition des écheveaux de trajectoires. Vérification du principe ergodique sur les écheveaux.

Je croyais close la série des Notes que j'ai affectées à l'étude des systèmes différentiels $dX/dz = F(z, X)$, où $X = (x, y)$ et F sont des vecteurs à deux composantes, F ayant la période 1 en x, y, z. Cependant, les résultats que j'ai publiés menant à des conclusions toutes proches et d'un certain intérêt, il me paraît utile de signaler ces dernières. Il sera manifeste que l'extension en est aisée aux systèmes où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ et F, de période 1 en les x_i et z, sont des vecteurs à $r - 1$ composantes, avec $r > 3$. Poursuivons notre exposé dans le cas de $r = 3$.

1. J'appellerai *écheveau* de trajectoires sur le tore S^3 de U^4, un continu Q^3 non réduit à un cycle, et tel que la trajectoire $T(M_0)$ de tout point M_0 de Q^3 est située et partout dense sur Q^3.

Q^3 est l'ensemble d'accumulation (au sens donné antérieurement à cette expression) de chacune des $T(M_0)$. Celle-ci est dense en elle-même (au sens correspondant). Pour une trajectoire, posséder la stabilité à la Poisson ou être dense en elle-même, sont deux propriétés identiques. Toute trajectoire stable et non cyclique a pour ensemble d'accumulation un écheveau Q^3.

Deux écheveaux ne peuvent pas avoir un point commun sans coïncider. Car tous deux sont identiques à l'ensemble d'accumulation de la trajectoire d'un quelconque de leurs points communs.

La section de l'écheveau Q^3 par un tore méridien $C^2(z_0)$ de S^3 est un ensemble parfait, totalement discontinu, ou totalement continu, ou partiellement l'un et l'autre.

Rappelons que si $T(M'_0)$ est isolée, son ensemble d'accumulation, s'il ne renferme pas de cycle, contient un écheveau de trajectoires Q^3.

Un écheveau de trajectoires Q^3 *est soit identique à* S^3, *soit non dense sur* S^3.

En effet, soit I un point de S^3 étranger à Q^3, r sa distance euclidienne à Q^3, $\sigma^4(I, r)$ la sphère ouverte de U^4 ayant pour centre I et pour rayon r, $s^3(I, r)$ la section de σ^4 par S^3, enfin μ le point (ou l'un des points) de Q^3

dont la distance à I est r. L'ensemble des trajectoires T (M''_0) des points M''_0 de s^3 (I, r) est ouvert sur S^3, étranger à Q^3, mais sa frontière contient T (μ). Celle-ci étant partout dense sur Q^3, tout point de Q^3 est frontière de Q^3 sur S^3; Q^3 est non dense sur S^3.

2 *a*. Voici un exemple d'écheveau Q^3 dont la trace $P^2(z_0, Q^3)$ sera elle-même l'écheveau Q^2 relatif à une équation différentielle à une inconnue. Nous faisons $z_0 = 0$. L'équation $dy/dx = A(x, y)$ déterminant l'échveau Q^2 sur le tore C^2 (o) méridien de S^3, sera définie par la construction de ses trajectoires $\tau(x_0, y_0)$ intégrantes, et celles-ci s'obtiendront par leurs images $\rho(x_0, y_0)$ dans le plan U^2 des xy; x est la longitude, y la latitude sur C^2 (o); $A(x, y)$ a la période 1 en x et y.

Donnons-nous le nombre irrationnel α et sur le cercle c^1 (o, o), méridien ($x = 0$) de C^2 (o), un ensemble parfait totalement discontinu J^1. Énumérons les intervalles contigus i_k de J^1 $(-\infty < k < \infty)$ de façon que l'ordre de rencontre de i_r, i_m, i_q sur c^1 (o, o) soit le même que celui des points d'abscisse curvilignes $r\alpha$, $m\alpha$, $q\alpha$ sur un cercle de longueur 1 où l'origine est fixée (k, q, m, r sont des sentiers).

Transformons en lui-même c^1 (o, o) par la substitution au point $(0, \eta_0)$ du point $(0, \eta_1)$; η_1 sera croissant en η_0 et $\eta_1 - \eta_0$ aura la période 1 en η_0. Si η_0 décrit l'arc-segment i_k, η_1 décrit l'arc-segment i_{k+1} et η_1 varie linéairement en η_0. Enfin, si $m < \alpha < m + 1$, pareillement $m < \eta_1 - \eta_0 < m + 1$. Par continuité, η_1 est défini aux points η_0 de seconde espèce de J^1. Le $(k-1)^{\text{ième}}$ itéré de $\eta_1(\eta_0)$, soit η_k est tel que $\eta_k - \eta_0$ et $k\alpha$ sont compris entre les mêmes entiers consécutifs m_k et $m_k + 1$.

Dans le plan U^2 des xy, J^1 est représenté par $j^1 = j^1_{0,0}$ sur le segment $s_{0,0}$ $[x = 0, 0 \leqq y \leqq 1)$, puis par tous les translatés $j^1_{r,m}$ de $j^1_{0,0}$ selon (r, m). Leur réunion forme $\mathcal{J}^1$, image totale dans U^2 des points $(0, \eta_0)$ de J^1.

Définissons dans U^2 les lignes $\rho(x_0, y_0)$ et pour cela, sur le segment $0 \leqq x \leqq 1$ les arcs $\rho^1(\eta_0)$ des lignes $\rho(0, \eta_0)$. Nous joignons rectilignement d'abord le point $(0, \eta_0)$ au point $(1, \eta_1)$. En normalisant ces traits, nous avons $\rho^1(\eta_0)$. Si η_0 décrit $s_{0,0}$, l'extrémité $(1, \eta_1)$ de $\rho^1(\eta_0)$ décrit $s_{1,0}$ $[x = 1, \eta_1(0) < y < \eta_1(0) + 1]$. Les $\rho^1(\eta_0)$ correspondants suffisent à déterminer la totalité de $\rho(0, \eta_0)$ et à définir l'équation $dy/dx = A(x, y)$. Soit $\varphi^2_{0,0}$ cette famille d'arcs. Les translatés $\varphi^2_{r,m}$ de $\varphi^2_{0,0}$ par tous les couples (r, m) couvrent la totalité de U^2.

L'arc $\rho^k(\eta_0)$ constituant $\rho(0, \eta_0)$ sur le segment $(k \leqq x \leqq k + 1)$ est le translaté par (k, m_k) ou $(k, m_k + 1)$ de $\rho^1(\eta_k)$ si $\eta_k = \eta_k(\eta_0)$. Si η_0 décrit $s_{0,0}$, l'origine de l'arc $\rho^k(\eta_0)$ décrit le segment

$$[x = k, \eta_k(0) \leqq y \leqq \eta_k(0) + 1].$$

Les translatées $\rho_{r,m}(o, \eta_0)$ de $\rho(o, \eta_0)$ par (r, m) donnent l'image dans U^2 de la trajectoire de $C^2(o)$ prenant naissance au point $(r, \eta_0 + m)$, géométriquement identique à (o, η_0). D'autre part, si $\eta_k = \eta_k(\eta_0)$, la trajectoire $\tau(o, \eta_k)$ est encore la même ligne. Toutes les lignes $\rho_{r,m}(o, \eta_k)$ représentent dans U^2 la même trajectoire $\tau(o, \eta_0)$ de $C^2(o)$. Soit $\Sigma(\eta_0) \equiv \Sigma(\eta_k)$ l'ensemble de ces représentations dans U^2.

Si η_0 est étranger à J^1, toutes les lignes composant $\Sigma(\eta_0)$ sont isolées des autres. Si η_0 est sur J^1, $\Sigma(\eta_0)$ est partout dense sur $\mathcal{J}^1$. Les $\tau(o, \eta_0)$ correspondantes forment l'écheveau Q^2; Q^2 s'enroule indéfiniment autour de l'axe non transverse $Z^2(o)$ de $C^2(o)$ et indéfiniment autour du cercle central moyen $X^2(o)$ de $C^2(o)$. Dans U^2, soit $\Sigma(J^1)$ la réunion des mêmes lignes toutes disjointes $\rho(o, \eta_0)$, indéfinies dans les deux sens, de pente moyenne α, séparées par les bandes composées des $\Sigma(\eta_0)$ relatifs aux points (o, η_0) étrangers à Jr. $\Sigma(J^1)$ est l'image de Q^2 dans U^2.

La partie de $\Sigma(J^1)$ située dans le carré $G_0\,[o \leqq (x \text{ et } y) < 1]$ de U^2 est composée de stries sur lesquelles x ne cesse de croître (y aurait pu osciller). Quand une strie atteint un côté de G_0, l'une des coordonnées atteignant la valeur 1 (ou la valeur o pour y), le trait repart du côté opposé, l'autre coordonnée n'ayant pas changé. Les stries, en infinité non dénombrable, formant un ensemble parfait non dense, laissent entre elles des bandes qui, atteignant un côté de G_0 sur un intervalle, repartent du côté opposé par l'intervalle égal, ayant les mêmes coordonnées de l'autre sorte.

2 *b*. Nous avons pour tout point $N_0(x_0, y_0)$ de G_0 la ligne $\rho(x_0, y_0)$ passant en ce point. Nous définissons comme il suit les trajectoires de l'équation $dX/dz = F(z, X)$ pour laquelle Q^2 sera la trace $P^2(o, Q^3)$ sur $C^2(o)$ de l'unique écheveau Q^3 de ses trajectoires.

Soit β un nombre irrationnel linéairement indépendant de α. Sur $\rho(x_0, y_0)$ soit y_1 l'ordonnée du point d'abscisse $x_0 + \beta$, et N_1 le point $(x_0 + \beta, y_1, 1)$. Relions N_0 à N_1 rectilignement, puis normalement. Nous avons l'arc $t^1(N_0)$. L'ensemble de ces arcs définit l'équation $dX/dz = F$.

Les points de rencontre dans U^0 de $t(N_0)$ avec le plan $z = n$ ont pour coordonnées $x = x_0 + \beta n$ et y_n, si le point $(x_0 + n\beta, y_n)$ est sur $\rho(x_0, y_0)$. Si les trajectoires $\tau(x_0, y_0)$ étaient des hélices du tore $C^2(o)$, y_n serait $y + \alpha\beta n$. Et si α et $\alpha\beta$ sont linéairement indépendants, les points dont les coordonnées x et y sont les parties fractionnaires de $x_0 + n\beta$ et $y_0 + n\alpha\beta$ sont partout denses sur le carré $[o \leqq (x \text{ et } y) \leqq 1]$. Pour passer de ce cas à celui de Q^2 non dense sur $C^2(o)$, on fend ce tore suivant une trajectoire particulière $\tau(o, \eta_0)$, on écarte les bords de la fente, ce qui donne la bande de $C^2(o)$ complémentaire de Q^2. Dans cette opération, on ne change pas les méridiens $c^1(o, x)$ $(z = o)$, ni sur chacun d'eux l'ordre mutuel des points déplacés. Dès lors, si $M_0(x_0, y_0, o)$ est sur Q^2, la trajectoire $T(M_0)$ sur S^3

traverse C^2 (o) aux points M_n situés et partout denses sur Q^2, et $T(M_0)$ a pour ensemble d'accumulation Q^3 réunissant les trajectoires $T(M_0)$ des points de Q^2. Au contraire, si M_0 est étranger à Q^2, la trajectoire $T(M_0)$ est isolée sur S^3, mais Q^3 est néanmoins son ensemble d'accumulation.

Nous avons décrit la configuration de l'image de Q^2 sur G_0 [$z = 0$, $0 \leqq (x$ et $y \leqq 1]$; Q^2 est représenté dans U^3 par $\Sigma(J^1)$ pour $z = 0$ et par ses translatées $\Sigma_n(J^1)$ par (o, o, n) sur $z = n$.

Les trajectoires $T(M_0)$ si M_0 est dans G_0 changent G_0 en G_n dans le plan $z = n$, G_n étant limité par des contours congruents λ_n, λ'_n et μ_n, μ'_n. La configuration de G_n a pu se montrer extrêmement complexe dans des cas antérieurement étudiés (et où nous trouvions des trajectoires périodiques). Mais G_n découpera toujours dans $\Sigma_n(J^1)$ un ensemble où tout point de Q^2 aura un représentant et un seul, à moins d'être figuré par un couple congruent sur λ_n, λ'_n ou sur μ_n, μ'_n.

3. Q^3 est la réunion de ses sections $P^2(z, Q^3)$ par les tores $C^2(z)$. Les trajectoires issues de $P^2(z, Q^3)$ reproduisent périodiquement cet ensemble quand z s'accroît de 1. Désignons par $\Gamma^1(z_0)$ et $\Delta^1(z_0)$ des continus situés sur $C^2(z_0)$ et enlacés le premier avec $X^2(z_0)$, le second avec $Z^2(z_0)$. Nous dirons qu'un ensemble situé sur $C^2(z_0)$ est de l'espèce (ω) s'il contient un continu $\Gamma^1(z_0)$ et un continu $\Delta^1(z_0)$. Les trajectoires des points d'un tel ensemble déterminent sur chaque tore $C^2(z)$ un ensemble de même espèce (ω).

Premier cas. — Si, Q^3 *étant un écheveau de trajectoires, le complémentaire de* $P^2 = P^2(0, Q^3)$ *sur* C^2(o) *est de l'espèce* (ω), *les trajectoires de* Q^3 *vérifient le principe ergodique, et* $N_0 N_n/n$ *tendant vers un même vecteur* $\vec{v}$, *le vecteur* $N_0 N_n - z\vec{v}$ *est borné, indépendamment de* z *et de* M_0 *variant sur* P^2, N_0 *variant sur une image* p^2 *de* P^2.

On peut remplacer Γ^1(o), Δ^1(o) par des lignes simples de C^2(o) se coupant en un point unique. Leur complémentaire sur C^2(o) forme une région analogue à un rectangle plan, contenant P^2 et représenté dans U^3 sur $z = 0$ par une sorte de quadrilatère G'_0 limité par des lignes congruentes l_0, l'_0 et m_0, m'_0; P^2 possède une image p^2 à l'intérieur de G'_0. Donc p^2 est à distance positive de ses translatés par (r, m, o) et de même les images de $P^2(z_0, Q^3)$ dans le plan $z = z_0$ de U^3 sont toutes disjointes. Il s'ensuit que si N_0 est sur p^2, N_n sera sur un translaté p^2_n de p^2 par (r, m, n). Soit d le diamètre de p^2. L'ensemble décrit dans le plan $z = n$ par l'extrémité du vecteur $N_0 N_n$ a un diamètre inférieur à $2\,d$. La conclusion est immédiate.

Le vecteur (r_n/n, m_n/n, 1 tend vers une limite $\vec{v}$ (α, β, 1) ; α et β peuvent-ils être tous deux rationnels ?

Il peut y avoir plusieurs écheveaux Q^3_k, une infinité. Si tous sont de la même nature, le complémentaire de chacun d'eux étant de l'espèce (ω), les topologues cartésiens montreront sans doute aisément que $C^2(o) - \Sigma Q_k^3$ est aussi de l'espèce (ω). C'est le cas de l'existence de deux couples $\Gamma^1(o)$, $\Delta^1(o)$ d'où partent uniquement des trajectoires instables. Le complémentaire contiendra uniquement des écheveaux du premier type examiné. Le vecteur $\vec{c}_k$ ne sera pas nécessairement le même pour tous, et les trajectoires instables pourront ne pas satisfaire au principe ergodique. Ces écheveaux rappelleront certaines possibilités des solutions périodiques.

Second cas. — Un écheveau principal (nécessairement unique) Q^3 est de l'espèce (ω).

Pour que les trajectoires de Q^3 vérifient le principe ergodique il n'est pas nécessaire que l'ensemble décrit par N_n sur le plan $z = n$ quand N_0 parcourt une image p^2 de P^2, ait un diamètre borné. Il suffit que ce diamètre soit o (n) (moins croissant que n). Je crois, sans l'avoir démontré, que l'obligation pour les points M_n de $T(M_0)$, si M_0 est sur P^2, de se rapprocher successivement et indéfiniment de tout point de P^2, [$M_n(M_0)$ étant continu et sans point double] empêche le diamètre de p_n^2 de rester supérieur à an, $a > 0$ étant indépendant de n. Dès lors, le principe ergodique serait vérifié par les trajectoires de Q^3 (toutes stables). Les trajectoires étrangères à Q^3 formeraient des écheveaux secondaires rentrant dans le premier cas. Mais le vecteur limite $\vec{c}$ serait nécessairement le même que pour l'écheveau principal. Et toutes les trajectoires instables elles aussi, vérifieraient le principe ergodique. Le diamètre de G_n serait o (n).

Troisième cas. — Un écheveau Q^3 contient un $\Gamma^1(o)$, mais nul $\Delta^1(o)$ (ou l'inverse). Aucun écheveau, aucun complémentaire d'écheveau ne peut contenir de $\Delta^1(o)$, mais d'autres écheveaux peuvent renfermer des $\Gamma^1(o)$.

Si notre dernière conjecture est fondée, il y aurait ergodicité, éventuellement particulière, sur chaque écheveau de cette espèce.

Tels sont les trois groupes de circonstances possibles, en l'absence de solutions périodiques. Il conviendra de construire des exemples pour confirmer ou pour infirmer les possibilités envisagées, les hypothèses avancées, au cours de cette étude.

(*) Séance du 23 février 1959.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 248, p. 1253-1258, séance du 2 mars 1959.)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Les équations différentielles périodiques.* Note de M. **Arnaud Denjoy.**

Cas d'ergodicité générale et uniforme.

A ma Note du 2 mars 1959 j'ajoute ce complément.

1. Soit $\Gamma^1(o)$ une ligne simple tracée sur le tore-méridien $C^2(o)$ de S^3, enlacée $\eta_1 (\geqq 1)$ fois avec $X^2(o)$ (η_1 = accroissement de y) et ξ' fois (ξ' = accroissement de x) autour de $Z^2(o)$.

Sur $C^2(o)$, soit $\Gamma^1_p(o)$ la $p^{\text{ième}}$ transformée de $\Gamma^1(o)$ par les trajectoires $T(M_0)$ (M_0 changé en M_p pour $z = p$).

Supposons disjointes toutes les lignes $\Gamma^1_p(o)$ et soit $\Sigma(\Gamma^1)$ leur ensemble.

Les $\Gamma^1_p(o)$ sont simultanément toutes : ou bien (*a*) isolées des autres [disposées entre elles sur $C^2(o)$: soit (*a'*) comme les milieux des intervalles contigus à un ensemble parfait linéaire totalement discontinu, soit (*a''*) comme, dans une famille d'intervalles disjoints, des suites croissant d'une extrémité à l'autre de chaque intervalle]; ou bien (*b*) accumulatives d'un même côté; ou bien (*c*) bilatéralement accumulatives. Tout point M'_0 de $C^2(o)$ étranger à $\Sigma(\Gamma^1)$ divise, avec $\Gamma^1(o)$, les $\Gamma^1_p(o)$ en deux classes, séparées par un ensemble $E(M'_0)$ et bornées l'une ultérieurement, l'autre antérieurement, par des continus $e^+(M'_0)$, $e^-(M'_0)$. Si l'un d'eux est un $\Gamma^1_p(o)$ [il est étranger à $E(M'_0)$, cas *a* ou *b*], tous les $E_p(M'_0) = E(M'_p)$ sont disjoints. Sinon [$E(M'_0)$ contient e^- et e^+], $E(M'_0)$ peut se reproduire cycliquement (cas *a''*); e^- et e^+ peuvent être identiques, ou disjoints, ou partiellement joints, $E(M'_0)$ contenant dans ce dernier cas des ensembles ouverts intermédiaires.

Représentons $\Gamma^1(o)$ dans le plan $z = o$, en supposant que la ligne passe par O. Avec les entiers ξ, η'_1 vérifiant $\xi\eta_1 - \xi'\eta'_1 = 1$ et posant $x = \xi x' + \xi' y'$, $y = \eta'_1 x' + \eta_1 y'$, on peut rapporter le plan $z = o$ aux axes Ox', Oy' et l'on est ramené au cas $\eta_1 = 1$, $\xi' = o$. Supposons faite cette simplification formelle.

$\Gamma^1(o)$ est figuré par un arc λ'_0 allant de $A(o, o)$ à $C(o, 1)$. Soit Λ'_0 son prolongement indéfini par translations (o, m, o), B_0 la bande comprise entre Λ'_0 et sa translatée par $(1, o, o)$. Dans B_0, $C^2(o)$ est représenté une infinité de fois. $\Gamma^1_p(o)$ étant disjoint de $\Gamma^1(o)$, Λ'_p transformé de Λ'_0 par $t(N_0)$ pour $z = p$ a une image dans B_0. Soient d le diamètre de la projection de B_0 sur Ox et D le diamètre de G_1.

w_p est dans un rectangle de côtés parallèles aux axes et de base $2d/p$, de hauteur D. Les vecteurs d'accumulation de $\overrightarrow{N_0 N_n}/n$ pour $n = \pm\infty$ sont $(\alpha, \varphi, 1)$; α est indépendant de N_0 et φ décrit un segment numérique $\leqq$ D en longueur.

L'ordre de rencontre sur $C^2(o)$ de trois lignes $\Gamma'_p(o)$, $\Gamma'_m(o)$, $\Gamma'_q(o)$ est le même que celui des parties fractionnaires de $p\alpha$, $m\alpha$, $q\alpha$, si ces dernières sont distinctes (raisonnement de Poincaré).

Soit $\Delta^1(o)$ une ligne simple rencontrant (et traversant) $\Gamma^1(o)$ au seul point O; Δ^1 convenablement dirigée tourne ξ fois autour de $Z^2(o)$ et η' fois autour de $X^2(o)$ avec $\xi\eta - \xi'\eta' = 1$; B_0 contient une représentation μ'_0 de $\Delta^1(o)$, joignant $A(o, o)$ à $B'(\xi, \eta')$, λ'_0 joignant A et $C'(\xi', \eta)$; $C^2(o)$ est représenté par le quasi-parallélogramme $AB'D'C'$ ou G'_0, qui répété par translations $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{AB'} + \overline{AC'}$ donne un quasi-parallélogramme H'_0. Si $\Delta^1(o)$ est comme $\Gamma^1(o)$ *disjoint de toutes ses transformées* $\Delta^1(o)$ par $T(M_0)$, H'_0 contient une image de G'_p, transformé de G'_0 par $t(N_0)$. Il y a *ergodicité normale*, existence d'un vecteur $\vec{\rho}$ tel que $\left|\overrightarrow{N_0N} - (z - z_0)\,\vec{\rho}\right|$ soit borné indépendamment de N_0.

C'est la même conclusion que si Γ^1 *et* Δ^1 *étaient invariants par* $T(M_0)$ *ou reproduits périodiquement.*

2. Dans $C^2(o)$, soit $Q^2 = Q^2(o) = Q^2_0$ le continu singulier de Poincaré étudié dans la dernière Note, enlacé une infinité de fois avec $X^2(o)$ [et avec $Z^2(o)$].

Sans le supposer cette fois base sur $C^2(o)$ d'un écheveau de S^3, nous l'envisageons simplement comme *invariant* par les trajectoires $T(M_0)$. Soit K le continu $T(Q^2_0)$ réunissant les trajectoires rencontrant Q^2_0; $K.C^2(o)$ est identique à Q^2_0 (invariance de Q^2_0). Chaque bande B_0 de $C^2(o) - Q^2_0$ est elle aussi invariante, car une trajectoire ne passerait pas de B_0 à une autre bande B'_0 (s'il en existait plus d'une) sans rencontrer K, et y être dès lors totalement incluse.

Tout écheveau Q^3 de S^3 sera ou bien inclus dans K ou bien à distance positive de K, et sa trace sur $C^2(o)$ sera un ensemble parfait q_0 inclus dans une bande B_0. Dans $z = o$ soit β_0 une image de B_0; β_0 contient une image χ_0 de q_0.

Σ_0 étant dans $z = o$ l'image totale de Q^2_0 [Σ_0 était désigné par $\Sigma(J^1)$ dans la dernière Note], si N_0 décrit Σ_0, N_n dans $z = n$ décrira un ensemble Σ_n translaté de Σ_0 par $z + n$. Il en sera de même de l'ensemble des bandes représentant B_0 dans $z = o$ et B_n dans $z = n$. Une translation (r, m, n) change β_0 en β_n, donc aussi χ_0 en χ_n; $\chi_n = \chi_0$. Il y aura ergodicité normale sur Q^3. Mais :

1° le vecteur $\vec{\rho}$ sera-t-il le même pour tous les écheveaux Q^3 ?

2° peut-il y avoir des cycles ?

3° l'ergodicité existe-t-elle et uniformément sur la totalité de S^3 ?

En m'excusant de commettre de graves omissions, je citerai quelques-uns des nombreux auteurs ayant après 1932 étudié l'ergodicité en rapport avec les trajectoires sur le tore à deux dimensions. Dans l'ordre chronologique : D. C. Lewis et A. Wintner, N. Kryloff et N. Bogulioboff, A. Andronov et L. Pontriagin, C. C. Siegel, T. Saito, G. Reeb, L. Markus, S. Sternberg, E. J. Akutowicz, M. M. Peixoto, etc.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 249, p. 590-591, séance du 3 août 1959.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Sur les trajectoires du tore.*
Note (*) de M. ARNAUD DENJOY.

Précisions ajoutées a un remarquable résultat de M. Orlia, introduisant la presque périodicité dans le mouvement en latitude des trajectoires sur le tore.

En complétant une étude exposée dans une de mes Notes ([1]), M. Z. Orlia a publié récemment ([2]) un résultat de grand intérêt concernant les trajectoires définies sur le tore par une équation différentielle périodique :

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta).$$

La fonction continue A, périodique de période 1 en φ et en θ, est définie et uniforme sur le tore S décrit par le point $M(\varphi, \theta)$, les angles φ, longitude, et θ, latitude, étant mesurés par des arcs de la circonférence de longueur 1 ; A est supposée telle que, par tout point $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ de S, il passe une trajectoire et une seule $T(\varphi_0, \theta_0)$ ou $T(M_0)$, d'équation :

$$\theta = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi), \qquad \text{avec} \quad \theta_0 = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi_0).$$

Si $\theta_n = f(\varphi_0, \theta_0, \varphi + n)$, Poincaré a montré que le rapport $(\theta_n - \theta)/n$ tend, pour n infini, vers α indépendant de M_0, et que, si α est irrationnel, les points (φ, θ_n) sont, sur le méridien $C(\varphi)$, identique à $C(\varphi + n)$, de longitude φ, dans le même ordre géométrique que les points d'abscisse curviligne $t = \alpha n$ sur la circonférence Γ de longueur 1. J'ai signalé ([3]) que $\theta_n - \theta$ et $n\alpha$ sont compris entre les mêmes entiers consécutifs. En conséquence, la fonction

$$(1) \qquad h(\varphi_0, \theta_0, \varphi) = \theta - \theta_0 - \alpha(\varphi - \varphi_0)$$

est bornée indépendamment de M_0 et de φ.

M. Orlia vient d'établir que, si les trajectoires $T(M_0)$ sont partout denses sur S, $h(\varphi)$ est *presque périodique* au sens classique, à savoir : à tout ε positif indépendant, il correspond un nombre $L = L(\varepsilon)$ tel que tout intervalle de longueur $L(\varepsilon)$ contient une presque-période λ (relative à l'approximation ouverte ε) vérifiant : $|h(\varphi + \lambda) - h(\varphi)| < \varepsilon$, indépendamment de φ. Utilisant un théorème général de Besikovitch, M. Orlia prouve la possibilité de supposer λ entier.

On peut obtenir simplement une valeur de $L(\varepsilon)$ indépendante de φ_0, θ_0.

J'ai représenté le tore S sur un tore Σ, le point $\mu(\varphi, t)$ de Σ correspondant à un point $M(\varphi, \theta)$ de S : μ est immédiatement déterminé en M par la condition de continuité, dès qu'à la trajectoire T(O) de S soit $\theta = f(0, 0, \varphi)$ on fait correspondre sur Σ l'hélice $t = \alpha\varphi$. Si $\mu(0, \tau)$ correspond à $M(0, \omega)$ et si $\omega=f(\varphi_0, \theta_0, 0)$, à $\theta=f(\varphi_0, \theta_0, \varphi)=f(0, \omega, \varphi)$ correspond $t=\tau+\alpha\varphi$.

Si les trajectoires $T(M_0)$ sont partout denses sur S, réciproquement M est déterminé et continu en μ. Nous nous limitons à ce cas.

J'ai utilisé également la représentation de $T(M_0)$ dans le plan P des (φ, θ). Mais on perd ainsi de vue les effets de la double périodicité de $A(\varphi, \theta)$. M. Orlia a justement remarqué que, la continuité de la relation entre μ et M étant uniforme, des conséquences très apparentes en résultaient. Si l'arc géométrique $\mu\mu'$ du méridien $\Gamma(\varphi)$ de Σ est inférieur en longueur à γ, l'arc géométrique correspondant (et de même sens) MM' de $C(\varphi)$ est borné par $\eta(\gamma)$, indépendant de τ et de φ, $\eta(\gamma)$ tendant vers zéro avec γ.

Je raisonnerai ainsi :

Dans le développement de α en fraction continue, soit P_m/Q_m la $m^{\text{ième}}$ réduite. De

$$\alpha - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{\delta_m}{Q_m Q_{m+1}} \qquad (0 < (-1)^m \delta_m < 1)$$

on tire une conclusion, que j'ai indiquée dans une Note de 1946 ([4]).

Les s, s_0, r, p, q étant entiers, posons $t=\tau+\alpha\varphi$, $t_s=\tau+\alpha(\varphi+s)$, $\theta=f(0, \omega, \varphi)$, $\theta_s=f(0, \omega, \varphi+s)$. Soient $\mu(\varphi, t)$, $\mu_s(\varphi, t_s)$ sur le méridien $\Gamma(\varphi)\equiv\Gamma(\varphi+s)$ de Σ; $M(\varphi, \theta)$, $M_s(\varphi, \theta_s)$ sur $C(\varphi)\equiv C(\varphi+s)$. Dans $\Gamma(\varphi)$ inscrivons le polygone régulier Δ_m de Q_m côtés de sommets $(\varphi, t_{s_0}+r/Q_m)$ pour $0 \leqq r \leqq Q_m - 1$. Ces points divisent $\Gamma(\varphi)$ en Q_m arcs égaux à $1/Q_m$, et *chacun d'eux contient un et un seul des Q_m points t_s, pour* $s_0 \leqq s \leqq s_0+Q_m-1$ (m pair) ou pour $s_0+1 \leqq s \leqq s_0+Q_m$ (m impair). Un de ces arcs $j_r(\tau, \varphi)$ contient t. Soit t_p le point de la suite considérée situé sur ce j_r. La longueur de l'arc géométrique $\mu\mu_p$ est inférieure à $1/Q_m$. Il existe donc un entier q tel que $|\alpha p - q| < 1/Q_m$. Aux sommets de Δ_m correspondent sur $C(\varphi)$ les sommets d'un polygone D_m de Q_m côtés, séparant sur $C(\varphi)$ des arcs tous inférieurs à $\eta(1/Q_m)$. Si l'arc $k_r(\omega, \varphi)$ correspond à $j_r(\tau, \varphi)$, sur k_r se trouveront à la fois M et M_p; supposons par exemple direct l'arc $\mu\mu_p$ contenu dans j_r : $0 < \alpha p - q < 1/Q_m$; l'arc direct MM_p contenu dans k_r sera direct. Donc $q' < \theta_p - \theta < q' + \eta(1/Q_m)$, q' étant entier. Or αp et $\theta_p - \theta$ sont compris entre les mêmes entiers. Donc $q'=q$.

Dès lors, si l'on pose $\varepsilon=(1/Q_m)+\eta(1/Q_m)$, l'égalité (1) donne immédiatement, pour un entier p compris entre a et $a+Q_m+1$, quel que soit a, et quel que soit le signe de $\alpha p - q$:

$$|h(\varphi_0, \theta_0, \varphi+p) - h(\varphi_0, \theta_0, \varphi)| < \varepsilon.$$

Donc $L(\varepsilon) \leqq Q_m + 1$.

Ajoutons quelques remarques :

Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout x réel, continue et bornée, u un nombre positif quelconque, $g(u)$ le maximum de $|f(x+u)-f(x)|$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$: $g(u)$ est la limite, pour n infini, de $g_n(u)$, maximum de $|f(x+u)-f(x)|$ pour $-n<x<n$: $g(u)$ est continue en u, croissante en n : $g(u)$ est semi-continue inférieurement. L'ensemble $E(\varepsilon)$ défini par $g(u) \leqq \varepsilon$ est fermé. Pour l'approximation fermée ε, tout point λ de $E(\varepsilon)$ est une presque période, vérifiant

$$|f(x+\lambda)-f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad \text{quel que soit } x.$$

La condition nécessaire et suffisante pour la presque périodicité de $f(x)$ est que, pour tout ε, les intervalles contigus à $E(\varepsilon)$ aient une longueur bornée. $L(\varepsilon)$ étant leur maximum, tout intervalle de longueur $L(\varepsilon)$ contient une presque période λ (d'approximation fermée ε), à moins que les deux extrémités de l'intervalle ne soient elles-mêmes des presque-périodes.

Si $f(x)$ est uniformément continu sur l'axe réel, $g(u)$ est continu. L'ensemble $g(u)<\varepsilon$, ou $E'(\varepsilon)$, est ouvert. Tous ses points sont, pour l'approximation ouverte ε, des presque-périodes.

Dans le cas de notre fonction $h(\varphi)$, si K est le maximum de $|A(\varphi, \theta)-\alpha|$, les nombres dérivés de $g(u)$ sont inférieurs à K en valeur absolue. $h(\varphi)$ étant presque périodique, $E'(\varepsilon)$ contient une infinité d'intervalles supérieurs à $2\varepsilon/K$ en longueur.

(*) Séance du 4 juillet 1960.

(1) *Les équations différentielles périodiques*, p. 2 et suiv.

(2) Z. Opial, *Comptes rendus*, 250, 1960, p. 2565.

(3) *Articles et mémoires*, II, p. 889.

(4) *Un demi-siècle de Notes aux Académies*, p. 584.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *D'après la topologie du tore à deux dimensions dans l'espace à trois, ergodicité des trajectoires sur le tore à trois dimensions dans l'espace à quatre, en l'absence de cycles.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY, Membre de l'Académie.

($\mathfrak{A}$) désignant un automorphisme réalisable continûment et appliqué au tore C^2 à deux dimensions dans l'espace à trois, si C_0^1, l'un des méridiens de C^2, est transformé en une courbe L telle que dans le cheminement de l'un à l'autre des points de longitude extrême de L, cette courbe coupe C_0^1 au moins trois fois de plus dans un sens que dans l'autre, il existe un continu H de type (1, 0) coupant tous les méridiens de C^2 et dont chaque point M_0 a pour transformé M_1 un point situé sur le même méridien. Énoncé analogue pour les parallèles.

La présente étude topologique sur le tore C^2, méridien du tore S^3 à trois dimensions dans l'espace cartésien U^4, est corrélative au problème des trajectoires intégrant un système

$$\frac{dx}{dz} = F_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dz} = F_2(x, y, z), \tag{1}$$

F_1 et F_2 ayant la période 1 en chacune des variables x, y, z.

$X(x, y)$ et $F(F_1, F_2)$ étant regardés comme deux vecteurs, le système s'écrit

$$\frac{dX}{dz} = F(z, X).$$

On suppose que, par tout point $M_0(X_0, z_0)$, il passe une trajectoire $T(M_0)$ et une seule :

$$X = f(z, M_0), \qquad \text{avec} \quad X_0 = f(z_0, M_0).$$

Le point $M(x, y, z)$ peut être représenté de deux façons : 1° par un point de S^3, x, y, z étant des angles mesurés par des arcs de la circonférence de longueur 1 : longitude première (z) sur S^3, définissant un tore méridien $C^2(z)$, longitude seconde (x) et latitude (y) définissant respectivement sur $C^2(z)$ un méridien $C^1(x)$, un parallèle $P^1(y)$; p, q, n étant trois entiers quelconques, tous les points $x+p$, $y+q$, $z+n$ ont le même point figuratif M sur S^3. Cette représentation est la plus importante du point de vue de l'interprétation physique ou mécanique des trajectoires. Elle pose le problème de leur ensemble d'accumulation pour $z \pm \infty$. Si la trajectoire $T(M_0)$ coupe le méridien $C^2(z_0)$ aux points $M_n(z_0+n, X_n)$, avec $X_n = f(z_0+n, M_0)$. (M_0, M_n) réalise continûment par $T(M_0)$ un automorphisme de $C^2(z_0)$.

Dans ce qui suit, nous prendrons uniformément $z_0 = 0$.

Le tore C^2 introduit dans le sommaire sera le tore méridien $C^2(0)$. Sur C^2, le méridien circulaire $C^1_0 = C^1(0)$ sera l'origine des longitudes x. La ligne L a sur C^2 une longitude minimale ξ_1 atteinte en un point de C^1_0 dont le parallèle deviendra $P^1(0)$, pris pour origine des latitudes y. Au point (0, 0) de C^2 correspond sur L le point (ξ_1, η_1). Sur L, $x_1 \geqq \xi_1$.

2° Le système numérique (x, y, z) est représenté par le point N de coordonnées x, y, z dans U^3. Pour les notations et précisions de détail relatives à cette figuration je renvoie à mes Notes de 1958-1959 [1], réunies en un fascicule sous le titre *Les équations différentielles périodiques* et désigné ci-après par E. D. P.

Cette représentation est extrêmement utile pour étudier la transformation (M_0, M_n) de C^2, et le comportement de $(X - X_0)/(z - z_0)$ pour $|z - z_0| \infty$, particulièrement pour celui de $(X_n - X_0)/n$, donc du vecteur $[(x_n - x_0)/n, (y_n - y_0)/n, 1]$ pour $|n| \infty$.

S^3 est dans U^3 intégralement représenté par le cube $K_0\ [0 \leqq (x, y, z) \leqq 1]$, dont la base G_0 a pour sommets A_0 (0, 0), B_0 (1, 0), D_0 (1, 1), C_0 (0, 1). Nous supposons que L est décrit par M_1 quand M_0 parcourt C^1_0.

Soit $N_0(x_0, y_0)$ dans G_0, et dans U^3 soit $t(N_0)$ l'image de $T(M_0)$ issue de N_0. $t(N_0)$ coupe $z = 1$ au point N_1. Quand M_0 décrit G_0, N_1 décrit G_1 (*fig.* 1). Aux autres sommets de G_0 correspondent $A_1(\xi_1, \eta_1)$, $B_1(\xi_1 + 1, \eta_1)$, $D_1(\xi_1 + 1, \eta_1 + 1)$, $C_1(\xi_1, \eta_1 + 1)$.

Je dis que le phénomène d'ergodicité se réalise pour les intégrales de l'équation (1) si le vecteur N_0N_n/n tend pour $|n|$ infini vers une limite $(\vec{\nu}, 1)$ indépendante de N_0. Le vecteur $(X_n - X_0)/n$ tend vers $\vec{\nu}$. Alors quel que soit M_0 sur S^3 et N_0 dans U^3, le vecteur $N_0N/(z - z_0)$ tend vers $(\vec{\nu}, 1)$ pour $|z - z_0| \infty$.

Il peut se faire qu'il existe des cycles à systèmes de périodes (p, q, n) différents et même un ensemble infini de tels cycles. Dans ce cas, l'ergodicité est évidemment impossible. J'ai souvent présumé qu'en l'absence de cycles, l'ergodicité est la règle générale (E. D. L., p. 32) [3]. Le théorème topologique énoncé dans le sommaire représente un grand progrès vers la confirmation de cette idée.

Aux côtés A_0B_0 ou λ_0 et C_0D_0 ou λ'_0, A_0C_0 ou μ_0 et B_0D_0 ou μ'_0 correspondent les lignes λ_1 et λ'_1, μ_1 et μ'_1 (figurant L); λ'_1 se déduit de λ_1 par la translation (0, 1) et μ'_1 de μ_1 par (1, 0); λ_1, μ_1 et toutes leurs translatées par $(p, q, 0)$ (p, q, entiers quelconques) sont deux à deux disjointes, sauf par leurs extrémités $(\xi_1 + p, \eta_1 + q, 1)$. C'est le principe (p) (E. D. P., p. 10, III, 1).

A λ_1, λ'_1, si nous imprimons toutes les translations $(p, 0, 0)$, nous obtenons deux lignes simples indéfinies Λ_1, Λ'_1 limitant une région V_1 contenant μ_1

et μ'_1, ces deux dernières lignes pouvant, à la condition de ne pas se couper, être étirées solidairement aussi loin qu'on veut vers les x infinis positifs ou négatifs. Pareillement, les lignes Ω_1, Ω'_1 obtenues en opérant sur μ_1, μ'_1 les translations (o, q, o) limitent une région Θ_1, où se trouvent et peuvent être indéfiniment étirées vers les y infinis positifs ou négatifs les deux lignes λ_1, λ' (E. D. P., p. 14; *voir* p. 15-18 la formation de domaines G_1 de plus en plus complexes, mais entraînant l'existence de cycles, en infinité, et à systèmes de périodes tous différents).

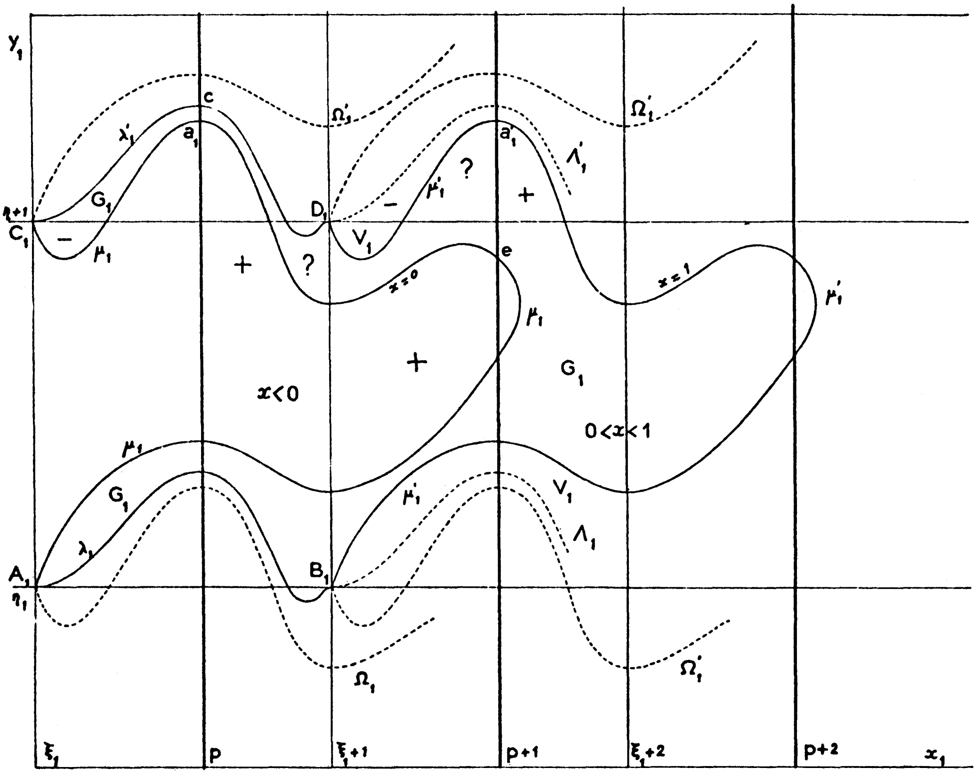


Fig. 1.

Quel que soit le nombre r de dimensions, un tore G_0 décrit par le point $M(u_1, u_1, u_{r-1})$ de période 1 en chaque u_1 est changé par automorphisme en $G_1(u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{r-1}^1)$. Le méridien $\mu_0(x)$ ($u_1 = x$) de G_0 devient $\mu_1(x)$ dans G_1 ($x_1 = u_1^1$); soient $m(x)$ et $M(x)$ les minimum et maximum de x_1 sur $\mu_1(x)$; $\mu_1(x+1) = \mu'_1(x)$ est $\mu_1(x)$ translaté par $(x, x+1)$. Imprimons à $\mu_1(x)$ et à $\mu'_1(x)$ toutes les translations (o, $p_2, \ldots, p_{r-1}$) (p_i entiers). Nous formons, dans l'espace U_{r-1}, une zone V_1 où la totalité de G_1 est représentée. Donc si $x < x' < x + 1$, $m(x') > m(x)$, $M(x') < M(x) + 1$; $m(x')$ croît avec x', et continûment. Soit δ le minimum de $\delta(x) = M(x) - m(x)$ et $x' = \xi$ où il est atteint : $\delta(x) < \delta + 1$. Soit $p - 2 < m(\xi) < p - 1$. Si $\delta > 2$, donc $\delta = 2 + a$ ($a > 0$) et si $p - 1 - a < m(x) \leqq p - 1$, $M(x) > p + 1$ et $\mu_1(x)$ est coupé par les trois plans $x = p - 1$, p, $p + 1$.

V_1 transforme la bande $V_0(0 \leqq y \leqq 1$, x quelconque $z = 0)$. Au segment μ_0^x déterminé dans V_0 par l'abscisse constante x correspond μ_1^x dans V_1 [μ_0, μ'_0, μ_1, μ'_1 sont μ_0^0, μ_0^1, μ_1^0, μ_1^1).

$\xi_1 + m$ étant le maximum de la longitude sur L, notre hypothèse est que l'intervalle ξ_1, $\xi_1 + m$ contient au moins trois entiers, $p - 1$, p, $p + 1$. Il en sera évidemment toujours ainsi moyennant $m \geqq 3$. Soit e le premier point où μ_1 décrit à partir de C_1 coupe $x_1 = p + 1$; Rebroussant chemin, nous retrouvons pour la première fois $x_1 = p$ en un point a_1, correspondant à a_0 sur μ_0. Si a'_1, a'_0 se déduisent par $(1, 0)$ de a_1, a_0, μ_1 parcouru de a'_1 vers D_1 rencontre $x_1 = p$ en un premier point c.

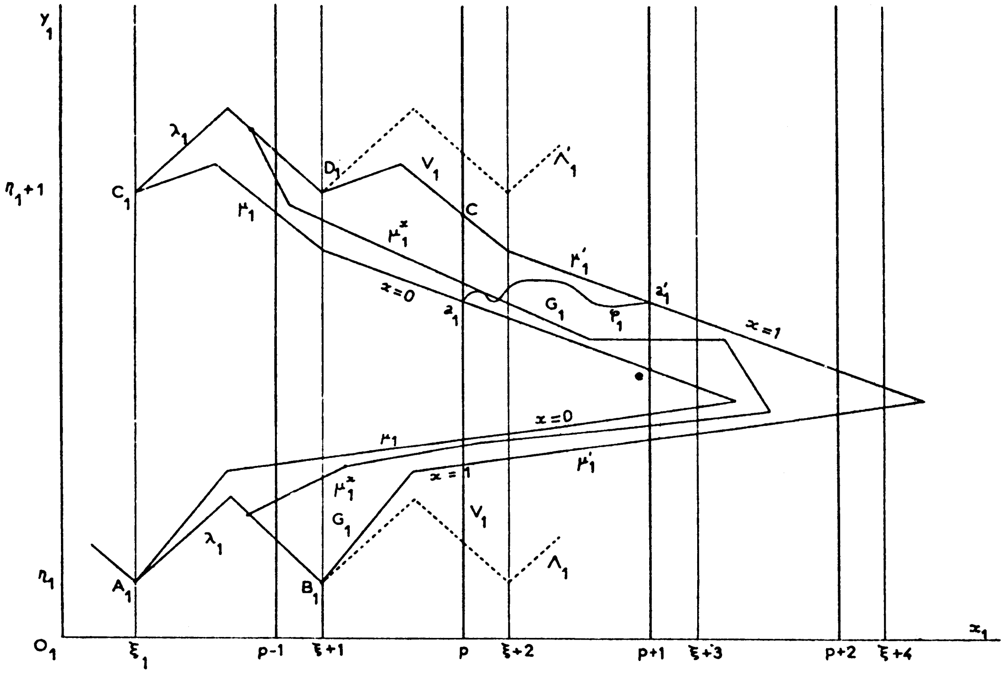


Fig. 2.

Posons $x_1 - x = d(x) = d$. C'est une fonction de période 1 en x. Sur a_1e, $d > p$; sur a'_1c, $d < p$. Aux deux points a_1, a'_1, $d = p$. Notre but est de prouver que la frontière entre les deux régions $d < p$ et $d > p$ relie a'_1 et a'_1 par un *continu* φ_1, auquel correspond dans G_0 un *continu* φ_0 reliant a_0 et a'_0.

Sur la droite $x_1 = p$: $d < p$ ou $d > p$ selon que $x > 0$ ou $x < 0$. Sur $x_1 = p + 1$, mêmes conclusions selon que $x > 1$ ou $x < 1$. Dans les régions où à la fois $p < x_1 < p + 1$ et $0 < x < 1$, d étant compris entre $x_1 - 1$ et x_1, $d - p$ peut approcher -1 et $+1$ sans les atteindre.

Sur la figure 2 nous signalons ces régions par un point d'interrogation, mais par les signes + et — celles où respectivement $d - p$ est constamment soit positif, soit négatif. Nous schématisons la représentation de λ_1 et de μ_1 en les réduisant à des lignes brisées.

L'ensemble $d = p$ contiendrait des points intérieurs s'il existait un intervalle de longitudes x telles que le transformé de $C^1(x)$ par l'automorphisme ($\mathfrak{A}$) possède tout un arc commun avec $C^1(x)$. Ce cas étrange n'introduit pas de véritables difficultés. Nous le négligeons. Les deux ensembles $d < p$ et $d > p$ auront la même frontière, où $d = p$.

Traitons d'abord le cas très simple où sur μ_1, x_1 (longitude de M_1 sur L) ne cesse pas de croître de ξ_1 à $\xi_1 = + m$, puis de décroître de $\xi_1 + m$ à ξ_1 quand le contour L se ferme (*fig.* 2).

D'après $d_1 < p$, sur le parcours $a'_1 c a_1$ et $d > p$ sur $a_1 e a'_1$, les deux ensembles disjoints $d < p$ et $d > p$ ont tous deux les points a_1 et a'_1 dans leur frontière, tandis que chacun relie continûment ces deux points. En vertu du théorème fondamental de la topologie plane ([2]), ces frontières (identiques dans le cas actuel à un ensemble φ_1) sont *continues* entre a_1 et a'_1 ; à φ_1 il correspond sur C^2 un continu H du type (1, 0) coupant tous les méridiens et jouissant de cette propriété : au point quelconque de longitude x situé sur H, il correspond par l'automorphisme ($\mathfrak{A}$) un point de longitude $x + p$, donc situé sur le même méridien que le premier point.

Γ étant un continu de C^2 et dont la représentation complète [invariante par toutes les translations h, k (entiers)] dans U^2 est un ensemble K, nous disons que Γ est ou contient *un continu de type* (p, q) si les conditions suivantes sont satisfaites.

Il existe sur K un point $M(x, y)$ tel que, une fois extraits de U^2 tous les cercles d'un certain rayon r_1 suffisamment petit et ayant pour centres les points $M_{h,k}(x + h, y, k)$, sauf M ($M_{0,0}$) et $M_{p,q}$, ce qui reste de K : 1° est continu entre M et $M_{p,q}$; 2° renferme un continu irréductible entre ces deux derniers points et ne contenant aucun autre couple de points congruents.

Faute de place l'étude du cas général sera présentée dans une nouvelle Note.

(*) Séance du 27 octobre 1965.

([1]) *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1072, 1096, 1923; 248, 1958, p. 28, 325, 497, 1253.

([2]) *Un demi-siècle de Notes aux Académies*, p. 430 (Note de 1910), 434 (1911) et démonstration aux pages 440-442 (1950) avec les observations des pages 81 à 83.

([3]) *Actes du symposium international Boscovitch*, 1961, p. 40.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie*, *Paris*, 5e.)

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 3917-3921 (15 novembre 1!

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *D'après la topologie du tore à deux dimensions dans l'espace à trois, ergodicité des trajectoires sur le tore à trois dimensions dans l'espace à quatre, en l'absence de cycles.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**, Membre de l'Académie.

Suite de la Note (*). Démonstration du théorème topologique dans le cas général.

Dans le cas où sur μ_1, x_1 croît d'abord de sa valeur initiale ξ_1 son maximum $\xi_1 + m$ pour décroître ensuite du dernier à la première, nous avons montré l'existence du continu φ_0 joignant λ_0 à λ'_0 et sur lequel $d = x_1 - x = p$.

Dans le cas général où, sur le parcours de μ_1, x_1 a des oscillations d'amplitude quelconque, montrons par quelle voie s'élimine la difficulté de ces franchissements, en des sens alternés, des lignes $x_1 = p$, $x_1 = p + 1$.

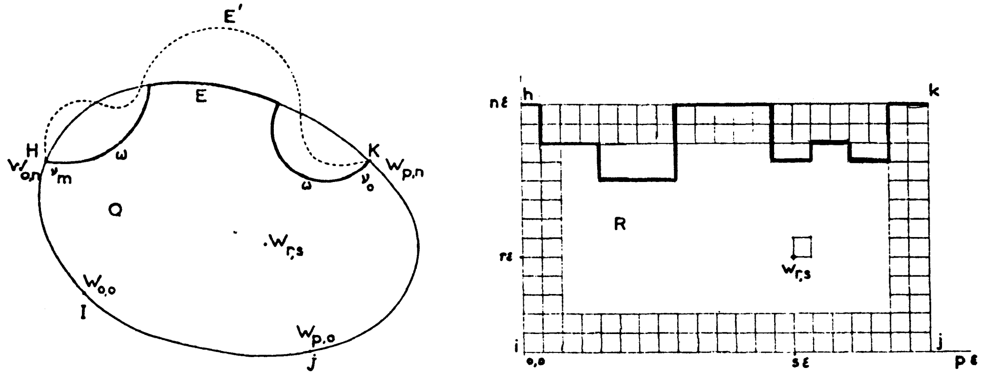
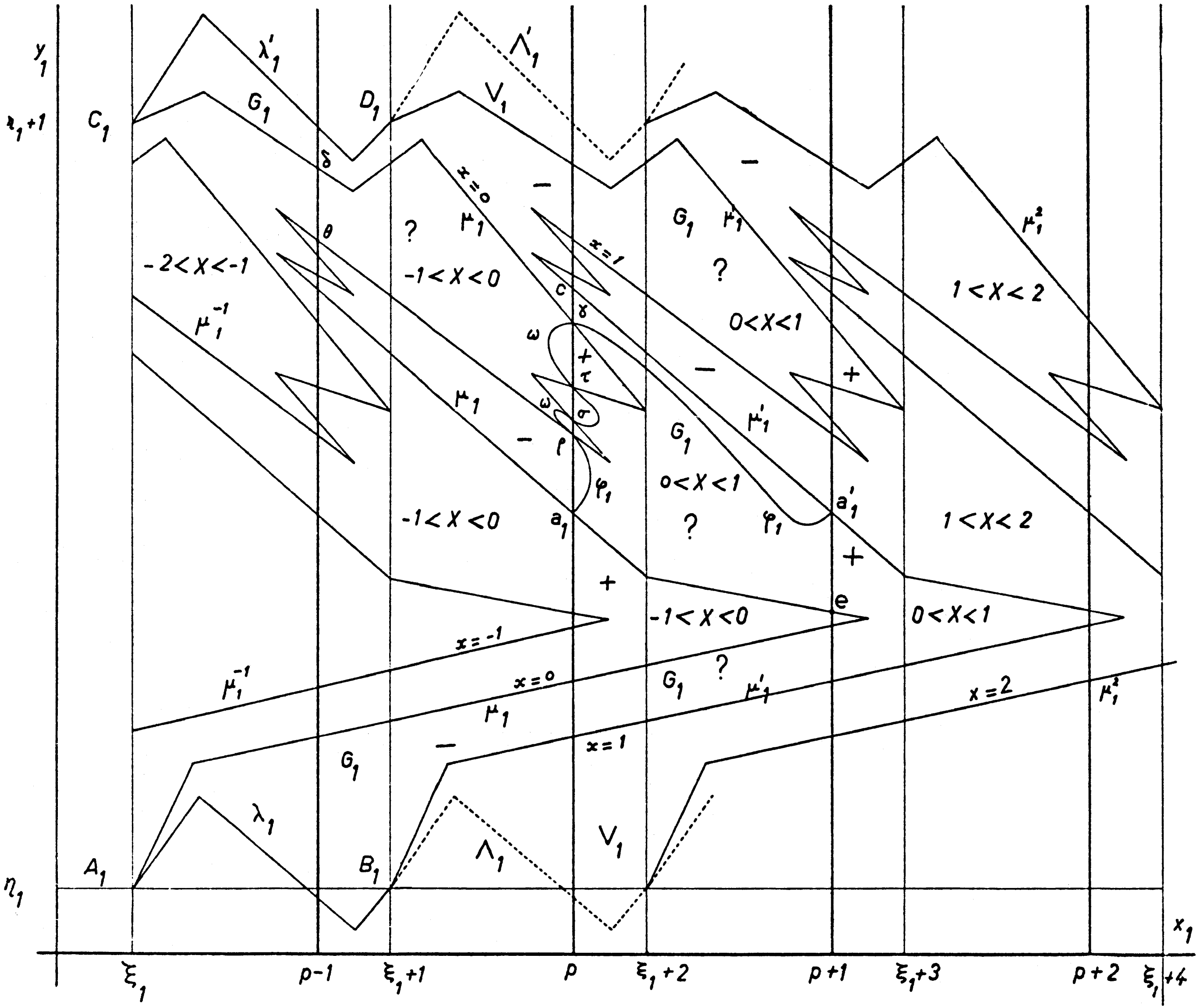


Fig. 1.

Je rappelle le raisonnement établissant le principe fondamental de la topologie du plan. Il est présenté sous une certaine forme dans ma Note de 1950 (²). Je l'adapte ici au cas nous intéressant.

Voici l'hypothèse. Un contour fermé Q et son intérieur appartiennent à deux ensembles ouverts disjoints E, E' (qui seront ici, l'un $d < p$, l'autre $d > p$), complétés par un ensemble fermé (qui sera leur frontière commune non extérieure à Q$(d = p)$. Q contient un arc HIJK entièrement formé de points situés à distance nulle de E, tandis que les points K et H sont chacun l'extrémité d'un arc intervalle appartenant à E', celui-ci pouvant renfermer sur HK plusieurs arcs majeurs disjoints (*fig.* 1).



y1
η1+1
C1
λ'1
G1
D1
Λ'1
V1
δ
θ
?
μ1
x=0
G1
μ'1
μ1²
-2<X<-1
-1<X<0
x=1
0<X<1
1<X<2
μ1⁻¹
c
γ
ω
τ
σ
ρ
φ1
a1
a'1
e
-1<X<0
0<X<1
x=-1
x=0
x=1
x=2
λ1
A1
B1
Λ1
η1
x1
ξ1
p-1
ξ1+1
p
ξ1+2
p+1
ξ1+3
p+2
ξ1+4

Fig. 2.

En vertu de la biconnexité du plan, pour tout $\varepsilon > 0$ et p, n étant deux entiers positifs assez grands, on peut former un réseau de points $W_{r,s}$ $(0 \leqq r \leqq p, 0 \leqq s \leqq n)$ appartenant ou intérieurs à Q, de façon que la distance $W_{r,s}W_{r',s'} < \varepsilon$ si $|r'-r| + |s'-s| = 1$, et $W_{0,s}$ est sur HI, $W_{r,0}$ sur IJ, $W_{p,s}$ sur JK, $W_{r,n}$ sur KH. Au point $W_{r,s}$ nous faisons correspondre dans un plan le point $w_{r,s}(r\varepsilon, s\varepsilon)$. Ces points w sont les sommets de carrés décomposant un rectangle R de sommets h, i, j, k correspondant à H, I, J, K.

Considérons les carrés dont un sommet au moins correspond à un $W_{r,s}$ situé à distance nulle de E. Ces carrés forment des domaines (ensemble ouvert accru de sa frontière). Δ l'un de ces domaines, contient tous les

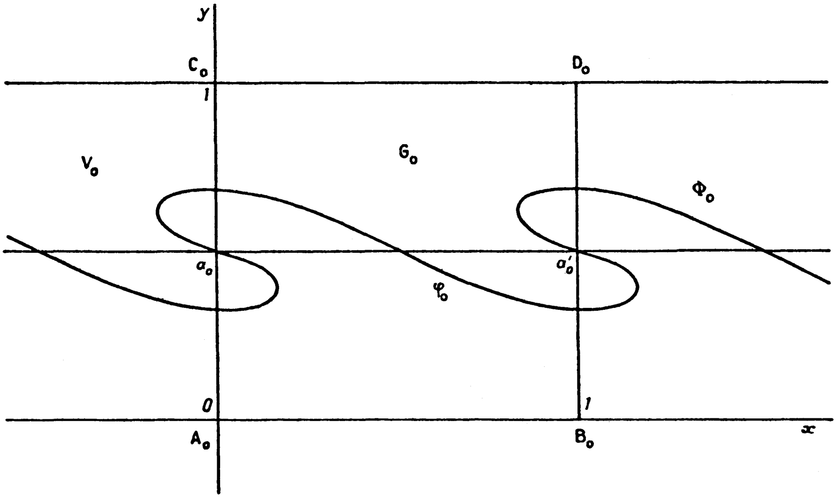


Fig. 3.

carrés bordant les trois côtés $hijk$ de R. Le cycle des côtés frontières de Δ, commencé par $hijk$ se clôt par une chaîne dont les sommets w correspondent à des points W, soit $\nu_0 = K, \ldots, \nu_u, \ldots, \nu_m = H$, situés, soit sur KH, soit à l'intérieur de Q. Dans ce dernier cas, ν_u est situé dans E′ et distant de E de moins de 2ε. Quand ε tend vers zéro, la chaîne de points ν_u tend vers un continu ω reliant K à H; ω est formé d'arcs intérieurs à Q et frontières de E, et possiblement aussi d'intervalles de KH intérieurs à E.

La figure 2 facilitera l'intelligence du raisonnement suivant :

Nous appliquons la dernière conclusion obtenue au contour Q formé par : 1° l'arc $\gamma\delta$ de μ_1; 2° le segment $\delta\theta$ de la droite $x_1 = p - 1$; 3° l'arc $\theta\rho$ de μ_1; 4° le segment $\rho\gamma$ de $x_1 = p$. Sur le parcours $\gamma\delta\theta\rho$, analogue à HIJK, $d < p$; sur le segment $\rho\gamma$, analogue à KH, nous trouvons un intervalle $\rho\sigma$, où $d > p$; puis l'intervalle $\sigma\tau$, où $d < p$; enfin, l'intervalle $\tau\gamma$, où $d > p$; $d = p$ aux quatre points ρ, σ, τ, γ. Le rôle de E est ici joué par l'ensemble

$d < p$. Dès lors, un continu ω pouvant renfermer l'intervalle $\sigma\tau (d < p)$ et intérieur à Q par ses autres points $(d = p)$ joint ρ à γ. Ajouté à $c\gamma$ et ρa_1,

il joint c à a_1 par un continu ca_1 dont chaque point est à distance nulle de l'ensemble $d < p$, comme dans l'exemple simplifié. Si l'arc $a'_1 e$ de μ'_1 présentait des sinuosités où alternativement $d < p$ et $d > p$, on les éliminerait de la même façon. Dès lors, comme plus haut, a_1 et a'_1 sont reliés par un continu φ_1 où $d = p$; mais ici φ_1 peut déborder sur les régions $-1 < x < 0$ et $1 < x < 2$ (il n'est pas impossible que la ligne λ_1 vienne elle-même couper l'intervalle $a_1 c$ de $x_1 = p$. En ce cas, φ_1 sortirait de la région V_1.

Imprimons à φ_0 toutes les translations $(n, 0)$. Nous obtenons une ligne Φ_0 représentant H et où, y restant compris entre deux limites, x varie de $-\infty$ à $+\infty$ (*fig.* 3). Sur Φ_0 opérons toutes les translations $(0, p)$. Nous avons la représentation totale de H dans le plan $z = 0$ et nous nous rendons compte de l'influence d'un changement d'origine sur C^2 pour la représentation φ_1 de H.

Observons encore que, sur μ_1, si a_1 n'est pas le point de longitude extrême $\xi_1 + m$, l'arc de retour de μ_1 à partir de cette extrémité donne lieu à un second continu H' de type $(1, 0)$. Si la partie entière de m est $2 + k$ $(k < 1)$, nous aurons pour k entiers consécutifs $p, \ldots, p + k - 1$, en tout $2k$ continus analogues à H.

(*) Séance du 27 octobre 1965.

(*Institut Henri-Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie*, 5^e^).

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 4293-4296 (22 novembre 1965). Groupe 1.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PÉRIODIQUES. — *Ergodicité présentée par les intégrales des systèmes de deux équations différentielles périodiques en l'absence de solutions cycliques.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**, Membre de l'Académie.

Application des propriétés topologiques du tore à deux dimensions.

Dans mes deux Notes précédentes ([1]) j'ai démontré sur des exemples (et fourni tous les éléments d'une démonstration embrassant les cas les plus généraux) une propriété topologique essentielle du tore à deux dimensions. Ces Notes constituaient l'indispensable préparation de celle-ci, où la dite propriété servira de base à l'étude de l'ergodicité présentée par les solutions d'un système différentiel formé par deux équations périodiques, en l'absence d'intégrales cycliques.

Je conserve, sans les définir à nouveau, toutes les notations introduites dans les deux Notes précédentes.

La théorie exposée pour les méridiens $C^1(x)$ vaut pour les parallèles $P^1(y)$.

Supposons qu'à la fois une ligne μ_1^* et une ligne λ_1^* soient coupées respectivement par les lignes $x_1 = p - 1, p, p + 1$, $y_1 = q - 1, q, q + 1$. Il existe un continu R de type (0, 1) coupant tous les parallèles et tel que si $M_0(x_0, y_0, 0)$ est sur R, son conséquent M_1 est sur le même parallèle $(y_1 = y_0 + q)$.

R a pour image dans le plan $z = 0$ une ligne indéfinie Ψ_1^* de période (0, 1), joignant un point b_0 de λ_0 au point b'_0, congruent sur λ'_0. Évidemment Φ_0 et Ψ_0^* se coupent. Un point $M_0(x_0, y_0, 0)$ de leur rencontre a pour conséquent $M_1(x_0 + p, y_0 + q, 1)$. La trajectoire $T(M_0)$ est un cycle se fermant au bout d'un tour de z. Si donc l'équation (1) n'admet pas de cycles parmi ses trajectoires, et si a_1, b_1 et c_1, d_1 sont respectivement les longitudes x_1 et les latitudes y_1 extrêmes de G_1, l'une au moins des deux différences $b_1 - a_1$ et $d_1 - c_1$ est inférieure à 4.

Mais, pareillement, quel que soit n, la section G_n de l'ensemble des $t(N_0)$ pour $z = n$, comprise dans $a_n \leqq x_n \leqq b_n$, $c_n \leqq y_n \leqq d_n$, vérifie l'une au moins des deux conditions : $b_n - a_n < 4$ ou $d_n - c_n < 4$. Sinon il y aura des trajectoires cyliques de périodes p_n, q_n, n.

Soient $I_n(N_0)$ et $i_n(N_0)$ respectivement les points $(x_n - x_0, y_n - y_0, n)$, ou $(X_n - X_0, n)$, et $|(X_n - X_0)/n, 1|$, puis W_n et w_n l'ensemble des $I_n(N_0)$, dans le plan $z = n$ et celui des $i_n(N_0)$ dans $z = 1$. W_n est contenu dans le rectangle $W'_n(a_n - 1 < x < b_n, c_n - 1 < y < d_n)$; w_n est dans le rectangle w'_n homothétique du précédent, avec le rapport $1/n$. Pour tout N_0, l'ensemble d'accumulation des extrémités $i_n(N_0)$ des vecteurs $N_0N/_n n$ est dans w'_p, quel que soit p. Si chacune des conditions $b_n - a_n < 4$ ou $d_n - c_n < 4$ est respectivement vérifiée pour une infinité de valeurs de n, le vecteur N_0N_n/n a une limite $v(\alpha, \beta, 1)$ indépendante de N_0, et pour tout n, respectivement $n\alpha$, $n\beta$ sont compris entre $a_n - 1$ et b_n entre $c_n - 1$ et d_n. *C'est l'ergodicité.*

Dans ce dernier cas, si l'un au moins de α et de β est irrationnel, il ne saurait y avoir de cycle. Si $\alpha = p_n/n$, $\beta = q_n/n$, p_n et q_n étant entiers, l'existence de cycles n'est pas impossible. Seulement ils ont tous le même système irréductible de périodes p_n, q_n, n, la valeur de n étant unique. L'ergodicité est réalisée. Mais, si toutes les trajectoires ne sont pas des cycles, toute trajectoire non cyclique est instable.

Supposons qu'il existe deux cycles de périodes respectives p, q, n et r, s, n, avec $p \neq r$, $q \neq s$. Ces cycles seront représentés dans U_3 par $t(H_0)$, $t(J_0)$, H_0 et J_0 étant deux points de G_0. Les vecteurs $H_n - H_0$, $J_n - J_0$ sont respectivement (p, q, n) et (r, s, n). Les vecteurs $H_{mn} - H_0$, $J_{mn} - J_0$, m étant entier positif, seront (mp, mq, mn) et (mr, ms, mn); mp et mr sont compris entre a_{mn} et b_{mn}, mq et ms entre c_{mn} et d_{mn}. Soient h/m et j/m deux fractions comprises entre p et r, entre q et s respectivement; il existera des cycles de périodes h, j, mn. Dans le plan $z = 1$, les couples de périodes rapportées au nombre de tours accomplis par z, soit l'ensemble des points h/mn, j/mn, sera partout dense dans le rectangle de sommets opposés $(p/n, q/n)$ et $(r/n, s/n)$.

Notons que, si p, q, n sont les périodes irréductibles d'un cycle, les trois nombres p, q, n ne sont pas nécessairement premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit $\nu_0(x_0, y_0, 0)$ un point intérieur à G_0, puis, h et k étant deux entiers, $A_1(\xi_1, \eta_1, 1)$ avec $\xi_1 = x_0 + h$, $\eta_1 = y_0 + k$, enfin $\nu_1(2 - h, 2 - k, 1)$. Joignons A_0 à A_1, ν_0 à ν_1 par des arcs disjoints, où z ne cesse pas de croître et dont les tangentes aux extrémités sont parallèles à Oz. La trajectoire $t(A_0)$ joindra A_0 à $A_2(2, 2, 2)$ en passant par A_1. Ce sera un cycle de périodes $(z, 2, 2)$, sans réduction possible à un cycle de périodes $(1, 1, 1)$.

Considérons le système $dx/dz = F_1(x, z)$, $dy/dz = F_2(x, y, z)$, F_1 et F_2 ayant les périodes habituelles. F_1 est supposée vérifier une condition (celle de Lipschitz par exemple) entraînant l'unicité de la trajectoire passant par le point quelconque (x_0, z_0). Hypothèse analogue pour F_2; (x_0, y_0) étant un point quelconque de G_0 les trajectoires sont

$$x - x_0 = f_1(x_0, z), \qquad y - y_0 = f_2(x_0, y_0, z),$$

avec $f_1(x_0, 0) = 0$, $f_2(x_0, y_0, 0)$ indépendamment de x_0, y_0, et f_1 étant périodique en x_0, f_2 en x_0 et y_0.

α étant le nombre rotationnel de f_1 en z, si $x_n = f_1(x_0, n)$ les méridiens $C^1(x_n)$ se succèdent sur C^2 dans l'ordre des points d'abscisse curviligne $n\alpha$ sur une circonférence de longueur 1 (et même $x_n - x_0$ est compris entre les mêmes entiers que $n\alpha$ quand α est irrationnel).

Quand α est rationnel et vaut p/q irréductible, il existe au moins un ξ_0 (au moins q distincts sur $0 \leqq x_0 < 1$) tels que la suite $C^1(\xi_h)$ soit cyclique : $\xi_{h+q} = \xi_h + p$ pour tout h. Quel que soit x_0 distinct des ξ_0, les $C^1(x_{k+mq})$ tendent vers un $C^1(\xi_h)$ pour $m\infty$.

En conséquence $(y_n - y_0)/n$ tend vers β, se déterminant sur un $C^1(\xi_h)$ et indépendant de x_0 et de y_0. Il y a ergodicité, mais instabilité, au moins pour les $T(x_0, y_0)$ si x_0 n'est pas un ξ_0.

Si β est rationnel et vaut r/s irréductible, il y a des cycles. Mais ils ont tous les mêmes périodes, celle de z étant le p. p. c. m. de q et de s. Les trajectoires non cycliques sont alors instables.

Dans $G_n(z = n)$, les images μ_n, μ'_n des côtés $A_0C_0(x_0 = 0)$ et $B_0D_0(x_0 = 1)$ sont les segments de droite d'abscisses ξ_n, $\xi_n + 1$ $[\xi_n = f_1(0, n)]$ et d'ordonnées $y_n : \eta_n < y_n < \eta_n + 1$ $[\eta_n = f_2(0, 0, n)]$ Ω_n, Ω'_n sont les droites indéfinies d'abscisses ξ_n, $\xi_n + 1$. Entre elles se trouve la totalité de G_n, et en particulier les images λ_n, λ'_n de $A_0B_0(y_0 = 0)$ et $C_0D_0(y_1 = 1)$. Les λ_n^y pour $0 \leqq y_0 \leqq 1$, images des parallèles de latitude y_0, sont compris entre λ_n et λ'_n.

$y_p - y_0 = f_2(x_0, y_0, p)$ ayant la période 1 en x_0 et y_0, cette égalité vaut quels que soient x_0 et y_0 (et non pas seulement pour N_0 situé dans G_0); x_0 ne changeant pas, si nous faisons croître y_0 d'une valeur entière à la suivante, y_p croîtra et d'une unité, donc en valeur absolue la variation de $f_2(x_0, y_0, p)$ sera inférieure à 1 et, avec $\delta = \delta(x_0, y_0, p)$,

$$y_p - y_0 = f_2(x_0, 0, p) + \delta, \qquad \delta^2 < 1,$$

quels que soient x_0 et y_0. Dès lors, m étant entier positif (on arriverait aux mêmes conclusions avec le même nombre β, pour m et n infinis négatifs)

$$y_{(m+1)p} - y_{mp} = f_2(x_{mp}, 0, p) + \delta_m.$$

Posons

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} f_2(x_{kp, 0, p}) = m\Lambda_m(x_0, p);$$

$$y_{mp} - y_0 = m\Lambda_m(x_0, p) + \varepsilon m, \qquad \varepsilon < 1.$$

Soit j le maximum de $|f_2(x_0, y_0, 1)|$. Si

$$mp < n < (m+1)p, \qquad |y_n - y_{mp}| < pj$$

et

$$y_n - y_0 = m\Lambda_m(x_0, p) + \varepsilon(m + pj), \qquad \text{avec} \quad \varepsilon^2 < 1.$$

Nous pouvons changer x en ω croissant avec x, $\omega - x$ ayant la période 1, et tel que, quel que soit x_0, à x_k correspond $\omega_k = \omega_0 + k\alpha$. Soit $g(\omega, p) = f_2(x, 0, p)$. Quand m croît indéfiniment, $A_m(x_0, p)$ tend vers $I_p = \int_0^1 g(\omega, p)\, d\omega$, indépendamment de x_0. Dès lors, les limites d'indétermination de $(y_n - y_0)/n$ pour $n\ \infty$ diffèrent de I_p/p de moins de $1/p$ en valeur absolue et $y_n - y_0/n$ tend vers une limite β indépendante de (x_0, y_0). Il y a ergodicité.

Pour revenir au cas général, est-il possible qu'en l'absence de cycles, les intervalles (a_n, b_n), (c_n, d_n) oscillent d'une longueur inférieure à 4 vers des longueurs de plus en plus croissantes, pourvu que l'un des deux soit toujours inférieur à 4? Ou au contraire, un seul au plus a-t-il une longueur croissant indéfiniment? Ce cas-là n'est-il pas uniquement celui où une des fonctions inconnues x ou y ne figure pas dans l'une des équations du système?

Si $(d_n - c_n)/n$ reste supérieur à un nombre k positif, les lignes ψ_n analogues aux ψ_n et où $y_n - y_0$ est entier deviennent de plus en plus nombreuses. Si le $n^{\text{ième}}$ transformé de tout $C^1(x)$ vérifie $M_n(x) - m_n(x) > 1$, il y a sur tout μ_n^x un point où $x_n - x_0$ est entier. Mais en l'absence de cycle ces points ne doivent pas former un continu dont l'homologue dans G_0 joindrait λ_0 à λ'_0.

Dans le cas général, la limitation supérieure par le nombre 4 des deux différences $b_n - a_n$ et $d_n - c_n$ doit beaucoup simplifier l'étude de l'ensemble d'accumulation des points M_n où une trajectoire $T(M_0)$ coupe C^2.

Pour le système périodique $dX(x, y, u, z)/dz = F(X, z)$, le tore S^4 (coordonnées circulaires) à quatre dimensions dans U^5 sera représenté dans U^4 (coordonnées cartésiennes) par le cube $K_0(0 \leqq x, y, u, z \leqq 1)$ de base $G_0(0 \leqq x, y, u \leqq 1)$ $(z = 0)$ changé par les trajectoires en $G_1(x_1, y_1, u_1)$ dans l'espace $U^3(1)$, où $z = 1$. Les faces de $G_0 \cdot \lambda_0$ et λ'_0, μ_0 et μ'_0, ν_0 et ν'_0 (les notations différant du cas de S^3), savoir $x = 0$ et 1, $y = 0$ et 1, $u = 0$ et 1, sont changées en les surfaces λ_1 et λ'_1, ... (On supposera x_1 minimal à l'origine.) Imprimons à λ_1, λ'_1 toutes les translations $(0, q, r)$. Nous limitons dans $U^3(1)$, par deux surfaces Λ_1, Λ'_1, une zone V_1 contenant la totalité de G_1 et, en particulier, μ_1, μ'_1. A celles-ci appliquons toutes les translations $(0, 0, r)$. Nous limitons dans V_1 une zone W_1, sorte de tube invariant par u, $u + 1$ et où se trouvent ν_1, ν'_1.

Si x_1 prend sur λ_1 les valeurs $p - 1$, p, $p + 1$, nous mettons en évidence un continu φ_1 joignant λ_1 à λ'_1, sur lequel $x_1 - x = p$, et correspondant par biconnexité de mailles ε à la surface latérale d'un prisme rectangulaire dont les rectangles de base correspondent à deux continus situés sur λ_1 et λ'_1.

Si y_1 prend sur μ_1, u_1 sur ν_1, respectivement les valeurs $q-1$, q, $q+1$ et $r-1, r, r+1$, dans le cube $0 < x_1 - p, y_1 - q, u_1 - r \leqq 1$, les λ_1, λ'_1, ... ou leurs congruents sont représentés.

(*) Séance du 22 novembre 1965.

(1) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 3917 et 4293.

(*Institut Henri Poincaré*,
11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 4579-4582 (29 novembre 1965). Groupe 1.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PÉRIODIQUES. — *L'ergodicité des trajectoires.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY, Membre de l'Académie.

Pour les systèmes de deux équations différentielles périodiques à deux inconnues, l'ergodicité des trajectoires est certaine quand il existe parmi elles un seul cycle ou quand tous les cycles ont le même système de périodes (ou de rapports des périodes entre elles).

La présente Note fait directement suite à une Note précédente, elle-même préparée par deux autres relatives à la topologie du tore à deux dimensions (1).

Je conserve les définitions et notations utilisées en ces endroits. Il s'agit des trajectoires intégrant le système d'équations

$$\frac{dx}{dz} = F_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dz} = F_2(x, y, z),$$

F_1 et F_2 étant périodiques de période 1 en chacune des variables x, y, z; z varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le point $P(x, y, z)$ décrit la trajectoire unique $P(x, y, z) = f(P_0, z)$ passant par $P_0(x_0, y_0, z_0)$, avec $P_0 = f(P_0, z_0)$.

Le point $P(x, y, z)$ est représenté géométriquement de deux façons, selon qu'on vise l'ergodicité ou la stabilité des trajectoires.

Ou bien, par le point N de coordonnées cartésiennes x, y, z dans l'espace à trois dimensions U_3; z est la cote de N.

Ou bien par le point $M(x, y, z)$ d'une variété S^r telle que $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont identiques ou distincts selon que les trois différences $x'-x$, $y'-y$ et $z'-z$ sont entières ou que l'une au moins ne l'est pas.

Si un seul des trois nombres x, y, z varie, les deux autres étant fixes, M décrit une courbe simple se fermant quand la variable s'accroît d'une unité. A deux couples différents des nombres fixes correspondent deux courbes disjointes.

En supposant que : 1° toutes ces courbes sont des circonférences; 2° toutes les circonférences où y varie seul ont le même rayon, et dès lors les variétés où z seul est fixe sont des tores $C^2(z)$ à deux dimensions; 3° tous les tores $C^2(z)$ sont égaux, S^3 est le tore à trois dimensions dans l'espace à quatre. S^3 est totalement représenté dans U_3 par le cube K_0 $(0 \leq x, y, z \leq 1)$.

La trajectoire $P = f(P_0, z)$ est représentée sur S^3 par $T(M_0)$, dans U_3 par $t(N_0)$. Il est commode de prendre $z_0 = 0$; $C^2(0)$ sera noté C^2; N_0 décrira G_0, base de K_0, soit $(0 \leq x,\ y \leq 1,\ z = 0)$.

M_n figurant $f(P_0, n)$ est le point de rencontre de $T(M_0)$ avec $C^2(n) \equiv C^2$; N_n est l'intersection de $t(N_0)$ avec le plan $z = n$; N_n transforme G_0 en G_n.

Nous nous proposons de montrer que, *si parmi les trajectoires* $T(M_0)$ *il existe au moins un cycle, et si tous les cycles ont le même système de périodes* (p, q, n) [ou tout au moins les mêmes rapports p/n, q/n), *l'ensemble des trajectoires possède l'ergodicité*, en ce sens que le vecteur N_0N_n/n tend vers le vecteur limite $(p/n, q/n, 1)$ indépendamment de N_0.

(M_0, M_n) réalise un automorphisme $\mathfrak{A}_n$ de C^2. Mais si M_z représente $f(P_0, z)$, la transformation (M_0, M_z) suivie de la correspondance de $M_0(x, y, 0)$ à $M_z(x, y, z)$, est pour C^2 un automorphisme $\mathfrak{A}_z$ variant continûment.

La transformation $x_1 = mx + m'y$, $y_1 = kx + k'y$, $m, \ldots, k'$ étant des entiers vérifiant $mk' - km' = 1$, réalise un automorphisme de C^2. Les méridiens et les parallèles de C^2 sont changés en courbes s'enroulant respectivement m' et m fois autour de l'axe de C^2, k' et k fois autour de son cercle axial. Mais cet automorphisme n'est pas réalisable par une variation continue et il n'offre aucun intérêt pour la présente étude.

D'après une remarque située à la page 4296, si un méridien $C^1(x_0)$ est changé par (M_0, M_n) en une courbe où le champ de variation de x_n contient les nombres $x_0 + s$, pour $s = p - 1, p, p + 1, \ldots, p + j (j \geq 1)$, il existe j continus H_s coupant tous les méridiens $C^1(x)$ (et admettant les périodes 1, 0) tels que si (x, y) est situé sur H_s, $x_n = x_0 + p + s - 1$. Pour un même indice s il peut y avoir (et en général il y a) plusieurs continus H_s distincts.

Si pour le même nombre n, un parallèle $\Gamma^1(y_0)$ a pour transformé une courbe où le champ de variation de y_n comprend les nombres $y_0 + s'$, avec $s' = q - 1, q, q + 1, \ldots, q + j'$, on aura jj' cycles ayant des systèmes distincts de périodes $(p + s - 1, q + s' - 1, n)$.

D'après nos hypothèses, il existe au moins un cycle ayant pour période minimale en z l'entier n, les deux autres périodes étant p et q. Donc $j = j' = 1$. En conséquence, si a_n, b_n sont les abscisses extrêmes $(b_n > a_n)$ de G_n et c_n, $d_n > c)$ ses ordonnées extrêmes, les deux différences $b_n - a_n$ et $d_n - c_n$ sont inférieures à 5. Pareillement pour les G_{kn} et tout entier k : $b_{kn} - a_{kn} < 5$; $(d_{kn} - c_{kn} < 5$. *Il y a ergodicité.*

Il ne paraît pas impossible que p, q, n aient un diviseur commun e, en sorte que $p = ep_0$, $q = eq_0$, $n = en_0$. On pourrait avoir des cycles de périodes $(e'p_0, e'q_0, e'n_0)$ sans que e' fût divisible par e.

(*) Séance du 4 juillet 1966.

(1) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 3917, 4293 et 4579.

(*Institut Henri-Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie*, *Paris*, 5e.)

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *La métrique de Stieltjes.*
Note de M. **Arnaud Denjoy.**

Génération d'une métrique de Stieltjes. Sa décomposition en la somme d'une métrique croissante et d'une métrique décroissante. Métrique dépendant d'un paramètre.

Métrique donnée M, engendrant une intégrale I, qui est en même temps une fonctionnelle linéaire W; fonctionnelle donnée W_0, définissant une métrique M, d'où résulte une intégrale I, elle-même fonctionnelle W, normalement plus générale que W_0 : tels sont les cycles dont chaque étape a son terrain propre, et à distinguer nettement. La confusion des idées, la répugnance ou l'inaptitude à mettre en lumière leurs différences, ne certifient pas de posséder en don l'esprit de synthèse.

La métrique et l'intégrale de Stieltjes offrent des ressources trop souvent méconnues, particulièrement des physiciens, qui pouvaient en tirer grand parti.

Dans cette Note, j'étudierai, pour les espaces quelconques U, mais particulièrement cartésiens U_r, la métrique-ν *relative* (prenant les deux signes), déterminant une métrique-μ *absolue*, et non nulle dans U_r sur des ensembles de mesure euclidienne nulle, ce qui caractérise une métrique de Stieltjes.

Dans mes *Leçons sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques* (désigné abréviativement par CCST) je traite au chapitre VIII (4ᵉ partie, 1ᵉʳ fascicule, p. 392-481) de la métrique (p. 392-404), de l'intégrale dans le cas de la sommabilité-μ (p. 404-440), enfin des totales intégrant les fonctions non sommables (p. 440-481). *La définition de la mesure doit précéder celle de l'intégrale* (p. 416). Intégrer $f d\nu$ sur E n'a pas plus de sens si l'on ne connaît pas la loi de mesure-ν que si l'on ignore la fonction de point à intégrer f.

Je suppose connus et admis les postulats (M), (D), (A) énoncés et commentés p. 396 et suivantes.

Pour définir ν (E) j'ai supposé (p. 397) U divisé en deux parties U^1, U^2, où respectivement ν (E) est constamment non négative, constamment non positive. Dès lors, si $\nu_1(E) = \nu(E.U^1)$, $\nu_2(E) = -\nu(E.U^2)$, $\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E)$, $\nu_1(E)$ et $\nu_2(E) \geqq 0$; $\mu(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E)$ sera la mesure *absolue* de E; $\nu_1(E)$ et $-\nu_2(E)$ sont le *maximum* et le *minimum* des $\nu(E')$ pour les $E' \subset E$.

$\nu_1(E) = \nu(E)$ sur U^1, $= 0$ sur U^2; $\nu_2(E) = 0$ sur U^1, $= -\nu(E)$ sur U^2. La donnée de ν_1 (E) et de ν_2 (E) équivaut à celle de ν (E) si les deux premiers nombres sont finis. Ils peuvent être infinis, $\nu(E)$ étant néanmoins fini. Aussi, à l'inverse de ce qui précède, doit-on, de $\nu(E)$ donné, déduire U^1 et U^2.

Soit H un champ où $\nu(E)$ est borné. Soient E et E′ deux ensembles inclus dans H avec $\nu(E) > \nu_1(H) - \varepsilon$, $\nu(E') > \nu_1(H) - \varepsilon'$. On en conclut $\nu(E.E') > \nu_1(H) - \varepsilon - \varepsilon'$. Sinon, on aurait $\nu(E - E.E') > \varepsilon'$ et $\nu(E + E') > \nu_1(H)$.

Soit $\varepsilon_n > 0$ et $\Sigma\varepsilon_n < \nu_1(H)$, $\nu(E_n) > \nu_1(H) - \varepsilon_n$. L'ensemble H^1, plus petite limite au sens de Borel de la suite E_n, soit $H^1 = \sum_p \prod_{n \geq p} E_n$ vérifie $\nu(H^1) = \nu_1(H)$; si $F_n = H - E_n$, $\nu(F_n) < -\nu_2(H) + \varepsilon_n$; $H^2 = \underline{\lim}\, F_n$ vérifie $\nu(H^2) = -\nu_2(H)$; $h = H - H_1 - H_2$ donne $\mu(h) = 0$; $H.U^1$ et $H.U^2$ ne diffèrent de H^1 et de H^2 que par des ensembles de mesure-μ égale à zéro.

Si, E étant variable dans H, $\nu(E)$ tend vers $\nu(H^1)$ [aussi bien vers $\nu(H^2)$], E tendra en mesure vers H^1, en ce sens que $\nu(E - E.H^1)$ et $\nu(H^1 - E.H^1)$ (et même μ remplaçant ν) tendent vers zéro.

Si U est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles H_n sur chacun desquels $\nu(E)$ est borné, les partitions $H_n^1 + H_n^2 + h_n$ étant faites, $\mu(\Sigma h_n) = 0$; U^1, U^2 n'étant déterminés qu'à des ensembles de mesure-μ égale à zéro près, sont définis par ΣH_n^1 et se partageant ΣH_n.

Il en sera ainsi avec les espaces cartésiens U_r quand $\nu(E)$ est borné à distance finie. Et particulièrement si $\nu(E)$ peut être ramené à la mesure euclidienne d'ordre r par $\nu(E) = \int_E \varphi(X)\, dX$, $\varphi(X)$ étant sommable dans U_r à distance finie. Alors immédiatement, U^1 et U^2 sont respectivement les ensembles $\varphi(X) > 0$, $\varphi(X) < 0$, indifféremment accrus des points où $\varphi = 0$.

Nous dirons que, dans U^r, $\nu(E)$ est *réductiblement bornée*, si quel que soit l'ensemble parfait P, l'ensemble K (P) des points de P au voisinage desquels $\nu(E)$ est non borné sur P, est non dense sur P (quand il existe). Si ϖ est une portion de P disjointe de K (P) (qui est fermé), $\nu(E)$ est borné pour les ensembles E inclus dans ϖ. Si K (P) possède un point interne à ϖ' portion de P (ce point est à distance positive de $P - \varpi'$), $\nu(E)$ est non borné sur ϖ'.

K (P) — P se décompose en une infinité dénombrable de portions ϖ. On résout la division de chacune en ϖ^1 et ϖ^2. Si P′ est le noyau parfait de K (P), K (P) — P′ est dénombrable. Chacun de ses points, susceptible d'avoir une mesure-ν non nulle sera, s'il en est ainsi, classé selon le signe de ν pour ce point dans U_P^1 ou dans U_P^2. Les raisonnements utilisés pour la totalisation dans U^1 montrent qu'une infinité dénombrable d'opérations donnera U_P^1 et U_P^2.

Ce cas se présentera dans U_1, mais sous la forme d'un problème tout résolu, si, $\varphi(x)$ étant totalisable (simplement tout au moins) $\nu(E) = T(\varphi, E)$, quand cette totale a un sens. Il en est toujours ainsi quand E est un intervalle ab. Si $\varphi(x)$ est la dérivée seconde symétrique de $G(x)$, $G'(x)$ existe sauf sur un ensemble η non dense et de mesure nulle, quand $\tau_{2,s}(\varphi, a, b)$ (CSST, p. 392) fait appel aux neuf opérations); τ n'existe que si a et b sont étrangers à η; $\tau_{2,s}(\varphi, E)$ sera $\nu(E)$ chaque fois que cette totale spéciale existe. Dans tous ces cas, U_1^1 et U_1^2 sont les ensembles où respectivement $\varphi(x) \geqq 0$ et $\varphi(x) \leqq 0$.

Génération d'une mesure-ν (E) *dans* U_r *à partir de la mesure des intervalles.* — Introduisons les termes et notations suivants : $A(a_i)$ et $B_i(b_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$, si $b_i - a_i = l_i > 0$, sont les *extrémités* : du *segment* [AB], $a_i \leqq x_i \leqq b_i$; du *semi-segment inférieur* (s. s. i.) [AB), $a_i \leqq x_i < b_i$; du *semi-segment supérieur* (AB], $a_i < x_i \leqq b_i$; de l'intervalle (AB), $a_i < x_i < b_i$.

A' (a'_i) tendant vers A et B' (b'_i) vers B, contenons B' dans [AB). Si A' est dans (AB) $(a'_i > a_i)$, [A'B') tend vers (AB), en ce sens que l'ensemble des points finissant par être et rester dans [A'B') est identique à (AB). Si A est dans (A'B') $(a'_i < a_i)$, (A'B'), comme d'ailleurs [A'B'), tend vers [AB).

Si s et s' sont des s. s. i., il en est de même de $s.s'$. En partageant s par les variétés $x_i = a_i$ traversant s, on met $s - s.s'$ sous forme d'une réunion de s. s. i. disjoints.

Supposons ν([AB)] donné pour tous les s. s. i. inclus dans H = [CD) d'extrémités C (c_i), D (d_i), et ν vérifiant la condition (Y) : s et les s_k, ceux-ci disjoints, étant des s. s. i., l'égalité $s = \Sigma s_k$ entraîne $\nu(s) = \Sigma\nu(s_k)$. Selon la métrique *jordanienne*, si e et e' sont deux ensembles disjoints composés chacun de s. s. i., $\nu(e + e') = \nu(e) + \nu(e')$. Par des variétés $x_i = a_i^k$, avec $0 < a_i^{k+1} - a_i^k < \omega$ $(a_i^0 = c_i,\ a_i^{n_i} = d_i)$ nous décomposons H en une famille $\Phi(\omega)$ de s. s. i. disjoints s. Grâce à (Y), les résultats énoncés ci-après sont indépendants de la composition des $\Phi(\omega)$. On donnera à ω une suite de valeurs ω_n décroissant à zéro, et l'on supposera que les points subdivisionnaires a_i^k de $\Phi(\omega_n)$ se trouvent parmi ceux de $\Phi(\omega_{n+1})$. Tout ensemble $e(\omega_n)$ composé de s. s. i. de $\Phi(\omega_n)$ est un $e(\omega_{n+p})$. Dans $\Phi(\omega)$, nous distinguons $\Phi^1(\omega)$ et $\Phi^2(\omega)$, respectivement formés des s où $\nu(s) > 0$ et $\nu(s) < 0$; $\nu(\Phi^1) + \nu(\Phi^2) = \nu(H)$. Nous supposons $\nu(\Phi^1)$ et $-\nu(\Phi^2)$ bornés. Soit Φ la famille des s appartenant à l'une au moins des $\Phi(\omega_n)$.

Borel, introduisant l'additivité complète des mesures bornées, couvre un ensemble ouvert O avec des s de Φ disjoints, un ensemble fermé F avec un nombre fini de s de $\Phi(\omega_n)$, n croissant. Il a $\nu(O)$, $\nu(F)$, puis $\nu(F_\sigma)$, $\nu(G_\delta)$, etc. Un ensemble de mesure-μ nulle est couvert par des s des $\Phi_{n+p}(p > 0)$, tels que $\Sigma|\nu(s)| < \omega_n$. Un ensemble E est mesurable-ν s'il est la somme (ou l'excès) d'un F_σ (d'un G_δ) et d'un (sur un) ensemble de mesure-μ égale à zéro.

En séparant les s de $\Phi^1(\omega_n)$ des s de $\Phi^2(\omega_n)$, Borel obtient $\nu_1(E)$, $\nu_2(E)$; $\Phi^1(\omega_n)$ tend en mesure-μ vers H^1 et $\Phi^2(\omega_n)$ vers H^2, n croissant.

Utilisant les résultats de mon étude portant sur le théorème de Vitali, je considère la famille des s. s. i. *réguliers* s inclus dans H, soit ω leur côté. Relativement à cette famille, la dérivée en un point X de la fonction d'ensemble $\nu(E)$, ou ν_1, ou ν_2, par rapport à la fonction d'ensemble $\mu(E)$ est, si elle existe, la limite $\varphi(X)$, φ_1, φ_2 du rapport $\nu(s)/\mu(s)$, ... pour les s contenant X et ω tendant vers zéro.

D'après $0 \leqq (\nu_1$ et $\nu_2)$ et $\nu_1 + \nu_2 = \mu$, d'une part $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ_1, φ_2 existent sur une plénitude-μ et $0 \leqq (|\varphi|, \varphi_1, \varphi_2) \leqq 1$, d'autre part $\nu(E) = \int_E \varphi(E)\, d\mu$, ... Il suffit d'appliquer ces formules à $E = H^1$ et $E = H^2$, pour trouver : sur H^1, $\varphi = \varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$; sur H^2, $\varphi = -\varphi_2 = -1$, $\varphi_1 = 0$, le tout sauf au plus en un ensemble η de points X, avec $\mu(\eta) = 0$.

La fonction auxiliaire de Stieltjes. — Cette fonction $m(X)$ du point $X(x_i)$ appartenant à U_r, donne immédiatement toutes les mesures $\nu([AB])$. Désignons par $\sigma(OX)$ le s. s. i. dont O et X sont deux sommets opposés (extrêmes, seulement si tous les x_i sont de même signe). $m(X)$ et $\nu[\sigma(OX)]$ sont liés par la relation $m(X) = (\Pi\varepsilon_i)\,\nu[\eta(OX)]$, où $\varepsilon_i^2 = 1$, $\varepsilon_i x_i > 0$. Connaissant la fonction $m(X)$, on en déduit, par une somme de 2^r termes et quel que soit le s. s. i. [AB) :

$$\nu([AB)) = \Delta(m, [AB)) = \Sigma(-1)^{\Sigma\theta_i} m(b_1 - \theta_1 l_1, \ldots, b_r - \theta_r l_r) \qquad (\theta_i = 0 \text{ ou } 1).$$

Donc la connaissance de $m(X)$ dans $H = [CD)$, si tous les c_i sont négatifs et tous les d_i positifs, suffit pour déterminer, par génération borélienne, $\nu(E)$ dans H, quand ν y est bornée. On a de même $\nu_1(E)$, $\nu_2(E)$, $\mu(E)$, auxquels correspondent les fonctions $m_1(X)$, $m_2(X)$ et

$$M(X) = m_1 + m_2 = (\Pi\varepsilon_i)\,\mathrm{VT}[m(X)].$$

VT = variation totale de $m(X)$ sur $\sigma(OX)$; $m(X) = m_1(X) - m_2(X)$; $m_1(X)$ et m_2 croissent (ne décroissent pas) avec chacun des x_i séparément : $dm(X)/dM(X) = dm_1/dM = 1$ sur H^1, $= -dm_2/dM = -1$ sur H^2, sauf sur un ensemble η, avec $\mu(\eta) = 0$. La dérivation s'opère avec les *s* réguliers. Si $X'(x'_i)$ tend vers $X(x_i)$ du côté des x_i négatifs ($x'_i < x_i$) pour $i = 1, \ldots, r$, $\sigma(OX')$ tend vers $\sigma(OX)$. Dès lors

$$m(X) = m(X - 0) = m(x_1 - 0, \ldots, x_r - 0).$$

Car $\nu(E)$, borné dans H, y présente le caractère d'additivité complète. Aussi la connaissance de $m(X)$ sur un ensemble dénombrable partout dense dans H suffirait à y déterminer $m(X)$ et $\nu(E)$.

Si $\nu(E)$ est non borné dans H au voisinage de l'ensemble fermé F, et si $\nu(E)$ est connu dans $H - F$, on retranche de $m(X)$ la fonction $m'(X)$ correspondant à $\nu'(E) = \nu(E)$ dans $H - F$ et $\nu'(E) = 0$ sur F. A la fonction $m - m'$, si sa variation totale dans H (ou sauf aux abords d'une partie F' de F) est finie, on applique la génération borélienne, qui donnera $\nu(E)$ sur F (ou sur $F' - F$). Mais les circonstances varient et rien de général ne peut être affirmé.

Nous dirons que [AB) est un semi-segment inférieur *dégénéré* si au moins un l_j est nul, les autres l_k restant positifs. $[AB)$ est alors $x_j = a_j = b_j$; $a_k \leqq x_k < b_k = a_k + l_k$; $\nu([AB))$ peut ne pas être nul. Il est la limite de $\nu([AB'))$ si B' est $(a_j + \eta_j, b_k)$ les η_j positifs tendant indifféremment vers zéro.

Le point A possède la mesure-ν limite de celle du semi-segment $[AB')$ si $b'_i = a_i + \eta_i (i = 1, \ldots, r)$. Cette mesure peut être non nulle pour une infinité dénombrable au plus de points A. Quand, X passant en A, x_i franchit la valeur a_i, $m(X)$ subit ou non une discontinuité selon que la mesure-ν du semi-segment dégénéré $x_i = a_i$, $0 \leqq \varepsilon_q x_q < \varepsilon_q a_q (q = 1, \ldots, r$ sauf $q = i)$ est différente de zéro ou nulle. Les a_i tels que la mesure-μ de la section $\lambda_i([CD), a_i)$ de $[CD)$ par $x_i = a_i$ soit non nulle forment un ensemble dénombrable α_i^p; $m(X)$ est continu aux points X dont toutes les coordonnées diffèrent des α_i^p.

Dans λ_i retenons l'ensemble $\lambda'_{i,p}$ des points dont tout voisinage $(x_i = \alpha_i^p, |x_q - a_q| < \eta)$ a une mesure-μ positive. Soient :

$$J_0 = \sum_i \sum_p \lambda'_{i,p}; \qquad \nu^0(E) = \nu(E) \quad \text{sur } J_0; \qquad \nu^0(E) = 0 \quad \text{sur } [CD) - J_0.$$

$$m^0(X) = (\Pi\varepsilon_i)\nu^0[\sigma(OX)]; \qquad m(X) - m^0(X) \text{ est continu.}$$

Si l'on change le système omnirectangle des plans de coordonnées, il est à remarquer que, sauf pour un ensemble dénombrable de directions de ces plans, J_0 se réduit aux points A_n pour lesquels $\nu(A_n) = 0$.

Considérons comme étant la dérivée, les dérivés extrêmes, de $F(X)$ par rapport à X au point X_0, la limite, les limites extrêmes, de $\Delta(F, s)/s$, s étant un segment *régulier* contenant X_0 et dont le côté tend vers zéro; $m^0(X)$ a la dérivée zéro sur une plénitude euclidienne de $[CD)$; $m(X) - m^0(X)$, dont la variation totale dans $[CD)$ est finie, possède une dérivée finie sur une plénitude, et aussi, dans le cas le plus général, la dérivée $+\infty$ ou $-\infty$ sur un ensemble j_1 de mesure euclidienne nulle. Nous réduisons j_1 à ses points dont le voisinage sur j_1 possède une mesure-μ positive; ces points forment J_1, se décomposant en J_1^1 et J_1^2, selon le signe de la dérivée infinie. Nous posons $\nu^1(E) = \nu(E)$ si $E \subset J_1$ et $\nu^1(E) = 0$ si $E.J_1 = 0$, enfin $m^1(X) = (\Pi\varepsilon_i)\,\nu^1[\sigma(OX)]$. Soient $J_2 = [CD) - J_0 - J_1$, $\nu^2(E) = \nu(E)$ sur J_2, $\nu^2(E) = 0$ si $E.J_2 = 0$, et

$$m(X) - m^0(X) - m^1(X) = m^2(X) = (\Pi\varepsilon_i)\,\nu^2(\sigma(OX));$$

$m^2(X)$ a une dérivée finie $\varphi(X)$ sur une plénitude de $[CD)$ et, remplacée par 0 ailleurs, $\varphi(X)$ est sommable euclidiennement; $m^2(X) = (\Pi\varepsilon_i)\int_{\sigma(OX)} \varphi(X)dX$, l'intégrale étant de Lebesgue.

Dans U_1 soit $m(x)$ à variation totale VT (m, P) réductible sur tout ensemble parfait P, à savoir : l'ensemble K (P) des points au voisinage desquels VT (m, P) est non définie ou infinie est non dense sur P. On forme une suite dénombrable d'ensembles P^α décroissants. J_0 dénombrable réunit les points des P^α où $m(x)$ est discontinu spécialement à P^α; J_1 est épais-μ en lui-même et de mesure euclidienne nulle; J_2 est l'ensemble où $m(x)$ a une dérivée ordinaire ou approximative $\varphi(x)$ finie. Le reste est de mesures-μ et euclidienne nulles. $m(x)$ s'obtient par la totalisation conjointe de trois séries (CCST, p. 343-388, particulièrement 362) dont chacune peut être non totalisable.

Métriques variables. — Considérons une métrique $\nu(E, t)$ dépendant d'un paramètre t. Nous la supposons bornée dans $H = [CD)$. Examinons en quelles conditions cette métrique pourrait avoir une dérivée en t, donc $\nu(E, t + \delta t) - \nu(E, t) = \rho(E, t)\,\delta t + \varepsilon(E, t, \delta t)\,\delta t$, $\varepsilon(E, t, \delta t)$ tendant vers zéro avec δt, E et t restant invariables.

Occupons-nous d'abord de la continuité de $\nu(E, t)$. Soit A un point tel que $\nu(A, t_0) \neq 0$. Cette inégalité subsistera dans un intervalle $t_0 - \eta < t < t_0 + \eta$, et A ne disparaîtra de $J_0(t)$ que lorsque $\nu(A, t)$ variant continûment deviendra nul et le restera. De même un nouveau point n'apparaîtra individuellement dans $J_0(t)$ qu'avec une mesure-ν antérieurement et d'abord nulle. Si nous supposons l'existence d'une dérivée de $\nu(A, t)$, cette dérivée s'annulera quand A disparaîtra, sinon $\nu(A, t)$ changerait simplement de signe, mais persisterait dans $J_0(t)$.

Considérons l'ensemble K des points A qui, pour au moins une valeur de t, donnent $\nu(A, t) \neq 0$. Soient $K^+_{n,p}$, $K^-_{n,p}$ les ensembles des A en lesquels respectivement, pour $p/n \leqq t < (p+1)/n$, $\nu(A, t) > 1/n$ ou $< -1/n$. Tout $K^+_{n,p}$ (tout $K^-_{n,p}$) est fini à distance finie. Sinon $\nu(K^+_{n,p}, t) = \infty$, pour la partie de l'ensemble $K^+_{p,n}$ situé dans une sphère contenant un point d'accumulation et pour les t du semi-segment spécifié. Donc l'ensemble K est dénombrable. Pareillement l'ensemble des t auxquels on peut faire correspondre (dans $J_0 + J_1$ principalement) un ensemble particulier $e(t)$ dont la mesure-μ est non nulle, cet ensemble est dénombrable.

Par exemple l'ensemble des α_i tels que pour au moins une valeur de t, la section $\lambda_i([CD), \alpha_i]$ ait une mesure-$\mu(t)$ positive est dénombrable.

Prenons pour E le semi-segment $\sigma(OX)$; $\nu[\sigma(OX), t] = (II\varepsilon_i)\, m(X, t)$. Si, au voisinage du point $X(x_i)$, $X'(x_i)$ franchissant l'un des plans $x'_i = x_i$, $m(X', t)$ subit une discontinuité, il en sera de même de $m(X', t + \delta t)$, dès que δt est assez petit, et la différence des deux discontinuités tendra vers zéro avec δt, elle sera, comme dans le cas de la continuité, équivalente à un produit $q(X, t)\,\delta t$ si $\nu[\sigma(OX), t]$ a une dérivée, précisément $q(X, t)$.

Nous sommes conduits aux hypothèses suivantes :

a. $q(X, t)$ est *continu en* t, ce qui n'entraîne pas qu'il soit continu en X;

b. La *variation totale* $L(X, t)$ de $q(X, t)$ dans II est finie; en conséquence, $q(X, t)$ définit dans E une métrique $\rho(E, t)$, se décomposant en $\rho_1 - \rho_2$, et donnant $\chi(E, t) = \rho_1 + \rho_2$, auxquelles correspondent $q_1(X, t)$, q_2; $q = q_1 - q_2$, $L(X, t) = q_1 + q_2$;

c. t variant dans un intervalle fini, si les ensembles E_n sont disjoints [on peut se borner aux $E_n = e_n(\omega_p)$ formés d'un nombre fini de s. s. i. de Φ], la série $\Sigma\chi(E_n, t)$ est uniformément convergente.

Soit $e(\omega)$ un ensemble formé d'un nombre fini de s. s. i. s de $\Phi(\omega)$:

$$\begin{aligned}\nu[e(\omega), t+\delta t] - \nu[e(\omega), t] &= \Sigma\Delta[m(X, t+\delta t), s] - \Sigma\Delta[m(X, t), s] \\ &= \delta t\Sigma\Delta[q(X, t+\theta\delta t, s)] \qquad (0 < \theta < 1).\end{aligned}$$

En vertu de a, $\partial\nu[e(\omega), t]/\partial t$ tend vers $\Sigma\Delta[q(X, t), s] = \rho[e(\omega), t]$. En vertu de c, la conclusion vaut si $e(\omega)$, réunissant une infinité de s. s. i. de Φ, est identique à l'ensemble ouvert O. On passe aux $d\nu(F, t)/dt = \rho(F, t)$, F étant fermé, et généralement à $d\nu(E, t)/dt = \rho(E, t)$.

C.R. Acad. Sc. Paris, t.249, 1959, p.2437-2442.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *L'intégrale de Stieltjes.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY.

Cas où soit l'argument intégré, soit la métrique des ensembles, dépendent d'un paramètre et sont dérivables par rapport à lui.

Je conserve les notations de ma Note précédente.

Mesures : ν *relative*, μ *absolue*;

Espace $U(U_r$ cartésien$) = U^1 + U^2$; $E^1 = E.U^1$, $E^2 = E.U^2$; $\nu(E^1) = \nu_1(E) \geqq 0$, $\nu(E^2) = -\nu_2(E) \leqq 0$; $\nu = \nu_1 - \nu_2$; $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

$A(a_i)$, $B(b_i)$ $(b_i = a_i + l_i)$ dans U_r, *extrémités* du *semi-segment inférieur* (s.s.i.) [AB) : $a_i \leqq x_i < b_i (i = 1, \ldots r)$, *régulier* si tous les l_i sont égaux.

Dans $H = [CD)$, si $\mu(H) < \infty$: $\Phi(\omega)$ = famille de s.s.i. s disjoints de côtés $< \omega$ et $\Sigma s = H$; (par exemple obtenue en coupant H par des plans $x_i = a_i^p$). *Fonction de Stieltjes* $m(X)$. Si $X(x_i) \in H$, $\sigma(OX)$ = s. s. i. dont O et X sont sommets opposés, $\varepsilon_i^2 = 1$, $\varepsilon_i x_i > 0$: $m(X) = (\Pi \varepsilon_i)\nu[\sigma(OX)]$; m_1, m_2, M correspondant à ν_1, ν_2, μ; $|M(X)| = VT[m, \sigma(OX)]$ = variation totale de $m(X)$ sur $\sigma(OX)$; pour le s.s.i. s, $\nu(s) = \Delta(m, s)$, somme algébrique des valeurs de $m(X)$ aux 2^r sommets de s; $dm/dX = \lim\limits_{\omega=0} \Delta(x, s)/s$, $X \in s$ régulier de côté ω.

A_m point dont $\nu(A_m) \neq 0$; $\lambda'_{i,p}$ = section de H par $x_i = \alpha_i^p$, avec $\mu(\lambda_{i,p}) > 0$; $\lambda_{i,p}$ épais-μ et $dm/dX = \pm\infty$ en tout point de $\lambda'_{i,p} \subset \lambda_{i,p}$;

$J_0 = \sum \lambda'_{i,p} \supset \sum A_m)$; sur J_1, $dm/dX = \pm\infty$ et $J_1 . J_0 = \emptyset$; sur J_2, $dm/dX = \varphi(X)$ fini, $H - J_0 - J_1 - J_2 = H'$ et $\mu(H') = 0$;

Si la mesure ν^2 définie par $m^2(X)$ peut se ramener à la mesure euclidienne avec $\nu^2(E) = \int_E \varphi(X)\,dX$, il n'en est pas de même de ν^0, ν^1 définies par $m^0(X)$ et $m^1(X)$.

Dans la pensée d'effectuer cette conversion, Heaviside, Dirac, méconnaissant les ressources de l'intégrale de Stieltjes et considérant que sur l'axe des x l'intervalle séparant les points a et b doit se mesurer par $b-a$, que dans le plan un rectangle doit être mesuré par le produit des côtés, ont voulu (ils ont seulement rencontré le cas de J_0, et encore réduit à un point, non le cas de J_1) ils ont voulu réaliser cette inclusion dans l'intégrale euclidienne, seule admise par eux, en déclarant que $\nu^0(E0$, $\nu^1(E)$ étaient les intégrales $\int [dm^0(X)/dx]\,dX$, $\int [dm^1(X)/dX]\,dX$ d'un infini sur un ensemble de mesure nulle (un point en l'espèce). Le produit d'un infini par zéro étant tout ce qu'on veut, on peut prétendre tirer de telles intégrales les fonctions d'ensemble $\nu^0(E)$, $\nu^1(E)$, *à la condition de les connaître d'avance*. Par l'intégration selon Stietjes, cette gymnastique devient superflue.

Pour l'analyste, l'espace insubstantiel se pourvoit d'une matière géométrique indifféremment répartie, pouvant se concentrer sur des ensembles euclidiennement sans étendue, même en de simples points; et la masse placée sur un support devient la mesure conventionnelle de celui-ci.

Je rappelle, sans insister, les postulats énoncés dans mes *Leçons sur calcul...* (CCST) pour l'intégrale $I(f, E, \nu) = \int_E f\, d\nu$:

$I(o, E, \nu) = o$ quelque soit E; $I(1, E, \nu) = \nu(E)$ (E mesurable-ν).

$I(f, E, \nu)$ est une intégrale L. S. (de Lebesgue-Stieltjes) ou sommable-ν moyennant : $I(|f|, E, \mu) < \infty$. Si $I(f, E, \nu)$ existe sans être L. S., c'est une totale (p. 404-405).

$I(f, E, \mu)$ possède l'additivité simple par rapport aux champs E, $I(|f|, E, \mu)$ l'additivité complète (p. 407).

I linéaire en les métriques-ν : $I\left(f, E, \sum k_i\nu_i\right) = \sum k_i I(f, E, \nu_i)$ (p. 406).

Si $A > f > B$ sur l'ensemble E mesurable-μ, $A\mu(E) \geq I(f, E, \mu) \geq B\mu(E)$. *Si la mesure du champ est absolue, l'intégrale est son produit par une valeur moyenne de la fonction.* Tel est le principe fondamental de l'intégrale. En réduisant l'intervalle A, B on s'affranchit de l'indétermination de la valeur moyenne. En ajoutant l'additivité complète relative aux champs d'intégration quand f a un signe invariable sur E, on aboutit selon l'idée de Lebesgue à l'échange des rôles de la fonction et de la mesure.

Si $I(|f|, E, \mu)$ existe, soient $\nu^+(y)$, $\nu^-(y)$ les mesures-ν des ensembles $o < y < f(X)$, $f(X) < y < o$, $(X \in E)$. Alors l'intégrale L. S. est

$$I(f, E, \nu) = \int_0^{\infty} \nu^+(y)\, dy - \int_{-\infty}^{0} \nu^-(y)\, dy,$$

Les variations totales de $\nu^+(y)$ et de $\nu^-(y)$ étant finies, les deux dernières intégrales sont riemanniennes.

Quand l'espace décrit par X est U_r, et qu'on suppose obtenue d'après $m(X)$, ou directement donnée, la métrique-ν des ensembles; l'intégrale $\int_E f(X)\, d\nu$, ou $I(f, E, \nu)$, se décomposera en

$$I(f, E.J_0, \nu'') + I(f, E.J_1, \nu') + \int_{E.J_2} f(X)\varphi(X)\, dX.$$

Posons $j_0 = \Sigma A_m$ et $\lambda''_{i,p} = \lambda'_{i,p} - \lambda'_{i,p}.j_0$;

$$I(f, E.J_0, \nu'') = \sum f(A_m)\nu(A_m) + \sum_{i,p} I(f, E.\lambda''_{i,p}, \nu'').$$

L'intégrale R. S., de Riemann-Stieltjes, fait simplement appel à la détermination des mesures ν (S) des s. s. i. s au moyen de la fonction $m(X)$ dans $H = [CD]$ si $VT(m, H) < \infty$; $I(f, H, \nu)$ s'écrit $\int_H f(X)\, dm(X)$. C'est la limite pour $\omega = o$ des sommes $\sum f(\xi)\,\Delta(m, s)$, où s s'identifie à tous les s. s. i. de $\Phi(\omega)$, et où ξ est un point indifféremment choisi dans s. La condition d'intégrabilité est que l'ensemble $\lambda(f)$ des points de discontinuité de f ait sa mesure-μ égale à zéro. Soit j_2 l'ensemble des points de J_2 où $\varphi(X) \neq o$. D'une part, la mesure euclidienne de $\lambda.j_2$, d'autre part la mesure-μ de $\lambda.(J_0 + J_1)$ doivent être nulles. En particulier, $f(X)$ doit être continu aux points A_m de j_0.

Exemple. — Dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$ du plan des xy, soit Γ une circonférence, l sa longueur, Q son point d'abscisse maximum, origine des arcs $QX = \theta l$ de Γ. Soit A_n^m ($n \geqq 0$, $0 \leqq m \leqq 3^n - 1$) le point $\theta = m 3^{-n} + 3^{-n-1} \pm 1/2$, et p l'ensemble parfait cantorien des points B_γ, si $\theta = \gamma = \sum\limits_{n \geqq 1} 2 a_n 3^{-n}$ ($a_n = 0$ ou 1).

Nous définissons ainsi la fonction métrique $\nu(E)$:

1° $\nu(E) = 0$ si $E.\Gamma = 0$;

2° $\nu(A_n^m) = (-1)^n 3^{-2n} = \nu^0(A_n^m)$; A_n^m est dans J_0^1 ou dans J_0^2 et ν_0 est ν_1^0 ou ν_2^0 selon que n est pair ou impair. Les A_n^m partout denses sur Γ sont étrangers à p, d'après $1/2 = \sum\limits_{n \geqq 1} 3^{-n}$; $\mu(A_n^m) = 3^{-2n}$.

3° A γ faisons correspondre sur l'axe des u le point $u = \sum a_n 2^{-n}$ et soit, définie sur le segment $[0, 1]$ des u : $\rho(u)$ continue, absolument (et non pas simplement à variation bornée, pour ne pas superposer deux métriques de Stieltjes); p_γ étant la portion de p définie par l'intervalle $(0, \gamma)$, nous posons $\nu(p_\gamma) = \rho(u)$. Supposons que $\rho'(u)$, considérée sur la plénitude où elle existe, prenne les deux signes dans tout intervalle. [J'ai montré la possibilité que $\rho'(u)$ existe en tout point (¹).] Sur η^1, $\rho'(u) = \rho'_1(u) > 0$, $\rho'_2(u) = 0$; sur η^2, $\rho'(u) = -\rho'_2(u) < 0$, $\rho'_1(u) = 0$; $\rho'(u) = \rho'_1(u) - \rho'_2(u)$; $\eta^1 + \eta^2$ est une plénitude de $(0, 1)$. Si $\rho_1(u)$ et $\rho_2(u)$ sont les longueurs euclidiennes de η^1 et de η^2, partout épais sur l'intervalle $(0, u)$, respectivement sur une plénitude de η^1 et de η^2 : $\rho'_1 = 1$, $\rho'_2 = 1$; p^1 et p^2 correspondent respectivement à η^1 et à η^2; p est identique à J_1.

$\mu(p_\gamma) = \int_0^u |\rho'(u)|\, du$; $\mu(p_\gamma) = u$ dans le dernier cas;

4° Sur Γ, J_2 est le complémentaire de $J_0 + J_1$; ν_2 sera, pour la partie de l'arc $(0, \gamma)$ incluse dans J_2 une fonction absolument continue quelconque de γ, et, pour simplifier, $\nu^2(E) = 0$, si $E \subset J_2.\Gamma$.

Soit $F(X)$ une fonction définie dans tout le plan U_2; $I = \int_{U_2} F(X)\, d\nu$ ne fera intervenir que les valeurs de F sur Γ, plus précisément aux points A_n^m et sur p. Ce sera

$$\sum_{n \geqq 0} (-1)^n 3^{-2n} \sum_m F(A_n^m) + \int_0^1 F(B_\gamma)\rho'(u)\, du$$

Dans notre seconde hypothèse, la dernière intégrale est

$$\int_{p_1} F(B_\gamma)\, du - \int_{p_2} F(B_\gamma)\, du.$$

L'intégrale I s'écrit encore $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(X)\, dm(x, y)$, $m(x, y)$ étant la fonction de Stieltjes $\varepsilon_1\varepsilon_2\nu[\sigma(OX)]$.

Les physiciens rebelles à l'intégrale de Stieltjes, écriraient cette intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(X)\frac{dm(x, y)}{dx\,dy}\,dx\,dy.$$

$dm/dx\,dy$ étant la limite de $\Delta(m, s)/s$ comme il a été dit. Cette dérivée serait effectivement nulle hors de la circonférence Γ et aussi sur $\Gamma - \sum A''_{ii} - p$, mais elle serait infinie, positive ou négative, aux points réservés (exception faite sur p pour un ensemble de mesure-μ égale à zéro). On considérerait qu'en intégrant cette dérivée à la Riemann sur ces supports de longueur nulle (un A''_{ii} ou une portion élémentaire de p), grâce à l'élasticité du produit de l'infini par zéro, on retrouverait soit $(-1)^n\,3^{-2n}$, soit $\varphi'(u)$.

Quelles particularités présente $m(x, y)$?

Par Q et par le point diamétralement opposé P menons vers les y o les demi-tangentes à Γ, QQ′, PP′; par N et S, d'ordonnées minimum et maximum sur Γ, les demi-tangentes NN′, SS′ vers les $x > 0$; SS′ et QQ′ se coupent en I.

Nous divisons U_2 en cinq régions R_i par les contours directs : $N'\overset{\frown}{NP}P'$ pour R_1; $Q'IS'$ pour R_2; $P'\overset{\frown}{PS}IQ'$ pour R_3; $N'\overset{\frown}{NQ}IS'$ pour R_4; $\overset{\frown}{NQ}I\overset{\frown}{SN}$ pour R_5 (les arcs $\frown$ sont soit directs, soit rétrogrades sur Γ.

$m(x, y)$ est $= 0$ dans R_1 et est constant $= \nu(\Gamma) = \nu(U_2)$ dans R_2: $m(x, y)$ est indépendant de y dans R_3, mais subit une discontinuité (continuité à gauche) chaque fois que x traverse l'abscisse $\alpha_1^{n,m}$ d'un point A''_{ii}; $m(x, y)$ est indépendant de x dans R_4, mais est discontinu (continu en dessous) quand y franchit une ordonnée $\alpha_2^{n,m}$; dans R_5, $m(x, y)$ varie en x et y, et est discontinu sur chacune des familles de droites partout denses $x = \alpha_1^{n,m}$, $y = \alpha_2^{n,m}$. Mais si le semi-segment $s(AB'BA')$ ou $[AB)$ est dans R_5 (accru de Γ) $\Delta(m, s) = 0$, car $F(A) + F(B) = F(A') + F(B')$.

On verrait aisément les particularités complémentaires si μ était non nul sur des ensembles d'abçisses ou d'ordonnées constantes (s'agrégeant à J_0).

Il est visible que : d'une part, si la métrique-ν des ensembles de U_2 est donnée, la recherche de la fonction de Stieltjes $m(X)$ n'offre aucun intérêt pour la définition et le calcul de l'intégrale L. S.; d'autre part, si la fonction $m(X)$ est donnée, on doit en tirer immédiatement la métrique-ν, et, celle-ci une fois obtenue, la fonction $m(X)$ n'est plus d'aucune utilité pour la même intégrale.

Dès $r \geqq 2$, $m(X)$ présentant des discontinuités sur les variétés $x_i = \alpha''_i$, associe dans J_0 les $\lambda'_{i,p}$ aux points A_m alors qu'un changement d'orientation des axes les inclurait dans J_1, auquel leur nature les apparente.

Dans l'intégration les métriques s'ajoutent. On additionne l'intégrale sur l'ensemble $\sum A_m$ où la métrique est $\nu(A_m)$, l'intégrale sur $\sum\limits_{i.p} \lambda''_{i,p} + J_1$, où la métrique-$\nu$ est irréductible à l'euclidienne, l'intégrale sur J_2 où la métrique est $\int_e \varphi(X)\, dX$.

Dérivation sous le signe somme. — On n'a pas assez considéré l'intégrale de Stieltjes pour les fonctions à intégrer dépendant d'un paramètre.

Soit T la variable décrivant le champ d'intégration E, doué de la métrique-ν, la mesure μ (E) étant finie et X variant dans un espace *distancié* V. L'intégrale $\Phi(X) = \int_E F(T, X)\, d\nu = I[F(T, X), E, \nu]$ est supposée exister pour tout X dans V. Supposons F (T, X) continue en X au point X_0, quel que soit T sur E, et *uniformément* par rapport à T. Il en résulte immédiatement que Φ (X) est continu en X au point X_0.

Supposons que, X dépendant de r paramètres x_i, $\partial F(T, X)/\partial x_i$, existe pour $T \in E$, $X \in V$, et soit continue en X au point X_0, *uniformément* pour $T \in E$ ($i = 1, \ldots, r$). Le raisonnement élémentaire vaut :

$$F(T, X_0 + \delta X) - F(T, X_0) = \sum \frac{\partial F(T, X_0 + \theta \delta X)}{\partial x_i} \delta x_i \qquad (0 < \theta < 1).$$

Par notre hypothèse de continuité, en tout point X où elle est vérifiée :

$$d\Phi(X) = \sum dx_i \int_E \frac{\partial F(T, X)}{\partial x_i} d\nu.$$

Supposons T ($t_1, \ldots, t_r$) et X dans U_r, puis F(T) (où T est entendu comme le vecteur $\overrightarrow{OT}$) continu et doué de dérivées $\partial F(T)/\partial t_i$ continues dans U_r, μ borné à distance finie. Considérons l'intégrale $\int_E F(T)\, d\nu$, puis supposons que le phénomène dont F (T) est censé mesurer les effets se transporte de T′ en T′ + X; T — X étant le vecteur $\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OX}$, l'intégrale devient $\Phi(X) = \int_E F(T - X)\, d\nu$, et

$$d\Phi(X) = -\sum dx_i \int_E \frac{\partial F(T - X)}{\partial t_i} d\nu.$$

Soit E_X l'ensemble déduit de E par la translation $-\overrightarrow{OX}$; *seules interviennent dans les intégrales les valeurs de* F *et des* $\partial F/\partial t_i$ *sur* E_X; mais on doit porter sur E_X la métrique ν. On pose $\nu_X(e) = \nu(e + X)$:

$$\Phi(X) = \int_{E_X} F(T)\, d\nu_X, \quad d\Phi(X) = \sum dx_i \int_{E_X} \frac{\partial F(T)}{\partial t_i} d\nu_X.$$

Dans l'exemple étudié, soient Γ_X, $(A'''_n)_X$, $(B_\gamma)_X$ la circonférence Γ, les points A'''_n, B_γ, après la translation ($-x$, $-y$). Si

$$\Phi(X) = \int_{U_2} F(T - X)\, d\nu = \int_\Gamma = \int_{\Gamma_X} F(T)\, d\nu_X :$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\sum (-1)^n 3^{-2n} \sum \frac{\partial F[(A_n^m)_X]}{\partial x} - \int_0^1 \frac{\partial F[(B_\gamma)_X]}{\partial x} \rho'(u)\, du.$$

Et pareillement pour $\partial\Phi/\partial y$.

Venons-en au cas le plus simple possible. Il correspond à $r = 1$, et à la fonction $m(x)$ de Stieltjes possédant un seul point de discontinuité [nous le prenons pour l'origine, $m(+0) - m(0) = \delta$ non nul] et constante autour de tout autre point. Donc $m(x) = 0$ pour $x \leqq 0$; $m(x) = \delta$ pour $x > 0$;

si $s = [ab)$ $\nu(s) = m(b) - m(a) = 0$, si $b \leqq 0$ ou si $a > 0$ et $\nu(s) = \delta$ si $a \leqq 0 < b$; $\nu(E) = \delta$ ou $\nu(E) = 0$ selon que E contient ou non le point O.

L'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dm(t)$ est la limite de $\int_a^b f(t)\, dm(t)$, $-a$ et b positifs croissant indéfiniment. On subdivise ab par des points t_p $(0 < t_{p+1} - t_p < \omega)$; si k est défini par $t_{k-1} \leqq 0 < t_k$. $m(t_p) - m(t_{p-1}) = 0$ si $p \neq k$; $m(t_k) - m(t_{k-1}) = \delta$; L'intégrale existe et vaut $\delta f(0)$ moyennant que $f(t)$ soit continue à l'origine.

Pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, $\int_{U_1}^{\cdot} f(t)\, d\nu$, J_0 se réduit au point O; $J_1 = \sigma$; $J_2 = U_1 - (O)$, avec $dm/dx = 0$ en tout point de J_2. L'intégrale vaut $\delta f(0)$, quelle que soit la fonction $f(t)$.

Si le phénomène mesuré par $f(t)$, et dont on intègre les effets se déplace du point t' au point $t' + x$ (pour tout t'), l'intégrale devient

$$I(x) = \int_{U_1}^{\cdot} f(t - x)\, d\nu = \int_{(U_1)_x}^{\cdot} f(t)\, d\nu_x;$$

$\nu_x(e)$ est δ ou 0 selon que e contient ou non le point $(-x)$; $I(x) = \delta f(-x)$.

Si $f(t)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre p, l'intégrale $I(x)$ étant R. S. aussi bien que L. S.,

$$\frac{d^p I(x)}{dx^p} = (-1)^p \int_{U_1} f^{(p)}(t - x)\, d\nu = (-1)^p \int_{(U_1)_x} f^{(p)}(t)\, d\nu_x = (-1)^p \delta f^{(p)}(-x).$$

Revenant à $x = 0$, on trouve

$$\frac{d^p I(0)}{dx^p} = (-1)^p \int_{U_1} f^{(p)}(t)\, d\nu = (-1)^p \delta f^{(p)}(0).$$

J'ignore si ces calculs ont un sens pour les physiciens. Mais pour l'analyste, les mystères de la fonction d'Heaviside et de l'intégrale de Dirac sont inexistants dès que l'on a quelque notion de l'intégrale de Stieltjes portant sur des fonctions dépendant d'un paramètre et dérivables.

Intégrale à métrique dérivable. — Supposons que la métrique déterminant l'intégrale dépende d'un paramètre t, et que $\nu(E, t)$ admette une dérivée $\rho(E, t)$, aux conditions examinées antérieurement. L'intégrale $I[f, E, \nu(t)]$ admettra-t-elle la dérivée $I[f, E, \rho(t)]$? Nous supposons $\nu(E, t)$ bornée dans $H = [CD)$ où varie X.

Une fonction f sommable-ν est par hypothèse sommable-μ. Pour que a réponse à la question posée puisse être affirmative, il faut d'abord que f sommable-μ soit aussi sommable-χ. Or les ensembles $o < y < f(X)$ et $f(X) < y < o$ sont indépendants de t. Soient $\mu^+(y, t)$, $\mu^-(y, t)$ leurs mesures dans la métrique $\mu(t)$: et $\chi^+(y, t)$, $\chi^-(y, t)$ leurs mesures dans la métrique $\chi(t)$. Pour que les intégrales riemanniennes $\int_0^\infty \mu^+(y, t)\,dy$ et $\int_{-\infty}^0 \mu^-(y, t)\,dy$ étant finies, il en soit toujours ainsi des intégrales $\int_0^\infty \chi^+(y, t)\,dy$ et $\int_{-\infty}^0 \chi^-(y, t)\,dy$, il est nécessaire et suffisant que : 1° A'_i désignant tout point A où $\rho(A, t) \neq o$, tandis que $\nu(A, t) = o$, l'ensemble $\sum A'_i = j_0(\rho, t) - j_0(\rho, t).j_0(\nu, t)$ soit fini ; 2° pour les ensembles E inclus dans H et ne contenant aucun point A'_i, le rapport $\chi(E, t)/\mu(E, t)$ soit borné par un nombre $k(t)$. Cette condition s'exprimera par

$$\Delta[L(X, t), s] \leqq k(t)\,\Delta[M(X, t), s]$$

pour les s inclus dans H et ne contenant aucun point A'_i. Les deux multi-différences Δ sont non négatives.

(*) Séance du 24 décembre 1959.
(1) *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse* (p. 186-224).

C.R. Acad. Sc. Paris, t.250, 1960, p.23-29.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Les fonctionnelles linéaires.* Note de (*) M. Arnaud Denjoy.

Fonctionnelles synthétiques, fonctionnelles analytiques. Leur réciprocité. Une fonctionnelle synthétique est une intégrale de son argument, celle-ci étant elle-même une fonctionnelle linéaire plus générale que la première. Les fonctions surabsolument continues. Une fonctionnelle analytique est la limite d'une intégrale dont le champ utile se réduit indéfiniment autour d'un point.

Je conserve les notations de mes deux Notes précédentes : Dans l'espace cartésien U_r, $A(a_i)$ et $B(b_i)$ si $b_i - a_i = l_i > 0$ sont les extrémités du segment [AB] : $a_i \leqq x_i \leqq b_i$, du semi-segment inférieur (s.s.i.) [AB) ($a_i \leqq x_i < b_i$),... de l'intervalle (AB) : $a_i < x_i < b_i$. $\sigma(OX)$ est le s.s.i. dont O et X sont deux sommets opposés. Pour $X(x_i)$, $\varepsilon_i^2 = 1$, $\varepsilon_i x_i > 0$.

Dans mes *Leçons sur le calcul des coefficients*... (CCST, 4ᵉ partie, 1ᵉʳ fasc., chap. VIII) j'insiste (p. 393) sur l'indépendance de nature de l'intégrale et de la fonctionnelle linéaire.

L'intégrale $I(f, E, \nu)$ et la fonctionnelle $W(f, E)$, donnée *a priori*, sont toutes deux linéaires en f et additives en E. Mais $I(f, E)$ est un résultat de calcul. Les caractères de W, le lien par lequel f détermine W, sont énoncés indépendamment de toute notion d'intégrale, et de toute connaissance de l'opération permettant de calculer W à partir de f et de E.

La fonctionnelle donnée $W(f, E)$ détermine une métrique. W se déduit de f par une intégration subordonnée à cette métrique. L'argument f le plus général déterminant W n'est habituellement pas sommable par rapport à cette métrique. Le calcul de W à partir de f exige une totalisation (p. 440-465).

La fonctionnelle linéaire est un nombre (ou un vecteur si f est un vecteur) $W(f, E)$ déterminé par la fonction de point $f(X)$ définie sur un ensemble E d'un espace U. On doit distinguer la fonctionnelle W *synthétique*, dépendant de toutes (avec parfois une indécision limitée) les valeurs de f sur E, et la fonctionnelle *analytique*, qui est une fonction du point X de E, ne dépendant en ce point que des valeurs de f sur le voisinage indéfiniment restreint de X dans E. Ce second cas est par exemple celui d'une dérivée de la fonction $f(x)$ sur un intervalle ab de U_1.

Toute intégrale $\int_E f\, d\nu$ est une fonctionnelle, linéaire en f, additive en E. Il est naturel de chercher à convertir toute fonctionnelle synthétique en une intégrale, toute fonctionnelle analytique en une limite d'intégrales dont le champ utile tend à se réduire au point où la fonctionnelle prend sa valeur.

La fonctionnelle synthétique $W(f, E)$ n'est pas définie quels que soient f et E. Pour f donnée, W existera pour les ensembles E formant une collection $G(f)$. Pour E donné, f devra être dans une classe $\Phi(E)$. Pour autant que cela présentera un sens, une fonctionnelle étant primitivement définie pour un système restreint d'associations (f, E), on donnera aux familles $G(f)$, $\Phi(E)$ toutes les extensions suggérées par le principe que les postulats de l'intégrale (CCST, p. 386-412) doivent également convenir à la fonctionnelle linéaire.

Si les E_p en nombre fini et disjoints sont dans $G(f)$, $\sum E_p$ est dans $G(f)$.

Si les f_p en nombre fini sont dans $\Phi(E)$, $\sum k_p f_p$ (k_p indépendant de X) est dans $\Phi(E)$. Bornons-nous aux espaces cartésiens U_r.

Supposons, pour l'argument $f(X)$ donné, l'existence de $W(f, s)$ quel que soit le s. s. i. s. Posons $F(X) = (\Pi\varepsilon_i) W[\sigma(OX)]$. Alors $W(f, s) = \Delta(F, s)$. Cette différence Δ resterait la même si l'on ajoutait à $F(X)$, r fonctions quelconques dépendant chacune de $(r-1)$ seulement des r coordonnées x_i. Mais $F(X)$ est déterminé par la condition d'être nul et continu à gauche (vers les $x_i < 0$) pour $x_i = 0$.

$F(X)$ résultant de la totalité des valeurs de f dans $\sigma(OX)$, est une fonctionnelle synthétique de $f(X)$ donné. Mais si l'on suppose $F(X)$ donné, $f(X_0)$ satisfaisant à la relation $W(f, s) = \Delta(F, s)$ quel que soit s contenant X_0, et si réduites que soient ses dimensions, $f(X_0)$ ne dépend des valeurs de $F(X)$ que dans un voisinage si étroit soit-il de X_0; $f(X)$ est une fonctionnelle analytique, linéaire d'ailleurs, de $F(X)$; $f[X] = \varpi[F(X)]$.

$F(X)$ étant donné, $f(X) = \varpi(F)$ peut ne pas exister pour tout point X, et faire défaut sur un ensemble $I(F)$. Et de même, $f(X)$ étant donné, même existant en tout point X, $F(X)$ peut ne pas exister sur un ensemble $J(f)$.

Par exemple, $F(X)$ continu étant donné, $I(F)$ est un ensemble de mesure euclidienne d'ordre r nulle (mais de constitution topologique spéciale) dans les cas les plus généraux où : 1° $F(X)$ est à variation totale réductible dans U_r, et $f(X) = \varpi(F)$ est la dérivée approximative (ou exacte) de $F(X)$ (au sens habituel, les s étant réguliers); 2° $F(X)$ est à variation totale finie à distance finie, et $f(X) = \varpi(F)$ en est la dérivée exacte.

Inversement, dans l'espace U_1, $f(x)$ donné en tout point, étant la dérivée seconde symétrique de $G(x)$, $\tau_{2,s}(f, a, x) = F(x) - F(a)$ est la dérivée première de $G(x)$ $(+ Cx + C')$. Si $\tau_{2,s}$ (CCST, p. 392) exige les neuf opérations, $J(f)$ existe; il est non dense et de longueur euclidienne nulle.

Enfin, $G(x)$ présentant certains caractères de résolubilité du second ordre et symétrique (on trouvera ces caractères présentés pour des fonctions G même seulement continues approximativement, p. 465-471, CCST), d'une part $f(x)$ dérivée seconde symétrique approximative de $G(x)$ n'existe pas (dans le cas général) sur un ensemble de mesure nulle I, d'autre part la dérivée première approximative $F(x)$ de $G(x)$ n'existe pas sur un ensemble de mesure nulle J; $f(x)$ donné sur U_1 (ses valeurs sur I sont indifférentes) détermine $F(x) - F(a) = W[f, (a, x)]$ par une totalisation $\tau_{2,s}(f, a, x)$ dénuée de sens si a ou x sont sur $J = J(f)$. Inversement, pour F donné, avec des valeurs indifférentes sur J, $I(F)$ s'identifierait à I.

Une fonctionnelle linéaire n'est pleinement étudiée que si les caractères de $F(X)$ et le lien rattachant $f(X)$ à $F(X)$ sont suffisamment précisés pour que, aux points non exceptionnels où ces fonctions existent, $F(X)$ soit déterminé par $f(X)$ et $f(X)$ par $F(X)$, même si les données, respectivement f et F, manquent sur des ensembles suffisamment rares, par exemple de mesure euclidienne d'ordre r nulle.

Métrique tirée d'une fonctionnelle linéaire synthétique. — Avant d'entreprendre l'expression de la fonctionnelle $W(f, E)$ supposée donnée (du moins pour certaines associations f, E) par une intégrale $I(f, E, \nu)$ il faut d'abord déterminer la métrique ν. Évidemment, on posera $\nu(E) = W(1, E)$, toutes les fois que la fonctionnelle aura un sens. Si $W(1, s)$ existe pour tout s. s. i. s., on posera $m(X) = (H\varepsilon_i)\, W[1, \sigma(OX)]$; d'où $\nu(s) = \Delta(m, s)$. Ayant les $\nu(s)$, par génération borélienne (dans tout s. s. i. $H = [CD)$ où $\nu[m(x)]$ est fini), on obtient les $\nu(E)$, $\mu(E)$ pour tous les ensembles boréliens; on définit les ensembles mesurables-ν quelconques.

$\nu = \nu(E, t)$ dépendra d'un paramètre t si $W = W(f, E, t)$.

Si s régulier contient X et si $f(x)$ est continu au point X_0, la fonctionnelle $W(f, s)$ vérifiant les postulats fondamentaux de l'intégrale, il s'ensuit $W(f, s) = f(X)\,\nu(s) + o[\mu(s)]$. Sauf aux points X où o est un dérivé extrême de ν par rapport à μ ($d\nu/d\mu = \pm 1$ sur une plénitude) $f(X) = dW[f, \sigma(OX)]/dX$. Si $\nu(E)$ n'est pas borné autour de X, si f n'y est pas continu, la fonctionnelle analytique $f(X) = w[F(X)]$ pourra rester pour $F(X)$ au point X une dérivée de sens approximatif. Rien de général ne peut être précisé.

Exemples. — 1° Supposons $W[f(x), U_1)$ défini uniquement pour les fonctions analytiques f, suffisamment bornées à l'infini, ainsi par $|f(x)| = o(x^{-2})$.

Considérons la fonction $g_{k,n}(x, a, b) = \left[1 + e^{-(n\overline{x-a}+\varepsilon)(n\overline{b-x}+\varepsilon')}\right]^{-1}$; $g_{k,n}$ tend vers $g_k(x, a, b) = 1$ sur E_k et o sur $U_1 - E_k$, E_k étant $[ab]$, $[ab)$, $(ab]$, (ab), si respectivement $1 = \varepsilon = \varepsilon'$, $1 = \varepsilon = -\varepsilon'$, $1 = -\varepsilon = \varepsilon'$, $1 = -\varepsilon = -\varepsilon'$.

Nous admettons que $W[(f, U_1)]$ s'étend à $W(fg_2, U_1)$ en tant que limite de $W(fg_{2,n}, U_1)$; $fg_2 = f$ sur $[ab)$ et $= 0$ sur $U_1 - [ab)$. Nous posons $W(fg_2 f\ U_1) = W(f, [ab))$.

Pareillement, dans U_r, si $W(f(X), U_r)$ n'est d'abord défini que pour f analytique et suffisamment bornée à l'infini [par exemple avec $o\,|X|^{-r-1})$], on définira $W[f(x), [AB)]$ comme $\lim\limits_{n\,\infty} W[(f(X)\, g_{2,n}[X, [AB)], U_r)]$, $g_{2,n}[X, [AB)]$ étant $\prod\limits_i g_{2,n}(x_i, a_i, b_i)$.

Par extension, nous posons $W[1, [AB)] = \lim\limits_{n\,\infty} W(g_{2,n}[X, [AB)], U_r)$.

2° Soit $f(x) = \Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx$; $U = (-\pi, +\pi)$; $a_n = W(f, U)$. Admettons :

$$W[1, \sigma(0, a)] = \lim_{n\,\infty} W[g_{2,n}[x, \sigma(0, a)], U] = m(a) = \frac{\sin na}{n\pi} \qquad (n \geqq 1),$$

d'où $\nu((s)$, $\nu(O)$, $\nu(F)$, etc. Les intégrales étant de L. S.

$$\nu_1(E) = \frac{1}{\pi}\int_E (\cos nx)^+\, dx; \qquad \nu_2(E) = -\frac{1}{\pi}\int_E (\cos nx)^-\, dx; \qquad \mu(E) = \frac{1}{\pi}\int_E |\cos nx|\, dx.$$

Ajustement de la fonctionnelle synthétique à la fonctionnelle-intégrale la représentant. — Considérons une fonctionnelle synthétique $W_0(f_0, s)$ donnée pour tout s. s. i. s. On en déduit : $F_0(X)$, $W_0 = \Delta(F_0, s)$, une métrique $\nu(E)$ qui ne changera pas. Pour que f_0 donné détermine F_0 en se contentant pour F_0 d'une caractère très *général* (g_0), on exige pour la fonctionnelle analytique $f_0 = \varpi(F_0)$ un caractère (p_0) très *précis* vérifié *en tout point.*

Admettons que, par des raisonnements de fonctions majorantes [f_0 est remplacé par son maximum sur les s' où $\nu(s') > 0$ et par son minimum si $\nu(s') < 0$] et minorantes, selon de la Vallée Poussin, on prouve que si f_0 est sommable-μ, $\Delta(F_0, s)$ est l'intégrale L. S., $I(f_0, s, \nu)$. Si f_0 n'est pas sommable, $I(f_0, s, \nu)$ sera une totale de règles appropriées, pour autant qu'on sache les établir. Mais la fonctionnelle linéaire synthétique $W(f, s) = I(f, s, \nu)$ définie chaque fois que l'intégrale a un sens, est normalement plus générale que W_0. C'est $\Delta(F, s)$, $F(X)$ présentant un caractère *précis* (p), moyennant quoi la définition de $f = \varpi(F)$, énoncée par une condition (g) peut *faire défaut* sur un ensemble de mesure-μ égale à zéro (ou même plus étendu). La condition (p) de la fonctionnelle synthétique $F(X) = W[f(X)]$ s'exprimera en variations « figées », les variations infinitésimales, traduites par des quotients différentiels, étant exclues, et réservées à la définition de la fonctionnelle analytique $f(X) = \varpi[F(X)]$.

Exemples. — Dans U_1, ci-après $F_0(x)$ aura pour nombre dérivé $f_0(x)$ *en tout point*; ($W_0(f_0, a, b) = F_0(b) - F_0(a) = I(f_0, a, b)$, la métrique-$\nu$ étant euclidienne; (g_0) sera la *simple continuité.*

1° (p_0) : $f_0 = \varpi_0(F_0)$ est *en tout point* un dérivé extrême fini de F_0; $I(f_0, a, b)$ est la totale simple; (p) : $F(x)$ est *simplement résoluble*; (g) : $f = \varpi(F)$ est *sur une plénitude* la dérivée ordinaire ou approximative de $F(x)$.

2° (p_0) : $f_0 = \varpi_0(F_0)$ est *en tout point* la dérivée exacte de F_0; $I(f_0, a, b)$ est la totale complète; (p) : $F = W(f)$ est *complètement résoluble*; (g) : $f(x) = \varpi[F(x)]$ est *sur une plénitude* la dérivée ordinaire de F;

3° (p_0) : f_0 est *en tout point* la dérivée (ou un dérivé de côté invariable) de F_0 et f_0 est *sommable* L.; $I(f_0, a, b)$ est l'intégrale de Lebesgue; (p) : $F(x)$ est *absolument continue*; (g) : f est *sur une plénitude* un dérivé fini de $F(x)$;

4° (p_0) : $f_0(x)$ est *continue* et elle est *en tout point* la dérivée de $F_0(x)$; la métrique $\nu(E) = \mu(E)$ est celle de Jordan, et ignore celle de Borel; $I(f_0, a, b)$ est l'intégrale de Riemann.

(p) : $F(x) = W(f, a, x)$ est *surabsolument continue* (s.a.c.); (g) : $f(x) \equiv \varpi[F(x)]$ est pour $F(x)$ un nombre dérivé qu'il suffit de connaître sur un ensemble *dénombrable partout dense.*

Posons $\mathrm{VR}(F, a, b) = [F(b) - F(a)]/(b-a)$. Soient : la suite (x_i),

$$x_0 = a, \qquad 0 < x_i - x_{i-1} < \omega, \qquad x_n = b\,;$$

M_i, m_i les maximums et minimums de f sur l'intervalle (x_{i-1}, x_i);

$$S = \sum_1^{n-1} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad s = \sum m_i(x_i - x_{i-1}).$$

L'intégrale de Riemann $I_R(f, a, b)$ est $\lim\limits_{\omega=0} S = \lim\limits_{\omega=0} s$.

La condition d'intégrabilité est : f borné et, si $h(f, \alpha)$ est l'ensemble (fermé) des x où l'oscillation de f est $\geqq \alpha > 0$, $h(f, \alpha)$ a sa mesure extérieure (jordanienne) nulle.

Les quatre dérivés extrêmes de $F(x)$ ont dans tout intervalle même maximum et même minimum (Lebesgue). Donc tout dérivé moyen ou extrême donne les mêmes sommes S et s. Tous ont la même oscillation en tout point.

Soient $\Omega_i = \mathrm{VR}(F, x_{i-1}, x_i)$, $\lambda_i = |\Omega_{i+1} - \Omega_i|\,(x_{i+1} - x_{i-1})$, $\Lambda = \sum\limits_1^{n-1} \lambda_i$.

Je définis la condition de surabsolue continuité par $\lim\limits_{\omega=0} \Lambda = 0$.

1° *Si f est intégrable* (R), $F(x) = I_R(f, a, x)$ *est s. a. c.*

Soit O'_i l'oscillation de f sur (x_{i-1}, x_{i+1}); $|\Omega_{i+1} - \Omega_i| < O'_i$; si $\lambda'_i = O'_i(x_{i+1} - x_{i-1})$, $\Lambda < \Sigma\lambda'_{2i} + \Sigma\lambda'_{2i-1}$. Donc $\lim\limits_{\omega=0} \Lambda = 0$.

2° *Si $F(x)$ est s. a. c., tout dérivé f de $F(x)$ est intégrable* (R).

a. f est borné. Sinon soit c au voisinage duquel f est non borné, θ infiniment voisin de c, avec $|f(\theta)| > A > 0$; θ' infiniment voisin de θ, avec $|\mathrm{VR}(F, \theta, \theta')| > A$: si θ, θ' et $c \pm \omega/2$ (intérieur à ab) sont trois x_i consécutifs, Λ est infini avec A.

$F(x)$ ayant ses dérivés bornés, est absolument continue.

b. $h(f, \alpha)$ a la longueur zéro. Sinon, soit P son noyau parfait, de longueur $l > 0$. Extrayons de ab des intervalles contigus jusqu'à ce que la plus grande longueur des segments restants contenant P soit inférieure à $\omega/2$. Soit pq l'un d'eux. (Dans les contigus extraits nous distribuons des chaînes de points x_i, de pas inférieur à $\omega/2$). Il y a deux couples de points infiniment voisins, l'un ξ, ξ' de p, l'autre η, η' de q, tels que $f(\xi') - f(\xi)$ et $f(\eta') - f(\eta)$ soient $> \alpha'$ inférieur à α. Prenons le plus grand des quatre nombres $f(\xi)$, ...; par exemple $f(\eta)$, et alors le plus petit de $f(\xi)$ et de $f(\xi')$, par exemple $f(\xi)$; $f(\eta) - f(\xi) > \alpha'$; ξ et un point infiniment voisin formeront un couple x'_m, x'_{m+1}, donnant $\mathrm{VR}(F, x'_m, x'_{m+1})$ infiniment voisin de $f(\xi)$, et de même η et un point infiniment voisin de lui donneront $\mathrm{VR}(F, x''_r, x''_{r+1})$ infiniment voisin de $f(\eta)$. Donc $\mathrm{VR}[F, x''_r, x''_{r+1}) - \mathrm{VR}(F, x'_m, x'_{m+1}) > \alpha'$. Il s'ensuit que $\mathrm{VR}(F, x'_{m+1}, x'_r)$ différera de plus de $\alpha/2$ de l'une des deux VR. Dès lors, la succession x'_m, x'_{m+1}, x''_r ou la succession x'_{m+1}, x''_r, x''_{r+1} donneront, avec $x'_m x''_r$ ou $x_{m+1} x''_r$ infiniment voisins de pq, un $\lambda_i > (q-p)\,\alpha/2$. En conclusion $\Lambda > l\alpha/2$, indépendamment de ω; F ne serait pas s.a.c.

La proposition est établie.

Fonctionnelles linéaires analytiques. — Considérons d'abord le cas d'une seule variable indépendante. $f(x)$ étant définie sur l'intervalle ab, soit $\Phi(f) = a_0(x) f(x) + \ldots + a_n(x) f^{(n)}(x)$, ou plus particulièrement $\Phi(f) = \sum\limits_{p=0}^{p=n} d^p[b_p(x) f(x)]/dx^p$, d^p/dx^p pouvant désigner un quotient différentiel valable au seul point x; f est *bornée* (ou sommable?).

Une telle fonctionnelle linéaire n'est pas une intégrale $\mathrm{I}(f, a, b)$, mais elle peut être représentée comme une limite d'intégrale

$$\Phi(f) = \lim_{y=0} \int_a^b f(t)\, h(t-x, y)\, dt.$$

La théorie des fonctions analytiques nous conduit à considérer

$$g(v, y) = \frac{y}{v^2+y^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{v-iy} - \frac{1}{v+iy}\right);$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y=0} \int_a^b f(t)\, g(t-x, y)\, dt$$

si f est *continue* au point x; (ou même simplement s'il en est ainsi de $f(x+t)+f(x-t)$ pour $t=0$; et encore s'il y a continuité approximative logarithmique, l'ensemble excepté x_1 étant tel que $\int_{x_1} dt/|t|$ soit fini.

Si $\lambda(y)$ et $\overline{\lambda}(y)$ sont imaginaires conjugués, avec $\lambda(0) = \overline{\lambda}(0)$, et si $p > 0$:

$$\frac{1}{2i}\int_a^b \left[\lambda(y)(t-x-iy)^{-p-1} - \overline{\lambda}(y)(t-x+iy)^{-p-1}\right] dt$$

tend vers zéro avec y. Si $f(x)$ possède un quotient différentiel d'ordre n au point x, posons

$$\mathrm{P}(z) = \sum_0^n \left(\frac{1}{p!}\right) z^p f^{(p)}(x) \qquad \text{et} \qquad f(x+z) = \mathrm{P}(z) + \varepsilon(x, z)\, z^n.$$

$\varepsilon(x, z)$, sommable en z, tend vers zéro avec z, x restant fixe. Donc

$$f(t) = \mathrm{P}(t-x) + \varepsilon(x, t-x)(t-x)^n;$$

$$\mathrm{P}(t-x) = \sum_0^n \frac{1}{p!} \mathrm{P}^{(p)}(iy)(t-x-iy)^p$$

et de même, en changeant iy en $-iy$. On trouve

$$\lim_{y=0} \frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\left[\frac{\partial^n g(t-x, y)}{\partial x^n}\right] dt = \lim_{y=0} \frac{1}{\pi}\int_a^b f^{(n)}(t)\, g(t-x, y)\, dt = f^{(n)}(x),$$

car $\int_a^b \varepsilon(x, t-x)\,|t-x|^n\,|(t-x-iy)^{-n-1} - (t-x+iy)^{-n-1}|\, dt$ tend vers zéro avec y x étant invariable.

Donc

$$\Phi(f) = \frac{1}{\pi}\lim_{y=0}\int_a^b f(t)\left[\sum_0^n a_p(x)\frac{\partial^p g(t-x, y)}{\partial x^p}\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{y=0}\int_a^b f(t)\left(\sum_0^n b_p(t)\frac{\partial^p g(t-x, y)}{\partial x^p}\right) dt.$$

Cas de plusieurs variables. — Soit $f(X)$ définie dans l'intervalle (AB) de U_r et possédant au point $X(x_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ une dérivée $\partial^m f(X)/\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_r^{k_r}$ $(k_1 + \ldots + k_r = m)$. Cette dérivée sera la limite, pour $y_1, \ldots, y_r$ tendant vers zéro, de $\int_{(AB)} f(t_1, \ldots, t_r)\left[\prod \partial^{k_i} g(t_i - x_i, y_i)/\partial x_i^{k_i}\right] dt_1 \ldots dt_r$.

La possibilité de voir dans $\partial^m f(X)/\partial^{k_1} x_1 \ldots, \partial x_r^{k_r}$ un quotient différentiel plus général qu'une dérivée habituelle, pourra être étudiée par le lecteur.

Ces représentations formelles offrent uniquement l'intérêt théorique de montrer que, même les fonctionnelles analytiques linéaires, que sont les dérivées, peuvent être, comme les fonctionnelles synthétiques, rattachées à l'intégration de la fonction-argument.

Bien d'autres intégrales singulières donneraient une formule dérivable $f(x) = \lim_{y=0} \int_a^b f(t)\, k(t - x, y)\, dt$, $k(t - x, 0)$ étant infini pour $t = x$, et y tendant vers zéro soit continument, soit par valeurs $1/n$, n entier. Une telle intégrale est une fonctionnelle analytique, parce que seuls y contribuent sensiblement les abords infiniment voisins du point x.

(*) Séance du 21 décembre 1959.

C.R. Acad. Sc. Paris, t.250, 1960, p.250-255.

LOGIQUE DES CLASSES

LOGIQUE DES ENSEMBLES. — *Rapports logiques associés, pour l'inclusion ou l'exclusion, vis-à-vis de p classes d'éléments dans un même espace.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY.

Les catégories définies par les systèmes de rapports logiques sont figurées, avec les notations de l'algèbre élémentaire, par des formules où chaque variable désigne concurremment un ensemble et sa fonction caractéristique.

Pour noter comment, dans un même univers U, un ensemble E se déduit de certains autres $A_1, \ldots, A_p$ par intersection (partie commune) d'ensembles joints, addition d'ensembles disjoints, soustraction d'un ensemble contenu retiré d'un ensemble contenant, j'utilise les signes de l'algèbre ou de l'analyse élémentaires, et nullement d'autres tels que $\cup$, $\cap$. J'écarte totalement le second. Pour l'addition d'ensembles non nécessairement disjoints, j'admets occasionnellement les notations $A \cup B$, $\cup E_n$. Mais encore dans ce dernier cas, et en dehors du sujet traité dans cette Note, quand la confusion n'est pas à redouter, j'écris aussi bien $A + B$, $\sum E_n$.

1° L'intersection de A et de B, celle des E_n sont notées A.B ou simplement AB, $\prod E_n$. Donc $A = UA = A^n$. S'il faut craindre une méprise, je distinguerai $A^{n\cdot}$ et $A^{n\times}$, $\underset{\cdot}{\prod}$ et $\prod$, comme A.B et $A \times B$, le signe $\times$ étant réservé à la multiplication topologique.

2° Si A contient B, $A - B$ désignera la partie de A étrangère à B. *Je n'écris jamais* $A - B$ *si* B *n'est pas inclus dans* A, mais uniquement $A - AB$.

3° Si A et B sont disjoints, leur réunion est notée $A + B$. Si A et B sont joints,

$$A \cup B = A + (B - AB) = (A - AB) + B = AB + (A - AB) + (B - AB).$$

Les principes suivants dominent le cas général où E se déduit de p ensembles A_i ($p \geqq 2$).

Le développement de l'expression de E par application des règles du calcul élémentaire fait disparaître les parenthèses. On obtient

$$E = f_p(A_1, \ldots, A_p),$$

f_p étant un polynome en les A_i, linéaire par rapport à chacun d'eux (d'après $A^n = A$). Chaque monome de f_p peut être multiplié par une puissance de U, pour réaliser quelque homogénéité.

1° Dans l'expression f_p, *chaque lettre désigne également un ensemble et sa fonction caractéristique.* En remplaçant indifféremment chacun des A_i par 0 ou par 1 (U par 1 exclusivement), on donne à f_p uniquement les valeurs 0 ou 1.

2° Pour trouver la génération de E indiquée par l'expression f_p, il faut grouper et ordonner les termes de celle-ci, de façon que, dans toute parenthèse réunissant deux groupes de termes, figurant respectivement deux ensembles, séparés par l'un des signes + et —, l'ensemble de gauche soit disjoint de l'ensemble de droite (signe +) ou au contraire le contienne (signe —).

3° Si les A_i sont considérés comme des ensembles quelconques variables dans U, f_p définit une *catégorie d'ensembles* dont les éléments satisfont, vis-à-vis des p classes A_i, à *un système de relations logiques associées.*

Il y a cinq fonctions f_2 (A, B), à savoir avec leur règle de construction et leur signification logique :

1° AB (A *et* B);

2° A — AB (A, mais *non* B); $A - AB = A(U - B)$;

3° B — AB (B, mais *non* A); $B - AB = B(U - A)$;

4° $A + B - AB = A + (B - AB) = B + (A - AB)$
$= AB + (A - AB) + (B - 1B)$ (A *ou* B, y compris A et B);

$$A + B - AB = U - (U - A)(U - B).$$

5° $A + B - 2AB = (A - AB) + (B - AB)$ (A *ou* B, mais *non* A *et* B).

Les sept ensembles A, B et f_2 forment un groupe clos, en ce sens que tout couple composé de deux d'entre eux et auquel on applique les cinq opérations f_2, redonne les résultats de ce groupe ou le néant.

Si l'on adjoint U à A et B (aux A_i généralement) la combinaison de U avec les f_2 (les f_p) donne uniquement comme nouveautés les cinq complémentaires $U - f_2$ (les $U - f_p$).

1° U — AB (jamais A et B à la fois)
$= (U - A)(U - B) + (A - AB) + (B - AB)$ (ou bien ni A ni B; ou bien A sans B, ou bien B sans A);

2° $U - A + AB$ (pas de A sans B) $= U - (A - AB) = (U - A) + AB$;

3° l'analogue ($U - B + AB$) (pas de B sans A);

4° $U - A - B + AB$ (ni A ni B) $= (U - A)(U - B)$;

5° $(U - A - B + 2AB) = (U - A)(U - B) + AB$ (ni A ni B ou les deux à la fois).

L'ensemble E étant défini par l'expression $E = f_p(A_1, \ldots, A_p)$, comment obtenir la génération de E à partir de A_1 d'abord donné seul, puis par une opération $f_2(A_1, A_2)$, et ainsi de suite? Tout le problème est de mettre f_p sous la forme $f_p = f_2(A_p, f_{p-1})$. On détermine ainsi f_{p-1} : Si A_p divise f_p, selon l'absence ou la présence du terme isolé A_p, $f_{p-1} = f_p/A_p$ ou $f_{p-1} = (A_p - f_p)/A_p$. Si A_p ne divise pas f_p, on annule A_p dans f_p et il reste f_{p-1}. Ayant f_{p-1}, on voit immédiatement laquelle des cinq formes f_2 appliquée au couple A_p, f_{p-1}, donne f_p.

Progressivement on détermine les $f_i(A_1, \ldots, A_i)$ pour $i = p-1$, $p-2, \ldots, 2$, et, pour $i \geq 3$, les f_2 tels que $f_i = f_2(A_i, f_{i-1})$. La marche inverse donne la construction progressive de E et en même temps les rapports logiques associés de E avec le système des A_i.

Il y a 5^{p-1} possibilités de rapports logiques liés, soit d'inclusion, soit d'exclusion, vis-à-vis de p classes $A_1, \ldots, A_p$. Il y en a seulement cinq pour deux classes, déjà 25 pour trois classes. Ces nombres se doublent par les négations introduites avec l'adjonction de U aux A_i.

Le lecteur pourra former les 25 fonctions logiques f_3, classer leurs types distincts, si l'on confond les f_3 s'échangeant par des permutations entre les A_1, A_2, A_3 supposés tous trois simples (c'est-à-dire non constitués eux-mêmes par des groupes de classes : ainsi A — AB et B — AB sont du type unique : « de A et de B, l'un sans l'autre »).

Absolument inexprimables avec les signes $\cup$, $\cap$, ces formules f_p sont d'une précision impeccable, totalement incompatible avec les notions confuses tolérées et encouragées par l'usage de la notation $\cup$ spécialement.

On rencontre pareille impossibilité avec l'emploi du signe — dans A—B, au lieu de A—AB, quand A ne contient pas nécessairement B.

Dans des Communications ultérieures, où je montrerai la différence de nature entre la topologie et la métrique, j'userai uniquement des signes de l'algèbre, comme dans les fonctions f_p, pour exprimer les combinaisons d'ensembles situés dans un même espace.

(*) Séance du 21 octobre 1963.

(*Département de Mathématiques, Institut Henri Poincaré,*
11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.257, 1963, p.2594-2596.

LOGIQUE DES RELATIONS. — *Catégories définies par l'association de rapports logiques d'inclusion ou d'exclusion, vis-à-vis de p classes d'éléments dans un même espace.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY, Membre de l'Académie.

Compléments à la Note du 21 octobre 1963 (*Comptes rendus*, 247, 1963, p. 2594) pour en rectifier certains points et mener l'étude à son terme.

Je dois reprendre et compléter l'étude entreprise dans ma Note du 21 octobre 1963 dont je rappelle d'abord le sujet.

Dans l'espace U on suppose l'existence d'une collection S_p de *p classes* $A_1, \ldots, A_p$ formées d'éléments de U. Ces classes sont variables.

Une *catégorie* $C = C(S_p)$ est constituée par les éléments de U vérifiant un système de conditions associées, dont chacune exprime que l'élément peut appartenir à la fois à certaines classes $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ sous la réserve d'être alors étrangères à d'autres A_j de S_p. La catégorie $C(S_p)$ dont tous les éléments ont des rapports conditionnés avec chacune des *p* classes A_p de S_p est figurée par une fonction algébrique $f_p(A_1, \ldots, A_p)$, linéaire en chacune des variables $A_1, \ldots, A_p$, et où celles-ci désignant à la fois une classe et sa fonction caractéristique, f_p est la fonction caractéristique de C. Elle prend uniquement les valeurs o et 1 quand les A_i sont indifféremment égaux à o ou à 1.

Enfin, U, toujours numériquement égal à 1, peut être à volonté introduit en facteur, et à toute puissance positive, dans tout monome de f_p.

Nous distinguons les catégories C en *positives* C^+ et *négatives* C^-, tout élément d'une C^+ appartenant à l'une au moins des A_i, tandis que C^- contient des éléments étrangers à toutes les A_j de S_p. La complémentaire dans U d'une C^+, soit $U - C^+$ est une C^- et réciproquement. Il peut être nécessaire en certaines questions d'adjoindre aux C^+ l'ensemble vide $\emptyset$ et aux C^- l'univers U.

Aux C^+ et aux C^- correspondront respectivement f_p^+ (sans terme indépendant des A_i) et f_p^- commençant (ordonnée) par U (ou 1); g_p désignera une catégorie indifféremment positive ou négative.

Pour *k* quelconques des classes A_i nous considérons leur ensemble commun propre, représenté par :

$$A_{i_1} \ldots A_{i_k} (U - A_{j_1}) \ldots (U - A_{j_{p-k}}). \qquad (1)$$

Dans une application particulière, les A_i peuvent ne pas avoir de partie commune étrangère à tous les A_j. Il s'agit ici de classes *générales*, comme en algèbre ou en analyse on raisonne sur des nombres, des fonctions, indépendamment de leurs valeurs, de leurs données propres, pour lesquelles certaines hypothèses d'un théorème perdent leur sens.

Désignons par φ_n une quelconque des expressions (1), où $k \geq 1$. Leur nombre est $2^p - 1$; φ_n et φ_q non identiques définissent deux ensembles disjoints. Car une au moins des A_m figure par le facteur A_m dans l'une et par le facteur $U - A_m$ dans l'autre. Si $\varphi_n = 1$, tous les autres φ_q sont nuls. Dès lors, les α_n prenant indifféremment les valeurs 0 ou 1, mais les α_n n'étant pas tous nuls à la fois,

$$(1) \qquad \sum \alpha_n \varphi_n$$

représente toutes les catégories f_r^+ $(r \leqq p)$ formées par r des p classes de S_p. Ces catégories sont au nombre de $2^{2^p-1} - 1$. Pour obtenir le nombre des $f_p^+(S_p)$, il faut retrancher du précédent le nombre des f_r^+ distincts pour $r \leqq p-1$.

Le développement des φ_n dans la formule (2), avec les réductions de termes, conduit à une expression de $2^p - 1$ termes au plus. Ce nombre est atteint pour tous les α_n égaux à 1, ce qui donne la catégorie $\sum A_p$ exprimée par $U - (U - A_1) \ldots (U - A_p)$.

Les $f_r^- = U - f_r^+$ donnent l'inversion des rapports logiques exprimés par les f_r^+.

Aux signes + signifiant « ou » de f^+ correspondent dans $U - f^+$ des « et » (conjointement, simultanément). Aux produits $A_{i_1} \ldots A_{i_k} (U - A_{j_1}) \ldots (U - A_{j_{p-k}})$ correspondent « ou bien non A_{i_1}, ..., ou bien non A_{i_k}, ou bien A_{j_1}, ..., ou bien $A_{j_{p-k}}$ »; $U - A_1 A_2$ signifie « ou bien non A_1, ou bien non A_2 », soit

$$(U - A_1) + (U - A_2) - (U - A_1)(U - A_2).$$

Connaissant les $g_q(S_{p-1})$ $(q \leqq p-1)$ pour $S_{p-1}(A_1, \ldots, A_{p-1})$, comment obtiendra-t-on les $f_m^+(S_p)$? Ce problème a été abordé, mais non résolu dans ma Note d'octobre.

Faisant successivement $A_p = 0$ et $A_p = 1$ dans $f_m^+(S_p)$, on trouve

$$f_m^+(S_p) = f_r^+(S_{p-1})(U - A_p) + A_p g_s(S_{p-1}) \qquad (r \text{ et } s \leqq p-1),$$

avec les précisions suivantes :

1° $f_r^+(S_{p-1}) = 0$ et $g_s(S_{p-1}) = U$ (ou 1) sont admis;

2° Si A_p est dans f_m^+, f_r^+ diffère de g_s. Sinon

$$f_m^+ = f_m^+(U - A_p) + A_p f_m^+;$$

En poursuivant on met f_m^+ sous la forme (2);

3° Pour avoir seulement les $f_p^+(S_p)$, tout A_i pour $i \leqq p-1$ doit figurer, soit dans $f_r^+(S_{p-1})$, soit dans $g_s(S_{p-1})$.

Exemples. — I. $f_1^+(A_1)$ est 0 et A_1; $g_1(A_1)$ est 0, A_1, U, $U - A_1$.

II. $f_r^+(A_1 A_2)$ s'obtient en ajoutant [sous la condition $f_1^+(A_1) \neq g_1(A_1)$] : 0 ou $A_1(U - A_2)$ à 0, $A_1 A_2$, A_2 ou $A_2(U - A_1)$. On obtient

$$0, \quad A_2 A_1, A_2, A_2(U - A_1); \quad A_1(U - A_2), A_1; \quad A_1(U - A_2) + A_2; \quad A_1(U - A_2) + A_2(U - A_1).$$

Finalement :

$$0, \quad A_1, \quad A_2.A_1A_2, \quad A_1 - A_1A_2, \quad A_2 - A_1A_2, \quad A_1 + A_2 - A_1A_2, \quad A_1 + A_2 - 2A_1A_2.$$

III. Pour avoir les $f_m^+(A_1, A_2, A_3)$, d'une part on multiplie par $U - A_3$ les huit dernières expressions obtenues, puis par A_3 les mêmes suivies des huit complémentaires U, $U - A_1$, $U - A_2, \ldots, U - A_1 - A_2 + 2A_1A_2$; et l'on ajoute les premiers résultats aux seconds en observant la seconde règle posée. On trouve 127 $C^+(S_3)$. Pour avoir les $f_3^+(A_1, A_2, A_3)$, ou bien on observe la troisième règle, et l'on trouve directement 109 catégories; ou bien des 127 $f_m^+(S_3)$ on retranche sept $f_q^+(A_1, A_2)$, puis six $f_q^+(A_1, A_3)$ (A_1 a déjà disparu), enfin cinq $f_2^+(A_1, A_2)$, donc en tout 18 formes, soit 109 restantes.

(*) Séance du 13 janvier 1964.

(*Département de Mathématiques,*
Institut Henri Poincaré, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.258, 1964, p.765-767.

MÉTRIQUE SANS TOPOLOGIE

MESURE. INTÉGRATION. — *Métrique sans topologie. Définition des fonctions mesurables, non dogmatique, mais exigée par l'intégration.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy.**

Une école mathématique moderne définit le caractère des fonctions mesurables en telle façon que dogmatiquement elle exclut pour les espaces affranchis d'hypothèses topologiques, la possibilité d'avoir une métrique. Définition, fidèle à l'esprit de Lebesgue, des fonctions vectorielles mesurables $f(x)$, x variant dans un espace sans référence topologique.

Pour noter l'intersection, l'addition, la soustraction d'ensembles dans un même espace U, j'emploie les signes de l'algèbre élémentaire, en accord avec ma Note du 21 octobre.

Certaine école moderne, ayant pour doctrine de réduire toute notion mathématique à une structure, à un système d'axiomes nécessaires et indépendants, ce groupe enseigne que l'idée de mesure des ensembles dans un espace donné, implique l'existence d'une topologie, donc d'ensembles ouverts, fermés, etc., pour cet espace.

Cette affirmation est contenue dans la définition adoptée par l'école pour la fonction mesurable, ainsi entendue :

« Dans un espace U où il existe une métrique des ensembles, la fonction de point $f(x)$ définie sur un ensemble E, est dite *mesurable* si, à tout nombre positif ε indépendant, il correspond une fonction $k(x, \varepsilon)$ continue dans U (ou dans E ?) et telle que $f(x) - k(x, \varepsilon) = 0$, sauf au plus sur un ensemble de mesure inférieure à ε. »

Si E n'a pas de topologie, la continuité d'une fonction sur E n'a pas de sens. Dès lors, dans un espace U dépourvu de topologie, il ne saurait être défini une mesure. Car si E situé dans U était mesurable, sa fonction caractéristique, égale à 1 sur E et à 0 sur U — E, ne saurait être considérée comme mesurable, ce qui est absurde.

Cependant les caractères de la mesure énoncés par Borel, la définition des fonctions mesurables posée par Lebesgue et tout au moins pour le cas linéaire, mais dont l'extension est immédiate aux espaces les plus généraux, ne font aucun appel à des notions topologiques.

Dans l'espace U il existe une classe K d'ensembles E pour chacun desquels est défini un nombre non négatif $m(E)$ appelé *mesure* de E et soumis aux conditions suivantes : Si A, B, les E_n sont dans K (n prenant toutes les valeurs entières $\geqq 1$) : AB, $\prod E_n$ sont dans K. E taussi A — AB. Si A et B sont disjoints, $A + B \in K$ et $m(A + B) = m(A) + m(B)$.

Donc en tous les cas $A + B - AB \in K$. Si, les E_n étant disjoints, la série $\sum E_n$ converge,

$$E = \sum E_n \in K \qquad \text{et} \qquad m(E) = \sum m(E_n).$$

Dans ces conditions de Borel, où la topologie intervient-elle ? La nécessité pour l'espace U d'être pourvu d'une topologie est un *dogme* artificiellement imposé par l'école à ses disciples.

Sans doute tous les exemples qu'on construira pour les métriques d'ensembles seront définis à partir d'espaces topologiques. Les fonctions de Baire de tout rang transfini s'obtiennent par des séries de polynomes, donc de fonctions du type le plus élémentaire. Mais les raisonnements généraux sur les fonctions de variables réelles ne font pas intervenir le moyen d'exprimer la fonction. Avant Riemann, la dérivée d'une fonction au point a était le coefficient de $x - a$ dans le développement de Taylor autour de a. Riemann sépara l'idée de fonction de la forme analytique figurant celle-ci. La fonction n'est pas nécessairement une série de puissances $(x - a)^n$, ni même dérivable, ni même continue, quoique toute fonction pratiquement définie soit construite de pièces chacune d'espèce régulière.

Lebesgue en trouvant l'intégrale, fut conduit à cette définition : Une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $a < x < b$ est dite *mesurable* si, quels que soient les nombres c, d $(c < d)$, l'ensemble

$$[a < x < b,\ c < f(x) < d]$$

est mesurable.

De cette hypothèse Lebesgue déduit que la somme, la différence, le quotient, le produit de deux fonctions mesurables est mesurable, et aussi les limites d'une suite de fonctions mesurables. Ces raisonnements étaient un peu longs et l'école dogmatique prétend les économiser en subordonnant d'autorité la métrique à la topologie.

La définition dogmatique de la fonction mesurable s'inspire de son équivalence à celle de Lebesgue dans le cas des fonctions d'une variable. C'est là un théorème dû à Lusin, et qui n'a pas été, pour cause, étendu à tous les espaces topologiques. Toute fonction mesurable selon l'école, l'est aussi selon Lebesgue. Mais l'inverse n'a pas lieu.

Le théorème de Lusin est encore vrai si le champ de définition de $f(x)$ est l'axe des x tout entier. Mais *il y a des espaces topologiques où tout voisinage a une mesure infinie et où le théorème de Lusin est faux.* Nous le montrerons ultérieurement.

L'indépendance de la métrique à l'égard de la topologie apparaîtra en deux des applications essentielles de la mesure, à savoir l'intégrale et le théorème de Vitali.

1. *L'intégrale et les fonctions mesurables.* — Il y a des mesures non néga-

tives, l'intégrale de Stieltjes en est un exemple classique. Pour mieux préciser le sens du caractère de mesurabilité pour les fonctions, considérons des mesures vectorielles, et des intégrales vectorielles de fonctions vectorielles. Nous envisageons l'espace U où est définie la mesure-φ, valable pour une famille K d'ensembles E; M est l'espace des mesures $\overline{m}(E)$. F est l'espace des vecteurs $\vec{f}(x)$ fonctions d'un point x de E; P sera l'espace des vecteurs parmi lesquels sera $\int_E \vec{f}\, d\vec{m}$.

Un espace V de vecteurs $\vec{v}$ normés pourra posséder diverses propriétés :

a. $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ étant quelconques dans V, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ sont définis dans V et

$$\big|\,|v_1| - |v_2|\,\big| \leq \left\{\begin{matrix} |v_1 + v_2| \\ |v_1 - v_2| \end{matrix}\right\} \leq |v_1| + |v_2|;$$

b. Si la suite $\vec{v}_n$ vérifie la condition de Cauchy, $\vec{v}$ existe dans V tel que $|\vec{v}_n - \quad|$ tend vers zéro;

c. Si $\vec{v}$ est dans V, $\alpha\vec{v}$, quel que soit α réel est dans V et

$$(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}) = (\alpha + \beta)\vec{v}.$$

A. *L'espace* M n'a pas à vérifier la condition *c*. Les conditions de la métrique φ sont les suivantes :

A tout ensemble E de K correspond un vecteur $\vec{m}$ (E) de M et un nombre non négatif μ (E), *mesure absolue* de E :

1° $\mu(E) \geq |\vec{m}(E)|$; si $\mu(E) = 0$ (donc $\vec{m}(E) = 0$), tout $E' \subset E$ est mesurable et $\mu(E') = 0$.

Si E est indécomposable en deux ensembles de mesure-φ définie et non nulle, $\mu(E) = |\vec{m}(E)|$.

Si E est la réunion des ensembles $E_1, \ldots, E_n$ en nombre fini, tous de mesure non nulle, μ (E) est la borne stricte supérieure des sommes $\sum |\vec{m}(E_i)|$. En conséquence, la mesure μ (E) possède l'additivité complète.

2° Si $\vec{m}_1 = \vec{m}(E_1)$ et $\vec{m}_2 = \vec{m}(E_2)$ sont les mesures de deux ensembles E_1, E_2 de K, $\vec{m}(E_1 E_2)$ existe. Si $E_1 E_2 = 0$, $\vec{m}_1 + \vec{m}_2$ existe dans M (condition *a*, sous réserves) et

$$\vec{m}(E_1) + \vec{m}(E_2) = \vec{m}(E_1 + E_2).$$

De même, si $E_1 \supset E_2$, $\vec{m}_1 - \vec{m}_2$ est dans M (id.) : dans tous les cas $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 - \vec{m}(E_1 E_2)$ est dans M. Si $E = \sum E_n$, les ensembles E_n de K étant disjoints, et si la série $\sum \mu(E_n)$ converge, le vecteur $\vec{m}(E)$ existe dans M et que $\left|\vec{m}(E) - \sum_1^n \vec{m}(E_i)\right|$ tend vers zéro (condition b, sous réserves) : $E \in K$.

Si $\sum \mu(E_n) = \infty$, E n'appartient pas à K. Nous dirons que E est *dénombrablement mesurable* au sens de la mesure-φ.

B. *L'espace* F des vecteurs $\vec{f}$ est topologique. Il vérifie les trois conditions a, b, c de V. En outre, il est *séparable*. Il existe dans F une infinité dénombrable de vecteurs $\vec{d}_i \left(i \geqq 0, \vec{d}_0 = \vec{0}\right)$ tels que, $g\left(\vec{d}_i, r\right)$ ou $g_i(r)$ étant la quasi-sphère ouverte $\left|\vec{f} - \vec{d}_i\right| < r$, $\sum_i g_i(r) = F$, quel que soit r, nombre positif. Nous réduisons la suite $g_i(\omega)$ à $g'_n(\omega)$ en retranchant pour $i \geqq 1$, $\sum_0^{i-1} g_k(\omega)$ de $g_i(\omega)$. Les $g'_n(\omega)$ sont disjoints, le diamètre de chacun est inférieur à 2ω et $F = \sum g'_n(\omega)$.

C. *L'espace* P. — Il sera formé de vecteurs $\vec{p} = \vec{p}\left(\vec{f}, \vec{m}\right)$; ce vecteur $\vec{p}$ est, par une opération arbitrairement convenue, le « produit » dans P du vecteur $\vec{m}$ quelconque dans M par le vecteur $\vec{f}$ quelconque dans F; P présente les caractères a, b, c de V. Il est, en outre, assujetti à ces conditions :

1° $\left|\vec{p}\left(\vec{f}, \vec{m}\right)\right| \leqq \left|\vec{f}\right| . \left|\vec{m}\right|$;

2° $\vec{p}$ est linéaire en $\vec{f}$; a et b étant deux nombres quelconques de R et les vecteurs $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ étant dans F $\left(\text{il en est dès lors ainsi de } a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2\right)$:

$$\vec{p}\left(a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2, \vec{m}\right) = a\vec{p}\left(\vec{f}_1, \vec{m}\right) + b\vec{p}\left(\vec{f}_2, \vec{m}\right).$$

3° $\vec{p}_n$ étant $\vec{p}\left(\vec{f}_n, \vec{m}_n\right)$ et si $\sum \left|\vec{f}_n\right| . \left|\vec{m}_n\right|$ converge, le vecteur limite de $\sum_1^n \vec{p}_i$ est dans P.

L'intégrale. — Soit $\vec{f}(x)$ un vecteur de F défini en tout point x de l'ensemble E situé dans U : On suppose $\vec{f}$ constant sur toute partie de E indécomposable (en parties de mesure-φ non nulle), puis *mesurable*-φ au sens suivant fidèle à l'esprit de Lebesgue : *Tout ensemble* $\left[x \in E, \vec{f}(x) \in g\left(\vec{d}, r\right)\right]$ *est mesurable-*φ. Une restriction doit être introduite si $\mu(E) = \infty$, E étant dénombrablement mesurable. On doit supposer $\vec{d} \neq \vec{o}$ et $r < \left|\vec{d}\right|$. Ainsi, quand U est l'axe des x et F celui des nombres réels f, si E est de longueur infinie, on divise en $f > o$ et $f < o$ et l'on considère les ensembles $(c < d)$

$$x \in E, \qquad [f(x) - e][d - f(x)] > o, \qquad \text{avec } cd > o.$$

$\vec{f}(x)$ *sera dit intégrable-*φ *sur* E *si l'intégrale* $\int \left|\vec{f}\right| d\mu$ *existe* (est finie). On dira même plus précisément, et toujours dans l'esprit de Lebesgue, que $\vec{f}$ est sommable-φ sur E.

Dans chaque $g'_n(\omega)$ prenons indifféremment un vecteur $\vec{\eta}_n$. Tout ensemble $\left[x \in E, \vec{f}(x) \in g'_n(\omega)\right]$ est mesurable. Soit $\vec{m}_n$ sa mesure. La somme $\sum \vec{p}\left(\vec{\eta}_n, \vec{m}_n\right)$ converge et tend, avec ω infiniment petit, vers un vecteur limite, indépendant du choix des $\vec{d}_i$, des $\vec{\eta}_n$ (comme on le voit par le morcellement mutuel de deux divisions g'_n différentes). *Cette limite est l'intégrale* $\int_E \vec{f}\, d\vec{m}$.

Si $\mu(E) = \infty$, il faut intégrer d'abord sur l'ensemble $x \in E$, $\left|\vec{f}\right| > \alpha > o$, α étant invariable. Après quoi on fait tendre α vers zéro.

Je ne pense pas que les dogmatiques osent rejeter cette définition de l'intégrale pour la raison que l'espace U contenant le champ d'intégration E n'a été soumis à aucune condition topologique. Mais, en l'absence d'une topologie définie dans U, ou si la fonction $k(x, \varepsilon)$ n'existe pas, *la fonction $\vec{f}$, sommable sur E, ne sera pas mesurable au sens de l'école.*

Propriétés des fonctions vectorielles $\vec{f}$ de F, *mesurables-*φ. — D'après la condition de mesurabilité et les caractères boréliens de la mesure-φ, quel que soit dans F l'ensemble B déduit des $g\left(\vec{d}, r\right)$ par additions, soustractions, passages à la limite, l'ensemble $\left[x \in E, \vec{f}(x) \in B\right]$ est mesurable-φ.

La somme $\vec{f} = \vec{f}^1 + \vec{f}^2$ *de deux fonctions mesurables-*φ *est mesurable-*φ.

O étant un ensemble ouvert quelconque dans F, soit $e\left(\vec{f}, O\right)$ ou simplement $e(O)$, l'ensemble $\left[x \in E, \vec{f}(x) \in O\right]$. Je dis que $e(O)$ est mesurable. En effet, soient respectivement $e_i^1(\omega)$, $e_k^2(\omega)$ les ensembles

$$(x \in E), \qquad \vec{f}^1(x) \in g_i(\omega), \qquad \vec{f}^2(x) \in g_k(\omega).$$

Soit $e_{i,k}(\omega)$ l'ensemble, s'il existe, $e_i^1(\omega)\, e_k^2(\omega)$; $e_{i,k}(\omega)$ est mesurable. N(ω) désignant l'ensemble des couples (i, k) vérifiant cette condition :

l'hypothèse double $\vec{f}' \in g_i(\omega)$ et $\vec{f}'' \in g_k(\omega)$ entraîne $\vec{f}' + \vec{f}'' \in O$; alors

$$e(O, \omega) = \sum_{N} e_{i,k}(\omega) \subset e(O),$$

et $e(O, \omega)$ est mesurable. Je dis que $e(O) = \sum_{\omega} e(O, \omega)$. Soit x un point de $e(O)$; O étant ouvert et $\vec{f}(x_0)$ étant dans O, r positif existe tel que $g\left[\vec{f}(x_0), r\right]$ soit dans O. Alors si

$$\vec{f}^1(x_0) \in g_j\left(\frac{r}{4}\right), \qquad \vec{f}^2(x_0) \in g_h\left(\frac{r}{4}\right),$$

le couple (j, h) est dans $N(r/4)$ et $e(O, r/4)$ contient $\vec{f}(x_0)$. Donc si ω_n tend vers zéro, $e(O) = \sum e(O, \omega_n)$; $e(O)$ est mesurable.

Une fonction $\vec{f}(x)$ limite de fonctions $\vec{f}_n(x)$ mesurables est mesurable. Car l'ensemble $e(\vec{f}, O) = \sum_{p} \prod_{n>p} e(\vec{f}_n, O)$.

Pour la mesurabilité du *produit*, il faut supposer défini dans F un vecteur produit $\vec{f}^1 \times \vec{f}^2 = \vec{f}^2 \times \vec{f}^1$, continu et linéaire en chacun des deux facteurs, dans toute l'étendue de F, et borné avec $|\vec{f}_1| + |\vec{f}_2|$ (comme c'est le cas si F est l'ensemble des réels).

Pour ma part, je trouve ces raisonnements simples. Les dogmatiques les ont jugés fastidieux, et pour les ignorer, ils n'admettent pas le caractère adopté par Lebesgue pour les fonctions mesurables. Leurs disciples savent-ils l'équivalence des deux définitions pour les fonctions numériques d'une variable ? En suivent-ils la démonstration donnée par Lusin ?

(*) Séance du 28 octobre 1963.

(*Département de Mathématiques, Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.257, 1963, p.2776-2781.

MESURE. INTÉGRATION. — *Métrique sans topologie. Le théorème général de Vitali.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy.**

Signification de l'énoncé général. Pour préparer la construction d'un espace V où se manifesteront la fausseté de la définition dogmatique de la fonction mesurable et la portée du théorème général de Vitali, décomposition en éléments simples, de l'espace cartésien à trois dimensions U_3 et de l'espace des directions dans U_3.

Le théorème de Vitali est l'un des plus profonds et des plus importants de la théorie métrique des ensembles.

Banach était parvenu à lui donner, pour le plan et la mesure euclidienne des aires, cet énoncé, extensible à tout espace cartésien.

« P étant un ensemble de parallélogrammes ω, dont les côtés sont entre eux dans un rapport borné ainsi que son inverse, indépendamment de ω, G étant une famille d'ensembles fermés γ, correspondant chacun à chacun aux ω, de façon que si γ est associé à ω, $\gamma = \gamma(\omega)$ est inclus dans $\omega = \omega(\gamma)$ et possède une aire supérieure à une fraction fixe de celle de ω, enfin H étant un ensemble dont chaque point est contenu dans une suite de parallélogrammes ω de côtés tendant vers zéro en longueur, il existe une famille dénombrable $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ d'ensembles de G, *deux à deux disjoints* et dont la réunion couvre H, à l'exception tout au plus d'un ensemble d'aire nulle. »

On s'est longtemps acharné à vouloir étendre ce théorème à des espaces non cartésiens. Par des hypothèses de caractère topologique et totalement artificielles, concernant la nature de ces espaces généraux, on s'efforçait de créer l'équivalent de ces parallélogrammes à côtés suffisamment proportionnés.

J'ai fait observer [1] que, la conclusion de l'énoncé étant purement métrique, il fallait exclure des hypothèses tout recours à la topologie. Pour abréger, bornons-nous au cas où les ω sont identiques aux γ.

Dans un univers U affranchi de toute condition topologique, et où une mesure-φ, numérique et non négative, est définie, il est donné une famille G d'ensembles γ mesurables, avec $\varphi(\gamma) > 0$; M, E étant un point, un ensemble de U, G (M), G (E) désigneront la famille des γ respectivement contenant M, joints à E. Nous disons que *le point* M *est indéfiniment couvert par la famille* G *au sens de la métrique* φ, *si, pour les* γ *de* G (M), *le minimum de* $\varphi(\gamma)$ *est zéro.* Nous écrivons : M est i. c. φ par G; G couvre i. φ le point M.

H sera l'ensemble des M, i. c. φ par G; G (E) couvre i. φ non seulement H.E, mais possiblement un ensemble complémentaire ρ (E). *Si* M *est étranger* à H.E + ρ (E), *les* $\varphi(\gamma)$ *pour les* γ *de* G (M) *joints à* E *ont un minimum positif* η (E, M). Cela est important si $M \in H$, le minimum des $\varphi(\gamma)$ pour les γ de G (M) étant zéro.

EXEMPLE. — U est le plan des xy, φ est l'aire euclidienne. Les γ constituant G sont les ellipses (cercles compris) ouvertes, situées dans le demi-plan $y > 0$ et remplissant certaines conditions, en outre de celle-ci : i ($= dy/dx$) étant l'inclinaison du grand axe de γ, le petit axe surpasse $i/(2i + 1)$. H est le demi-plan $y > 0$ tout entier.

Premier cas. — La distance focale de γ est < 1; M étant le point (a, b), E un ovale $(a < x < a', y = b)$ pour $c < b < d$, avec $a = a'$, pour $b = c$ ou d :

ρ (M) est l'intervalle $(a - 1, a + 1, y = b)$ diminué du point M;

ρ (E) est la réunion des intervalles $(a - 1 < x < a' + 1 ; y = b)$, diminués des intervalles $a < x < a'$ respectifs; ρ (E) a l'aire $2(d - c) > 0$.

Deuxième cas. — La distance focale de γ est $< i$ si $i > 0$; pour $i = 0$, elle est nulle si l'ordonnée b du centre de γ est irrationnelle, elle est bornée par $1/q$ si $b = p/q$; ρ (E) est la réunion d'une infinité dénombrable de semi-segments

$$\left[a - \frac{1}{q} < x < a' + \frac{1}{q}, \qquad \text{diminué de} \quad a < x < a'\right],$$

pour $y = p/q$ et $c \leq y \leq d$; l'aire de ρ (E) est nulle.

Les hypothèses de l'énoncé que j'ai donné au théorème de Vitali dans le cas P = G sont les suivantes :

1° *Pour tout* γ, $\varphi[\rho(\gamma)] = 0$ (réalisée dans l'exemple avec le second cas, non avec le premier);

2° *Il existe deux nombres* a *et* b $(1 < a < b)$, *indépendants de* γ, *tels que la réunion* $\Omega(\gamma)$ *des* γ' *de* $G(\gamma)$ *satisfaisant à* $\varphi(\gamma') < a\varphi(\gamma)$, *vérifie* $\varphi[\Omega(\gamma)] < b\,\varphi(\gamma)$;

3° D *étant l'ensemble réunissant tous les* γ, φ (D) *est finie.*

Le cas élémentaire traité par Banach correspond à ces hypothèses particulières : 1° U est distancié; 2° si S et S_k $(k > 1)$ sont deux sphères concentriques dont les rayons sont dans le rapport de 1 à k, $\varphi(S_k)/\varphi(S) < \theta(k)$; 3° pour les γ de G : $\varphi(\bar{\gamma} - \gamma) = 0$ ($\bar{\gamma}$ fermeture de γ); 4° γ est inclus dans une sphère $S = S(\bar{\gamma})$ et $\varphi(\gamma)/\varphi(S) > \alpha > 0$, indépendant de γ.

Pour les ω de P, $\gamma \subset \omega \subset S(\gamma)$; H (P), H (G) étant les ensembles i. c. φ par P, par G, on montre $\varphi[H(P) - H(G)] = 0$, même avec l'énoncé le plus général.

La démonstration s'inspire de celle de Banach dans le cas élémentaire.

Soit $r_1 < \varphi(D)$ le maximum de $\varphi(\gamma)$ et γ_1 tel que $\varphi(\gamma_1) > r_1/a$. Pour tout γ, $\varphi(\gamma) < a\,\varphi(\gamma_1)$. Soit $G_1 = G - G(\gamma_1)$ la famille des γ disjoints de γ_1, et r_2 le maximum des $\varphi(\gamma)$ pour $\gamma \in G_1$; puis $\gamma_2 \in G_1$ tel que $\varphi(\gamma_2) > r_2/a$; pour tout γ de G_1, $\varphi(\gamma) < a\,\varphi(\gamma_2)$. Scit $G_2 = G_1 - G_1 . G(\gamma_2)$. Ainsi de suite. Les γ_i obtenus sont évidemment disjoints. Soit

$$\Gamma = \sum \gamma_i, \qquad \rho_i = \rho(\gamma_i), \qquad \Omega_i = \Omega(\gamma_i), \qquad R = \sum \rho_i.$$

D'après $\varphi(\rho_i) = 0$, $\varphi(R) = 0$. Enfin, soit $H_1 = H - H.\Gamma$. Je dis que $\varphi(H_1) = 0$. Si $H_2 = H_1 - H_1 R$, $\varphi(H_2) = \varphi(H_1)$.

1° Si la suite γ_i est limitée et s'arrête à γ_p, G_p n'existe pas.

$$G = G(\gamma_1) + \ldots + G(\gamma_p).$$

Tout point M de H est ou bien dans un $H.\gamma_i$ ou dans au moins un ρ_i. Alors

$$H = H.\Gamma + R, \qquad \varphi(H - H.\Gamma) = 0.$$

2° Si la suite γ_i est infinie, d'après $\varphi(\Gamma) = \sum \varphi(\gamma_i) < \varphi(D) < \infty$, la série $\sum \varphi(\gamma_i)$ converge; $\varphi(\gamma_i)$ tend vers zéro. N étant un entier positif quelconque, soit

$$W_N = \sum_{N+1}^{\infty} \Omega_i; \qquad \varphi(W_N) < b \sum_{N+1}^{\infty} \varphi(\gamma_i);$$

$\varphi(W_N)$ tend vers zéro quand N croît. Je dis que $H_2 \subset W_N$. En effet, soit $M \in H_2$; M étant dans H, le minimum des $\varphi(\gamma)$ pour $\gamma \in G(M)$ est zéro. M étant étranger à $\Gamma + R$, η_N existe tel que, si $\varphi(\gamma) < \eta_N$ et $\gamma \in G(M)$, γ est disjoint de γ_i pour $i \leqq N$; γ peut-il être disjoint de tous les γ_n pour $n > N$? γ appartiendrait à tous les G_n et vérifierait $\varphi(\gamma) < a\,\varphi(\gamma_n)$ pour tout n, ce qui est absurde. Soit γ_{N+p+1} le premier γ_n joint à γ; γ est dans G_{N+p}, donc $\varphi(\gamma) < a\,\varphi(\gamma_{N+p+1})$; $\gamma_n \in \Omega_{N+p+1}$; $M \in W_N$; $H_2 \subset W_N$ quel que soit N; $\varphi(H_2) = \varphi(H_1) = 0$.

On voit quelle erreur grossière on commet en compliquant et faussant l'énoncé du théorème de Vitali par des conditions topologiques entièrement étrangères au sujet.

On transpose à notre énoncé général, mais *sans référence topologique*, l'extension donnée par Banach au théorème primitif de Vitali. La démonstration se conserve avec les mêmes notations, sauf à donner à celles-ci un autre sens par la substitution éventuelle des ω aux γ.

P, G sont les familles d'ensembles ω, γ et $\varphi(\omega)/\varphi(\gamma)$ est borné indépendamment de ω, de γ, si ω et γ sont associés : $\omega = \omega(\gamma) \supset \gamma = \gamma(\omega)$; $H(P) = H$, $H(G)$, ... sont les ensembles ponctuels i. c. φ par les familles P, G; P(E) est la famille des ω joints à E).

Voici le nouveau sens des notations :

1° $\rho(E) = H[P(E)] - E.H$. Si M est étranger à $E + \rho(E)$, les ω de $P(E).P(M)$ vérifient $\varphi(\gamma)$ ou $\varphi(\omega) > \eta = \eta(E, M) > 0$.

2° $\Omega(\gamma)$ est l'ensemble ponctuel $\sum \omega'$ pour $\omega' \in P(\gamma)$ et

$$\varphi(\gamma') < a\,\varphi(\gamma) \qquad \text{si} \quad \gamma' = \gamma(\omega').$$

3° D est sans changement l'ensemble ponctuel $\sum \gamma$.

Les hypothèses sont les mêmes : 1° $\varphi[\rho(\gamma)] = 0$; 2° $\varphi[\Omega(\gamma)]^2 < b\,\varphi(\gamma)$; 3° $\varphi(D) < \infty$.

Dans la démonstration, P_n est la famille $P - \sum_1^n P(\gamma_i)$, G_n celle des $\gamma = \gamma(\omega)$ si $\omega \in P_n$. Si les γ_i sont en nombre p, $H - H.\Gamma \subset \sum \rho(\gamma_i)$. Si Γ est infinie, et si $M \in H_2$, pour un ω' de P(M) étranger à $\sum_1^N P(\gamma_i)$, $N + p + 1$ sera le rang du premier γ_i joint à ω'.

En limitant P aux ω vérifiant $\varphi(\omega) < \varepsilon_m$, on trouve

$$\varphi[H(P) - H(G)] = 0.$$

Le théorème prête à des développements (*voir* les *Observations* dans le livre cité) :

Les γ remplissent la condition de *parfaite régularité* si, quel que soit E mesurable-φ inclus dans H, et ε positif indépendant, G (E) peut être réduit à G′ (E, ε) de façon que : 1° pour tout point M de E, il existe un $\eta = \eta\,(M, \varepsilon) > 0$ tel que $G'(M, \varepsilon) = G(M).G'(E, \varepsilon)$ contient tous les γ de G (M) vérifiant $\varphi(\gamma) < \eta$; 2° l'ensemble E′ (ε), i. c. φ par G′ (E, ε), vérifie $\varphi(E', -E) < \varepsilon$.

Exemple. — U est l'axe des x; φ est la longueur euclidienne l; D est un intervalle ab; les γ de G sont tous les intervalles inclus dans D; E un ensemble partout dense sur D et de longueur $l(E) = l(D) - c\ (c > 0)$; G (E) = G. Enfermons E dans un système d'intervalles i_n disjoints, vérifiant

$$\sum l(i_n) - l(E) < \varepsilon < c;$$

G′ (E, ε) est l'ensemble des intervalles dont chacun est contenu dans un i_n.

Moyennant cette condition, on retrouve les théorèmes du champ linéaire. Soit ψ (E) une fonction d'ensemble définie et bornée sur D, du moins pour les ensembles E mesurables-φ. Au point M de H.E, les limites du quotient $\psi(\gamma)/\varphi(\gamma)$ [$\gamma \in G(M)$, $\varphi(\gamma) \to 0$], sont les nombres dérivés supérieur, inférieur, moyens de ψ (E) au point M.

a. La dérivée ψ' (E) existe et est finie sur une plénitude-φ de H.

b. Si φ (E) tend vers zéro avec φ (E), $\psi(E) = \int_E \psi'(E)\, d\varphi$.

c. Pour $\psi(E) = \varphi(E)$ et $E \subset H$, $\varphi'(E) = 1$ sur E et $= 0$ sur H — E, à un ensemble mince-φ près.

Tout cela est purement métrique et gâté par la topologie.

Nous construirons *dans l'espace cartésien à trois dimensions* U_3 un espace V où la métrique des ensembles E sera l'*aire euclidienne a* (E), et où la conception dogmatique de la fonction mesurable se montrera fausse, en même temps que la portée du théorème de Vitali sous la forme générale que nous lui avons donnée apparaîtra dans la dispersion et la complexité de chaque ensemble γ.

Dans l'espace cartésien U_r à r dimensions, la mesure m_p (E) d'ordre $p < r$ d'un ensemble E est ainsi définie par Carathéodory. On englobe E dans une famille de sphères ouvertes C_r à r dimensions et de rayon inférieur à ω. On fait la somme des mesures — p des sections diamétrales des C_r par les variétés linéaires à p dimensions. On prend le minimum μ_p (E, ω) de cette somme. On fait tendre ω vers zéro; μ_p (E, ω) tend (sans décroître) vers la mesure extérieure $m_{p,e}$ de E. Par convention, tout ensemble fermé F est mesurable-p. En conséquence, $m_p(F) = m_{p,e}(F)$. La mesure intérieure $m_{p,i}$ (E) est la borne supérieure des m_p (F) pour les $F \subset E$.

J'envisagerais la définition suivante : on considère les projections orthogonales de E sur toutes les variétés P_p linéaires à p dimensions de U_r. (On fait un changement d'axes omnirectangulaires de coordonnées, où P_p devient $x_{p+1} = x_{p+2}, \ldots, x_r = 0$, et l'on annule ces mêmes nouvelles coordonnées pour tous les points de E). Soit P_p (E) cette projection. Pour que E soit mesurable-p, il faut que tous les ensembles P_p (E) soient mesurables-p. Le maximum de leurs mesures pour P_p indifféremment variable dans U_r sera la *mesure-p apparente de* E *dans* U_r, soit μ_{pa} (E). On partage U_r en les cubes disjoints, semi-ouverts, c_n ($p_i \leqq 2^n x_i < p_i + 1$) ($i = 1, \ldots, r$; p_i entiers quelconques). On fait la somme $\sum \mu_{p,a}$ (E.c_n) pour tous les c_n contenant des points de E. Quand n croît, cette somme tend par définition vers m_p (E).

Il conviendrait de s'assurer que, pour chaque définition adoptée, la mesure-p est borélienne.

S_r étant une surface de Riemann à r dimensions où la distance des deux points (u_i), ($u_i + du_i$) a pour carré $ds^2 = \sum a_{i,j}\, du_i du_j$, si l'on représente S_r dans U_k [$k = r(r+1)/2$] par Σ_r telle que la longueur euclidienne sur Σ_r égale la longueur riemannienne sur S_r, les mesures d'ordre $p \leqq r$, euclidiennes sur Σ_r, riemanniennes sur S_r, par définition seront égales, se conservant dans toute substitution (u_i') des u_i conservant ds^2. Ayant $m_r = \int H(u_i) \prod du_i$, pour avoir $\mu_{p,a}$ riemannienne, dans toute substitution u'_i on annule r—p de ces variables.

Notre espace V se composant de surfaces analytiques, l'évaluation des aires n'y présente aucune difficulté. Voici les éléments indispensables à la construction et à l'utilisation de V.

Nous considérons, dans U_3, des cubes semi-ouverts, d'arêtes parallèles à celles du trièdre de coordonnées $Oxyz$ (ou $Ox_1x_2x_3$) et ne possédant aucun point dont une coordonnée est maximale pour ce cube. Celui-ci a donc un seul sommet, sur les huit du cube fermé. Les trois faces fermées opposées au sommet unique sont *étrangères* au cube.

Les cubes c_n ($n \geqq 0$) seront $p_i \leqq 2^n x_i < p_i + 1$ ($i = 1, 2, 3$, les p_i entiers quelconques).

Pour chaque n, tout point M de U_3 est dans un c_n et un seul. Inversement, une suite $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ de cubes dont chacun contient le suivant, possède en commun un point (évidemment unique), sauf si à partir d'un certain rang une face (une arête) étrangère de c_n en contient toujours une de c_{n+p} pour tout $p \geqq 1$.

1. *Classement, énumération des* c_n. — 1 *a*. Désignons par C_n le cube $-2^n \leqq x_i < 2^n$; C_n contient 8^{2n+1} cubes c_n énumérables en *une suite* F'_n; $C_n - C_{n-1}$ se décompose en cubes c_n (au nombre de 7.8^{2n}) que nous énumérons en *une suite* F_n. La succession des F_n donne une *énumération* F de cubes d_q, disjoints, dont l'ensemble reproduit U_3 et que nous appellerons cubes de *premier rang* c_n^1 ($n \geqq 0$). Tout c_p étranger à F est contenu dans un d_q et un seul.

1 *b*. Pour décomposer un cube c_n en cubes c_{n+p} disjoints, nous utilisons

les cubes $C_p(c_n)$ de même sommet que c_n et de côté $2^{-n}(1-2^{-p})$ pour $p \geqq 1$; $C_p(c_n) - C_{p-1}(c_n)$ est formé de cubes c_{n+p} au nombre d'environ 3.4^p. On les énumère en $F_p(c_n)$. La succession $F_p(c_n)$ donne une *suite* $F(c_n)$, de cubes $d_q(c_n)$, disjoints, et dont la réunion est identique à c_n. Mais les trois faces étrangères d'un cube $d_q(c_n)$ sont *intérieures* à c_n. Si c_n est de rang i $(n \geqq i-1)$, les $d_q(c_n)$ sont de rang $i+1$.

2. *Décomposition de l'espace des directions.* — 2 *a*. Considérons un cube c et une sphère Σ ayant tous deux leur centre à l'origine des axes, ceux-ci étant normaux aux faces de c. Partageons en 4^n carrés égaux chacune des six faces de c et projetons radialement à partir du centre O ces carrés sur la surface de Σ. Nous déterminons sur celle-ci un *quadrillage* composé de 6.4^n pseudo-carrés θ_n que nous énumérons en une suite λ_n. Chaque nœud appartient à quatre θ_n, à l'exception de huit nœuds communs à trois θ_n seulement. La succession des λ_n forme la suite Λ des θ_n.

Si l'on accole deux carrés, soudés par leurs quatre bords communs, puis, les ayant partagés chacun en 4^n carrés égaux, si l'on détache les deux intérieurs l'un de l'autre, en gonflant l'espace intermédiaire, on obtient par une légère déformation le quadrillage d'une sphère où tous les nœuds sont communs à quatre pseudo-carrés, sauf quatre nœuds appartenant chacun à deux carrés seulement. Il y a encore un défaut de huit carrés.

A tout cube c_n^1 de F nous faisons correspondre la projection radiale $\nu(c_n^1)$ du centre de c_n sur Σ. Si $c_n^1 = d_q$, $\nu(c_n^1)$ sera ν_q.

2 *b*. Nous considérerons ensuite et pour $z \geqq 0$ et $x \geqq 0$ d'une part, pour $z \geqq 0$ et $x \leqq 0$ d'autre part, les couples $\varkappa_n$ de pseudo-carrés (fermés) θ_n tels qu'il existe *un couple de rayons rectangulaires* de Σ aboutissant respectivement dans l'un et dans l'autre des deux θ_n composant $\varkappa_n$. Nous énumérons les $\varkappa_n$ pour les θ_n de λ_n en une liste χ_n. La succession des χ_n forme la suite X.

2 *c*. Pour l'espace des *directions* propres aux demi-droites *issues du sommet d'un cube* c_n et intérieures à ce cube, soit $\Sigma^+(c_n)$ la sphère de rayon 1, ayant son centre au sommet de c_n, et réduite à son huitième $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Nous divisons en 4^p carrés égaux chacune des trois faces étrangères de c_n et nous les projetons radialement sur $\Sigma^+(c_n)$ à partir du centre. Nous avons 3.4^p mailles $\theta_p(c_n)$, les $\theta_p(c_n)$ s'énumérant en une suite $\lambda_p(c_n)$. La succession des $\lambda_p(c_n)$ pour $p = 1, 2, \ldots$ sera $\Lambda(c_n)$.

La projection radiale du centre d'un $c_{n+p} = d_q(c_n)$ sur $\Sigma^+(c_n)$ sera notée $\nu_q(c_n)$.

(*) Séance du 13 novembre 1963.

(1) *Articles et Mémoires*, p. 765-807 et *Un demi-siècle de Notes communiquées aux Académies*, p. 275-293) et les *Observations*, p. 68-70.

C.R. Acad. Sc. Paris, t.258, 1963, p.3071-3076.

MESURE. INTÉGRATION. — *Métrique sans topologie. Espaces dénombrablement mesurables, où la mesure de tout voisinage est infinie.* Note (*) de M. ARNAUD DENJOY.

La construction d'un tel espace avait été préparée dans la Note précédente. Dans cet exemple, la définition dogmatique de la fonction mesurable se montre fausse. Application linéaire partielle de cet espace.

Je rappelle les notations de ma Note précédente (¹) : cubes c_n, C_n; rang r de c_n^r; listes F_n, F des c_n^1 ou d_n; F (c_k^i) des d_n (c_k^i); λ_n, λ des θ_n; χ_n et X des $\varkappa_n$. Projections $\nu(c_n^1)$ ou ν_n et $\nu(c_k^i)$.

1. CONSTRUCTION DE L'ESPACE V_0. — Désignons par T_0 le trièdre $Oxyz$, par D_0 l'axe des x, par $s(h, D_0)$ ($h > 0$ indépendant) la surface

$$y = d\cos x, \qquad z = d\sin x, \qquad d = \frac{hr}{1+x^2}, \qquad -1 < r < 1, \qquad -\infty < x + \infty.$$

$s(h, D)$ a une aire finie $\sigma(h) = a[s(h)]$, sensiblement proportionnelle à h pour $h < 1$, à h^2 pour $h > 1$; $s(h, D_0)$ ne peut avoir en commun avec des surfaces analogues $s(h', D)$, D étant une droite où une origine a été choisie, que des arcs analytiques, donc d'*aire nulle*, à la condition que D ne soit pas identique à D_0. D'autre part, toute famille *partout dense dans* U_3 de *droites* parallèles à une même direction quelconque, coupe $s(h, D_0)$ en un ensemble partout dense sur $s(h, D_0)$.

Les points $M_i(0, y_i, z_i)$, où y_i et z_i sont rationnels sont en infinité dénombrable. Soit $s(h_i, D_i)$ la translation de $s(h_i, D_0)$ amenant O en M_i. La série $\sum \varepsilon_i$ ayant pour somme h, nous faisons $h_i = \varepsilon_i$. L'ensemble des $s(\varepsilon_i, D_i)$, soumis à deux rotations de $\pi/2$, l'une autour de Oy, l'autre autour de Oz, nous donne un ensemble S (h, T_0), d'aire comparable à $3\sigma(h)$ et qui contient toutes les parallèles aux axes, ayant leurs deux coordonnées fixes rationnelles. Enfin, *dans tout* c_n, l'aire de $c_n . S(h, T_0)$ *est positive.*

Étoffons cet ensemble S (h, T_0).

Énumérons en une suite Ω les points N_i ayant leurs trois coordonnées rationnelles. D'autre part, la suite (Δ) énumérant les droites $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ issues de O et rationnelles dans T_0 (a_1, a_2 et a_3 entiers irréductibles; $|a_1a_2| + |a_2a_3| + |a_3a_1| \geqq 1$; $a_3 \geqq 1$, ou $a_3 = 0$ et $a_1 \geqq 1$); Δ_k, Δ_j, Δ_l ($k < j < l$) deux à deux orthogonales ($|a_{i,k}| + |a_{i,j}| \geqq 1$, $i = 1, 2, 3$)

et de moindres rangs k, j, l non encore utilisés, forment un trièdre τ_r, élément d'une suite Θ. Chaque Δ est arête d'un τ_r et d'un seul.

Dès lors rapprochons pour le même entier n, l'énumération F'_n des cubes c_n formant C_n et l'énumération χ_n des couples $\varkappa_n$ de pseudo-carrés sphériques θ_n de la suite λ_n sur Σ. Dans chacun des c_n nous plaçons autant de points N_i qu'il y a de $\varkappa_n$ dans χ_n. Chacun de ces N_i devient le sommet d'un T_i parallèle à un τ_r qui lui est propre, de façon que tout couple $\varkappa_n$ de χ_n soit rencontré en les θ_n constituant ce $\varkappa_n$ par deux des arêtes d'un τ_r parallèle à un T_i. Pour le choix des N_i et des triètres τ_r correspondants, nous prenons toujours dans les énumérations Ω, Θ les éléments nouveaux de moindre indice i, r. Opérant ainsi pour toutes les valeurs de n, en associant chaque c_n du groupe F'_n au groupe χ_n des $\varkappa_n$, nous utilisons tous les N_i de Ω, tous les τ_r de Θ, chacun une fois et une seule.

Pour tout voisinage ω de tout point N de U_3, l'ensemble des N_i est partout dense dans ω et l'ensemble des couples de direction des arêtes des T_i ayant pour sommets ces N_i est partout dense dans l'espace des couples de directions rectangulaires de U_3.

On forme les $S(\varepsilon_i, T_i)$. Leur réunion sera l'espace $V_0(h, T_0)$, soit $V_0(h)$, où déjà l'application du théorème de Vitali est intéressante. L'aire $a[V_0(h)]$ est finie, sensiblement proportionnelle à h (si $h < 1$). L'aire de tout $c_n . V_0(h)$ est positive. V_0 contient toutes les droites ayant leur équation rationnelle dans le trièdre T_0 et chacune est l'axe d'un feuillet $s(h', D)$. La distance de deux points M, M' dans V_0 est égale au segment MM', même si la droite MM' n'est pas rationnelle, auquel cas ce minimum n'est pas atteint.

Les espaces V_m *et* V. — Soit un ensemble dénombrable de points $I_m (m \geqq 1)$, partout denses dans U_3, I_m étant sommet d'un trièdre $T'_m(I_m x_m y_m z_m)$ dont les directions d'arêtes s'obtiennent en imprimant à T_0 les rotations $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ successivement autour de Ox, autour de la nouvelle position de Oy, autour de la dernière position de Oz; α, β, γ sont supposés irrationnels et tels que les directions rationnelles par rapport aux divers T'_m soient toutes distinctes et irrationnelles par rapport à T_0.

Nous formons $V_m = V_0(h_m, T'_m)$; $a_m = a(V_m)$ est au moins sensiblement proportionnel à h_m. Si l'on admet qu'il en est ainsi pour tous les $c_m \subset C_m$ (ils sont en nombre 8^{2m+1}), soit $8^{-m}\upsilon_m$ le minimum de $a(c_m . V_0)$ pour ces divers c_m. Si $I_m \in C_k - C_{k-1}$, nous prenons $h_m = \upsilon_m^{-1}$ si $k < m$ et $h_m = \upsilon_{k+1}^{-1}$ si $k \geqq m$. Alors quel que soit $k \geqq m$ et $c_m \subset C_m$, sensiblement $a(c_m . V_k) \geqq 8^{-m}$.

c_m est traversé par des faisceaux partout denses de droites parallèles à toute droite rationnelle par rapport à T'_m. Chacune de ces droites est l'axe d'un feuillet $s(\varepsilon_j h_m, D)$, dont c_m découpe une portion.

L'espace V sera $\sum V_m$. Il est dénombrablement quarrable, mais d'aire infinie (comme l'axe des x est dénombrablement mesurable, mais de longueur infinie). Seulement l'aire $a\,(c_n.V)$ est infinie pour tout c_n. Les $s\,(h', D)$ composant V s'énumèrent en une suite s_n réduite à

$$s'_n = s_n - s_{n'} \sum_{i<n} s_i\,;$$

$s_n - s'_n$ est la réunion d'un nombre fini d'arcs analytiques; $a\,(s'_n) = a\,(s_n)$. Soit $V'_m = \sum s'_n$ pour $s_n \subset V_m$; $a\,(V'_m) = a_m$, et tout point de V appartient à un V'_m et à un seul.

2. Intégrale et fonctions mesurables dans V. — V est distancié, V est topologique, par la topologie de U_3; V a des ensembles ouverts, parties de V situés dans ceux de U_3; V a des ensembles fermés, et d'abord ceux que portent un nombre fini de $s\,(h', D)$. On peut définir la continuité d'une fonction d'un point variable dans V.

La série $\sum u_m\ (u_m > 0)$ étant convergente, soit $f(M)$ égal à $u_m a_m^{-1}$ sur V'_m; f est définie en tout point de V. On s'exclurait de la communauté des mathématiciens en refusant de reconnaître, avec le sens donné aux mots par Lebesgue : 1° l'intégrabilité de f sur V, avec la mesure $a\,(E)$, et l'égalité $\int_V f\,da = \sum u_m$; 2° le caractère de *fonction mesurable* à f, quand tout ensemble $0 < a < f < b$ (a et b indépendants) est mesurable. Or, si $e \subset V$, avec $a\,(e) < \infty$, il n'existe pas de fonction k_e continue dans V et telle que $f - k_e = 0$ en tout point M_0 de $V - e$. En effet, soit c_n contenant M_0; $a\,(c_n.V'_m)$ surpassant 8^{-n}, dès $m \geqq n$ et les V'_m étant disjoints, le nombre des $c_n.V'_m$ inclus dans $c_n.e$ est fini. Donc, tous les V'_m à partir d'un rang $n+p$ ont des points dans $c_n.(V-e)$, où $k_e = f$. D'après $f = u_m a_m^{-1}$ sur V'_m, le minimum de k_e au point M_0 est zéro; k_e est discontinu en tout point de $V - e$; *f n'est pas mesurable au sens des dogmatiques.*

Si $f\,(-1)^n = n + \sin\,(x+y+z)$ sur V'_n, l'ensemble

$$-\infty < a < f < b < \infty$$

a une aire déterminée finie pour tout couple a, b; f est mesurable. Or en tout point de $V - e$, la fonction k_e aura l'oscillation infinie. Elle est discontinue. Cette fonction, non mesurable au sens des dogmatiques, est, comme la précédente de classe 2 dans U_3 si $f = 0$ dans $(U_3 - V)$.

Je ne sais quels espaces supragénéraux, superabstraits de mesures, de fonctions, vise cette définition, effaçant celle qu'impose l'intégrale. En tous cas, cette nouveauté se montre déjà fausse dans l'humble espace cartésien à trois dimensions, avec la pauvre mesure euclidienne des aires. Mais la raison doit capituler devant l'argument d'autorité.

J'ai toujours insisté sur la différence de nature des propriétés métriques et descriptives (topologiques) pour les fonctions et les ensembles. Pour ces dernières, la notion de densité joue un rôle capital; Cantor, Borel, Baire, Lebesgue, et moi-même à leur suite, entendions ce caractère dans un même sens, dont l'excellence était prouvée par les succès dans les applications. L'école a balayé cela comme le reste. Elle a posé une nouvelle définition d'après laquelle l'ensemble des milieux des intervalles contigus à un ensemble parfait linéaire est dense « par rapport » à ce dernier. Cette notion ne vaut pas un haussement d'épaules. Je crois que les équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, où les variables sont numériques ne cesseront jamais de jouer un grand rôle. Elles posent des problèmes aux limites relevant de la théorie des fonctions de variables réelles. Les disciples des dogmatiques sont à la fois condamnés à ne rien comprendre à cette théorie, et assurés par leurs maîtres de la dominer de très haut.

Sous la conduite de Lusin, génial continuateur de Borel, Baire, Lebesgue, les mathématiciens soviétiques ont longtemps demandé (et peut-être continuent-ils encore) leur éducation de base à ces trois Français et à leur lignée. Ils se sont épargné les ignorances fondamentales, inspiratrices de hardiesses triomphantes d'abord, s'effondrant ensuite. Je doute que les conceptions des dogmatiques jouissent d'une grande estime auprès de l'école de Moscou, récemment et justement honorée, en la personne de son grand représentant Kolmogoroff, de l'un des prix Balsan, dont le prestige égalerait celui des prix Nobel si les noms des lauréats, au lieu de rester ignorés, étaient publiés, notifiés à l'univers, comme l'Académie suédoise procède pour les siens.

3. Le théorème de Vitali dans l'espace V. — L'espace V nous permettra de faire saisir toute la portée du théorème de Vitali. Appliquant V_0, puis les V_m et V sur l'axe des nombres L, où la longueur l est euclidienne, de façon que $a(E) = l(e)$ si $E \subset V$ correspond à $e \subset L$, les γ de V correspondront à des intervalles de L, en sorte que toutes les hypothèses du théorème sont satisfaites. Mais nos γ se composeront d'une infinité d'éléments disjoints, s'accumulant pour certains dans toutes les directions de l'espace, et pour tous à la totalité des trois faces étrangères d'une infinité de cubes c_n. Il apparaîtra bien que le champ d'application du théorème général de Vitali dépasse le cas du parallélépipède rectangle à côtés dans un rapport borné.

Application linéaire de V_0. — Nous appliquerons V_0 sur ρ_0 $(o < t < l_0)$, *et de la même manière* V_m sur ρ_m $(o < t < l_m)$, l_m étant $a_m = a(V_m)$. Occupons-nous de V_0.

Les principes de notre construction seront les suivants :

1° *Tout* c_n *de* U_3 *sera représenté sur* ρ_0 *par un intervalle* $\alpha\beta$ *de longueur* $\beta - \alpha = a(c_n . V_0)$ (qui est positive);

2° Pour obtenir une correspondance déterminée entre les points de U_3 et ceux de ρ_0, *deux intervalles* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ *correspondant à deux cubes différents* c_n, c_m *seront sans extrémité commune.*

En conséquence, si un c_n^1 de premier rang identique à d_q dans l'énumération F, est représenté par $j_q^1\ (\alpha_{1,q}^0, \beta_{1,q}^0)$ de longueur $a_{1,q}^0 = a\,(d_q.\mathrm{V}_0)$, les j_q^1 sont les intervalles contigus à un ensemble parfait totalement discontinu P_0^1 de longueur nulle, d'extrémités o et l_0.

De même, si c_n^i de rang i, est représenté par un intervalle $j_n^i\ (\alpha_{i,n}^0, \beta_{i,n}^0)$ de ρ_0 avec $a(c_n^i.\mathrm{V}_0) = l(j_n^i)$, aux c_m^{i+1} de rang $i+1$ décomposant c_n^i et énumérés en les $d_q(c_n^i)$ dans la suite F (c_n^i), il correspondra des intervalles j_q^{i+1} de longueur $a\,[d_q\,(c_n^i).\mathrm{V}_0]$ et contigus à un ensemble parfait totalement discontinu mince p_n^{i+1} ayant les mêmes extrémités que j_n^i.

3° *j étant un intervalle quelconque de ρ_0, contenant un point de* P_0^1 (*un point de* p_n^{i+1}), nous voulons que *les d_q* [les $d_q\,(c_n^i)$] *représentés par les contigus à* P_0^1 (à p_n^{i+1}) *situés sur j, s'accumulent à l'infini dans toutes les directions pour les cubes d_q* [*sur l'intégralité des trois faces étrangères de c_n^i pour les $d_q\,(c_n^i)$*]. Le type d'ordination des *points dyadiques* va nous y aider.

Énumérons en une suite (δ) les points dyadiques

$$\delta_r = (2h+1)\,2^{-m} \qquad (0 \leqq h \leqq 2^{m-1}-1\,;\ r = 2^{m-1}+h)$$

situés sur l'intervalle υ $(0 < u < 1)$. D'autre part, soit (ν) l'énumération des points ν_q de la sphère Σ ayant son centre à l'origine, ν_q étant la projection radiale du centre de d_q.

Soit p un entier positif quelconque. Divisons υ en 2^p+1 intervalles égaux ζ_p et dans chacun d'eux (toujours dans l'ordre où l'énumération présente les nouveaux éléments) prenons 6.4^p points δ_r. Dans chacun des 6.4^p pseudo-carrés θ_p (fermés) divisant Σ, énumérés dans la suite λ_p, prenons un point ν_q. Le cube d_q lié à ν_q correspondra à un δ_r. Procédant ainsi pour chacun des 2^p+1 intervalles ζ_p, l'opération est achevée pour l'entier p. Nous l'effectuons pour toutes les valeurs de p. La condition 3° est ainsi remplie pour les c_n^1.

Pour les $d_q\,(c_n^i)$ nous considérons les projections $\nu_q\,(c_n^i)$ de leurs centres, radialement à partir du sommet de c_n^i sur le huitième de sphère Σ^+ ayant ce sommet pour centre. Σ^+ est divisé en 3.4^p quasi-carrés $\theta_p\,(c_n^i)$ énumérés en $\lambda_p\,(c_n^i)$. Dans un quelconque des ζ_p prenons 3.4^p points δ_r. Dans chacun des $\theta_p(c_n^i)$ prenons un point $\nu_q\,(c_n^i)$. A tout δ_r correspond un $d_q\,(c_n^i)$. Procédons ainsi pour chacun des 2^p+1 intervalles ζ_p, puis pour toutes les valeurs de p. La condition 3° est remplie pour les $d_q\,(c_n^i)$ [les $\nu\,(c_n^i)$ confondus géométriquement sur la diagonale de c_n^i, restent distincts dans l'énumération].

L'ensemble P_0. — Pour tout $i \geqq 0$, nous définissons l'ensemble parfait P_0^{i+1}, situé sur le segment $\bar{\rho}_0$ et identique à p_k^{i+1} sur chaque intervalle j_k^i continu à P_0^i ($j_0^0 \equiv \rho_0$; P_0^0 est les deux points o et l_0); $\mathrm{P}_0 = \sum \mathrm{P}_0$

est mince, et partout dense sur ρ_0, puisque la longueur $a^0_{i,q}$ du contigu j_q de P^i_0 tend vers zéro quand i croît.

Correspondance des points M *de* U_3 *et des points* t *de* $\rho_0 - P_0$. — Soit M dans U_3, $c^i_{s_i}$ ($i \geqq 1$, $s_i \geqq i-1$) la suite des c_n de rangs i croissants et contenant M; à $c^i_{s_i}$ correspond sur ρ_0 un contigu $j^i_{s_i}$ à P^i_0 (à $p^{i+1}_{s_i}$). La fermeture $\overline{j^i_{s_i}}$ est intérieure à $j^{i-1}_{s_{i-1}}$. Donc les $j^i_{s_i}$ ont en commun un point t (évidemment unique) étranger à P_0.

Inversement, si $t \in \rho_0 - P_0$, t est intérieur à une suite $j^1_{s_1}$, $j^2_{s_2}$. A chacun de ces contigus correspond un $c^i_{s_i}$. La fermeture $\overline{c^i_{s_i}}$, disjointe des faces étrangères de $c^{i-1}_{s_{i-1}}$, est intérieure à ce dernier. Donc les $c^i_{s_i}$ ont en commun un point M.

Ainsi *la totalité de* U_3 *est représentée point par point dans* $\rho_0 - P_0$.

Je dis que, *si* $e \subset \rho_0 - P_0$ *est l'image de* $E \subset V_0 : l(e) = a(E)$. Nous englobons e dans un ensemble d'intervalles disjoints j_m situés sur ρ_0 et vérifiant $\sum l(j_m) < l(e) + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ indépendant). P_0 étant partout dense sur ρ_0, on peut supposer que les deux extrémités de chaque j_m sont sur un même P^r_0. Dès lors chaque $j_m - j_m . P^r_0$ est une somme d'intervalles $\alpha^0_{r,k}$, $\beta^0_{r,k}$ représentant des cubes c^r_s de rang r. L'ensemble de ces cubes (pour un même r et tous les s utilisés, ensuite pour tous les r utilisés) contient E et simultanément :

$$\sum_r \sum_s a(c^r_s . V_0) = \sum l(j_m) \quad \text{et} \quad \geqq a(E).$$

Donc $a(E) \leqq l(e) + \varepsilon$. La relation $a(E) \leqq l(e)$, appliquée aux complémentaires $E' = V_0 - E$, $e' = \rho_0 - P_0 - e$, associée à l'égalité

$$a(E) + a(E') = l(e) + l(e') = l_0 = a_0,$$

donne $a(E) = l(e)$. En conséquence, *si* $\Omega_0 \subset \rho_0 - P_0$ *est l'image de l'ensemble* $U_3 - V_0 : l(\Omega_0) = 0$.

$M(t)$ est continu en t sur $\rho_0 - P_0$; $t(M)$ est continu en M, sauf sur l'ensemble w des plans $x_i = p . 2^{-n}$ ($i = 1$, 2 ou 3; p, n entiers). Un plan coupe toute surface $s(h', D)$ suivant une ligne d'aire nulle. Donc *si* $\psi_0 = w . V_0 : a(\psi_0) = 0$. Soit W_0 l'*image de* ψ_0 *sur* ρ_0 : $l(W_0) = 0$.

Notons

$$\Psi_0 = P_0 + \Omega_0 + W_0 \quad \text{et} \quad X_0 = \rho_0 - \Psi_0, \quad \xi_0 = V_0 - \psi_0;$$

$l(\Psi_0) = 0$ et *la correspondance* $M \in \xi_0$ *et* $t \in X_0$ *est continue dans les deux sens.* Les ensembles parfaits se correspondent.

Les γ dans V_0 seront les homologues des intervalles j de ρ_0.

(*) Séance du 25 novembre 1963.

C.R. Acad. Sc. Paris, t.257, p.3536-3541

MESURE. INTÉGRALE. — *Métrique sans topologie. Le théorème de Vitali dans un espace dénombrablement mesurable, et où tous les voisinages sont de mesure infinie.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy.**

L'application totale d'un tel ensemble sur une demi-droite indéfinie, aires et longueurs égales en correspondance, permet d'obtenir des exemples où les hypothèses du théorème général de Vitali sont vérifiées dans des conditions extraordinairement éloignées du cas élémentaire originel.

RAPPEL DE NOTATIONS ET DE CONDITIONS RÉALISÉES ([1]). — c_n, cube $p_i \leqq 2^n x_i < p_i + 1$ ($i = 1, 2, 3$; p entier); 3 faces, 9 arêtes, 7 sommets de c_n lui sont étrangers; c_n^r ($n \geqq r - 1$), cube de rang r : $c_n^r . c_m^r = \emptyset$ si $m \neq n$ et $\sum_n c_n^r = U_3 = c_0^0$ (pour c_∞^0); C_n, cube $-2^n \leqq x_i < 2^n$.

Il y a 7.8^{2n} cubes c_n^1 décomposant $C_n - C_{n-1}$ et formant F_n; $F = \Sigma F_n$; les d_q sont les c_k^1 de F; $c_n^r = \sum_s c_s^{r+1}$: les c_s^{r+1} ou $d_q(c_n^r)$ formant $F(c_n^r)$ s'accumulent sur les trois faces étrangères de c_n^r.

V_0^-, V_m^-, $V = \Sigma V_m$ sont des réunions de feuillets $s(h', D)$; V_0 est appliqué sur ρ_0 ($0 < t < l_0$); si $e \subset V_0$ correspond à $E \subset \rho_0$; aire $a(e) =$ longueur $l(E)$; $l_0 = a(V_0) = a_0$; P_0^0 étant le couple ($0, l_0$), les ensembles P_0^i, d'extrémités 0, l_0, croissent, sont parfaits pour $i \geqq 1$. Les contigus à P_0^i, soit j_k^i, représentent les c_k^i de rang i, et $l(j_k^i) = a(c_k^i . V_0)$. Sur j_k^i, P_0^{i+1} coïncide avec p_k^{i+1}, de mêmes extrémités que j_k^i. Tout intervalle j contenant un point de P_0^1, de p_k^{i+1}, contient la représentation d'une infinité de c_n^1, de $c_s^{i+1} = d_q(c_k^i)$, s'accumulant à l'infini dans toutes les directions (c_n^1), sur la totalité des trois faces étrangères de c_k^i ($i \geqq 1$); $P_0 = \Sigma P_0^i$; $l(P_0) = 0$.

Sur ρ_0 : P_0, Ω, W_0 représentent : P_0, rien; Ω_0, $U_3 - V_0$; W_0, $\psi_0 = w . V_0$, w étant l'ensemble des points de U_3 ayant au moins une coordonnée dyadique. $\Psi_0 = P_0 + \Omega_0 + W_0$; $l(\Psi_0) = 0$. La correspondance de $t \in X_0 = \rho_0 - \Psi_0$ et de $M \in \xi_0 = V_0 - \psi_0$ est continue dans les deux sens en tout point. Les ensembles fermés, parfaits, se correspondent.

CUBES c_n DE U_3 REPRÉSENTÉS SUR UN INTERVALLE j DE ρ_0. — Pour appliquer le théorème de Vitali dans l'espace V_0 avec des ensembles γ assurés de satisfaire aux hypothèses de l'énoncé, nous prendrons, pour les γ, les homologues dans V_0 (plus précisément dans ξ_0) des intervalles j (des $j . X_0$) de ρ_0. Les c_n^r étant les cubes majeurs dont la figuration est dans j (majeurs : c'est-à-dire non inclus dans d'autres c_m^{r-1} eux-mêmes figurés dans j), et $\Sigma(j)$ où Σ désignant l'ensemble des c_n^r, γ homologue de j dans V_0 (dans ξ_0) sera $V_0 . \Sigma$; V_0 (et ξ_0) est partout épais (en aires) sur c_n^r, qui découpe, sur une infinité de feuillets $s(h' . D)$ le traversant, les portions formant $c_n^r . V_0$.

Déterminons $\Sigma = \Sigma(j)$ pour j ($\alpha < t < \beta$) donné.

Soit P_0^i ($i > 0$) l'ensemble de rang maximal i dont un contigu j_1^i contient j; j renferme des points de p_k^{i+1}. Si $j = j_k^i$, $\Sigma = c_k^i$. Écartons ce cas. Soient γ_{i+1}, δ_{i+1} les extrémités de p_k^{i+1} sur j. $\alpha \leqq \gamma_{i+1} < \delta_{i+1} \leqq \beta$.

Soit j^0 $(\gamma_{i+1} < t < \delta_{i+1})$. Aux contigus à p_k^{i+1} situés sur j^0 correspond l'ensemble Σ^0 des $d_q(c_k^i)$ s'accumulant dans toutes les directions de l'espace $(i = 0)$, sur les trois faces étrangères de c_k^i $(i \geqq 1)$.

Supposons α et β étrangers à P_0; $\rho_0 - P_0$ étant partout dense sur ρ_0, il sera possible de se limiter aux j vérifiant cette condition. Alors α et β sont intérieurs à des contigus à p_k^{i+1}, savoir $j_{s_1}^{i+1}$, d'extrémité droite γ_{i+1} et $j_{s_1'}^{i+1}$, d'extrémité gauche δ_{i+1}; $F(c_k^i)$ se compose de : 1° Σ^0; 2° les deux cubes $c_{s_1}^{i+1}$, $c_{s_1'}^{i+1}$ qui ne sont ni étrangers, ni agrégés à Σ; 3° les cubes $d_q(c_k^i)$ étrangers à Σ. [Ci-après, au cas où α (ou β) appartiendraient à P_0^{i+m} (m minimal) les suites j^{i+r} s'arrêteraient à $r = m - 1$.]

Soient j^- $(\alpha < t < \gamma_{i+1})$, j^+ $(\delta_{i+1} < t < \beta)$, Σ^- et Σ^+ les parties de Σ représentées sur j^-, sur j^+; $\Sigma = \Sigma^- + \Sigma^0 + \Sigma^+$. Occupons-nous de Σ^-.

α est compris dans une suite d'intervalles $j_{s_r}^{i+r}$; celui-ci, représentant $c_{s_r}^{i+r}$, est contigu à $p_{s_{r-1}}^{i+r}$ et a mêmes extrémités que $p_{s_r}^{i+r+1}$, en particulier la même extrémité droite γ_{i+r}; α est dans le contigu $j_{s_{r+1}}^{i+r+1}$ à $p_{s_r}^{i+r+1}$, et ce contigu, d'extrémité droite γ_{i+r+1}, sépare deux portions de $p_{s_r}^{i+r+1}$. Pour la portion de droite, d'extrémités γ_{i+r+1}, γ_{i+r}, ses contigus représentent une famille $\Phi(c_{s_r}^{i+r})$ de cubes $d_q(c_{s_r}^{i+r})$ appartenant à Σ^- et s'accumulant sur la totalité des trois faces étrangères de $c_{s_r}^{i+r}$. A la portion de gauche correspondent des cubes $d_p(c_{s_r}^{i+r})$ étrangers à Σ. Le contigu intermédiaire est l'image de $c_{s_{r+1}}^{i+r+1}$, qui complète $F(c_{s_r}^{i+r})$ et qui n'est intégralement ni étranger, ni agrégé à Σ. Donc $\Sigma^- = \sum_r \Phi(c_{s_r}^{i+r})$. De même $\Sigma^+ = \Sigma\Phi(c_{s_r'}^{i+r})$.

Résumons, pour n'y plus revenir par la suite, la disposition de $\gamma = \Sigma(j).\xi_0$ représenté par $j.X_0$; γ se décompose en parties respectivement situées sur les cubes évidéschacun par le (par les deux pour le premier) suivant :

$$c_k^i - c_{s_1}^{i+1} - c_{s_1'}^{i+1},\quad c_{s_r}^{i+r} - c_{s_{r+1}}^{i+r+1},\quad c_{s_r'}^{i+r} - c_{s_{r+1}'}^{i+r+1}.$$

Chacune de ces parties s'accumule respectivement sur la totalité des trois faces étrangères de c_k^i (à l'infini dans toutes les directions pour $i = k = 0$), de $c_{s_r}^{i+r}$, de $c_{s_r'}^{i+r}$.

Ultérieurement, V étant représenté en totalité sur une droite L $(v > 0)$, le γ homologue dans V d'un intervalle J de L réunira tous les γ_m, parties de V_m $(m > 0)$ représentées dans J, dispersées, comme $\Sigma(j).\xi_0$, réduites à des sommes d'ensembles parfaits disjoints. On sera loin du parallélipipède à côtés en proportions bornées.

Étalement de la figuration de V_0 sur un demi-axe indéfini. — Afin de pouvoir utiliser, pour l'application du théorème de Vitali, conjointement toutes les parties V_m de l'espace V, nous ferons subir à la représentation linéaire de chaque V_m sur l'intervalle ρ_m $(0 < t_m < l_m)$ $[l_m = a(V_m) = a_m]$, une transformation grâce à laquelle nous amalgamerons sur un même axe L $(0 < v)$ toutes les figurations des V_m. Occupons-nous d'abord de V_0.

Sur ρ_0 ($o < t_0 < l_0$) nous englobons Ψ_0 (qui contient, avec P_0, les extrémités de ρ_0) dans une famille d'intervalles de longueur totale inférieure à $l_0/2$; Ψ_0 étant partout dense sur ρ_0, le complémentaire de cet ensemble d'intervalles est un ensemble fermé totalement discontinu, contenu dans X_0 et de longueur supérieure à $l_0/2$. Nous le réduisons à son noyau parfait Q^0_1. Plus précisément, η_0 étant le premier terme d'une suite décroissante η_m tendant vers zéro, préalablement nous divisons ρ_0 en segments i de longueur inférieure à η_0 et, pour chacun des i et $i.\Psi_0$, nous effectuons les opérations décrites pour ρ_0 et Ψ_0. Cela nous donne des ensembles parfaits $q^0_1(i)$ dont la réunion sera Q^0_1. De cette façon, sur tout intervalle $j \subset \rho_0$ et si $l(j) > 3\eta_0$, $l(j.Q^0_1) > j/3$.

Dans chaque intervalle i_1 contigu à Q^0_1, nous répétons la même opération, i_1 remplaçant ρ_0. L'ensemble parfait $q^0_1(i_1)$ remplaçant Q^0_1, soit $Q^0_2 = \Sigma q^0_1(i_1)$; $Q^0_1 + Q^0_2 = R^0_2$. Sur chaque contigu à R^0_2 on recommence, et indéfiniment. R^0_n est parfait, inclus dans X_0; $l(\rho_0 - R^0_n) < l_0 2^{-n}$.

Énumérons diagonalement les Q^0_l en posant $k_n = k + n(n-1)/2$, et formons $E^0_k = \sum_{n \geq k} Q^0_{k_n}$. Notons que E^0_1 contient Q^0_1. Soit

$$E^0 = \Sigma E^0_k \subset X_0 \qquad \text{et} \qquad \Pi_0 = X_0 - E^0; \qquad l(\Pi_0) = o.$$

Les E^0_k sont disjoints, inclus dans X_0 et partout épais sur ρ_0. Chaque E^0_k est somme d'ensembles parfaits disjoints, épais en eux-mêmes.

Les homologues e^0, e^0_k de ces ensembles sur ξ_0 jouissent exactement des mêmes propriétés. Si ϖ_0 sur ξ_0 est représenté par Π_0, $e^0 = \xi_0 - \varpi_0$; $a(\varpi_0) \equiv o$. Chacun des feuillets $s(h'\,D)$ constituant V_0, et débarrassé de ses lignes communes avec les autres feuillets a l'aire positive $\sigma(h')$. Donc, sur $s(h', D)$, e^0_k est partout épais et formé par une infinité d'ensembles parfaits disjoints; $e^0.s(h', D)$ est une *plénitude* de $s(h', D)$.

Soit $\lambda^0_k(t)$ la longueur de E^0_k entre o et $t \in \rho_0$, puis $\lambda^0_k = l(E^0_k)$; $o < \lambda^0_k(t') - \lambda^0_k(t) < t' - t$ exprime que E^0_k et $\rho_0 - E^0_k$ sont tous deux partout épais.

Nous allons étaler sur le champ indéfini linéaire L_0 ($\nu_0 > o$) la représentation des M de V_0 (plus exactement de e^0), actuellement figurée par les t ou t_0 de E^0, et de façon que cette image K'_0 soit un ensemble partout épais sur L_0. Si $t_0 \in E^0_1$, nous prenons $\nu_0 = t_0$. Si $t_0 \in E^0_k$, $\nu_0 = (k-1)\,l_0 + t_0$; ν_0 décrit sur l'intervalle $\rho^k_0\,[(k-1)\,l_0, kl_0]$ un ensemble égal à E^0_k. Sur l'intervalle (o, ν_0) si $\nu_0 \in \rho^k_0$, la longueur $l^0(\nu_0)$ de K'_0, est

$$\lambda^0_1 + \ldots + \lambda^0_{k-1} + \lambda^0_k(\nu_0 - \overline{k-1}\,l_0).$$

Quels que soient ν_0 et $\nu'_0 < \nu_0$:

$$o < l^0(\nu'_0) - l^0(\nu_0) < \nu'_0 - \nu_0,$$

exprimant que K'_0 et $L_0 - K'_0$ sont partout épais sur L_0.

Soit J_0 $(a_0 < v_0 < b_0)$ un intervalle de L_0. Que représente $J_0 . K'_0$ sur e_0 ? Si J_0 contient un intervalle ρ_0^k, e_k^0 est intégralement représenté sur J_0, e_k^0 est partout épais sur chaque $s\,(h', D)$, donc dans la totalité de U_3.

Si ni a_0 ni b_0 ne sont extérieurs à un certain intervalle ρ_0^m, soient

$$\alpha_0 = a_0 - (m-1)\,l_0, \qquad \beta_0 = b_0 - (m-1)\,l_0; \qquad j_0(\alpha_0, \beta_0) \subset \rho_0;$$

$J_0 . K'_0$ représente $e_m^0 . \Sigma\,(j_0)$.

Si a_0 est intérieur à ρ_0, avec $b_0 > pl_0$, soient

$$\alpha_0 = a_0 - (p-1)\,l_0 \quad \text{et} \quad j''_0(\alpha_0, l_0);$$

$J_0 . K'_0$ représente $e_p^0\,\Sigma\,(j''_0)$; $\Sigma\,(j''_0) = \Sigma^-\,(j''_0)$ s'éloigne à l'infini dans toutes les directions. Conclusions analogues si b_0 est intérieur à ρ_0^q, avec $a_0 < ql_0$.

Soit $P_0^{1,k}$ la translation $(k-1)\,l_0$ de P'_∞ et $S'_0 = \Sigma\,P_0^{1,k}$. Si J_0 contient une portion de S'_0, la partie de e^0 représentée sur J_0 s'accumule à l'infini dans toutes les directions.

Étalement de la représentation de V_m et figuration globale de V. — Pour représenter la totalité de V (à un ensemble d'aire nulle près) sur L $(v > 0)$, nous figurons chaque V_m par un ensemble K_m partout épais sur L, les K_m étant disjoints; $l_m(v)$ désignera la longueur de K_m sur l'intervalle $(0, v)$.

K_0 s'obtiendra en faisant $v = v_0$ pour $v_0 \in K'_0$, $v \in K_0$; K_0 sur L est identique à K'_0 sur L_0. Supposons défini K_i pour $0 \leqq i \leqq m-1$, et soit à définir K_m supposant connu K'_m sur L_m $(0 < v_m)$.

Posons

$$Y_{m-1} = \sum_0^{m-1} K_i, \qquad \mu_{m-1}(v) = \sum_0^{m-1} l_i(v), \qquad \mu_{m-1} = \sum_0^{m-1} l_i = l\,(Y_{m-1})$$

Soit $v_m = v - \mu_{m-1}(v)$ et y'_{m-1} sur L_m l'homologue de Y_{m-1}. Je dis que les longueurs correspondantes sur $L - Y_{m-1}$ et sur $L_m - y'_{m-1}$ sont égales, tandis que $l\,(y'_{m-1}) = 0$.

En effet, v_m est la longueur sur $(0, v)$ de $L - Y_{m-1}$ et si, à $v' > v$, correspond v'_m, $v'_m - v_m$ est la longueur de $L - Y_{m-1}$ sur (v, v'); si $e \subset L$ et $e_m \subset L_m$ se correspondent, en enfermant e dans une famille d'intervalles dépassant $l\,(e)$ d'aussi peu qu'on le veut, on voit que : 1° $l\,(y'_{m-1}) = 0$; 2° si $e \subset L - Y_{m-1}$, d'où $e_m \subset L_m - y'_{m-1}$, sur tous les intervalles associés (v, v'), (v_m, v'_m), e et e_m ont des longueurs égales.

Soit donc à construire K'_m sur L_m $(v_m > 0)$. Nous représentons d'abord V'_m sur l'intervalle ρ_m $(0 < t_m < l_m)$ $[l_m = a\,(V_m) = a_m]$. Les liaisons des points dyadiques δ_r aux c_n^1 de F, aux d_q (c_k^l) de F (c_k^l), sont indépendantes de leur application à figurer V_m $(m \geqq 0)$. Aussi l'ordre mutuel des intervalles j_k^l figurant un même c_k^l pour les divers V_m est-il indépendant de m;

une transformation continue croissante (t_0, t_m) changera P^i_0, P_0 en P^i_m, P_m. Le couple (t_0, t_m) si solidairement $t_0 \in \rho_0 - P_0$, $t_m \in \rho_m - P_m$, correspond au même point de U_3. Mais $U_3 - V_m$, $w . V_m$ varient avec m; et leurs figurations Ω_m, W_m ne s'échangent pas avec Ω_0, W_0 par (t_0, t_m).

Soit y_{m-1} l'ensemble minimal de période l_m contenant y'_{m-1}. Sur $\rho_m = \rho^0_m$, y_{m-1} s'obtiendra en réunissant les translations respectives $-(k-1)\, l_m$ des parties de y'_{m-1} situées sur $\rho^k_m (\overline{k-1}\, l_m, kl_m)$. Posons

$$\Psi'_m = P_m + \Omega_m + W_m + y_{m-1} \qquad \text{et} \qquad X'_m = \rho_m - \Psi'_m$$

et soit, dans V_m, ψ'_m l'ensemble figuré sur ρ_m par $W_m + y_{m-1}(\rho_m - W_m)$; $a(\psi'_m) = 0$; $\xi'_m = V_m - \psi'_m$ est représenté sur ρ_m par X'_m.

Sur X'_m on construit les Q^m_i, E^m_k, E^m comme nous avons construit sur X_0 les Q^0_i, E^0_k, E^0. Seulement Ψ'_m (avec l'élément ajouté y_{m-1}) remplace Ψ_0 et η_m remplace η_0. Si $j \in \rho_m$ et $j > 3\eta_{m'}$, $l(j . E^m_1) > j/3$.

Pour passer de cette figuration à celle de E^m sur L_m, et qui sera K'_m, nous imprimons à E^m_k la translation $(k-1)\, l_m$, amenant cet ensemble sur ρ^k_m; $t_m \in E^m_k$ devient $v_m = t_m + (k-1)\, l_m \in \rho^k_m$; K'_m est ainsi constitué. S^1_m sera l'ensemble de période l_m sur L_m et identique à P^1_m sur ρ_m.

Enfin, v et v_m croissant conjointement, la relation $v_m = v - \mu_{m-1}(v)$ inversée, définissant v en v_m, change K'_m sur L_m en K_m sur L. Sur L, K_m (K'_m sur L_m) et $K = \Sigma K_m$ représentent $\xi'_m = V_m - \psi_m$ et $\xi' = \Sigma \xi'_m = V - \psi$; $a(\psi) = 0$ [des points communs à deux ou plusieurs V_n peuvent ne pas appartenir à tous les ψ_n correspondants, avoir un représentant sur l'un des K_n et non sur d'autres : $\psi \subset \Sigma \psi'_m$, sans égalité nécessaire]. Si $E \subset K$, et $e \subset V - \psi$, E et e se correspondant, $a(e) = l(E)$.

S^1_m n'est pas nécessairement disjoint de y'_{m-1}. La substitution de v à v_m amène S^1_m de L_m en s'_m éventuellement joint à Y_{m-1}. Soit $S = \Sigma s'_m$.

Soit $\mu(v)$ la longueur de K sur l'intervalle $(0, v)$ et $Z = L - K$. Je dis que $l(Z) = 0$ ou $\mu(v) = v$.

Sinon, il existerait sur L un intervalle $J(a, b)$ tel que, si $a - \mu(a) = c$, $b - \mu(b) = d$, $d - c = \delta$ serait positif. Sur L_m, soit $J_m(a_m, b_m)$ l'homologue de $J(a, b)$ sur L;

$$a_m = a - \mu_{m-1}(a) = c + \sum_{i \geq m} l_i(a); \qquad b_m - a_m = \delta + \sum_{i \geq m} [l_i(b) - l_i(a)]; \qquad l(J_m) > \delta;$$

$$l_i(b) - l_i(a) = l(J . K_i) = l(J_i . K'_i);$$

Soit p tel que : 1° $3\eta_p < \delta$; 2° si $i > p$, $l_i > b$. Alors $J_i \subset \rho^0_i$, et sur J_i, K'_i est identique à E^i_1. D'après $l(J_i) > \delta > 3\eta_p > 3\eta_i$, $l(J_i . E^i_1) > J_i/3 > \delta/3$.

Si $m > p$, $l(J_m)$ est la somme d'une série infinie dont tous les termes surpassent $\delta/3$. Donc $\delta = 0$ et $\mu(v) = v$, $l(L - K) = 0$; K est une plénitude de L.

Un intervalle $J(a, b)$ de L, ou plutôt $J . K$, représente la réunion de ce que représentent les $J.K_m$, donc aussi les $J_m.K'_m$ de L_m; cette représentation est pareille à celle de $J_0.K'_0$ dans V_0. Notons que :

1° Dès $l_m > l(J) = b - a$, J_m ne peut empiéter que sur deux ρ_m^k, ρ_m^{k+1} consécutifs. J_m contient en ce cas une portion de S_m^1, donc représente des $c_n^1.E_k^m$, $c_n^1.E_{k+1}^m$ s'accumulant à l'infini dans toutes les directions. Dans les applications du théorème de Vitali aux ensembles $i.c.\varphi$ (φ étant la longueur pour les J), ceux-ci ne changent pas si l'on se borne aux $l(J)$ inférieurs à un même nombre, qui sera ici le plus petit des l_m.

2° Si $l_m > b$, J_m est intégralement contenu dans ρ_m; $a_m = \alpha_m$, $b_m = \beta_m$; $J_m \equiv j_m(\alpha_m, \beta_m) \subset \rho_m^0$; $J_m.K'_m = j_m.E_1^m$.

Si J contient une partie de S^1, donc d'au moins un s'_m, la représentation de V sur J contiendra autant de familles de $c_n^1.E_k^m$ s'éloignant à l'infini dans toutes les directions.

Application du théorème de Vitali dans l'espace V. — Sur V, plus précisément sur $V - \psi$, soit H' un ensemble quelconque d'aire finie $a(H')$. Nous pouvons le prendre partout épais sur V, donc dans U_3. Dans K il lui correspond un ensemble η' de longueur $l(\eta') = a(H')$, partout épais sur L; ε_p étant un nombre tendant vers zéro en décroissant, soit σ_p une famille d'intervalles disjoints i_n^p ($n \geqq 1$), contenant η' et vérifiant $\sum_n l(i_n^p) < l(\eta') + \varepsilon_p$; Soit $\chi(\sigma_p)$ la famille des intervalles j dont chacun est contenu dans un i_n^p, mais surpasse en longueur $\varepsilon_p i_n^p$; $\chi(\sigma_p)$ ne couvre $i.\varphi$ (φ = longueur) aucun point. Soit $\chi = \Sigma\chi(\sigma_p)$; χ couvre $i.\varphi$ un ensemble η vérifiant $l(\eta) = l(\eta')$ et qui, réduit à sa partie située sur K, contient η'.

Dans ξ' soit P la famille des ω représentés dans les j de χ et H représenté par η. Pour chacun des j de χ plaçons sur $j.K$ un ensemble fermé f et, dans ξ', soit G la famille des γ représentés par les f.

H est couvert, à un ensemble d'aire nulle près, par une famille d'ensembles γ_i disjoints et pris dans G.

Les théorèmes sont les mêmes pour la dérivation des fonctions d'ensemble sur V ou d'intervalles sur L, aux points de H ou de η, par rapport aux aires de G ou aux longueurs des j de g.

$S^1 = \Sigma s'_m$ est dense en lui-même. Son dérivé $\bar{S}^{1-}$ est parfait à distance finie. S'il est de longueur nulle, on pourra le supposer intégralement situé sur η'. S'il a une longueur finie ou infinie, on pourra prendre un η' sur lequel S^1 est partout dense. Selon le cas, certains γ, ou bien tous, contiendront chacun une partie s'accumulant à l'infini dans toutes les directions.

Je voudrais que le lecteur convînt avec moi des points suivants :

1° Les hypothèses et la démonstration du théorème de Vitali sous la forme que je lui ai donnée, sont simples.

2° La puissance de sa validité se prouve par la richesse de complexité offerte par les cas où il s'applique.

C'est bien le *vrai* théorème de Vitali (à noter l'extension de Banach) ([2]).

Enfin, contrairement à l'erreur des dogmatiques, la topologie n'a rien à voir dans les questions métriques. La topologie échange le presque partout métrique et le presque nulle part, le mesurable et le non-mesurable.

(*) Séance du 4 décembre 1963.
([1]) *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 3071.
([2]) W. J. Trjitzinsky a tiré du théorème d'intéressantes conséquences.

(*Département de Mathématiques, Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 1er.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.257, 1963, p.3755-3761.

FONCTIONS SPÉCIALES. — *Probabilités confirmant l'hypothèse de Riemann sur les zéros de* $\zeta(s)$. Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**, Membre de l'Académie.

Conclusions tirées d'une forme donnée au développement de $\zeta(2s)/\zeta(s)$.

Riemann a étudié la fonction

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Dans ces formules, n prend toutes les valeurs entières positives et p la suite des nombres premiers. Si $s = \sigma + it$, σ et t étant réels, la série et le produit infini convergent absolument pour $\sigma > 1$.

Le grand intérêt de cette fonction est de nous éclairer sur la mystérieuse dispersion des nombres premiers au milieu des nombres naturels. Peut-être le plus grand titre mathématique d'Hadamard fut-il de tirer de la fonction $\zeta(s)$ la valeur approchée $k \log k$ pour le $k^{\text{ième}}$ des nombres premiers rangés par valeurs croissantes. On peut admettre que les progrès dans la connaissance de $\zeta(s)$ en préparent d'autres dans la connaissance de la répartition présentée par les nombres premiers.

$\zeta(s)$ est une fonction entière dont les zéros réels sont les entiers négatifs pairs, les zéros imaginaires étant dans la bande $0 < \sigma < 1$. L'hypothèse célèbre de Riemann est qu'ils se trouvent tous sur la droite $\sigma = 1/2$.

La fonction $\zeta(2s)$ a pour zéros réels tous les entiers négatifs et ses zéros complexes sont dans la bande $0 < \sigma < 1/2$. Il s'ensuit que la fonction $g(s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$ a pour seules singularités pour $\sigma \geqq 1/2$ les zéros de $\zeta(s)$ situés dans la bande $1/2 \leqq \sigma < 1$. Ce seront des pôles de même ordre pour $g(s)$. L'hypothèse de Riemann équivaut à celle de la régularité de $g(s)$ pour $\sigma > 1/2$.

Or

$$g(s) = \prod (1 + p^{-s})^{-1} = \sum \mu(n)\, n^{-s},$$

n prenant toutes les valeurs entières positives et $\mu(n)$ étant $+1$ ou -1 selon que dans la décomposition de n en facteurs premiers, le nombre de ceux-ci est pair ou impair. En outre, $\mu(1) = 1$.

Posons $\Delta(n) = \sum_{1}^{n} \mu(i)$.

$$g(s) = \sum_{1}^{\infty} \Delta(n)\,[n^{-s} - (n+1)^{-s}] \sim s \sum \Delta(n)\, n^{-1-s},$$

$$|s|^{-1}\,|g(s)|\leq\sum|\Delta(n)|\,n^{-1-\sigma}.$$

Il suffirait donc de prouver que $\overline{\lim\limits_{n\infty}}\log\Delta(n)/\log n = 1/2$ (l'inégalité $< 1/2$ est impossible) pour que l'hypothèse de Riemann soit justifiée.

Supposons que le hasard fasse indifféremment sortir successivement les $\nu(i)$ pour $1\leq i\leq n$, avec les valeurs $+1$ ou -1, et cherchons le champ des valeurs probables de la somme $d(n)=\sum\limits_1^n\nu(i)$.

Évidemment, le hasard joue d'autant moins de rôle dans la venue de $\mu(n)$ que celui-ci est très simplement déterminé par les $\mu(i)$ antérieurs : Si $n=ab$, $\mu(n)=\mu(a)\,\mu(b)$. Si n n'a pas de diviseurs, $\mu(n)=-1$. La suite $\mu(an)$ est identique, soit à la suite $\mu(n)$, soit à la suite $-\mu(n)$, quel que soit a entier.

Si $\Delta_a(n)$ désigne $\sum\limits_1^n\mu(i)$ pour i/a non entier et $i\leq n$,

$$\Delta(ab)=\Delta_a(ab)+\mu(a)\,\Delta(b).$$

$[\Delta(n+p)-\Delta(n)]/p$ tend vers zéro, avec $1/n$, etc.

Plaçons-nous dans l'hypothèse du hasard ([1]). Un système de n objets est décomposé en deux groupes de $n-k$ et de k éléments $(0\leq k\leq n)$. A ceux du premier groupe on donne la valeur $+1$ et la valeur -1 à ceux du second groupe. $d(n)=n-2k$ est la valeur de l'ensemble; $d(n)$ a la parité de n et va de $-n$ à $+n$.

Soit q vérifiant $0\leq q\leq n$, q ayant en outre la parité de n. Il est aisé d'obtenir la probabilité $P(n, q)$ pour que $|d(n)|=q=|n-2k|$. $P(n, q)$ est le double de $2^{-n}C_n^{n-k}$, les C étant les coefficients de la formule du binome. Distinguons selon la parité de n. Soit d'abord n pair. Avec $0\leq r\leq n$, et $q=2r$,

$$\frac{1}{2}P(2n, q)=2^{-2n}C_{2n}^{n+r}.$$

D'après

$$C_{2n}^{n+r}=\frac{(2n)!}{(n+r)!\,(n-r)!},$$

l'approximation $m!=(m/e)^m\sqrt{m}$ (à un facteur près tendant vers $\sqrt{2\pi}$ quand m croît) et $\sqrt{n/(n^2-r^2)}>1/2$ pour $r\leq n-1$:

$$2^{-2n}C_{2n}^{n+r}<\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-n-r}\left(1-\frac{r}{n}\right)^{-n+r};$$

$(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)-x^2$ est croissant pour $0<x<1$.

En conclusion,

$$P(2n, q)<e^{-\frac{r^2}{n}}=e^{-\frac{q^2}{2.2n}}.$$

Remplaçant r par $r+(1/2)$, n par $n+(1/2)$, q étant $2r+1$, on trouverait la borne analogue

$$P(2n+1, q) < e^{-\frac{q^2}{2(2n+1)}}.$$

Donc, indépendamment de la parité de n,

$$P(n, q) < e^{-\frac{q^2}{2n}}.$$

Telle est, légèrement majorée, la fréquence des associations des

$$\nu(i) = \pm 1, \quad \text{pour lesquelles} \quad |d(n)| = q.$$

Soit $h < n$, $n-h$ étant pair. La fréquence $Q(n, h)$ des associations de n éléments pour lesquelles $|d(n)| > h$ est inférieure à $\int_h^\infty e^{-q^2/2n} dq$. Si $f(x)$ est infiniment grand avec x, Borel nous a enseigné à évaluer $\int^x e^{f(x)} dx$ par $(1/f')\, e^f$ si $d/dx\,(1/f')$ tend vers zéro. Donc

$$Q(n, h) < \frac{n}{h} e^{-\frac{h^2}{2n}}.$$

Faisons l'hypothèse que les $\mu(n)$ sont répartis en $+1$ et -1 comme au hasard. Quelle est la probabilité pour que

$$|\Delta(n)| > \sqrt{kn \log n}\ ?$$

Ce sera :

$$\text{pour } k > 1 : \quad \sqrt{\frac{1}{n^{k-1} \log n}}.$$

Si $k > 3$, la probabilité pour que $\Delta(m) > \sqrt{km \log m}$ pour au moins une valeur de $m \geqq n$ est infiniment petite avec $1/n$ à l'ordre $(n^{k-3} \log n)^{-1/2}$.

Dès lors, la probabilité que, pour infinité de n, on trouve

$$|\Delta(n)| > (kn \log n)^{\frac{1}{2}}$$

est nulle, et la probabilité de

$$|g(s)| > \sqrt{k \log n}\; n^{-\sigma-\frac{1}{2}}$$

est nulle, σ s'approchant de $1/2$. Soit $\sigma = (1/2) + \alpha$; $|g(s)|$ est sensiblement borné par $1/\alpha$.

La probabilité pour que les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ soient sur la droite $\sigma = 1/2$ et qu'ils soient tous simples est égale à 1.

Avec une limitation moins précise, si $0 < \varepsilon < 1$, la probabilité pour que $|\Delta(n)| < (2n^{1+\varepsilon})^{1/2}$ est inférieure à $n^{(3-\varepsilon)/2} e^{-n^\varepsilon}$. On multiplie par $n^{1-\varepsilon}$ pour la probabilité de $|\Delta(m)| > m^{(1+\varepsilon)/2}$ pour au moins une valeur de $m \geqq n$.

Je n'ose imaginer que par le biais d'une étude approfondie de la fonction $\Delta(n)$ on puisse triompher de l'énigme posée par Riemann. Mais la vraisemblance de son hypothèse en est confirmée.

(*) Séance du 2 novembre 1964.
(1) J'ai déjà tiré parti de cette idée (*Un demi-siècle de Notes aux Académies*, I, p. 37).

(*Institut Henri-Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 6e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.259, 1964, p.3143-3145.

MESURE. — *Les degrés de nullité dans la mesure des ensembles parfaits linéaires.* Note de M. ARNAUD DENJOY, Membre de l'Académie.

Le degré (fini) de nullité métrique d'un ensemble parfait linéaire P a pour valeur $(p-1)$ à une unité près par défaut si p est le plus petit entier tel que, les x_i étant p nombres variant indépendamment sur P et les a_i étant p coefficients non nuls indépendants des x_j, l'ensemble $\sum a_i x_i$ contient au moins un segment. Relation entre p et les coefficients des segments isolants de P.

1. La notion d'ensemble de mesure nulle a joué un grand rôle dans l'œuvre de Borel. Il l'a rencontrée pour la première fois dans le champ linéaire avec les séries de fractions rationnelles. Il en a déduit la notion de longueur des ensembles linéaires. Ensuite, dans sa théorie des fonctions quasi monogènes, il a été conduit à considérer des degrés dans la nullité de l'aire des singularités présentées par ces fonctions.

Borel s'est plus tard [1] occupé de distinguer aussi des degrés dans la nullité de la longueur des ensembles parfaits linéaires (et naturellement totalement discontinus). Mais il a rattaché ces inégalités à l'énumération des intervalles contigus de l'ensemble et en rapportant ce degré de nullité à la rapidité de convergence de la série de ces contigus.

Soient ab le segment mineur contenant l'ensemble parfait P, et $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ ses intervalles contigus énumérés par ordre de grandeur non croissante. $\Sigma u_n = b - a$. Si du segment ab on retranche les intervalles $u_1, \ldots, u_n$, P se trouve porté par $n+1$ segments (que j'appelle *isolants*) dont la longueur totale est

$$b - a - \sum_{1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_k.$$

Il est naturel d'admettre que la rapidité avec laquelle ce reste tend vers zéro caractérise le degré de nullité de la longueur de P.

Mais la disposition géométrique de l'ensemble P reste très indéterminée pour une suite donnée u_n. Effectuons sur les indices n une permutation (que j'ai appelée élémentaire) de même type ordinal que la suite naturelle des entiers. A $v_m = u_n$ faisons correspondre le point dyadique $\xi_m = (2h+1)2^{-k}(0 \leqq h \leqq 2^{k-1}-1)$ si $m = 2^{k-1}+h$, et disposons entre eux les intervalles v_m sur l'intervalle ab comme le sont les points ξ_m sur l'intervalle $(0,1)$; v_m prend la position $a_m b_m$, si (en utilisant les notations de mon *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*),

$$a_m - a = (0\Sigma\xi_m)v_p \qquad \text{et} \qquad b - b_m = (\xi_m\Sigma 1)v_q.$$

Le segment isolant ρ de P étant limité par les contigus v, w (finis ou infinis), j'appelle *coefficient d'isolement* de ρ pour P, le plus petit des deux nombres v/ρ, w/ρ. Il est évident qu'on peut, si lentement que la série Σu_n converge, placer les v_m de façon que les coefficients d'isolement soient non bornés au voisinage de tout point de P.

2. M. Fréchet vient d'attirer mon attention sur cet ordre de questions, rencontrées par Borel dans ses études de probabilités.

Dès 1920, au cours de mes recherches pour l'intégration de la dérivée seconde symétrique, j'avais été conduit à distinguer entre les ensembles parfaits linéaires de longueur nulle. A la suite de la communication de Borel en 1948 j'ai publié aux *Comptes rendus* (²) plusieurs Notes où j'énonçais de nombreux résultats dont j'étais en possession depuis longtemps. Mais elles contenaient implicitement aussi la définition des degrés de nullité métrique, finis toutefois du point de vue de Borel. Je vais en élucider le sens.

Ma classification repose sur les propriétés géométriques de l'ensemble parfait autour de chacun de ses points, sur chacune de ses portions. Elle est en effet fondée sur la borne supérieure des coefficients d'isolement.

Si ce coefficient est toujours au plus égal à 1 (espèce A) l'ensemble $|y-x|$ $(x, y \in P)$ est identique au segment ab. (Congrès de Strasbourg septembre 1920; *Acta dei Lincei*, p. 230-239 dans *Un demi-siècle...*). Si P et P′ sont de l'espèce A, et si $x \in P$, $y \in P'$, l'ensemble $|y-x|$ est formé d'un nombre fini de segments. Aussi l'ensemble $cx+dy$ (c et d indépendants de x, y).

Considérons l'ensemble parfait Q_1 de Cantor, soit $x = \Sigma 2a_n.3^{-n}$ $(n \geqq 1, a_n = 0 \text{ ou } 1)$. Il est de l'espèce A. L'ensemble $(x+y)/2$ est identique au segment $(0,1)$, Q_1 reste invariable par le changement de x en $1-x$; $(x-y)/2$ forme le segment $(-1/2, 1/2)$ et $|y-x|$ est le segment $(0,1)$.

L'ensemble Q_p des points $x = \sum_n pa_n(p+1)^{-n}$ a pour extrémités 0 et 1. Si $x_i \in Q_p (i, = 1, \ldots, p)$, l'ensemble $(1/p)(x_1+\ldots+x_p)$ est identique au segment $(0,1)$. L'ensemble $(1/p)(-x_1-x_2-\ldots-x_k+x_{k+1}+\ldots+x_p)$ est le segment $-(k/p)$, $(p-k)/p$. Je laisse au lecteur le soin de rechercher si l'ensemble $\Sigma a_i x_i$ forme un nombre fini de segments pour tout système $|a_i| > 0$.

Disons qu'un segment isolant ρ est *principal* si tous les contigus intérieurs à ρ sont inférieurs en longueur aux contigus u, v bordant ρ. Si ρ n'est pas principal et si l'on en retranche les contigus au moins égaux au plus petit de u et de v, il reste des segments principaux.

Les coefficients d'isolement des segments principaux sont $(p-1)/1$ pour l'ensemble x_1, $(p-2)/2$ pour l'ensemble $x_1 + x_2$, $(p-k)/k$ pour $x_1 + \ldots + x_k$ si $x_i \in Q_p$, $k \leqq p-1$). Ces ensembles sont totalement discontinus.

Nous dirons qu'un ensemble parfait P est de *genre* $p-1$ s'il existe p nombres $a_i(|a_i| > 0)$, $\Sigma|a_i| = 1$, tels que l'ensemble P^p, savoir $\Sigma a_i x_i$ contienne un segment, tandis que l'ensemble P^{p-1} n'en contient aucun, quels que soient les a_i. Le lecteur pourra rechercher si tout ensemble parfait dont les coefficients d'isolement sont au plus égaux à p est de genre p au plus. Et encore si, P et P′ étant de genre $p-1$ et $x \in P$, $y_j \in P'$, l'ensemble $(\Sigma a_i x_i + \Sigma b_j y_j)$ $(i = 1, \ldots, k,\ \ j = k+1, \ldots, p)$, contient un segment pour tous systèmes où a_i et b_j non nuls.

Si P n'est pas de genre p, mais de genre $p+1$, on peut tenter de trouver pour P un *ordre* précisé. Cet ordre sera compris entre (p, r) et $(p, r+1)$ si, x décrivant P^{p+1} et y parcourant Q_{p+r}, l'ensemble $x+y$ contient un segment, tandis que, si r est augmenté d'une unité, il n'en est plus ainsi. On peut pour suivre, définir un ordre compris entre $(p, r_1, r_2, \ldots, r_k)$ et $(p, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, r_k + 1)$.

On trouvera des méthodes de raisonnement et des notions utiles dans mes Notes des *Comptes rendus* (*Un demi-siècle*..., p. 240-248) et au second fascicule de mes *Leçons sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques*.

(1) *Comptes rendus*, 227, 1948, p. 103 et 453.
(2) *Un demi-siècle de Notes aux Académies*, p. 230.

(*Institut Henri Poincaré,*
11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.259, 1964, p.4449-4451.

THÉORIE DES NOMBRES. — *La nature du développement des nombres réels en fraction continue.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**, Membre de l'Académie.

L'auteur démontre, pour une première part, les propriétés, antérieurement admises ou présumées, des fonctions étendant au champ complexe certaine fonction réelle $\varkappa(x, \alpha)$ associée au développement en fraction continue du nombre réel x. Ainsi se trouvent éclairées la genèse de ce développement et les caractères de $\varkappa(x, \alpha)$.

1. p, q, p', q' étant quatre entiers vérifiant $pq'-qp'=\varepsilon$, avec $\varepsilon^2=1$ (les fractions p/q, p'/q' sont dites *adjacentes*), nous considérons la substitution $x'=\mathrm{S}(x)=(px+p')/(qx+q')$ et son inverse

$$\mathrm{S}^{-1}(x)=\frac{-q'x+p'}{qx-p}.$$

Il se manifeste une réciprocité entre p/q et $-q'/q$. En changeant tous les signes au besoin, nous supposons q non négatif. Les cas de $q=0$, $q=1$ sont sans intérêt; et, de même, $p=\pm 1$, $q'=\pm 1$. Choisissant la parité de m de façon que $(-1)^m=\varepsilon$, nous développons p/q en fraction continue *normale* de $m+1$ termes :

$$\frac{p}{q}=(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m)=a_0+\frac{1}{(a_1, a_2, \ldots, a_m)};$$

les a_i sont entiers, a_0 quelconque, mais $a_i \geqq 1$ si $i \geqq 1$.

La réduite R_k étant $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)=\mathrm{P}_k/\mathrm{Q}_k$:

$$p=\mathrm{P}_m, \qquad q=\mathrm{Q}_m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_m\mathrm{Q}_{m-1}-\mathrm{Q}_m\mathrm{P}_{m-1}=(-1)^{m+1}=-\varepsilon.$$

Soient b_0 et q_1 entiers définis par : $-q'=qb_0+q_1$ et $1 \leqq q_1 < q$. Il s'ensuit $p'=-pb_0-p_1$, et $pq_1-qp_1=-\varepsilon$, d'où résulte

$$p(\mathrm{Q}_{m-1}-q_1)=q(\mathrm{P}_{m-1}-p_1) \qquad \text{et} \qquad q_1=\mathrm{Q}_{m-1}; \qquad p_1=\mathrm{P}_{m-1},$$
$$-q'=\mathrm{Q}_m b_0+\mathrm{Q}_{m-1}; \qquad p'=-\mathrm{P}_m b_0-\mathrm{P}_{m-1}.$$

Rappelons $\mathrm{P}_0=a_0$, $\mathrm{Q}_0=1$ et $\mathrm{P}_{-1}=1$, $\mathrm{Q}_{-1}=0$,

$$-\frac{q'}{q}=b_0+\frac{\mathrm{Q}_{m-1}}{\mathrm{Q}_m}=(b_0, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1).$$

h et k étant deux entiers non négatifs liés par la relation $h+k=m+1$, soit $\mathrm{O}_h=\mathrm{M}_h/\mathrm{N}_h=(b_0, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_{k+1}, a_k)$ la réduite de rang h de $-q'/q$; $\mathrm{M}_{-1}=1$, $\mathrm{N}_{-1}=0$; $\mathrm{M}_0=b_0$, $\mathrm{N}_0=1$.

Évaluons $\mathrm{S}(\mathrm{O}_h)=\mathrm{G}_h/\mathrm{K}_h$: $\mathrm{G}_h=p\mathrm{M}_h+p'\mathrm{N}_h$, $\mathrm{K}_h=q\mathrm{M}_h+q'\mathrm{N}_h$,

$$\mathrm{G}_{-1}=\mathrm{P}_m, \qquad \mathrm{K}_{-1}=\mathrm{Q}_m; \qquad \mathrm{G}_0=\mathrm{P}_m b_0-(\mathrm{P}_m b_0+\mathrm{P}_{m-1})=-\mathrm{P}_{m-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_0=-\mathrm{Q}_{m-1}.$$

D'après $M_h = a_k M_{h-1} + M_{h-2}$, $N_h = a_k N_{h-1} + N_{h-2}$,

$$G_h = a_k G_{h-1} + G_{h-2}, \qquad K_h = a_k K_{h-1} + K_{h-2}.$$

Dès lors, compte tenu de $a_k = a_{n-h+1}$, on établit par récurrence

$$G_h = (-1)^{h+1} P_{k-2}, \qquad K_h = (-1)^{h+1} Q_{k-2}, \qquad S(O_h) = R_{k-2},$$

ou $S(O_{h+1}) = R_{k-1}$. Et $S^{-1}(R_{k-1}) = O_{h+1}$. En résumé : *Les nombres rationnels p/q et $-q'/q$ $(pq'-qp' = \pm 1)$ étant développés en fraction continue, la substitution $(px+p')/(qx+q')$ appliquée aux réduites de $-q'/q$ donne les réduites de p/q.*

2. L'étude la plus élémentaire des fractions continues conduit à introduire la fraction $1/0$, afin que, dès la réduite R_1, on ait $P_1 = a_1 P_0 + P_{-1}$, $Q_1 = a_1 Q_0 + Q_{-1}$. Les réduites intermédiaires s'introduisent également d'elles-mêmes. Entre R_{k-1} et R_k, ce sera la succession $(a_0, \ldots, a_{k-1}, 1)$, $(a_0, \ldots, a_{k-1}, 2)$, $\ldots$, $(a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1)$.

J'ai défini jadis une fonction $\varkappa(x, \alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ dont les propriétés mettent en évidence pour tout nombre réel, même rationnel, une forme de développement en fraction continue, infini bilatéralement et où la réduite $1/0$, les réduites intermédiaires, se présentent toutes à leur rang, le développement normal apparaissant ainsi comme une contraction de ce développement complet. Si l'on pose $(n \geqq 0)$:

$$\sigma_n = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2p} \quad (2p \leqq n), \qquad \sigma'_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2q+1} \quad (2q+1 \leqq n),$$

$$\varkappa(x, \alpha) = \sum_0^\infty (-1)^n \alpha^{\sigma_n} (1-\alpha)^{\sigma'_n}.$$

Le développement converge pour $|\alpha| \leqq 1$ et $|1-\alpha| \leqq 1$ à la fois, sauf pour $|\alpha| = |1-\alpha| = 1$. M. Paul Lévy trouve que la série n'est alors sommable par aucun procédé indépendant de x (alors $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$).

La fonction réelle $\varkappa(x, \alpha)$ et son extension $F(z, \alpha)$ au plan complexe ont fait de ma part l'objet d'une étude détaillée et de plusieurs Notes à notre Académie. Elles ont été reproduites, la première et les secondes, respectivement dans les volumes *Articles et Mémoires* et *Un demi-siècle de Notes aux Académies* (suivies d'*Observations*), désignés ci-après par les abréviations A. M. pour le premier, N. A. (ou N. A., *Obs.*) pour le second.

On trouve l'étude (1936) dans A. M., p. 925-971 (les transformations linéaires de la fonction réelle) et les Notes dans N. A., p. 177-198 et *Obs.*, p. 46-51 (Notes de 1932, 1934 et trois de 1956). La Note de 1934 annonçait déjà, mais sans démonstrations, les principales conclusions de la théorie. Même après les Notes de 1956, beaucoup de points restaient à préciser, à justifier. Tel est l'objet de la présente et de celle qui la suivra.

On part de la fonction F définie uniquement et progressivement sur l'ensemble des nombres rationnels, verifiant d'abord $F(1/0) = 0$, $F(0/1) = 1$, et poursuivant par la condition que $F[(p+p')/(q+q')]$ divise dans le rapport de α à $1-\alpha$ l'intervalle de $F(p/q)$ à $F(p'/q')$; p, p', q, q' sont entiers, $q \geqq 0$, $q' \geqq 1$ et $p/q > p'/q'$, p/q et p'/q' étant adjacentes avec $pq' - qp' = 1$. $(p+p')/(q+q')$ est leur *médiante*. Étendue par continuité aux x irrationnels la fonction est notée $\varkappa(x, \alpha)$. En chaque point x elle a des caractères différentiels singuliers. Sa dérivée est zéro sur une plénitude et elle ne peut pas avoir une dérivée finie non nulle (A. N., p. 196-198), mais sa propriété capitale, dévoilant une genèse du développement en fraction continue normale, est d'être changée linéairement par toute substitution $x' = S(x) = (px+p')/(qx+q')$ du groupe de Schwartz. En effet, relativement à S, l'axe réel se divise en intervalles $j = j(S)$, limités par des points $\xi = \xi(S)$ s'accumulant uniquement à $-\infty$ et à $-q'/q$ du côté droit, chaque j correspondant à une transformation

$$\varkappa(x', \alpha) = A(j)\,\varkappa(x, \alpha) + B(j). \tag{1}$$

Les ξ sont les réduites du développement $D(x)$, où les quotients incomplets α_k sont uniquement, soit 0, soit 1 ; $(a, 0, b)$ équivalant à $a+b$, $(a, 0, 0, b)$ à (a, b), on passe ainsi du développement normal de x à $D(x)$: a_0 est remplacé par $(a_0 - n, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ (n chiffres 0 et n chiffres 1 alternant, n entier positif quelconque), a_k inchangé si $a_k = 1$, $a_k \geq 2$ remplacé par $(1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ (a_k chiffres 1 séparés par $a_k - 1$ chiffres 0). Enfin, si x est rationnel et vaut $(a_0, \ldots, a_m)$ (m pair), on ajoute le quotient complémentaire $1/0$, mis sous la forme $1, 0, 1, 0, \ldots$, les 1 et les 0 alternant indéfiniment. Si $x = p/q$, et $e = 2\Sigma a_k + m$, e et m ayant la même parité, D (x) prend la forme :

$$\ldots,\ \alpha_{-2n},\ \alpha_{-2n+1}, \ldots,\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{e-1},\ \alpha_e,\ \alpha_{e+2n-1},\ \alpha_{e+2n},\ \ldots \qquad (n > 1,)$$
$$\alpha_{-2n} = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_e = \alpha_{e+2n-1} = 1\,; \qquad \alpha_{-2n+1} = \alpha_{e+2n} = 0.$$

Nous notons encore R_k et P_k/Q_k la réduite $(\ldots, \alpha_k)$. Conventionnellement, $R_{-1} = 1/0$, $R_0 = a_0/1$. Dès lors,

$$R_{-2n+1} = \frac{1}{0}; \qquad R_{-2n} = \frac{a_0 - n}{1}; \qquad R_e = \frac{p}{q} = R_{e+2n}; \qquad R_{e+2n-1} = \frac{np + P_{e-1}}{nq + Q_{e-1}}.$$

Si $\alpha_k = 0$, $R_k = R_{k-2}$. Si $\alpha_k = 1$, R_k est la médiante de R_{k-1} et de R_{k-2}, elles-mêmes adjacentes.

Le développement $D(-q'/q)$ est

$$\ldots,\ \alpha_{e+2n},\ \alpha_{e+2n-1},\ \ldots,\ \alpha_e,\ \ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{-2n+1},\ \alpha_{-2n},\ \ldots$$

Comme plus haut, e remplaçant m, si $h + k = e + 1$, la réduite $O_h = M_h/N_h$ est $(\ldots, \alpha_{k+2}, \alpha_{k+1}, \alpha_k)$. Conventionnellement, $O_{-1} = 1/0$ $O_0 = b_0/1$; $S(O_h) = R_{k-2}$.

Les points ξ séparant les intervalles sur chacun desquels vaut une transformation (1) *sont les réduites du développement* $D(-q'/q)$ (N. A., 1934, p. 181 ; A. M., 1936, p. 955-970 ; N. A. ; *Obs.*, p. 47-50).

Tandis que le développement normal de x s'obtient par cette succession de substitutions antimodulaires, les x_i étant $\geqq 1$: $x = a_0 + 1/x_1$; $x_m = a_m + 1/x_{m+1}$; par contre, les ξ_m vérifiant $0 < \xi_m < 1/0$:

$$x = (a_0 - n,\ 0,\ \xi_{-n}) = a_0 - n + \xi_{-n};$$

$$\xi_m = (0,\ 1,\ \xi_{m+1}) = \frac{\xi_{m+1}}{1 + \xi_{m+1}} \quad \text{si } \xi_m < 1$$

$$\text{et} \quad \xi_m = (1,\ 0,\ \xi_{m+1}) = 1 + \xi_{m+1} \quad \text{si } \xi_m > 1.$$

Pour $\xi_k = 1$, x étant rationnel, $\xi_m = (0,\ 1,\ \xi_{m+1})$ et $\xi_{m+1} = 1/0 = (1,\ 0,\ \xi_{m+2})$.

3. Mais à leur tour, le développement complet $\mathrm{D}(x)$ et la succession de ses réduites, le rôle des intervalles $j(\mathrm{S})^{\mathrm{II}}$ trouvent leur explication quand on crée dans le demi-plan supérieur de la variable complexe z des conditions géométriques permettant l'existence d'une fonction $\mathrm{F}(z, \alpha)$ analytique, uniforme, vérifiant les mêmes transformations fondamentales que $\varkappa(x, \alpha)$ et tendant vers $\varkappa(x, \alpha)$ quand z tend vers x. (*Voir* A. N., p. 183-195, avec les figures, p. 184, 185, 186, 192).

Au groupe fuchsien de Schwartz correspond une décomposition de II en quadrilatères (nous adoptons le langage de Poincaré en géométrie non euclidienne), congrus à Q_0 de sommets ∞, $-1 + \theta$, i, $\theta = (1 + i\sqrt{3})/2$. Les substitutions fondamentales correspondantes sont : pour ∞ : $z + 1$, parabolique, pour i : $-1/z$, involutive simple; pour θ : $(z - 1)/z$, involutive double, avec les transformations de F

$$\mathrm{F}(z + 1, \alpha) = \alpha\, \mathrm{F}(z, \alpha); \qquad \mathrm{F}\left(-\frac{1}{z}, \alpha\right) = (1 - \alpha)\, \alpha^{-2}\, \mathrm{F}(z, \alpha) + 1;$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{z - 1}{z}, \alpha\right) = (1 - \alpha)\, \alpha^{-1}\, \mathrm{F}(z, \alpha) + \alpha.$$

Mais ces dernières transformations ne sont involutives, ni la première simple, ni la seconde double, sauf dans l'hypothèse rejetée $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$; $\mathrm{F}(z, \alpha)$ n'est pas uniforme autour des points i, θ. Quelle que soit la substitution $z' = \mathrm{S}(z) = (pz + p')/(qz + q')$ appartenant au groupe de Schwartz, $\mathrm{S}(i)$, $\mathrm{S}(\theta)$ sont les points doubles des involutions définies par $\mathrm{S}(z') = \mathrm{S}(-1/z)$, $\mathrm{S}(z') = \mathrm{S}(1 - 1/z)$. Donc un système Ω de coupures joignant tous ces points à l'axe réel est nécessaire pour uniformiser $\mathrm{F}(z, \alpha)$.

Les quadrilatères possédant un même sommet réel $1/0$ ou r/s forment une alvéole $\mathrm{A}(1/0)$, $\mathrm{A}(r/s)$, décomposant II, et limitée par une ligne brisée $\mathrm{A}(1/0)$, $\Lambda(r/s)$ d'une infinité de côtés pseudo-rectilignes. Les sommets de $\Lambda(1/0)$ sont $n - 1 + \theta$, $n + i$, $n + \theta$, etc. $\mathrm{A}(1/0)$ reste invariante par la substitution $z + m$ (m entier). Si $rs' - sr' = 1$, la substitution $(rz + r')/(sz + s')$ change $\Lambda(1/0)$ en $\mathrm{A}(r/s)$. Pour préciser la correspondance, nous prenons $r' = -r_1$, $s' = -s_1$, r/s étant la médiante de r_0/s_0 inférieure et de r_1/s_1 supérieure. La substitution ainsi choisie sera notée $S(r/s, z)$ (ni r_0/s_0 ni r_1/s_1 n'existent pour $r/s = 1/0$). Le segment $\gamma_n(n-1+0, n+0)$ de $\Lambda(1/0)$ est partagé par $n+i$ en deux côtés se prolongeant. Sur $\Lambda(1/0)$ nous distinguons : Δ partie négative arrêtée à i, $\rho(0-1, i)$ et $\delta(i, 0)$ décomposant γ_0; γ_1; enfin Δ' partie positive à partir de $0+1$. Nous précisons en $\Lambda_0(r/s)$ la transformée de $\Lambda(1/0)$ par $S(r/s, z)$; Δ est changé en $L(p/q)$, terminé par le point $S(r/s, i)$; $\rho(0-1, i)$ en $l(p/q)$, dernier côté de $L(p/q)$; $\delta\ (i, 0)$ en $\sigma(r/s)$, terminé par $\nu(r/s) = S(r/s, 0)$; $\gamma_1(0, 0+1)$ en $g(p/q)$; Δ' en $L'(p/q)$.

4. *Les lignes* $L(p/q)$ *seront les coupures constituant le système* Ω *uniformisant* $F(z, \alpha)$. *Nous devons prouver* (ce que nous nous étions précédemment borné à admettre) *que* Ω *ne divise pas* Π; $\Pi - \Omega$ sera une région (connexe) ayant pour frontière l'axe réel et Ω.

La zone comprise entre $\Lambda(1/0)$ et la droite euclidienne $c(1/0)$, savoir $z = i/2 + t$ (et même $i\sqrt{3}/6 + t$, t réel) est entièrement couverte par les alvéoles $A(n/1)$. Donc Ω ne figure au-dessus de cette droite que par la partie terminale des $L(n/1)$; $\Lambda(1/0)$ a pour partie commune avec $\Lambda(n/1)$ le seul double côté $\gamma_n(n-1+0, n+0)$ se décomposant en $\sigma(n/1)$, savoir $(n-1+0, n+i)$ et $l(n/1)$, $(n+i, n+0)$. Il en est ainsi même pour $n \leqq 0$, alors que les γ_n (leurs moitiés gauches) sont sur Δ qui, dans $\Lambda_0(r/s)$ correspond à $L(r/s)$.

Pareillement $A(r/s)$, $\Lambda(r/s)$ sont intérieurs au cercle euclidien tangent en r/s à l'axe réel et passant par le point $S(r/s, i/2)$. En outre, la région comprise entre ce cercle et $\Lambda(r/s)$ est entièrement couverte par les $A(f_n)$ en posant $f_n = S(r/s, n) = (nr - r_1)/(ns - s_1)$; f_n étant la médiante de $f_{n.0}$ et de $f_{n.1}$, $f_{n.1} = f_{n+1}$ pour $n \leqq -1$ et $f_{n.1} = r/s$ si $n \geqq 2$; $f_0 = r_1/s_1$ et $f_1 = r_0/s_0$, les indices de f_0 et f_1 n'ayant donc pas le sens habituel; r_0/s_0 est la médiante de $r_{0.0}/s_{0.0}$ et de $r_{0.1}/s_{0.1}$, etc. A l'intérieur de $c(r/s)$, Ω est composé uniquement de $L(r/s)$ en totalité et des parties terminales des $L(f_n)$. Pour montrer que Ω ne divise pas Π, nous devons prouver que $L(r/s)$ est disjoint des $L(f_n)$ et que $\sigma(r/s)$ est étranger à Ω; $\sigma(r/s)$ appartenant au seul $\Lambda(f_0)$, il suffit d'établir que $\sigma(r/s)$ est disjoint de $L(f_0)$. Or $\sigma(r/s)$ est $S(r/s, z) = S(r_1/s_1, u)$ z décrivant $\gamma_0(-1+0, 0)$ et u un certain double côté de $\Lambda(1/0)$.

Soit $a \geqq 2$ entier, vérifiant $s = as_1 - s_{1.1}$. Donc

$$r = ar_1 - r_{1.1}; \qquad rz - r_1 = r_1 az - 1) - r_{1.1} z.$$

Donc $u = a - 1/z$; u décrit γ_a, situé sur Δ'; $\sigma(r/s)$, et aussi $l(r/s)$, sont sur $L'(r_1/s_1)$, donc étrangers à $L(r/s)$; $\sigma(r/s)$ est étranger à Ω. C'est le *seuil* de $A(r/s)$. D'après $s > s_1 > s_{1.1}$, etc., on entre dans $A(r/s)$ venant de $A(r_1/s_1)$ sans rencontrer Ω. En retour, on accède de $A(1/0)$ à tout point de l'axe réel.

Pour $n \geqq 2$, r/s est pour f_n ce qu'est r_1/s_1 pour r/s. Donc $L'(r/s)$ est formé de la succession des $\sigma(f_n)$ et des $l(f_n)$ alternant, de même que Δ' [dont $L'(r/s)$ est le transformé par $S(r/s, z)$] est formé des γ_a pour $a \geqq 2$, donc des $\sigma(n/1)$ et des $l(n/1)$ pour $n \geqq 2$.

Passons à $g(r/s)$ transformé de $\gamma_1(\theta, \theta+1)$ décrit par z et commun avec $\Lambda(f_1) = \Lambda(r_0/s_0)$. $S(r/s, z) = S(r_0/s_0, u)$. Soit $b \geqq 1$, entier, vérifiant $s = bs_0 + s_{0.1}$; donc

$$r = br_0 + r_{0.1}; \qquad rz - r_1 = r(z-1) + r_0 = r_0[b(z-1)+1] + r_{0.1}(z-1).$$

Donc $S(r/s, z) = S[r_0/s_0, -b-(1/(z-1))]$; u décrit $(b-1+\theta, b+\theta)$, soit γ_{-b} qui est sur Δ, d'après $b \geqq 1$. Donc $g(r/s)$ est sur $L(r_0/s_0)$.

Quant à $\sigma(r/s)$ correspondant à z décrivant (i, θ), donc à u parcourant $(-b+\theta, -b+1/2+i/2)$, $\sigma(r/s)$ s'implante au point $\nu(r/s)$ sur $L(r_0/s_0)$ extérieurement et bissecte l'angle $2\pi/3$ que fait $L(r_0/s_0)$ en $\nu(r/s)$. Pareillement, r/s étant pour les f_n si $n \leqq -1$, ce qu'est r_0/s_0 pour r/s : $L(r/s)$ est formé des $g(f_n)$ et les $\sigma(f_n)$ s'implantent extérieurement sur $L(r/s)$ au point $\nu(f_n)$ origine de $g(f_n)$, et bissecte l'angle extérieur de $L(r/s)$ en ce point.

5. x étant un point quelconque de l'axe réel, *le parcours menant z à x dans* $\Pi - \Omega$ en obéissant toujours à la règle de suivre dans le sens positif le bord de l'alvéole où se trouve z, ce trajet complet se définit naturellement comme il suit et il *met en évidence toutes les réduites du développement complet* $D(x)$, *supérieur si x est rationnel.*

Soit $(a_0, a_1, \ldots)$ le développement normal de x et $(\ldots, \alpha_k, \ldots)$ le développement $D(x)$. Conservant la notation $R_k = P_k/Q_k$ pour la réduite $(\ldots, \alpha_k)$, nous désignerons par R^*_c la réduite $(a_0, \ldots, a_c)$,

$$R_{-1} = R^*_{-1} = \frac{1}{0}; \qquad R_0 = R^*_0 = \frac{a_0}{1}.$$

Nous définissons ainsi la ligne $C(x)$. C'est d'abord la ligne $\Lambda(1/0)$ de $R(z) = -\infty$ à $a_0 + \theta$; parcours noté $L'(R^*_{-1}, a_0)$, puis $L(R^*_0)$ jusqu'au début de $L'(R^*_1)$. Généralement, les alternances des $L'(R^*_{2h-1})$ et des $L(R^*_{2h})$, les uns et les autres depuis leur origine et arrêtés à la naissance du suivant; $L'(R^*_{2h-1})$ et $L(R^*_{2h})$ ont, si l'on veut, en commun $l(R^*_{2h})$ $(h \geqq 0)$.

$C(X)$ partage Π en deux régions, $C^-(x)$ et $C^+(x)$ limitées par $(-\infty, x)$ et par $(x, +\infty)$. Le bord positif de $C(x)$ relativement à $C^+(x)$ est entièrement dans $\Pi - \Omega$. En le suivant, nous trouvons d'abord les réduites $R_{-2n} | (a_0 - n)/1 | (n \geqq 1)$. Nous glissons sur les seuils relatifs aux réduites R_{2q} et nous franchissons les seuils relatifs aux réduites R_{2p+1}. Si $R^*_c = (a_0, \ldots, a_c)$, les seuils de $(a_0, \ldots, a_c, 1)$, $(a_0, \ldots, a_c, 2)$, $\ldots$, $(a_0, \ldots, a_c, a_{c+1}-1)$, $(a_0, \ldots, a_c, a_{c+1}) = R^*_{c+1}$ qui sont, sauf la dernière, les réduites intermédiaires à R^*_c et à R^*_{c+1}, ces seuils sont sur $L'(R^*_c)$ si c est impair, s'implantent sur $L(R^*_c)$ si c est pair. Si x est rationnel, on termine par toutes les résuites $R_{e+2n-1} (n \geqq 1)$ de $D(x)$, les seuils de leurs alvéoles s'implantant sur $L(x)$.

Toute alvéole $A(R)$ d'une réduite de $D(x)$ adhère au chemin $C(x)$ par un couple de côtés consécutifs (du type $0 — 1$, i, 0) de $C(x)$, par $(\sigma + l)(R)$ si le rang de R est pair, et alors $A(R)$ est dans $C^{-}(x)$, par $g(R)$ si le rang de R est impair, et $A(R)$ est dans $C^{+}(x)$. Si, en outre, R est une R^{*}, $A(R^{*})$ continue à border $C(x)$ tout au long d'un arc de $L(R^{*})$ (rang pair) ou de $L'(R^{*})$ (rang impair. En conséquence, l'ensemble des alvéoles $A(R)$ borde totalement $C(x)$ sur ses deux côtés.

Ainsi le système de coupures Ω tailladant Π, détermine pour chaque point x de l'axe réel, un cheminement conduisant à x et montrant successivement toutes les réduites de $D(x)$, dont l'intervention, exigée par les formules de transformation de $\varkappa(x, \alpha)$, se trouve par là géométriquement expliquée.

(*) Séance du 9 juin 1965.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.260, 1965, p.6241-6246.

THÉORIE DES NOMBRES. — *L'extension au champ complexe de la fonction $\varkappa(x,\alpha)$ associée aux développements en fraction continue.* Note (*) de M. **Arnaud Denjoy**, Membre de l'Académie.

Les conditions vérifiées par la fonction réelle $\varkappa(x, \alpha)$ associée au développement en fraction continue du nombre réel x, trouvent leur explication dans les propriétés, démontrées ici, des fonctions étendant $\varkappa(x, \alpha)$ au champ complexe.

La présente Note continue la précédente ([1]), pour déduire la subdivision réelle des $j(S)$ de celle de H en zones $Z(S)$ où vaut une même liaison $F(z', \alpha)$, $F(z, \alpha)$ si $z' = S(z) = (pz + p')/(qz + q')$.

6. Avec $k = e - h + 1$, soit $O_h = M_h/N_h = (\ldots, \alpha_{k+2}, \alpha_{k+1}, \alpha_k)$, une réduite de $-q'/q$; $\alpha_k = 1$, pour que la réduite O_h n'ait pas déjà été rencontrée. $S(O_h) = R_{k-2} = P_{k-2}/Q_{k-2}$, réduite de p/q, soit $(\ldots, \alpha_{k-4}, \alpha_{k-3}, \alpha_{k-2})$; $S(z)$ change $\Lambda(O_h)$ en $\Lambda(R_{k-2})$, donc z et u décrivant $\Lambda(1/0)$, $S(O_h, z)$ qui définit $\Lambda_0(O_h)$ est $S(R_{k-2}, u)$, $u - z$ étant entier. Rappelons $S(O_h) = G_h/H_h$, avec $G_h = (-1)^k P_{k-2}$, $H_h = (-1)^k\ Q_{k-2}$ (h et k de parités différentes). Supposons h impair; O_h est la médiante de O_{h-1} et de O_{h-2} celle-ci supérieure; $S(O_h, z) = (G_h z - G_{h-2})/\ldots$ (les points figurent le dénominateur, où H remplace G); $S(O_h, z) = (P_{k-2} z - P_k)/\ldots$ (aux points, Q remplace P); $P_k = P_{k-1} + P_{k-2} = P_{k-2}(1 + \alpha_{k-1}) + P_{k-3}$. Donc $S(O_{h-1}, z) = S(R_{k-2}, u)$ si $u = z - 1 - \alpha_{k-1}$; α_{k-1} est o ou 1.

A z décrivant (i, θ) correspond $\sigma(O_h)$ transformé en le côté de $\Lambda_0(R_{k-2})$ correspondant à u décrivant $(i - 1, \theta - 1)$ ou $(i - 2, \theta - 2)$, donc toujours un côté de $L(R_{k-2})$, un côté de Ω.

Le cas des réduites d'ordre impair h de $-q'/q$ est traité. Pour le cas des réduites d'ordre h pair, observons que la transformée $Z'(S)$ de $Z(S)$ par S est une région $Z(S^{-1})$, S^{-1} étant l'inverse de S et que $Z(S)$ est une zone $Z'(S^{-1})$. Il nous suffit de montrer que $\sigma(R_{k-2})$, k étant impair, est changé par S^{-1} en un côté de $\Lambda_0(O_h)$ appartenant à Ω. Or si u décrit (i, θ), $z = u + 1 + \alpha_{k-1}$ décrit : pour $\alpha_{k-1} = 0$: $(1 + i, 1 + \theta)$ donnant le second côté de $g(O_h)$ et, pour $\alpha_{k-1} = 1$: $(2 + i, 2 + \theta)$ le second côté de $L'(O_h)$, qui est un $l(f)$, le premier étant un $\sigma(f)$. Donc le transformé de $\sigma(O_h)$ par S, comme le transformé de $\sigma(R_{k-2})$ par S^{-1}, est dans Ω.

Par contre, si f rationnel est distinct des O_i, $\sigma(f)$ est changé par S en le seuil de $S(f)$.

f étant compris entre O_h et $O_{h-2} (\alpha_k = 1)$, λ et μ étant deux nombres positifs,

$$f = \frac{\lambda M_h + \mu M_{h-2}}{\lambda N_h + \mu N_{h-2}} = \frac{A}{B};$$

$$M_h = M_{h-1} + M_{h-2}; \qquad N_n = N_{h-1} + N_{h-2}, \qquad \text{donc} \quad M_h N_{h-2} - N_h M_{h-2} = (-1)^h.$$

Soient λ_0/μ_0 inférieure, λ_1/μ_1 supérieure, les fractions dont λ/μ est la médiante et A_0, B_0, A_1, B_1 les notations A, B, où les λ, μ sont affectés des indices 0 et 1; $AB_0 - BA_0 = -(AB_1 - BA_1) = (-1)^h$; A_0/B_0 et A_1/B_1 sont respectivement f_0 et f_1 pour h pair, f_1 et f_0 pour h impair.

D'autre part, $S(f) = (\lambda P_{k-2} + \mu P_k)/(\lambda Q_{k-2} + \mu Q_k) = C/D$. Et

$$P_{k-2} Q_k - P_k Q_{k-2} = (-1)^{k+1} = (-1)^h.$$

On en conclut, la signification des indices étant claire, que C_0/D_0 et C_1/D_1 sont par rapport à leur médiante C/D respectivement du même côté que A_0/B_0 et A_1/B_1 par rapport à A/B. Si, par exemple, h et $k+1$ sont pairs, z décrivant $A(1/0)$, $A_0(f)$ est $(Az - A_1)/(Bz - B_1)$ et $A_0(C/D)$ est $(Cz - C_1)/(Dz - D_1)$; S changeant $A_0(f)$ en $A_0[S(f)]$, en particulier $\sigma(f)$ est changé en le seuil de $S(f)$.

Avec $z' = S(z)$, si z appartient à $A(r/s)$ ou à $A(r_1/s_1)$, respectivement $F(z', \alpha) = A\,F(z, \alpha) + B$ ou $A_1 F(z, \alpha) + B_1$, les A, B, A_1, B_1 étant invariables. Si $r'/s' = S(r/s)$, $A(r/s)$ est changé en $A(r'/s')$. Si r/s n'est pas une réduite de $D(-q'/q)$, $\sigma(r/s)$ est changé en $\sigma(r'/s')$. Or $F(z, \alpha)$ est analytique et uniforme sur les seuils. Donc $A = A_1$, $B = B_1$. Si r/s est une réduite de $D(-q'/q)$, $\sigma(r/s)$ est changé en un côté de Ω, coupure de discontinuité pour $F(z, \alpha)$. Donc $A \neq A_1$, $B \neq B_1$. En conséquence, si r/s est une réduite de $D(-q'/q)$, inférieure (paire) ou supérieure (impaire), on a une zone $Z(S)$ où les coefficients A, B sont constants et respectivement limitée ainsi : 1° ($r/s < -q'/q$) : $L + \sigma)(r/s)$, puis $L(r_0/s_0)$ de $\nu(r/s)$ à r_0/s_0, enfin sur l'axe réel l'intervalle $j(r_0/s_0, r/s)$; 2° ($r/s > -q'/q$) : $(L + \sigma + g)(r_1/s_1)$, puis $(\sigma + L)(r/s)$, enfin sur l'axe réel $j(r/s, r_1/s_1)$.

Il suffit qu'en deux points appartenant à j et distincts $\chi(x, \alpha)$ soit une des valeurs limites de $F(z, \alpha)$, z tendant vers x dans $H - \Omega$, pour que $A = A(j)$, $B = B(j)$. Et l'explication de la division de l'axe des x par les intervalles $j(S)$ est ainsi obtenue par le partage de H en les zones $Z(S)$ ayant chacune leur propre couple de coefficients A, B.

7. De Q_0 on devra déduire un ensemble fermé ω_0 contenant d'une part à son intérieur les infinis de F, d'autre part si F est multiforme les coupures l'uniformisant. ω_0 ne doit pas diviser Q_0. Dans $Q_0 - \omega_0$ on suppose $|F(z, \alpha)|$ borné par un nombre M et tendant vers zéro pour z infini. $|F|$ est borné par $M\alpha^n$ dans le translaté de $Q_0 - \omega_0$ par $z + n$. De $A(1/0)$ ainsi réduit,

nous retranchons la partie des x négatifs $(z = x + iy)$; $A_0(1/0)$ désignera la partie restante; $A_0(r/s)$ sera la transformée de $A_0(1/0)$ par $S(r/s, z)$;

$A_0(r/s)$ est limité extérieurement par deux lignes : $\Lambda_0(r/s)$ depuis $S(r/s, i)$, origine de $\sigma(r/s)$, jusqu'à r/s, et la demi-droite non euclidienne joignant r/s à $S(r/s, i)$. Soit $H_0 = \sum A_0(r/s) + \sum \sigma(r/s)$; H_0 est une région (connexe). Nous montrerons que, z variant dans H_0 et tendant vers x réel, $F(z, \alpha)$ tend vers $\chi(x, \alpha)$.

Ces notations nous seront utiles : a étant un entier réel, $U(a)$ désignera la zone de base $(a, 1/0)$ sur l'axe réel, le reste de la frontière étant $\Lambda(1/0)$ de $x - \infty$ $(z = x + iy)$ à $a + i$, et $L(a)$ dans sa totalité. V sera la région comprise entre $\Lambda(1/0)$ et l'axe réel; $V(a)$ la partie de V limitée par $L(a)$ de a à $a + \theta - 1$, et $L(a + 1)$ de $+ 1$ à $a + \theta$.

Si $z' = S(z) = (pz + p')/(qz + q')$, $b_0 + 1$ est la plus grande réduite de $-q'/q$; $Z_0(S) = U(b_0 + 1)$, d'extrémités $S(b_0 + 1)$ et $S(1/0) = p/q$; d'après $-q' = qb_0 + q_1$, $S(b_0 + 1) = p_0/q_0$; pour x réel $> b_0 + 1$ et $x' = S(x)$, $\chi(x', \alpha) = A\chi(x, \alpha) + B$, A et B s'obtenant en donnant à x les valeurs $1/0$, $b_0 + 1$. On trouve $A = \chi(p/q, \alpha) - \chi(p/q, \alpha)$, $B = \chi(pq/, \alpha)$. Nous devons montrer que les mêmes coefficients donnent la substitution de $F(z, \alpha)$ à $F(z, \alpha)$ quel que soit z dans $U(b_0 + 1)$ et quel que soit F vérifiant les équations fonctionnelles fondamentales. Celles-ci sont les mêmes pour z complexe ou réel. La première est $F(z + 1, \alpha) = \alpha F(z, \alpha)$ indépendamment de z. La seconde, valable pour x réel > 1, concerne $z' = -1/z$. C'est $F(-1/z, \alpha) = (1 - \alpha)\alpha^{-2} F(z, \alpha) + 1$, valable *a priori* pour $z \in \Lambda(1/0)$; $b = 0$, $Z_0(S) = U(1)$, $Z'_0(S) = V(-1)$. Notons que $U(-1)$ et $V(-1)$ se rejoignant au point i, en sorte que $F(i, \alpha) = \alpha^2/(\alpha^2 + \alpha - 1)$.

Soit maintenant $z' = S(z) = z/(z + 1)$ substitution parabolique de point double O,

$$b_0 = -1, \qquad Z_0(S) = U(0); \qquad Z'_0(S) = U(0).$$

Pour $z' = S^n(z) = z/(nz + 1)$ $(n \geqq 2)$, $(n - 1)^e$ itérée de $z/(z + 1)$ $Z_0(S^n) = U(0)$; $W(n) = Z'_0(S^n)$ ayant pour base réelle $(0, 1/n)$ est limitée ensuite par $(L + \sigma)(1/n)$ et $L(0)$ de $v(1/n)$ à 0. Observons que les origines des $\sigma(1/n)$, terminaisons des $L(1/n)$, savoir les points $(i - 1)/[n(i - 1) + 1]$ sont sur le cercle euclidien $c(0)$ de dimamètre $(0, 2i)$. La région $G(0)$ limitée par $c(0)$ de 0 à $1 + i$, par $(1 + i, \theta) = \sigma(1)$ et par $L(0)$ de θ à 0, contient tous les seuils $\sigma(1/n)$ et elle est disjointe de Ω.

Si $z' = z/(z + 1) = 1 - 1/(z + 1)$, z étant dans $U(0)$, $z + 1$ est dans $U(1)$ Donc $F(-1/(z + 1), \alpha) = (1 - \alpha)\alpha^{-2} F(z + 1, \alpha) + 1$. On en tire

$$F[z/(z + 1), \alpha] = (1 - \alpha) F(z, \alpha) + \alpha \qquad \text{pour} \quad z \in U(0),$$

comme pour x réel > 0. Donc, si $z' = S^n(z) = z/(nz+1)$:

$$F(z', \alpha) - 1 = (1-\alpha)^n [F(z, \alpha) - 1] \quad \text{si} \quad z \in U(0).$$

Dans $A_0(1/n)$, $|F(z, \alpha) - 1| < (M+1)(1-\alpha)^n$.

Cette relation vaut en particulier dans $w(n) = W(n) - W(n+1)$ $(n \geqq 2)$ La transformation $S(z)$ appliquée à chacun de ces ensembles donne l'ensemble analogue correspondant à $n+1$. Appliquée à $G(0)\, w(n)$, elle montre que $F(z, \alpha)$ tend vers $1 = \varkappa(0, \alpha)$ quand z tend vers zéro dans $G(0)$. Notons que $w(n) = S^n[U(0) - V(0)]$ $(n \geqq 1)$.

8. m étant *impair*, soit $p/q = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$, cette fraction continue étant normale; $p/q = P_m/Q_m$; $p_0/q_0 = P_{m-1}/Q_{m-1}$.

Soit $z' = (pz + p_0)/(qz + q_0) = (a_0, \ldots, a_m, z)$. Supposons $z \in U(0)$. Montrons que les coefficients A, B de la relation $F(z', \alpha) = A\,F(z, \alpha) + B$ sont les mêmes que pour z réel, soit $A = \varkappa(p_0/q_0, \alpha) - \varkappa(p/q, \alpha)$ et $B = \varkappa(p/q, \alpha)$. Introduisons les nombres $u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1$ ainsi définis :

$$u_m = (0, a_m, z) = \frac{z}{a_m z + 1}; \qquad u_m \in V(0) \subset U(0);$$

$$u_{m-1} = (a_{m-1}, 0, u_m) = a_{m+1} + u_m = (a_{m-1}, a_m, z); \qquad u_{m-1} \in V(a_{m-1}).$$

D'autre part :

$$F(u_m, \alpha) = 1 - (1-\alpha)^{a_m} + (1-\alpha)^{a_m} F(z, \alpha); \qquad F(u_{m-1}, \alpha) = \alpha^{a_{m-1}} F(u_m, \alpha).$$

Généralement, avec $u_{k+1} \in V(a_{k+1})$, si k est impair et $\in V(1)$ si k est pair :
— pour k pair :

$$u_k = (a_k, 0, u_{k+1}) = (a_k + u_{k+1}) = (a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m, z);$$

— pour k impair :

$$u_k = (0, a_k, u_{k+1}) = \frac{u_{k+1}}{a_k u_{k+1} + 1} = (0, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m, z);$$

— pour terminer :

$$u_1 = (0, a_1\, u_2) = \frac{u_2}{a_1 u_2 + 1}; \qquad z' = (a_0, 0, u_1) = a_0 + u_1.$$

$F(u_{m-1}, \alpha)$ est toujours lié à $F(u_k, \alpha)$ par l'une ou l'autre des formules fondamentales, parce que les u_k sont toujours dans $U(0)$, même dans un $V(n)$ pour $n \geqq 0$. On trouve $F(z', \alpha) = A\,F(z, \alpha) + B$, avec

$$A = \alpha^{a_0 + a_2 + \cdots + a_{m-1}} (1-\alpha)^{a_1 + \cdots + a_m} = \varkappa\left(\frac{p_0}{q^0}, \alpha\right) - \varkappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right);$$

$$B = \alpha^{a_0} - \alpha^{a_0}(1-\alpha)^{a_1} + \ldots + \alpha^{a_0 + \cdots + a_{m-1}} (1-\alpha)^{a_1 + \cdots + a_m} = \varkappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right).$$

D'après $qz + q_0 = q(z+1) - q_1$, $A_0(p/q)$ décrit par z' s'obtient en faisant décrire à z, $A_0(1/0)$ déplacé de -1; le maximum de $|F(z, \alpha)$ est $M\alpha^{-1}$. Donc,

$$\left|F(z', \alpha) - \chi\left(\frac{p}{q}, \alpha\right)\right| < \left[\chi\left(\frac{p_0}{q_0}, \alpha\right) - \chi\left(\frac{p}{q}, \alpha\right)\right] M\alpha^{-1}.$$

Supposons que z' variant dans Π_0 tende vers x réel. Si x est irrationnel, les alvéoles $A_0(p/q)$ traversées par z' appartiendront à des fractions p/q tendant, comme p_0/q_0, vers x. Donc $F(z', \alpha) - \chi(x, \alpha)$ tend vers zéro.

Si x est rationnel et vaut r/s, le même raisonnement vaut pour les parties de trajet de z' étrangères à $A(r/z)$. Pour les arcs intérieurs à $A_0(r/s)$, z dans $A_0(1/0)$ devient infini et $F(z, \alpha)$ tend vers zéro. Donc dans tous les cas, $F(z', \alpha)$ *tend vers* $\chi(x, \alpha)$.

9. Tout ce que nous avions affirmé ou présumé est démontré. Les conclusions, résumées comme il suit, s'appliquent à toute fonction $F(z, \alpha)$ vérifiant ces trois hypothèses :

1° Dans le demi-plan supérieur Π de z, on prend le quadrilatère $Q_0(\infty, -1+0, i, 0)$ pour générateur du groupe G de Schwartz, constitué par les substitutions modulaires $(pz+p')/(qz+q')$.

De Q_0 on extrait : des coupures si $F(z, \alpha)$ n'est pas uniforme, des ensembles ouverts si F n'est pas borné, l'ensemble des points éliminés, complété par fermeture, soit ω_0, ne devant ni diviser Q_0 ni contenir en sa totalité un côté de Q_0, et de façon que dans $Q'_0 = Q_0 - \omega_0$, $F(z, \alpha)$ soit analytique, uniforme, bornée et tende vers zéro pour $z = \infty$.

Si de Π on retranche les transformées de ω_0 par G, il reste un ensemble Π' ouvert connexe.

2° Quel que soit z, $F(z+1, \alpha) = \alpha F(z, \alpha)$.

3° Si $z \in A(1/0)$, $F(-1/z, \alpha) = (1-\alpha)\alpha^{-2} F(z, \alpha) + 1$.

Conséquences. — 1° De chaque point rationnel réel r/s, on fait partir une coupure $L(r/s)$, appartenant à la frontière $\Lambda(r/s)$ de l'alvéole $A(r/s)$. Il est démontré que le système Ω des $L(r/s)$ ne divise pas Π; $\Pi' - \Omega$ est une région (connexe) ayant dans sa frontière la totalité de l'axe réel. Dans $\Pi' - \Omega$, $F(z, \alpha)$ est analytique, *uniforme* et finie en chaque point, donc holomorphe.

2° On réduit $A(1/0)$ à sa partie $A_0(1/0)$, où $R(z) > 0$; $A_0(r/s)$ est la moitié analogue de $A(r/s)$; Π_0 est $\sum A_0(r/s) +$ les seuils $\sigma(r/s)$. Dans $\Pi'_0 = \Pi_0 . \Pi'$, $F(z, \alpha)$ *tend vers* $\chi(x, \alpha)$ quand z tend vers x réel.

3° A toute substitution $z' = S(z) = (pz+p')/(qz+q')$ de G correspond une subdivision de Π en zones $Z(S)$ telles que, z variant dans l'une d'elles,

$F(z', \alpha) = AF(z, \alpha) + B$, les coefficients A et B restant invariables dans cette zone et différant dans toutes les autres zones. $Z(S)$ a une base réelle $j(\xi, \eta)$; ξ et η sont deux réduites géométriquement consécutives de développement complet $D(-q'/q)$; la frontière de $Z(S)$ est ensuite formée de coupures de Ω, $L(\xi)$ et $L(\eta)$ y contribuant. L'accès à $Z(S)$ se fait par un des deux *seuils* $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$ ou par les deux; S *change chacun d'eux en une coupure de* Ω. Les coefficients A, B sont les mêmes que pour $\varkappa(x', \alpha)$ exprimé en $\varkappa(x, \alpha)$ si x appartient à $j(\xi, \eta)$.

Il reste à obtenir les fonctions $F(z, \alpha)$ dont l'existence n'est même pas encore établie.

10. Le plan des t étant diminué des deux coupures réelles $(-\infty, 0)$ et $(1, +\infty)$, on l'applique sur Q_0, avec ces correspondances : $t = 0$, $z = \infty$; $t = 1$, $z = i$; $t = \infty$ et $I(t) < 0$, $z = -1 + \theta$; $t = \infty$ et $I(t) > 0$, $z = \theta$. Les substitutions fondamentales sont $z' = z + 1$ autour de $t = 0$, $z = \infty$; $z' = -1/z$ autour de $t = 1$, $z = i$; $z' = -1/(z+1)$ autour de $t = \infty$, $z = -1 + \theta$ (sens rétrograde); $t = \lambda(z)$ est une fonction fuchsienne invariante par les substitutions de G; $\lambda(z)$ est liée à la fonction modulaire $\mu(z)$ par $4(\mu^2 - \mu + 1)^3 = 27\lambda\mu^2(\mu - 1)^2$.

La fonction inverse de $\lambda(z)$, soit $z = \nu(t)$ a pour chaque t une infinité de déterminations $(p\nu + p')/(q\nu + q')$; pour chacune d'elles, $y(t) = F(z, \alpha)$ a une infinité de valeurs possibles de la forme $Ay(t) + B$. Mais toutes ces fonctions de t sont liées entre elles par des relations linéaires à coefficients constants. Donc $y''(t)/y'(t)$ est une fonction uniforme de t. Tenant compte de ce que $F(z, \alpha)$ doit être finie pour $-1 + \theta$ ou θ, sauf par quelque valeur exceptionnelle de α, l'expression la plus simple de $y''/y'(t)$ sera $a/t + b/(t-1) - 2/(t-c)$, c étant tel que la singularité $t = c$ soit polaire,

$$y(t) = k\int_0^t t^a(1-t)^b(t-c)^{-2}\,dt = k\int_0^t u(t)\,dt,$$

le résidu du coefficient de la fonction à intégrer étant nul au point c. Donc $c = a/(a+b)$. Or

$$2i\pi a = \log\alpha, \qquad 2i\pi b = \log(1-\alpha) - 2\log\alpha; \qquad c = \left[\frac{\log(1-\alpha)}{\log\alpha} - 1\right]^{-1}.$$

Soit $\eta = \nu(c)$, $\eta \in Q_0$; $\eta_0 = \nu(-1) \in Q_0$. Pour $\alpha < 1/2$, $-1 > c > -\infty$: η est sur $(\eta_0, -1+\theta)$ et sur $(\eta_0 + 1, \theta)$; pour $1/2 < \alpha < (-1+\sqrt{5})/2$, $\infty > c > 1$: η est sur $(\theta - 1, i)$ et sur (i, θ); pour $(-1+\sqrt{5})/2 < \alpha < 1$: $0 < c < 1$: η est sur (i, ∞). Le second cas est le seul où les $(p\eta + p')/(q\eta + q')$ soient sur les seuils. Autrement ils sont intérieurs aux alvéoles.

Si $I = \int_0^1 u(t)\,dt$ (l'intégrale étant au besoin remplacée par un lacet), d'après $F(i, \alpha) = \alpha^2/(\alpha^2 + \alpha - 1)$, on trouve $k\mathrm{I} = \alpha^2(\alpha^2 + \alpha - 1)^{-1}$.

Désignons par $K(t)$ cette fonction et par $\varkappa(z, \alpha)$ son égale. La fonction la plus générale $y(t) = F(z, \alpha)$ remplissant les conditions posées sera $K(t) + t^a(1 - t)^b P(t)$, $P(t)$ étant nul pour $t = a$, $t = b$, et $t = \infty$.

(*) Séance du 9 juin 1965.

(1) *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 6241.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.260, 1965, p.6775-6780.

ERRATUMS

(*Comptes rendus* du 28 juin 1965.)

Note présentée le 9 juin 1965, de M. *Arnaud Denjoy*, Membre de l'Académie, L'extension au champ complexe de la fonction $\varkappa(x, \alpha)$ associée aux développements en fraction continue :

Page 6780, deux dernières lignes, *au lieu de* $\int_0^\infty |P(t)|\,dt$ étant fini, *lire* $t = \infty$.

C.R. Acad. Sc. Paris, t.261, 1965, p.1587.

TOPOLOGIE. — *Sur les ensembles dispersés.*

Note (*) de M. ARNAUD DENJOY, Membre de l'Académie.

Formation des matrices dont tout ensemble dispersé est une restriction.

Mon attention a été récemment attirée sur l'espèce des ensembles totalement ordonnés qualifiés de dispersés. Je voudrais ci-après étudier la génération de tels ensembles. Ne connaissant pas la bibliographie du sujet, je m'expose à des redites. On voudra bien m'en excuser.

1. Soit η l'ensemble des nombres rationnels, ordonnés dans le sens de la croissance (éventuellement limité par un ou deux d'entre eux). Le type de cette ordination est ainsi caractérisé : 1° l'ensemble est dénombrable; 2° il n'a pas de couple d'éléments consécutifs, donc en toute équivalence entre deux quelconques de ses éléments, il y en a un autre, il y en a une infinité dénombrable d'autres.

Un ensemble E ordonné est *dispersé* (au sens du dénombrable) s'il ne contient pas de sous-ensemble (une « restriction » de E) semblable à η.

E est donc non dispersé ou dispersé, selon qu'il contient ou non un ensemble e de points $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ $(n < \omega)$ tel qu'entre deux quelconques de ses points c_p, c_q il existe toujours un c_n, donc une infinité de c_n, donc un ensemble de c_n semblable à η. En conséquence :

I. *Si* E *non dispersé contient une section s dispersée, e possède au plus un point sur s.*

II. *Si les ensembles* A *d'éléments a et* $f(a)$ *sont tous dispersés, la somme* $E = \sum f(a)$ *ordonnant entre eux les* $f(a)$ *semblablement aux a, est dispersée.*

Sinon, c_n étant dans $f(a_n)$, les a_n tous distincts formeraient un ensemble semblable à e.

En particulier, si A est la suite croissante des entiers positifs n, ou des ordinaux α, ensembles n'admettant pas de régression infinie, les ensembles $\sum f(n)$, $\sum f(\alpha)$ sont dispersés.

On pourrait considérer des dispersions selon la puissance $p^{\text{ième}}$, celle de la $p^{\text{ième}}$ classe des nombres ordinaux (la classe I étant celle des entiers finis). L'ensemble η_p substitué à η serait de puissance p et tel qu'entre deux quelconques de ses points il s'en trouverait une infinité de puissance p. Nous ne nous intéresserons pas à cette théorie. Nous nous bornons à des ensembles ordonnés dénombrables.

Ils sont semblables à des ensembles linéaires, portés par l'axe des x, et ordonnés dans le sens des abscisses croissantes.

Si E *est non dispersé, son dérivé contient un ensemble parfait.*

Car le dérivé e' de e ne contient pas de point isolé.

Si le dérivé E' *de* E *contient un ensemble parfait* P, E *est non dispersé.*

Ou bien P contient une portion ϖ (un segment si P n'est pas totalement discontinu), ou bien P contient une portion ϖ' où E n'a aucun point. Dans les deux cas on met en évidence dans E l'ensemble e dont les points c_n sont partout denses sur ϖ ou situés dans des intervalles distincts contigus à ϖ'. En conséquence :

Un ensemble E dispersé a un dernier dérivé E^α fini non nul, comptant p points. E est *réductible* au sens de Cantor. Il est dénombrable. Son rang (α, p) se place en $\alpha \times \omega + p$.

II. Les ensembles ordinalement semblables entre eux définissent un *type* commun d'ordination, diversement noté ci-après τ, μ, ν, m; $\tau(\mathrm{H})$ sera le type des ensembles semblables à H.

M désignant à la fois un ensemble et son type d'ordination, $\mathrm{M} \times \tau$ sera le type de l'ensemble obtenu en substituant à tout élément d'un ensemble de type τ un ensemble de type M ; $\mathrm{M} \times 1 = \mathrm{M}$.

$\mathrm{M} \times (-1)$ ou $-\mathrm{M}$ désignera le type renversant l'ordination de M. Si x décrit un ensemble linéaire de type M, $-x$ parcourt un ensemble de type $-\mathrm{M}$.

ω est le type de la suite des entiers positifs croissants; $-\omega$, celui de la suite des entiers négatifs croissants.

O désignera, soit l'origine des abscisses, soit généralement un ensemble réduit à un point : $\mathrm{M} \times \mathrm{O} = \mathrm{O}$ et $\mathrm{O} \times p$ est la suite de p points $(p \geqq 1)$; $\omega \times 0$ $(p = 0)$ est la disparition du point O.

Soit ν le type $1 + \mathrm{O} + (-1)$. Le type $\mathrm{M} \times \nu = \mathrm{M} + \mathrm{O} + (-\mathrm{M})$ sera dit ordinalement *symétrique* et de *centre* O; il est identique à son renversement. Après le point unique O, l'ensemble symétrique le plus simple est de type $\mu = \omega \times \nu = \omega + \mathrm{O} + (-\omega)$, savoir celui de l'ensemble $1, 2, \ldots, n, \ldots; 0; \ldots, -n, \ldots, -1$ (n entier croissant).

Un ensemble ordonné linéaire fermé (nous sous-entendons : borné) E sera dit *symétrique autour d'un de ses points* I s'il existe une section de E symétrique et de centre I (ce caractère ne distingue évidemment que les points I non isolés).

E est dit *symétrique en lui-même* s'il est symétrique autour de chacun de ses points.

Dans le dérivé E' d'un ensemble E, un point I sera dit *accumulatif d'ordre* α s'il est isolé dans le dérivé E^{α}. *L'ordre latéral*, propre à un côté de I, est celui de I relativement à E privé de sa partie située du côté opposé de I.

Un ensemble linéaire ordonné E, *fermé* (sous-entendu : borné), *symétrique en lui-même* ne saurait contenir d'ensemble parfait. Il *est réductible.*

Tout point I *accumulatif de* E *est d'ordre bilatéral.*

Nous montrerons la réciproque : Un ensemble ordonné linéaire, fermé, dont tout point d'accumulation est d'ordre bilatéral, est symétrique en lui-même.

Les intervalles contigus à l'ensemble symétrique en lui-même E sont limités par des points isolés. Un tel intervalle partage E en deux ensembles ayant les caractères de E. Ainsi, E commence et se termine par deux suites de types respectifs ω et $-\omega$. Tout dérivé E^{β} de E pour $\beta < \alpha$ étant symétrique en lui-même, les remarques précédentes s'appliquent à E^{β}. α étant ordinal $< \Omega$, soient A_{α}, E_{α} des ensembles linéaires ordonnés, fermés, ayant leur dérivé d'ordre réduit α un point O et, en outre : A_{α} est symétrique en lui-même et nous le dénommerons une *matrice d'ordre* α; les points accumulatifs de E_{α} sont d'*ordre bilatéral.*

Nous montrerons conjointement ces deux propositions :

1° *Toutes les matrices* A_{α} *sont ordinalement semblables.* Leur type commun sera noté m_{α}; $m_{\alpha} = m_{\alpha}^{-} + O + m_{\alpha}^{+}$; nous montrerons $m_{\alpha}^{+} = - m_{\alpha}^{-}$;

2° *Tout* E_{α} *est de type* m_{α}. *Il est symétrique en lui-même* (la symétrie locale entraîne la symétrie globale).

A_0, E_0 sont identiques à O; $m_0 = O$.

A_1 et E_1 sont tous deux de type $m_1 = \mu$.

Supposant la double proposition démontrée pour tout $\beta < \alpha$, nous l'établirons pour α.

1° α est de première espèce. Par hypothèse, tout $E_{\alpha-1}$ est un $A_{\alpha-1}$ et leur type commun est un certain $m_{\alpha-1}$; $A_{\alpha}^{\alpha-1}$ et $E_{\alpha}^{\alpha-1}$ sont des ensembles ayant bilatéralement pour point limite unique O. Ils sont donc de type μ. Entre les points consécutifs de $A_{\alpha}^{\alpha-1}$, $E_{\alpha}^{\alpha-1}$ intercalons des intervalles contigus à A_{α}, E_{α}. Nous partageons ces deux ensembles en tranches dont chacune est un $A_{\alpha-1}$, un $E_{\alpha-1}$. Elles sont donc semblables entre elles et de type $m_{\alpha-1}$. Le type des ensembles A_{α}, E_{α} est donc $m_{\alpha} = m_{\alpha-1} \times \mu$. En particulier, $m_r = \mu^r$ pour $r < \omega$.

Un intervalle contigu à A_{α} sépare cet ensemble en deux. L'un contient O et c'est comme A_{α} une matrice d'ordre α. L'autre C est réductible d'ordre $< \alpha$. Supposons la double proposition établie pour $\beta \leq \alpha$. Si C^{β}

compte p points, C est du type $m_\beta \times p$. De l'autre côté de O pareillement partageons A_α par un contigu séparant un ensemble de type $m_\gamma \times q (\gamma < \alpha)$. Si C est à gauche de O, on trouve une égalité

$$m_\beta \times p + m_\alpha + (-m_\gamma \times q) = m_\alpha.$$

Généralement si $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \alpha$, et $p_i, q_k \geqq 1$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{\beta_i} \times p_i + m_\alpha + \left(-\sum_{k=1}^{k=r} m_{\gamma_k} \times q_k \right) = m_\alpha.$$

2° Supposons maintenant α de seconde espèce. Soit β_n une suite croissante et tendant vers α. Entre le premier et le second point de $A_\alpha^{\beta_n}$, de $E_\alpha^{\beta_n}$, entre leurs avant-dernier et dernier points, prenons des intervalles contigus $\delta'_n \delta_{n+1}$, ε_{n+1}, ε'_n à A_α, à E_α, $\delta_1 = \delta_0$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_0$ sont les points extrêmes de A_α, de E_α. Les sections de A_α, de E_α situées sur les segments respectifs $\delta_n \delta'_n$ et $\varepsilon'_n \varepsilon_n$ sont des A_{β_n}, des E_{β_n}, donc des ensembles de type m_{β_n}. Or leurs réunions pour $1 \leqq n < \infty$ sont les types respectifs des deux parties de A_α, de E_α séparées par O. Donc E_α et A_α ont le même type m_α, avec

$$m_\alpha^- = \sum_{n \geqq 1} m_{\beta_n}, \qquad m_\alpha^+ = -\sum_{n \geqq 1} m_{\beta_n} = -m_\alpha^-.$$

La double proposition est entièrement établie.

Si la suite β_n était limitée,

$$\sum m_{\beta_n} + m_\alpha \quad \text{et} \quad m_\alpha + \left(-\sum m_{\beta_n} \right)$$

équivaudraient à m_α. Si β_n tend vers α, ces sommes valent respectivement $m_\alpha^- + m_\alpha$ et $m_\alpha + m_\alpha^+$, soit $m_\alpha^- \times [2 + 0 + (-1)]$ et $m_\alpha^+ \times [-1 + 0 + 2]$, m_α étant à la fois $m_\alpha^- \times \nu$ et $m_\alpha^+ \times (-\nu)$.

Soit $\sum u_\beta$ une série de types ordinaux ainsi définis : si β est de première espèce $u_\beta = m_\beta$. Si β est de seconde espèce, $u_\beta = 0 + \left(-\sum_{\gamma < \beta} u_\gamma \right)$. Dès lors, quel que soit α de première ou de seconde espèce,

$$m_\alpha = \sum_{\beta \leqq \alpha} u_\beta.$$

III. Sur l'axe des x, soit E un ensemble *dispersé* dont *le dérivé d'ordre* α *se réduit à un point*. Montrons que E *est sembable à une restriction de matrice* A_α.

La fermeture $\overline{E}$ de E est dénombrable. Si ses points d'accumulation sont tous d'ordre bilatéral, $\overline{E}$ est une matrice A_α. Sinon énumérons en ξ_n les points dont l'ordre gauche β_n et l'ordre droit γ_n diffèrent. Soit $u_n > 0$ avec $\sum u_n < \infty$, et a l'extrémité inférieure de $\overline{\mathrm{E}}$. Effectuons pour $x > a$ la substitution

$$x' = x + \left(a \sum x\right) u_n + \omega u_p,$$

la sommation étant étendue aux u_n pour lesquels ξ_n appartient à l'intervalle a, x; ω étant o si $x \neq \xi_p$ et prenant les deux seules valeurs o et 1 si $x = \xi_p$. L'ensemble A remplaçant $\overline{\mathrm{E}}$ a substitué à ξ_n un couple c_n, d_n limitant un intervalle de longueur u_n et contigu à A. Divisons u_n en ses deux moitiés u'_n, u''_n. Sur u'_n et sur u''_n respectivement nous plaçons des ensembles de types $m^+_{\beta_n}$ fermé par c_n et $m^-_{\gamma_n}$ fermé par d_n. Le tout est une matrice A_α. Ordinalement $\overline{\mathrm{E}}$ s'en déduit en retirant de A_α tous les m^+_β, m^-_γ introduits et l'un ou l'autre de c_n et de d_n pour tout n.

Soit $\mathrm{M}_\alpha = \sum \mathrm{A}_\alpha$ une suite de type $m_\alpha \times \omega$. Tout ensemble dispersé d'ordre α est semblable à une restriction d'une section commençante de M_α; $\mathrm{M}_{\alpha,p}$ désignera une suite $m_\alpha \times p$.

H_1 et H_2 étant deux ensembles ordonnés, de types notés $\tau(\mathrm{H}_1)$, $\tau(\mathrm{H}_2)$, nous disons que $\tau(\mathrm{H}_1)$ est *inclus* dans $\tau(\mathrm{H}_2)$ et nous écrivons $\tau(\mathrm{H}_1) \subset \tau(\mathrm{H}_2)$ ou $\tau(\mathrm{H}_2) \supset \tau(\mathrm{H}_1)$ si H_1 est semblable à une restriction de H_2. Si réciproquement $\tau(\mathrm{H}_2) \subset \tau(\mathrm{H}_1)$, il s'ensuit $\tau(\mathrm{H}_1) = \tau(\mathrm{H}_2)$.

Si $\tau(\mathrm{H}_1)$ n'est pas inclus dans $\tau(\mathrm{H}_2)$, nous écrivons $\tau(\mathrm{H}_1) \sqsupset \tau(\mathrm{H}_2)$ ou $\tau(\mathrm{H}_2) \sqsubset \tau(\mathrm{H}_1)$. Si $\tau(\mathrm{H}_1) \sqsupset \sqsubset \tau(\mathrm{H}_2)$, nous disons que $\tau(\mathrm{H}_1)$ et $\tau(\mathrm{H}_2)$ (ou simplement H_1 et H_2) sont *étrangers* l'un à l'autre.

Fraïssé a émis l'hypothèse suivante : *Est finie toute collection* S *d'ensembles dispersés deux à deux étrangers l'un à l'autre.*

H_1 étant de rang (α, p) et H_2 de rang (β, q) avec $(\alpha, p) \prec (\beta, q)$ évidemment $\mathrm{H}_2] \mathrm{H}_1$. Pour avoir $\mathrm{H}_1 \sqsupset \sqsubset \mathrm{H}_2$, il suffit de $\mathrm{H}_2 \sqsubset \mathrm{H}_1$; H_1 ne doit être semblable à aucun sous-ensemble de H_2. La question ne se pose que pour les sous-ensembles de rang (α, p).

Dès lors dans S on place en tête le ou l'un des ensembles de moindre rang, soit H_1 de rang (α, p); 1° On forme le tableau des types distincts de rang (α, p); certains forment chaîne, chacun étant inclus dans le suivant; pour le rang $(1, 1)$, on trouve :

$$\omega + 0 + (-\omega); \quad \omega + (-\omega); \quad \omega + 0 \times r; \quad + (-0 \times r) + (-\omega) \qquad (r \geqq 0).$$

2° A chacun de ces types on adjoint ceux où il n'est pas inclus [dans le rang (α, p)], les seuls à pouvoir être rencontrés dans les H_n ultérieurs de S. Au rang $(1, 1)$, à $\omega + 0$, r s'adjoignent les $(-0 \times s) + (-\omega)$ et les $\omega + 0 \times r'$ pour $0 \leqq r' < r$ si $r \geqq 1$.

Par exemple, si H_1 est de rang (1, 2), si $r > 1$, le type

$$(-O \times s) + (-\omega) + \omega + O \times r'$$

est associable à $\omega + O \times r$.

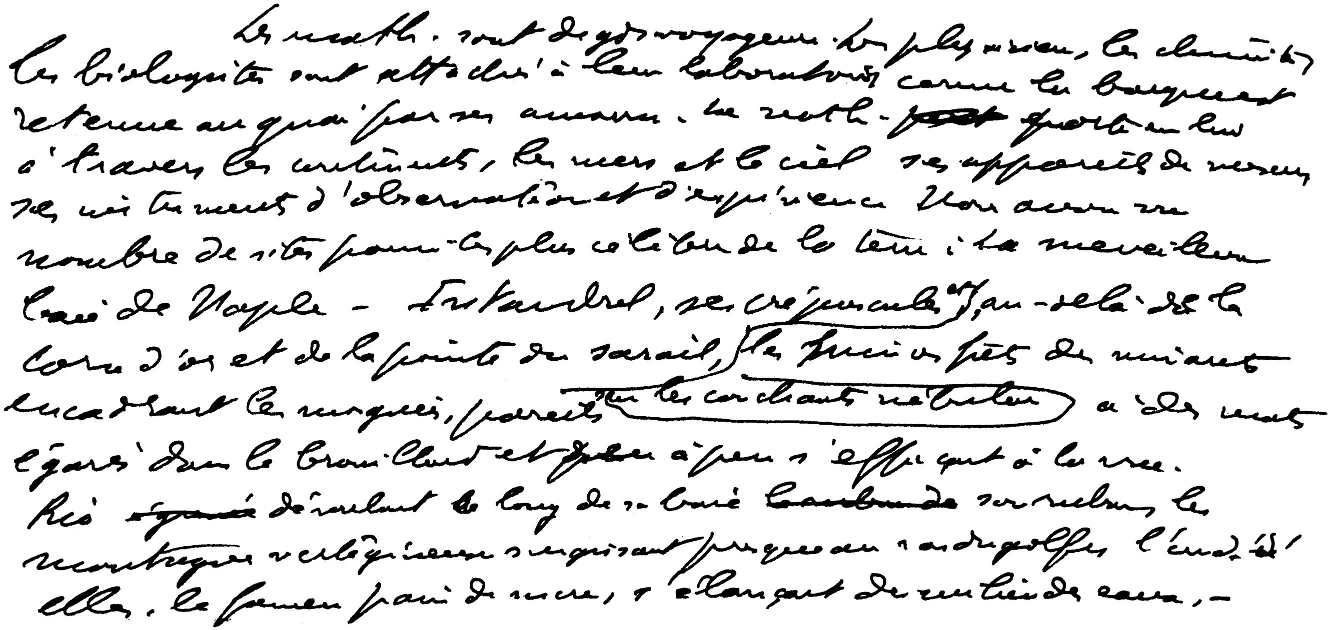
Après les conclusions tirées de H_1, on passe à H_2 dont le rang (H_1 exclu) est le moindre ou l'un des moindres, pouvant encore égaler (α, p).

(*) **Séance du 23 octobre 1967.**

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

C.R. Acad. Sc. Paris, t.265, 1967, p.529-533.

TRANSCRIPTION D'UN FEUILLET MANUSCRIT



Les mathématiciens sont de grands voyageurs. Les physiciens, les chimistes, les biologistes sont attachés à leurs laboratoires comme la barque est retenue au quai par ses amarres. Le mathématicien porte en lui à travers les continents, les mers et le ciel, ses appareils de mesure, ses instruments d'observation et d'expérience. Nous avons vu nombre de sites parmi les plus célèbres de la terre : la merveilleuse baie de Naples, Istambul, ses crépuscules et sur les couchants nébuleux, au delà de la Corne d'Or et de la Pointe du sarail, les minces fûts des minarets encadrant les mosquées, pareils à des mâts égarés dans le brouillard et peu à peu s'éffaçant à la vue ; Rio déroulant le long de sa baie son ruban, les montagnes vertigineuses surgissant presque au ras du golfe, l'une d'elles, le fameux Pain de sucre, s'élançant du milieu des eaux, ...