

# Astérisque

GILLES ROBERT

**Régularité des idéaux premiers d'un corps quadratique  
imaginaire de nombre de classes un**

*Astérisque*, tome 24-25 (1975), p. 75-80

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1975\\_\\_24-25\\_\\_75\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__24-25__75_0)

© Société mathématique de France, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉGULARITÉ DES IDÉAUX PREMIERS D'UN CORPS QUADRATIQUE  
IMAGINAIRE DE NOMBRE DE CLASSES UN

par

Gilles ROBERT

---:---

Soit  $K = \mathbb{Q}\sqrt{-d}$  un corps quadratique imaginaire dont l'anneau des entiers  $R$  est principal, c'est-à-dire que  $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$  ou  $163$ . Soit  $R \subset \mathbb{C}$  un réseau tel que les invariants

$$g_2 = 60 \sum_{\gamma \in \Gamma} 1/\gamma^4 \quad \text{et} \quad g_3 = 140 \sum_{\gamma \in \Gamma} 1/\gamma^6$$

soient des entiers rationnels, et tels que la courbe algébrique d'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

soit isomorphe au tore  $\mathbb{C}/R$ .

Soit  $P(z)$  (fonction  $P$  de Weierstrass) la fonction elliptique relative au tore  $\mathbb{C}/\Gamma$  qui satisfait à l'équation différentielle

$$P'^2 = 4P^3 - g_2P - g_3$$

Définissons des nombres rationnels  $E_{2k} \in \mathbb{Q}$ , avec  $k \geq 2$ , par le développement en série de Taylor à l'origine

$$P(z) = 1/z^2 \left( 1 + \sum_{k \geq 2} z^{2k} (2k-1) E_{2k} z^{2k} \right) ;$$

on a  $E_4 = g_2/2^6 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $E_6 = g_3/2^8 \cdot 5 \cdot 7$  et l'on peut calculer les nombres  $E_{2k}$ , pour  $k \geq 4$ , à l'aide de la formule de récurrence

$$E_{2k} (k-3)(4k^2-1)/3 = \sum_{i=2}^{k-2} (2i-1)(2k-2i-1) E_{2i} E_{2k-2i}$$

Soit  $H(z, z')$  la forme hermitienne définie pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z' \in \mathbb{C}$ , par

$$H(z, z') = 12 \pi \bar{z} z' / a$$

où  $a$  est l'aire d'un parallélogramme fondamental de  $\Gamma$ . Il existe une et une seule fonction entière  $\theta^{(12)}(z)$  qui possède les propriétés suivantes propriétés (iii) et (iv) sont des conséquences de (i) et (ii) :

(i) Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , on a

$$\theta^{(12)}(z+\gamma) = \theta^{(12)}(z) \exp(H(\gamma, z) + H(\gamma, \gamma)/2) ;$$

(ii) On a  $\lim_{z \rightarrow 0} \theta^{(12)}(z)/z^{12} = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  ;

(iii) Les zéros de  $\theta^{(12)}$  sont les points de  $\Gamma$  chacun d'ordre 12 ;

(iv) On a  $-d^2 \log \theta^{(12)}(z)/dz^2 = 12(4E_2 + P(z))$ , où  $E_2 \in \mathbb{Q}$ .

Cf. Robert [3] et [4] §.1. Les nombres  $E_{2k}$ , avec  $k \geq 1$ , sont  $\neq 0$  si et seulement si  $d \neq 1$  et  $\neq 3$ , ou  $d = 1$  et  $k \equiv 0 \pmod{2}$ , ou  $d = 3$  et  $k \equiv 0 \pmod{3}$ .

Soit  $p$  un nombre premier  $\neq 2$ ,  $\neq 3$  et  $\neq d$ . Soit  $\mathfrak{P}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus de  $(p)$ . Notons  $K'$  la plus grande extension abélienne de  $K$  de conducteur  $\mathfrak{P}$ . Soit  $t \in \mathbb{C}$  un point de  $\mathfrak{P}$ -division du tore  $\mathbb{C}/\Gamma$ , c'est-à-dire un nombre complexe  $t$  tel que :

$$\mathfrak{P} = \{ \alpha \in R \mid \alpha t \in \Gamma \} .$$

Les racines de l'unité de  $K'$  et les produits

$$\prod_{i=1}^r \theta^{(12)}(\alpha_i t)^{m_i}$$

- où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in R$  sont des éléments entiers de  $K$  premiers avec  $6p$  et  $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$  des entiers rationnels tels que

$$\sum_{i=1}^r m_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r m_i N(\alpha_i) = 0$$

engendrent un sous-groupe  $\Omega$  du groupe  $E$  de toutes les unités de  $K'$ . Le groupe  $\Omega$  ne dépend pas du choix du point  $t$  de  $\mathfrak{P}$ -division et est invariant pour l'action de  $\text{Gal}(K'/K)$ .

Nous déduisons de la formule de décomposition de la fonction zêta de  $K'$ , extension abélienne de  $K$ , en produit de séries  $L$  (à l'aide d'une variante de la technique déjà développée par Ramachandra [2]) le résultat suivant (cf. Robert [3] et [4] th. 16, §. 6-5) :

THÉORÈME. - L'indice de  $\Omega$  dans  $E$  est fini, il est donné par la formule

$$\frac{E}{\Omega} = 12^{(K':K)-1} h_{K'}$$

où  $h_{K'}$  désigne le nombre de classes absolu du corps  $K'$ .

Ce théorème permet de ramener l'étude de la  $p$ -composante du groupe de classes absolu de  $K'$  à celle de la  $p$ -composante du groupe  $E/\Omega$ . Donnons quelques résultats dans cette direction.

On sait que le groupe  $G = \text{Gal}(K'/K)$  est isomorphe au quotient du groupe  $(\mathbb{R}/\mathfrak{p})^*$  par le groupe des unités de  $K$  (dont l'ordre est  $e$ , avec  $e = 2$  si

$d \neq 1$  et  $\neq 3$ , et  $e = 4$  ou  $6$  suivant que  $d = 1$  ou  $3$ ). Soit  $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  le corps premier de caractéristique  $p$ ; l'algèbre de groupe  $F_p(G)$  est semi-simple, et agit naturellement sur  $\Lambda = E/\Omega E^P$ . Pour tout caractère irréductible  $\chi$  de  $F_p(G)$  posons

$$1_\chi = \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g/(G:1) ;$$

les nombres  $1_\chi$  appartiennent à  $F_p(G)$ , et nous avons

$$\Lambda = \bigoplus_{\chi} \Lambda \cdot 1_\chi .$$

Distinguons deux situations :

1) On a  $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}^2$ , d'où  $N(\mathcal{P}) = p$ ; le corps  $R/\mathcal{P}$  est alors isomorphe à  $F_p$ .

Les caractères irréductibles qui interviennent dans la représentation de  $F_p(G)$  sur  $\Lambda$  sont les caractères  $\chi_k$  définis sur  $R/\mathcal{P}$  par

$$\alpha \longmapsto \alpha^{ek}, \quad 2 \leq ek \leq p-3 .$$

Ces caractères apparaissent chacun avec la multiplicité  $1$  ou  $0$ ; posons

$\Lambda_{ek} = \Lambda \cdot 1_{\chi_k}$ , nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME. - Les nombres rationnels  $E_2, E_4, \dots, E_{p-3}$  sont p-entiers; si  $\Lambda_{ek} \neq (1)$ , alors  $p | E_{ek}$ .

2) On a  $\mathcal{P} = (p)$ , d'où  $N(\mathcal{P}) = p^2$ ; le corps  $F_p$  est alors isomorphe à l'ensemble des éléments  $\alpha$  de  $R/\mathcal{P}$  tels que  $\alpha = \alpha^P$ .

Les caractères irréductibles qui interviennent dans la représentation

RÉGULARITÉ DES IDÉAUX PREMIERS

de  $\mathbb{F}_p(G)$  sur  $\Lambda$  sont d'une part les caractères  $\chi_k$  définis par

$$\alpha \longmapsto \alpha^{k(p+1)}, \quad 1 \leq k \leq p-2 \quad ;$$

d'autre part les caractères  $\psi_k$  définis par

$$\alpha \longmapsto \alpha^{ek} + \alpha^{ek'}, \quad ,$$

avec  $2 \leq ek < ek' \leq p^2 - 3$  et  $ek \equiv pek' \pmod{p^2 - 1}$  .

Ces caractères apparaissent chacun avec la multiplicité 1 ou 0 ; posons

$$\Lambda_{k(p+1)} = \Lambda \cdot 1_{\chi_k} \quad \text{et} \quad \Lambda_{ek} = \Lambda \cdot 1_{\psi_k} \quad ; \quad \text{nous avons le résultat suivant :}$$

**THÉORÈME.** - Les nombres rationnels  $E_2, E_4, \dots, E_{p-1}, pE_{p+1}, E_{p+3}, \dots, E_{p^2-3}$  sont p-entiers. Si  $\Lambda_{p+1} \neq (1)$  le nombre  $E_{p+1}$  est p-entier ; si  $\Lambda_{k(p+1)} \neq (1)$  avec  $2 \leq k \leq p-2$  alors  $p | E_{k(p+1)}$  ; si  $\Lambda_{ek} \neq (1)$  et  $ek$  n'est pas divisible par  $p+1$  alors  $p | E_{ek}$  et  $p | E_{ek'}$  .

Pour le corps  $K = \mathbb{Q}\sqrt{-1}$  et la courbe d'équation

$$y^2 = 4x^3 - 4x .$$

Hurwitz [1] a calculé les nombres  $4!E_4, 8!E_8, \dots$  jusqu'à  $48!E_{48}$  . Concernant le nombre premier 7, non décomposé dans  $\mathbb{Q}\sqrt{-1}$ , il résulte de sa table que les nombres  $E_4, 7E_8, E_{12}, \dots, E_{44}$  sont 7-entiers comme le demande le théorème et qu'aucun d'entre eux n'est divisible par 7 ; par conséquent l'idéal (7) est régulier pour  $\mathbb{Q}\sqrt{-1}$  .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HURWITZ. - Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Funktionen. Math. Ann., Bd 51 (1899) pp. 196-226.

G. ROBERT

- [2] K. RAMACHANDRA. - Some applications of Kronecker's limit formulas.  
Ann. of Math., n° 80 (1964) pp. 104-148.
- [3] G. ROBERT. - Unités elliptiques et formules pour le nombre de classes.  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (17 déc. 1973) série A, p. 1143.
- [4] G. ROBERT. - Unités elliptiques et formules pour le nombre de classes  
des extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire.  
Bull. Soc. math. France, mémoire 36 (1974).

-:-:-

Gilles ROBERT  
99, rue R. Losserand  
75014 PARIS