PHILIPPE COURRÈGE
PIERRE RENOUARD

Oscillateur anharmonique. Mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et théorie quantique des champs en dimension $d = 1$

Astérisque, tome 22-23 (1975), p. 3-245
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1975__22-23__3_0>

OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

MESURES QUASI-INVARIANTES SUR $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

ET THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS EN DIMENSION $d = 1$

par

Philippe COURRÈGE

et

Pierre RENOUARD

UER de Mathématiques de l'Université de Paris VII

et Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique

***

TABLE DES MATIÈRES

* * *

INTRODUCTION

Ce travail a été inspiré par les premières pages de l'exposé [5] où Cartier présente, en un raccourci magistral, les idées de Schwinger et Symanzik concernant les liens entre la virtuelle équation du champ quantique et celles du champ Euclidien, puis rattache ces idées à la théorie de Guelfand sur la correspondance entre représentations de Weyl et mesures quasi-invariantes sur les EVT(1). Malheureusement, la difficulté extrême des problèmes techniques que pose la théorie fait que l'on ne sait pas, actuellement, mettre en œuvre ces idées(2) et que les équations en cause restent "formelles" ; cela, non seulement dans le cas "physique" où d = 4 (d désigne la dimension de l'espace temps), mais même dans le cas où d = 2. Par contre, il se trouve que dans le cas où d = 1 (cas "trivial" où l'espace est réduit à $\{0\}$), les problèmes sont abordables par des techniques bien au point (entre autres celles de la théorie Hilbertienne des équations paraboliques et celles de la théorie probabiliste des processus de diffusion), et que toutes les équations présentées par Cartier au § 1 de [5] peuvent être alors posées et résolues rigoureusement : c'est l'objet de ce mémoire que d'expliciter une manière d'y parvenir. Et, indépendamment de la théorie des champs qui les ont motivés, les développements ainsi obtenus relient les processus de diffusion aux mesures quasi-invariantes sur leurs espaces de trajectoires, et ces dernières à certaines équations fonctionnelles en dimension infinie.

Ainsi, le sujet, quoique très centré, touche à plusieurs spécialités ; et on a pris ici le parti de le présenter de façon à peu près autonome : au niveau technique, ce travail ne réclame de connaissances

----

(2) Il est question ici des idées mentionnées ci-dessus concernant les équations du champ quantique ou du champ Euclidien, et non des idées qui ont été mises en œuvre dans la théorie constructive de Glimm et Jaffe ou dans la théorie Euclidienne de Nelson.

(1) Pour cette théorie, voir le § IV.5.2 de [19] et l'appendice A ci-dessous.

préalables ni en théorie des champs, ni en théorie des processus de diffusion ; en particulier, une connaissance de l'exposé de Cartier précité n'est pas indispensable, formellement. Cependant, au niveau des motivations, un lecteur non averti de la théorie des champs se trouvera sans doute plus à l'aise après avoir lu au moins le § 1 de cet exposé, et cette lecture pourrait être faite parallèlement à celle du "condensé" de la matière en cause qui suit. En tout cas, que ce lecteur ne s'imagine pas qu'il va trouver ici des éclaircissements sur l'interprétation physique de la Théorie. Et même il serait sans doute assez vain de chercher une signification physique aux objets mathématiques étudiés ci-dessous : le modèle envisagé (avec d = 1) ne présente un intérêt en Théorie des champs que comme préfiguration formelle (du point de vue des liens entre les diverses équations du champ) des modèles "physiques" à mettre en place (avec d = 4).

***

Bref, voici ce dont il est question : il s'agit de montrer comment l'étude de certaines mesures quasi-invariantes permet d'expliciter le lien entre les équations du champ quantique et celles du champ Euclidien. Pour ce faire (voir l'alinéa c/ ci-dessous), on commence par définir ces champs :

a/ Champ quantique : construction de Guelfand-Segal - Etant donné un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, un germe de champ (quantique) dans $\mathcal{H}$ est un triplet (Φ_o, π_o, H) d'opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$ tel que, d'une part,

(I.1) $[\Phi_o, \pi_o]^- = i\, I$ (1) (relation de commutation canonique),

----

(1) Si A, B et C sont des opérateurs non bornés dans $\mathcal{H}$, la relation $[A,B]^- = C$ signifie que l'opérateur $[A,B] = AB - BA$ est préfermé et que sa fermeture coïncide avec C ; voir aussi CO (Appendice C).

et d'autre part, l'opérateur H (le Hamiltonien) est positif, admet 0 comme valeur propre simple et vérifie,

$$(I.2) \qquad \overline{[H, \Phi_o]} = - i \, \pi_o$$

De plus, désignant par Q un polynôme réel dérivée d'un polynôme borné inférieurement et non constant, on dira que le germe (Φ_o, π_o, H) admet l'interaction Q si on a ,

$$(I.3) \qquad \overline{[H, \pi_o]} = i \, Q(\Phi_o)$$

Le champ (quantique) associé au germe (Φ_o, π_o, H) est la famille $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$ définie par,

$$(I.4) \qquad \Phi_t = e^{itH} \, \Phi_o \, e^{-itH} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Et il n'est pas difficile de vérifier formellement (1) que la relation (I.2) signifie que $\left.\frac{d}{dt}\right/_{t=0} \Phi_t = \pi_o$ et que (I.3) équivaut à,

$$(I.5) \qquad \left.\frac{d^2}{ds^2}\right/_{s=t} \Phi_s + Q(\Phi_t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Les relations (I.3) et (I.5) sont deux formes équivalentes de l'équation du champ qui est en cause. On comparera les relations (I.1), (I.2), (I.3), (I.4) et (I.5) ci-dessus aux relations (4), (5), (6), (7) et (1) de Cartier dans [5]. Cela étant, deux résultats sont à retenir ici. Le premier concerne l'existence et l'unicité d'un champ : Lorsque le système (Φ_o, π_o) est donné de façon standard (ainsi que le polynôme Q), il y a existence et unicité d'un Hamiltonien H vérifiant l'équation (I.3) (plus des conditions de régularité convenables), et on a,

$$(I.6) \qquad H = \overline{\left(\frac{1}{2} \pi_o^2 + \hat{Q}(\Phi_o)\right)}$$

----

(1) voir l'alinéa 1.2 (§ 1) où cela est fait rigoureusement.

où $\hat{Q}$ est une primitive de Q [1] (on retrouve ainsi le Hamiltonien de l'oscillateur anharmonique [2]). Le second résultat concerne la <u>construction de Guelfand-Segal</u> : Etant donnée une mesure de probabilité ξ sur $\mathbb{R}$ admettant une densité ρ régulière et partout > 0, on définit des opérateurs Φ_o, π_o et H dans $L^2(\mathbb{R},\xi)$ symétriques, fermés et admettant $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ comme cœur en posant,

(I.7) $$\Phi_o \psi(x) = x\ \psi(x)$$

(I.8) $$\pi_o \psi(x) = \frac{1}{i}\ (\psi'(x) - \zeta(x)\ \psi(x))$$

(I.9) $$H\psi(x) = -\frac{1}{2}\ \psi''(x) + \zeta(x)\psi'(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ \psi \in \mathfrak{D}),$$ où

(I.10) $$\zeta(x) = -\frac{1}{2}\ \rho'(x)/\rho(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

L'opérateur H dans $L^2(\mathbb{R},\xi)$ ainsi défini est <u>le Hamiltonien</u> engendré par la mesure ξ [3]. De plus, pour que ce triplet (Φ_o,π_o,H) soit un germe de champ dans $L^2(\mathbb{R},\xi)$ admettant l'interaction Q, il faut et il suffit que,

(I.11) $$\zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = Q \quad ;$$

et cette équation admet une solution ρ et une seule, régulière, partout > 0 et d'intégrale 1 (en fait, cette solution est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La mesure ξ correspondante est la <u>mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par l'interaction</u> Q [4][5]. Ainsi, la construction du champ quantique d'inter-

----

(1) Voir 1.3.
(2) Voir l'appendice B
(3) Voir 1.4.
(4) Voir I.5.
(5) Sur $\mathbb{R}$, les mesures quasi-invariantes par translations sont celles qui sont équivalentes à la mesure de Lebesgue ; voir A2 (Appendice A).

action Q est ramenée à la détermination de la mesure quasi-invariante ξ via la résolution de l'équation (I.11).

b/ Champ Euclidien : mesures Euclidiennes et construction de Nelson

Soient $\mathbb{W}$ le sous-espace de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions $\omega \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\int_{\mathbb{R}} |\omega(t)|^p (1+t^2)^{-1} dt < +\infty$ pour tout $p>0$ [1] $\mathcal{F}$ (resp $\mathcal{F}_J$, pour chaque $J \subset \mathbb{R}$) la tribu sur $\mathbb{W}$ est engendrée par les projections $X_T : \omega \to \omega(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ (resp par les projections X_t avec $t \in J$) et S (resp θ_u, pour chaque $u \in \mathbb{R}$) la transformation de $\mathbb{W}$ définie par $X_t \circ S = X_{-t}$ (resp $X_t \circ \theta_u = X_{t+u}$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$). On appelle ici mesure Euclidienne toute mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W}, \mathcal{F})$ invariante par les transformations $\theta_t (t \in \mathbb{R})$ et S (propriété d'invariance Euclidienne) et possédant la propriété de Markov.

$$(I.12) \qquad E_\mu[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] = E_\mu[Z/\mathcal{F}_{\{t\}}]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^2(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\mu)$ où $E_\mu[\cdot/\mathcal{F}_J]$ désigne le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$ sur $L^2(\mathbb{W},\mathcal{F}_J,\mu)$. La construction de Nelson[2] consiste à associer à une telle mesure μ le couple (μ_o,H_μ) où μ_o est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui est l'image commune de μ par les $X_t (t \in \mathbb{R})$ et où H_μ est l'unique opérateur auto-adjoint positif dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ tel que l'on ait,

$$(I.13) \qquad (e^{-tH_\mu}\psi) \circ X_o = E_\mu[\psi \circ X_t/\mathcal{F}_{\{0\}}] \qquad (t \geq 0)$$ [3]

La correspondance entre μ et (μ_o,H_μ) pose de nombreux problèmes ; on retient seulement ici le résultat suivant concernant la construction d'une mesure Euclidienne μ à partir du couple (μ_o,H_μ) : si ξ est la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par l'interaction Q, et si H est le Hamiltonien engendré par ξ (voir a/ ci-dessus), alors il existe une

----

(1) Voir 2.6.1. à propos de cette définition.

(2) ou plutôt une forme très particulière que prend cette construction dans le cas où d = 1 (voir le § 3 de [6] et le § 3 de [5]

(3) Voir 6.1.1.

mesure Euclidienne μ et une seule telle que,

$$\mu_o = \xi \quad \text{et} \quad H_\mu \doteq H \quad {}^{(1)}. \tag{I.14}$$

Cette mesure est la <u>mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction</u> Q. Ce résultat repose essentiellement sur le caractère Markovien du semi-groupe $(e^{-tH})_{t \geqslant 0}$ (2) et sur la décroissance rapide de la densité ρ de ξ.

Le système $(W, \mathfrak{F}, \mu\ ;\ (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}\ ;\ (X_t)_{t \in \mathbb{R}})$ e t un <u>processus de Markov stationnaire</u> quelle que soit la mesure Euclidienne μ. C'est un <u>processus de diffusion</u> lorsque μ est la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q (3).

Enfin, à chaque mesure Euclidienne μ est associé le <u>champ Euclidien</u> $(W, \mathfrak{F}, \mu\ ;\ \Sigma_\mu)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (4) obtenu en désignant par Σ_μ l'application de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^o(W, \mathfrak{F}, \mu)$ qui, à chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, fait correspondre la classe modulo μ de la fonction $\mathfrak{F}$- mesurable $\omega \to \langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \omega(t)\ f(t)\ dt$.

c/ <u>Equations du champ Euclidien</u> : <u>quasi-invariance de la mesure Euclidienne</u> . Soit μ la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q, On cherche à caractériser μ directement et explicitement en termes de Q, et pas seulement par la relation (I.14) qui la définit en termes du couple (ξ, H) que fournit la construction du Guelfand-Segal via la résolution de l'équation (I.11). Le résultat de base obtenu à ce sujet est le suivant : La mesure μ est quasi-invariante par les translations de $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}\ ,\ \mathbb{R})$, et, plus précisément, on a (5),

----

(1) Voir 2.1.3.

(2) Voir 2.1.2.

(3) Voir 2.1.4. et [27]

(4) Selon la définition donnée par Nelson au § 6 de [6] avec $\mathcal{S}$ mis pour $\mathcal{D}$; voir 2.3.

(5) Voir 5.2.1 et la remarque de 5.3.3.

$$(\mathrm{I}.15)\quad \int_{\mathbb{W}} F(\omega-f)\mu(d\omega) = \int_{\mathbb{W}} F(\omega)e^{\Lambda(f,\omega)}\mu(d\omega) \quad (f \in \mathcal{S}\ ,\ F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W},\mathcal{O})),\ \text{où}\ ,$$

$$(\mathrm{I}.16)\quad \Lambda(f,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \{[\omega(t)+ \frac{1}{2} f(t)]f''(t) - [\hat{Q}(\omega(t)+f(t)) - \hat{Q}(\omega(t))]\}dt \quad (\omega \in \mathbb{W}),$$

où $\hat{Q}$ désigne une primitive de Q(1). De plus, et ce point est primordial, μ est la seule mesure Euclidienne vérifiant (I.15) et pour laquelle le couple (μ_o, H_μ) vérifie des conditions de régularité standard (2).

Cette propriété de quasi-invariance de μ a diverses conséquences qui en apparaissent comme des formes infinitésimales(3). D'abord, la transformée de Fourier $\mathbb{I}$ de μ vérifie l'équation de Symanzik,

$$(\mathrm{I}.17)\quad - \frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \partial_s \mathbb{I}(g) + i\ Q(\frac{1}{i}\partial_t)\ \mathbb{I}(g) + g(t)\ \mathbb{I}(g) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}\ ,\ g \in \mathcal{S}\ ),$$

où la dérivée fonctionnelle est définie par,

$$(\mathrm{I}.18)\quad \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \partial_t\ \mathbb{I}(g)\ dt = \frac{d}{d\varepsilon}\Big/_{\varepsilon=0} \mathbb{I}\ (g + \varepsilon f) \quad (f \in \mathcal{S}).$$

La fonctionnelle $\mathbb{I}$ est définie ici par,

$$(\mathrm{I}.19)\quad \mathbb{I}(g) = \int_{\mathbb{W}} e^{i < \omega, g >} \mu(d\omega) \quad (g \in \mathcal{S})\ ,$$

------

(1) Voir 4.1.2.

(2) Voir 6.1.2

(3) Voir 5.2.1 et la remarque de 5.3.3.

et appartient à une classe $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$ de fonctions sur $\mathcal{S}$ indéfiniment différentiable au sens de Gateaux ; classe laissée stable par l'opérateur ∂_t, ce qui donne un sens au second terme de (I.17)[1]. Puis, de l'équation de Symanzik que vérifie $\mathbb{I}$ découlent les équations de Schwinger : Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit une fonction continue, bornée et symétrique sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\text{(I.20)} \qquad S_n(t_1,\dots,t_n) = i^{-n}\,\partial_{t_1}\dots\partial_{t_n}\,\mathbb{I}(0) = \int_{\mathbb{W}} \prod_{j=1}^{n} \omega(t_j)\,\mu(d\omega)$$

$$((t_j) \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

et la suite $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ avec $S_o = 1$ vérifie,

$$\text{(I.21)} \quad \int_{\mathbb{R}} f''(t)S_{n+1}(t,t_1,\dots,t_n)dt = -\sum_{j=1}^{n} f(t_j)S_{n-1}(t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n)$$

$$+\sum_{k=0}^{q} a_k \int_{\mathbb{R}} f(t)S_{k+n}(t,\dots,t\ ,t_1,\dots,t_n)dt$$

$$(f \in \mathcal{S}\ ,\ n \text{ entier} \geqslant 0,\ (t_j) \in \mathbb{R}^n),\ \text{où},$$

$$\text{(I.22)} \qquad Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$$

(le premier terme au second membre étant pris égal à 0 si $n = 0$).

En outre,

$$\text{(I.23)} \quad \mathbb{I}(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} S_n(t_1,\dots,t_n) \prod_{j=1}^{n} g(t_j)dt_1 \dots dt_n \qquad (g \in \mathcal{S}),$$

la série au second membre étant absolument convergente[2]. On comparera

----

(1) Voir 5.1.

(2) Voir 5.3.

les relations (I.15), (I.16), (I.17) et (I.21) ci-dessus aux relations (31), (30), (16) et (13) de [5] ; en particulier, le problème posé par Cartier au bas de la page 418-07 est résolu dans le cas où $d = 1$. On note la manière dont la quasi-invariance de μ_o fait écho à celle de μ : Pour μ, mesure sur l'espace fonctionnel $\mathbb{W}$, le module de quasi-invariance e^{Λ} est explicitement donné en termes de Q par (I.17) ; tandis que pour μ_o, mesure sur $\mathbb{R}$, le module de quasi-invariance e^{Λ_o} [avec $\Lambda_o(x,y) = \text{Log}\ (\rho(x+y)/\rho(y))$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (1)] n'est obtenu qu'implicitement en termes de Q via l'équation (I.11).

Enfin, dans le cas du champ libre de masse $m > 0$ (cas où $Q(x) = m^2 X$), μ est la seule mesure de probabilité sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{S})$ vérifiant (I.15), $\mathbb{J}$ le seul élément de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{F})$ solution de (I . 17) et tel que $\mathbb{J}(0) = 1$, et $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ le seul élément de $\prod_{n=0}^{\infty} C_b(\mathbb{R}^n)$ solution de (I.21) et tel que $S_o = 1$ (2). On conjecture que, dans le cas d'un polynôme d'interaction Q quelconque, il en est de même, au moins, en ce qui concerne les deux dernières propriétés, si on impose à $\mathbb{J}$ et à S de dériver d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{S})$.

***

A propos des idées directrices et particularités de ce travail, on peut souligner (entre autres ; voir aussi 6.5) les points suivants :
Du point de vue de la théorie des champs, se limitant à un système d'axiomes très spécial au cas $d = 1$, on étudie résolument le champ (quantique et Euclidien) <u>à partir de l'équation d'interaction supposée donnée d'avance</u>, plutôt que par perturbation du champ libre ainsi que le fait la théorie constructive.
Et en ce qui concerne les processus de diffusion en cause, on s'intéresse davantage aux propriétés fonctionnelles des mesures sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aux -

----

(1) Voir A1, A2 et 1.7.3.

(2) Voir 6.4.1.

quelles ils correspondent qu'à leur aspect probabiliste, tandis que, ainsi qu'il est naturel de la faire dans le contexte Hilbertien de la Théorie Quantique, les semi-groupes Markoviens qui interviennent sont considérés comme semi-groupes d'opérateurs auto-adjoints dans l'espace L^2 de leur mesure invariante, plutôt que comme semi-groupes de noyaux-mesures [(1)]. A ce propos, on s'est permis de redémontrer dans le contexte intervenant ici divers résultats "bien connus" dans les contextes plus généraux (par exemple les formules de Feynman-Kac[(2)] et Cameron-Martin[(3)]).

***

Nous remercions vivement Claude Bardos et Pierre Priouret pour leur collaboration. Le premier à propos de divers résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle[(4)] ; et le second à propos des liens de ce travail avec la Théorie des processus de diffusion. Nous remercions aussi Dimitri Fotiadi et Jean Lascoux pour leurs observations et leur soutien. Et nous saluons encore Cartier pour la vision de la Théorie des champs que nous a apportée son exposé précité.

------

(1)Voir 2.1.4 à ce sujet.

(2) Voir 3.1.

(3) Voir 3.5.

(4) Appendices B,C et D.

§1.- CHAMP QUANTIQUE EN DIMENSION d = 1 : ÉQUATION, HAMILTONIEN ET MESURE QUASI-INVARIANTE CORRESPONDANTS

Dans ce paragraphe, on introduit les opérateurs différentiels qui interviendront dans la suite : à chaque mesure de probabilité μ_o sur $\mathbb{R}$, de densité ρ partout >0 et de classe C^∞, on attache l'opérateur symétrique fermé H dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ défini, avec $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme cœur par,

$$\text{(1.i)} \quad H\psi = -\frac{1}{2}\psi'' + \zeta\psi' \qquad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})), \qquad \text{où } \zeta = -\frac{1}{2}\rho'/\rho$$

[voir le Théorème 1.II en 1.4, le Lemme 1.5 et la Proposition 1.6 (1)].

En fait, le but de ce paragraphe est d'expliciter comment certains de ces opérateurs peuvent être considérés comme Hamiltoniens de champs quantiques en dimension d'espace temps d = 1. Pour cela, on commence en 1.1 par énoncer pour un tel champ (considéré comme une famille $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$) un système d'axiomes incluant la relation de commutation canonique à chaque instant,

(C) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[\Phi_t, \pi_t] = iI$, avec $\pi_t = \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \Phi_s$, et l'équation,

(D) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \Phi_s + Q(\Phi_t) = 0$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est le "polynôme d'interaction." Puis on montre en 1.2 comment (C) et (D) se traduisent pour le Hamiltonien H [assurant l'invariance du champ par translation via la relation $\Phi_t = e^{itH}\Phi_o e^{-itH}$ $(t \in \mathbb{R})$] respectivement par les relations,

----

(1) Un lecteur principalement intéressé par l'aspect "processus de diffusion et mesures quasi-invariantes" de cet article peut se contenter de prendre connaissance de ces résultats avant de passer au §2.

$$(C_1)\quad \pi_o = i[H,\Phi_o],\qquad \text{et } (D_1)\quad Q(\Phi_o) = -i[H,\pi_o]^{(1)}\quad ;$$

ce qui permet en 1.3 (Théorème 1.I) d'établir, lorsque le système de Heisenberg (Φ_o,π_o) et l'interaction Q sont donnés, l'existence et l'unicité de H (donc aussi du champ) sous forme de l'opérateur anharmonique $\frac{1}{2}\pi_o^2 + \hat{Q}(\Phi_o)$ où $\hat{Q}$ est une primitive de Q déterminée sans ambiguité par la condition spectrale ($H \geqslant 0$) et l'existence du vecteur vide (Q devant être tel que $\hat{Q}$ soit borné inférieurement).

On étudie ensuite en 1.4 et 1.5 comment on peut réaliser le système (Φ_o,π_o,H) dans un espace $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ (où μ_o est, comme ci-dessus une mesure de probabilités quasi-invariante sur $\mathbb{R}$), de telle sorte que (Φ_o,π_o) soit le système de Heisenberg canoniquement associé à μ_o selon la théorie de Guelfand [2] et que le vecteur vide Ω_o soit la constante 1 : ces conditions déterminent de façon unique, lorsque Q est donné, la mesure μ_o par les équations équivalentes,

$$(d)\qquad \zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = Q \qquad (d'')\ -\frac{1}{2}(\rho^{1/2})'' + \hat{Q}\,\rho^{1/2} = 0,$$

et H est alors l'opérateur différentiel défini ci-dessus par la relation (1.i) [voir en 1.5 le Lemme et le Théorème 1.III].

1.1.- Axiomes d'un champ quantique en dimension d = 1

1.1.1.- Désignant par Q un polynôme à coefficients réels [3], un champ quantique d'interaction Q peut être défini comme suit lorsque la dimension d'espace temps d est réduite à 1 :

Etant donné un espace de Hilbert complexe et séparable $\mathcal{H}$[4], on considère un système $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \Omega_o, H, \Phi)$, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ [le domaine], Ω_o un vecteur de $\mathcal{D}$ tel que $\|\Omega_o\| = 1$ [le vecteur vide]

---

(1) En 1.1 et 1.2 sont introduits des cœurs sur lesquels les relations (C), (D), (C_1) et (D_1) deviennent mathématiquement correctes.

(2) Voir A.5 (Appendice A).

(3) Voir la remarque 1.7.5.

(4) Avec les notations et la terminologie introduites en CO (Appendice C).

H un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$ [l'opérateur Hamiltonien] et $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$(1) [les opérateurs de champ (à temps constant)] . Un tel système sera appelé champ quantique dans $\mathcal{H}$ (ou seulement champ) si les axiomes A, B et C ci-dessous sont satisfaits :

AXIOME A (condition spectrale).- L'opérateur H est positif (2) dans $\mathcal{H}$, et on a,

(1.1.1) $$\{\psi \,|\, \psi \in D(H) \text{ et } H\psi = 0\} = \{\lambda\Omega_0 \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

AXIOME B (invariance).- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'opérateur unitaire e^{itH} applique $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, et, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a,

(1.1.2) $$\Phi_{t+s} = e^{itH}\Phi_s\, e^{-itH}$$

Ainsi la famille $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ des opérateurs de champ est entièrement déterminée par la donnée des opérateurs Φ_0 et H, et par la relation,

(1.1.3) $$\Phi_t = e^{itH}\, \Phi_0\, e^{-itH} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

AXIOME C (relation de commutation canonique à chaque instant).- Pour chaque $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \in D(\Phi_t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'application $t \to \Phi_t\psi$ est continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$; de plus, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ est un cœur pour Φ_t, et il existe un opérateur auto-adjoint π_t sur $\mathcal{H}$ admettant $\mathcal{D}$ comme cœur et tel que, d'une part (Φ_t, π_t) constitue un système de Heisenberg standard (3) sur $\mathcal{H}$, et d'autre part,

(1.1.4) $$\pi_t\psi = \frac{d}{du}\Big/_{u=t} \Phi_u\psi \qquad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D} .$$

----

(1) On se limite aux champs scalaires neutres.
(2) i.e accrétif (voir C1).
(3) Voir A.5 (appendice A).

On note que, puisque $\mathcal{D}$ est supposé être un cœur pour π_t, cet opérateur est déterminé sans ambiguité par la donnée de Φ et la relation (1.1.4) ; en outre, en vertu de l'invariance (axiome B), on a,

$$(1.1.5) \qquad \pi_t = e^{itH}\, \pi_o\, e^{-itH} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On dira que le <u>champ Φ admet l'interaction Q</u> s'il vérifie, en plus,

<u>AXIOME D</u> (<u>Equation du champ</u>).- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset D(Q(\Phi_t))$; et pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, l'application $t \to \Phi_t\psi$ est deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$, et on a,

$$(1.1.6) \qquad \frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \Phi_s\psi + Q(\Phi_t)\psi = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

<u>1.1.2</u>.- Les axiomes A et B sont ce qui reste, lorsque d = 1, des axiomes O, I et II de Wightman (voir [1] pages 97 à 100) modifiés pour inclure l'existence des opérateurs à temps constant Φ_t ; lesquels permettent de formuler la relation de commutation canonique à chaque instant (Axiome C) et - contrairement à ce qui se passe lorsque $d \geqslant 2$ - l'équation du champ (1.1.6) (Axiome D). L'axiome III (causalité) n'a pas de correspondant formel ici; mais est remplacé par l'axiome C[(1)]; et l'irréductibilité postulée pour les systèmes (Φ_t, π_t) (par définition même d'un système de Heisenberg standard ; voir A5) entraîne que le vecteur vide Ω_o est cyclique pour chacun des opérateurs $\Phi_t (t \in \mathbb{R})$.

<u>1.1.3</u>.- En posant les axiomes précédents, on a en vue un théorème d'existence et d'unicité d'un champ les satisfaisant lorsque le polynôme d'interaction Q est <u>donné a priori</u> ; cela afin d'obtenir une classification des champs en fonction de la caractéristique "interaction". Lorsque Q est la dérivée d'un polynôme borné inférieurement, un tel résultat sera établi en 1.3 (corollaire 4 du Théorème 1.I). L'unicité va avoir lieu "à une équivalence près" que l'on peut définir comme suit : appelant <u>germe</u> du champ Φ le triplet (Φ_o, π_o, H) d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$; on convient de dire que deux champs Φ et $\hat{\Phi}$ sur les es-

----

(1) voir le bas de la page 100 de [1]

paces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\hat{\mathcal{H}}$ sont <u>équivalents</u> si leurs germes se correspondent par une transformation unitaire U de $\mathcal{H}$ sur $\hat{\mathcal{H}}$ (i.e si $\hat{\Phi}_o = U\Phi_o U^{-1}$, $\hat{\pi}_o = U\pi_o U^{-1}$ et $\hat{H} = UHU^{-1}$). Le numéro suivant est consacré à l'expression des axiomes C et D en termes du germe (Φ_o,π_o,H).

1.2.- Intervention des commutateurs $[H,\Phi_o]$ et $[H,\pi_o]$

On désigne ici par (Φ_o,π_o,H) un triplet d'opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (1) et on en considère les propriétés suivantes :

(C') Φ_o et π_o sont dominés par H.

(C") $H\Phi_o$ et $H\pi_o$ sont dominés par H^2 (2).

On note que ces propriétés incluent que,

(1.2.1) $D(H) \subset D(\Phi_o) \cap D(\pi_o)$ et $D(H^2) \subset D([H,\Phi_o]) \cap D([H,\pi_o])$ (3)

En outre, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit les opérateurs auto-adjoints Φ_t et π_t sur $\mathcal{H}$ par les égalités,

(1.2.2) $\Phi_t = e^{itH}\,\Phi_o\,e^{-itH}$ et $\pi_t = e^{itH}\,\pi_o\,e^{-itH}$.

Cela étant,

<u>PROPOSITION</u>.- Soient (Φ_o,π_o,H) un triplet d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ possédant les propriétés (C') et (C") cidessus, et $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel de $D(H^2)$ tel que l'opérateur unitaire e^{itH} applique $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors,

----

(1) A priori quelconque : on ne suppose pas que (Φ_o,π_o,H) est le germe d'un champ.

(2) Voir CO.

(3) Si A et B sont des opérateurs sur $\mathcal{H}$ de domaines D(A) et D(B), on pose $[A\ B] = AB - BA$, domaines compris ; c'est-à-dire $D([A,B]) = D(AB) \cap D(BA)$, avec $D(AB) = \{\psi \mid \psi \in D(B) \text{ et } B\psi \in D(A)\}$.

(1) L'application $t \to \Phi_t\psi$ est continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}$; et pour que,

$$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \Phi_s\psi = \pi_t\psi \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{R} \text{ et } \psi \in \mathcal{D}, \tag{1.2.3}$$

il faut et il suffit que,

$$\pi_o\psi = i[H,\Phi_o]\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}. \tag{1.2.4}$$

(2) Supposant de plus que $\mathcal{D} \subset D(Q(\Phi_o))$ et que (1.2.4) a lieu, l'application $t \to \Phi_t\psi$ est deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}$; et, pour que,

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \Phi_s\psi + Q(\Phi_t)\psi = 0 \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{R} \text{ et } \psi \in \mathcal{D}, \tag{1.2.5}$$

il faut et il suffit que,

$$Q(\Phi_o)\psi = -i\,[H,\pi_o]\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}. \tag{1.2.6}$$

<u>COROLLAIRE</u>.- Soit $\phi = (\mathcal{D}, \Omega_o, H, \Phi)$ un champ dont le germe (Φ_o, π_o, H) possède les propriétés (C') et (C") et vérifie $\mathcal{D} \subset D(H^2) \cap D(Q(\Phi_o))$. Alors, d'une part la relation (1.2.4) est satisfaite ; et d'autre part ϕ admet l'interaction Q si et seulement si la relation (1.2.6) est aussi satisfaite.

Le corollaire résulte immédiatement de la proposition, laquelle découle du lemme suivant :

<u>LEMME</u>.- Soient, dans $\mathcal{H}$, H un opérateur auto-adjoint, et A_o un opérateur (1). On pose, pour chaque $t \in R$, $A_t = e^{itH}A_oe^{-itH}$; et on suppose que (a') A_o est dominé par H, et que (a") HA_o est dominé par H^2 (1). Alors, $D(H^2) \subset D([H,A_o])$; et, pour tout $\psi \in D(H^2)$, l'application $t \to A_t\psi$ est continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$

----

(1) Voir CO.

et on a,

(1.2.7) $$\frac{d}{dt}\Big/_{t=s} A_t\psi = ie^{isH}[H,A_o]e^{-isH}\psi \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}$$ (1)

En effet, soit $\psi \in D(H^2)$; on a $\psi \in D(HA_o)$ d'après (a"), et $H\psi \in D(A_o)$ d'après (a') ; donc $\psi \in D(HA_o) \cap D(A_oH)$; c'est-à-dire $\psi \in D([H,A_o])$. Posons $W(s) = e^{isH}$, et, $F(s,t) = W(s)A_o W(-t)\psi$. Pour établir que l'application $t \to A_t\psi = F(t,t)$ est continûment différentiable, il suffit de montrer que F a des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et on aura alors,

(1.2.8) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} F(s,s) = \frac{\partial}{\partial u}\Big/_{u=t} F(u,t) + \frac{\partial}{\partial v}\Big/_{v=t} F(t,v) .$$

Or, d'abord l'application $u \to F(u,t)$ est dérivable, puisque, d'après (a"), $A_o W(-t)\psi \in D(H)$; et on a,

(1.2.9) $$\frac{\partial}{\partial u}\Big/_{u=s} F(u,t) = i\ W(s)\ H\ A_o W(-t)\ \psi .$$

Ensuite, l'application $v \to A_o W(-v)\psi$ est dérivable, et on a,

(1.2.10) $$\frac{d}{dv}\Big/_{v=t} A_o W(-v)\psi = -i\ A_o H\ W(-t)\psi .$$

En effet, puisque $H\psi \in D(H)$, on a,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(W(-t+h)H\psi - W(-t)H\psi) + iHW(-t)H\psi = 0 \quad ;$$

d'où, puisque $HW(-v)\psi = W(-v)H\psi$ $(v \in \mathbb{R})$,

(1.2.11) $$\lim_{h \to 0} H(\frac{1}{h}(W(-t+h)\psi - W(-t)\psi) + iHW(-t)\psi) = 0.$$

Par ailleurs, puisque $\psi \in D(H)$,

(1.2.12) $$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(W(-t+h)\psi - W(-t)\psi) + iHW(-t)\psi) = 0 \ ;$$

----

(1) Le second membre de (1.2.7) est bien défini puisque l'opérateur unitaire e^{-isH} applique $D(H^2)$ dans lui-même.

mais, (1.211) et (1.2.12), jointes à l'hypothèse (a') entraînent que

$$\lim_{h \to 0} A_o\left(\frac{1}{h}(W(-t+h)\psi - W(-t)\psi) + iHW(-t)\psi\right) = 0.$$

D'où la dérivabilité de $v \to A_o W(-v)\psi$ et (1.2.10) ; donc aussi celle de $v \to F(s,v)$ et la relation,

$$(1.2.13) \qquad \left.\frac{\partial}{\partial v}\right/_{v=t} F(s,v) = -iW(s)A_o HW(-t)\psi.$$

Enfin, la continuité des dérivées partielles de F résulte de façon standard de leurs expressions (1.2.9) et (1.2.13), des hypothèses(a') et (a") respectivement, de la forte continuité de W et de ce que $HW(-t)\psi = W(-t)H\psi$; et on obtient (1.2.7) en portant (1.2.9) et (1.2.13) dans (1.2.8)

cqfd.

1.3.- Détermination du Hamiltonien par l'équation du champ ; existence et unicité d'un champ.

On appellera <u>polynôme d'interaction standard</u> tout polynôme réel Q de degré impair dont le coefficient dominant est > 0. On a alors,

<u>THEOREME</u>.- Soient (Φ_o, π_o) un système de Heisenberg standard dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (1) et Q un polynôme d'interaction standard (2). Il existe un opérateur auto-adjoint H dans $\mathcal{H}$ et un seul ayant les propriétés suivantes où $\mathcal{S}$ désigne le sous-espace dense $C^\infty(\Phi_o, \pi_o)$ de $\mathcal{H}$(1) :

(i) $\mathcal{S} \subset D(H)$ et H applique $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

(ii) $\pi_o\psi = i[H, \Phi_o]\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}$.

----

(1) Voir A5 (Appendice A).

(2) Voir la remarque 1.7.5.

(iii) $Q(\Phi_o)\psi = -i[H,\pi_o]\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}$.

(iV) H est positif et $0 = \inf \sigma(H)$ [1]

De plus, $\mathcal{S}$ est un cœur pour H et, $\hat{Q}$ désignant la primitive centrée de Q [2], on a,

(1.3.1) $$H\psi = \frac{1}{2}\pi_o^2\psi + \hat{Q}(\Phi_o)\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{S}.$$

On dira que H est <u>l'opérateur Hamiltonien dans $\mathcal{H}$ spécifié par le système de Heisenberg</u> (Φ_o,π_o) <u>et l'interaction Q</u>.

<u>COROLLAIRE 1</u>.- L'opérateur anharmonique $\underset{\sim}{H}$ engendré par la primitive centrée $\hat{Q}$ de Q [2] est l'opérateur Hamiltonien dans $L^2(\mathbb{R})$ spécifié par le système de Heisenberg $(\underset{\sim}{\Phi}_o,\underset{\sim}{\pi}_o)$ et l'interaction Q.

<u>COROLLAIRE 2</u>.- [3] Le triplet (Φ_o,π_o,H) possède les propriétés (C') et (C") [4], et on a $D(H) \subset D(Q(\Phi_o))$. En outre, 0 est une valeur propre et simple de H dont les vecteurs propres appartiennent à $\mathcal{S}$.

<u>COROLLAIRE 3</u>.- [4] Soit $\Omega_o \in \mathcal{S}$ tel que $\|\Omega_o\| = 1$ et $H\Omega_o = 0$. Alors, si on pose $\mathcal{D} = D(H^2)$ et si on définit la famille $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ par la relation (1.1.3), le système $(\mathcal{D},\Omega_o,H,\Phi)$ est un champ quantique admettant l'interaction Q [5].

<u>COROLLAIRE 4</u>.- Il existe un champ quantique admettant l'interaction Q, et un seul à une équivalence près, dont le germe [6] possède les propriétés (C'), (C") [4] et (i).

----

(1) $\sigma(H)$ désigne le psectre de H ; voir la remarque ci-dessous.

(2) Voir B1 et B2 (appendice B).

(3) Dans la situation du théorème.

(4) Voir 1.2

(5) Voir 1.1.1.

(6) Voir 1.1.3.

Les corollaires 3 et 4 résultent immédiatement du Théorème et du corollaire 2, ainsi que de la proposition 1.2 et de son corollaire.

Pour établir le théorème et les corollaires 1 et 2, on peut, d'après le Théorème d'unicité de Von Neuman, se ramener au cas où $(\mathcal{H}, \Phi_o, \pi_o)$ est la représentation de Schrödinger : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\Phi_o = \underset{\sim}{\Phi}_o$ et $\pi_o = \underset{\sim}{\pi}_o$ (voir A5). Dans ces conditions, pour montrer l'existence de H, il suffit de montrer que l'opérateur anharmonique H engendré par la primitive centrée $\hat{Q}$ de Q (voir B2) possède les propriétés (i), (ii), (iii) et (iV) [avec ici $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après (A5.3)] ; ce qui est une simple vérification en vertu de la proposition B1 et de la définition de $\underset{\sim}{H}$ (relation (B2.1)). D'où la partie existence du Théorème, ainsi que le corollaire 1. En outre, le corollaire 2 résulte immédiatement des propositions B3 et B5.

Passant maintenant à l'unicité, soit H un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés (i), (ii), (iii) et (iV). L'opérateur H étant fermé dans $L^2(\mathbb{R})$ et appliquant $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, $H/\mathcal{S}$ est un opérateur fermé, donc continu, de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (cet espace étant naturellement muni de sa topologie usuelle d'espace de Fréchet). Cela étant, soit M l'application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ définie par,

$$M\psi = H\psi - \underset{\sim}{H}\psi = H\psi + \frac{1}{2}\psi'' - \hat{Q}\psi \qquad (\psi \in \mathcal{S}),$$

où $\hat{Q}$ désigne la primitive centrée de Q (voir B2). Puisque H et $\underset{\sim}{H}$ vérifient tous deux (iV) (H par hypothèse et $\underset{\sim}{H}$ par définition), pour montrer que $H = \underset{\sim}{H}$ (ce qui établira l'unicité cherchée), il suffit de montrer que M est un multiple de l'identité. Or, H et $\underset{\sim}{H}$ vérifiant tous deux (ii) et (iii) (H par hypothèse et $\underset{\sim}{H}$ d'après le corollaire 1 déjà établi), on a,

(1.3.2.) $M\Phi_o\psi = \Phi_o M\psi$ et $M\pi_o\psi = \pi_o M\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}$.

On est ainsi amené à établir :

LEMME.- Toute application linéaire continue M de $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}$ vérifiant (1.3.2) est un multiple de l'identité.

En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, soit T_x l'opérateur de translation : $\psi \to T_x\psi = \psi(. + x)$ ($\psi \in \mathcal{S}$). On va d'abord montrer que l'hypothèse $MD = DM$ (où $D = i\Pi_o$ est l'opérateur de dérivation : $D\psi = \psi'$) entraîne que $MT_x = T_xM$. Il suffit pour cela de remarquer que, pour chaque $\psi \in \mathcal{S}$, les applications $x \to F_1(x) = T_xM\psi$ et $x \to F_2(x) = MT_x\psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}$ sont continûment dérivables et solutions de l'équation $F'(x) = DF(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) : pour F_1 c'est clair ; et pour F_2 cela résulte de l'hypothèse $MD = DM$ et de la continuité de M via les égalités,

$$F_2'(x) = \frac{d}{dy}\Big/_{y=x} MT_y\psi = M\Big(\frac{d}{dy}\Big/_{y=x} T_y\psi\Big) = MDT_x\psi = DMT_x\psi = DF_2(x).$$

D'où, puisque $F_1(0) = F_2(0) = M\psi$, $F_1(x) = F_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par unicité des solutions de l'équation différentielle linéaire $F'(x) = DF(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) [on peut éviter l'étude de cette équation dans l'espace de Frechet $\mathcal{S}$ en considérant $(T_x)_{x \in \mathbb{R}}$ comme groupe de contractions de l'espace de Banach $C_u(\mathbb{R})$ des fonctions uniformément continues bornées sur $\mathbb{R}$, et D comme le générateur infinitésimal de ce groupe ; voir Yosida [3] pages 235 et 242, et Kato [2] page 481] . De la relation $MT_x = T_xM$ ($x \in \mathbb{R}$) ainsi établie, il résulte que,

$$M\psi(x) = \langle U, T_x\psi \rangle \quad (x \in \mathbb{R},\ \psi \in \mathcal{S}) \tag{1.3.3}$$

où U est la distribution $\psi \to M\psi(0)$ [autrement dit, M est l'opérateur de convolution par $\check{U}$]. Mais d'après (1.3.3), on a, pour $\psi \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$M\Phi_o\psi(x) = \langle U, T_x\Phi_o\psi \rangle = x\langle U, T_x\psi \rangle + \langle U, \Phi_oT_x\psi \rangle,$$

puisque $T_x\Phi_o\psi(y) = (x+y)\psi(x+y) = xT_x\psi(y) + \Phi_oT_x\psi(y)$; d'où $M\Phi_o\psi(x) = \Phi_oM\psi(x) + \langle U, \Phi_oT_x\psi \rangle$; et en vertu de l'hypothèse $M\Phi_o = \Phi_oM$,

$$\langle U, \Phi_o\psi \rangle = 0 \quad (\psi \in \mathcal{S}). \tag{1.3.4}$$

De cette relation, on déduit que Supp U $\subset \{0\}$; ce qui fait que U est de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \delta$; d'où, encore d'après (1.3.4),

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\, a_k D^{k-1}\psi(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k D^k(\Phi_o\psi)(0) = 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{S} ;$$

donc $a_k = 0$ pour $k = 1,2,\ldots,n$. Ainsi $M\psi = a_o\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}$.

cqfd.

<u>Remarque</u>.- Les conditions (i), (ii) et (iii) suffisent, en fait, à déterminer H à une constante additive près, laquelle est fixée par la condition spectrale (iV).

1.4.- <u>Opérateur Hamiltonien engendré par une mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$</u>.

On désigne ici par ρ une fonction numérique sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable et telle que,

(1.4.1) $\qquad$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) > 0$; $\quad$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$,

et on note μ_o la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant ρ comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue. En vertu de (1.4.1), μ_o est une mesure de probabilité quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ (voir A1 et A2, appendice A). On désigne par (Φ_o, π_o) le système de Heisenberg standard sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ engendré par μ_o (voir A6). On sait (voir A6) que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour chacun des opérateurs auto-adjoints Φ_o et π_o et que l'on a,

(1.4.2) $\qquad \Phi_o\psi(x) = x\psi(x)$

$\qquad\qquad (x \in \mathbb{R},\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$,

(1.4.3) $\qquad \pi_o\psi(x) = \frac{1}{i}(\psi'(x) - \zeta(x)\psi(x))$

où ζ est la fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par la relation,

(1.4.4) $\qquad \zeta(x) = -\frac{1}{2}\rho'(x)/\rho(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

On désigne enfin par Ω_o la (classe modulo μ_o de la) fonction constante égale à 1. Cela étant,

THEOREME 1.II.- On suppose que $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Alors, il existe un opérateur fermé H dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ et un seul ayant les propriétés suivantes :

(j) $\mathcal{D} \subset D(H)$ (1), H applique $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est un cœur pour H.

(jj) $\pi_o \psi = i[H,\Phi_o]\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}$.

(jjj) $\Omega_o \in D(H)$ et $H\Omega_o = 0$.

De plus, si on pose $F = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta')$, on a, pour tout $\psi \in \mathcal{D}$,

(1.4.5) $$H\psi = -\frac{1}{2}\psi'' + \zeta\psi',$$

(1.4.6) $$H\psi = \frac{1}{2}\pi_o^2\psi + F(\Phi_o)\psi \; ; \quad \text{et,}$$

(1.4.7) $$F'(\Phi_o)\psi = -i[H,\pi_o]\psi .$$

Enfin, l'opérateur H est symétrique et $\geqslant 0$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ (2).

L'opérateur fermé H dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ introduit par ce théorème sera appelé l'opérateur Hamiltonien engendré par la mesure quasi-invariante μ_o sur $\mathbb{R}$. Diverses propriétés de régularité (caractère auto-adjoint, étendue du domaine, etc...) seront établies en 1.5 et 1.6 pour ceux de ces opérateurs qui sont des Hamiltoniens de champs.

On peut établir l'existence de H comme suit : partant de l'expression (1.4.3) de π_o, on vérifie d'abord que,

$$\frac{1}{2}\pi_o^2\psi = -\frac{1}{2}\psi'' + \zeta\psi' - F\psi \quad (\psi \in \mathcal{D}) \; ;$$

------

(1) on rappelle qu'on a posé ici $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(2) Voir aussi la remarque 1.7.4.

d'où l'équivalence des expressions (1.4.5) et (1.4.6). On vérifie ensuite, par un calcul sans difficulté, que l'opérateur non borné dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ défini, avec $\mathcal{D}$ comme domaine, par (1.4.5) est symétrique et $\geqslant 0$, donc fermable ; ce qui permet de prendre pour H la fermeture de cet opérateur. L'opérateur H ainsi défini possède la propriété (j) par construction ; et il est clair sur l'expression (1.4.6) qu'il vérifie (jj) et (1.4.7). Enfin, pour montrer qu'il vérifie (jjj), on se pourvoit d'une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que,

(1.4.8) $\forall n \quad 0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1 \quad$ et $\quad \varphi_n(x) = 1$ pour tout $x \in [-n,n]$; et

(1.4.9) $$C = \operatorname*{Sup}_n \operatorname{Sup} (\|\psi_n'\|_\infty, \|\psi_n''\|_\infty) < +\infty ;$$

et on remarque que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \Omega_o$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après (1.4.8) et le Théorème de Lebesgue, et que $\lim\limits_{n\to\infty} H\varphi_n = 0$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [d'où (jjj) puisque H est fermé] d'après (1.4.9), l'hypothèse $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, le Théorème de Lebesgue, et la majoration suivante où $E_n = \{x \in \mathbb{R} \,\|x| \geqslant n\}$:

$$\|H\varphi_n\|^2 \leqslant \frac{1}{4} C^2 \mu_o(E_n) + C^2 \int_{E_n} \{|\zeta| + \zeta^2\} d\mu_o .$$

D'où la partie "existence" du théorème.

Passant à l'unicité, soit H un opérateur fermé dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ ayant les propriétés (j), (jj) et (jjj). On considère l'application linéaire M de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ définie par,

$$M\psi = H\psi - \frac{1}{2}\pi_o\psi - F(\Phi_o)\psi = H\psi + \frac{1}{2}\psi'' - \zeta\psi' \qquad (\psi \in \mathcal{D}).$$

Puisque $\mathcal{D}$ est supposé être un cœur pour H, il suffit de montrer que $M\psi = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}$. Pour cela, on remarque d'abord que, puisque chacun des opérateurs H et $\frac{1}{2}\pi_o^2 + F(\Phi_o)$ vérifie (jj), on a $M\Phi_o\psi = \Phi_o M\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}$; donc aussi $M(R\psi) = RM\psi$ pour toute fonction polynômiale R et tout $\psi \in \mathcal{D}$. D'où il résulte que,

(1.4.10) $$M(\theta\psi) = \theta M\psi \quad \text{pour tous } \theta \in C^\infty \text{ et } \psi \in \mathcal{D} :$$

en effet, $\theta \in C^\infty$ et $\psi \in \mathcal{D}$ étant donnés, il existe une suite (R_n) de fonctions polynômiales telle que $\lim_{n\to\infty} R_n = \theta$, $\lim_{n\to\infty} R'_n = \theta'$ et $\lim_{n\to\infty} R''_n = \theta''$ uniformément sur un compact contenant les supports de ψ et de $M\psi$. On a alors, $\lim_{n\to\infty} R_n\psi = \theta\psi$, $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}(R_n\psi)''+\zeta(R_n\psi)' = -\frac{1}{2}(\theta\psi)''+\zeta(\theta\psi)'$ et $\lim_{n\to\infty} R_nM\psi = \theta M\psi$ (limites dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$) ; donc aussi, $\lim_{n\to\infty} H(R_n\psi) = \theta M\psi - \frac{1}{2}(\theta\psi)''+\zeta(\theta\psi)'$, puisque $H(R_n\psi) = R_nM\psi - \frac{1}{2}(R_n\psi)''+\zeta(R_n\psi)'$. Donc, puisque H est fermable, $H(\theta\psi) = \theta M\psi - \frac{1}{2}(\theta\psi)''+\zeta(\theta\psi)'$; d'où la relation (1.4.10) annoncée. De cette relation, on déduit qu'il existe une fonction $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que,

$$M\psi(x) = G(x)\psi(x) \quad (x\in\mathbb{R},\ \psi\in\mathcal{D}). \tag{1.4.11}$$

On va voir que (jjj) implique que G = 0. En effet, $\mathcal{D}$ étant supposé être un cœur pour H, (jjj) entraîne qu'il existe une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \Omega_o \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} H\varphi_n = 0 \quad (\text{limites dans } L^2(\mathbb{R},\mu_o)) ; \tag{1.4.12}$$

et on peut supposer aussi que,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1 \quad \text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}. \tag{1.4.13}$$

On va montrer que, dans ces conditions, on a aussi,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi'_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi''_n(x) = 0 \quad \text{pour presque tout } x ; \tag{1.4.14}$$

ce qui entraînera que G = 0 par passage à la limite presque partout dans la relation,

$$G\varphi_n = H\varphi_n + \frac{1}{2}\varphi''_n - \zeta\varphi'_n. \tag{1.4.15}$$

Or, remarquant que la convergence dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ implique celle dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, (1.4.12) et (1.4.15) entraînent que la suite $((-\frac{1}{2}\varphi'_n+\zeta\varphi_n)')$

converge vers $\zeta' - G$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$; donc en prenant les intégrales définies et en tenant compte de (1.4.12) et (1.4.13), la suite $(\varphi'_n - \varphi'_n(x_o))$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et presque partout, dès que $x_o \in \mathbb{R}$ est choisi tel que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_o) = 1$. Mais, (1.4.15) implique alors que la suite $(\varphi''_n - \varphi''_n(x_o))$ converge aussi dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et presque partout ; donc en prenant les intégrales définies la suite $(\varphi'_n(y) - \varphi'_n(x_o) - (y-x_o)\varphi''_n(x_o))$ converge dans $\mathbb{R}$ pour chaque y ; d'où on déduit que la suite $(\varphi''_n(x_o))$ converge dans $\mathbb{R}$; donc aussi que la suite (φ''_n) converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et presque partout ; et enfin, d'après (1.4.15), qu'il en est de même de la suite (φ'_n). Posant alors $\alpha = \lim_{n\to\infty} \varphi'_n$ et $\beta = \lim_{n\to\infty} \varphi''_n$ (limites dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et presque partout), on a, pour presque tout (x,y),

$$\int_x^y \alpha(u)\,du = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n(y) - \varphi_n(x)) \;, \quad \text{et,}$$

$$\int_x^y \beta(v)\,dv = \lim_{n\to\infty} (\varphi'_n(y) - \varphi'_n(x)) = \alpha(y) - \alpha(x).$$

La première de ces relations jointe à (1.4.13) entraîne d'abord que $\alpha = 0$; puis la seconde que $\beta = 0$. D'où (1.4 14)et l'unicité de H.

cqfd.

1.5.- Mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q; Détermination du Hamiltonien

On attribue ici à ρ et aux quantités ζ, $\mu_o, \Phi_o, \Pi_o, \Omega_o$ qui en sont dérivées les mêmes significations qu'en 1.4.

On remarque que la donnée de la fonction ρ est équivalente à celle de la fonction ζ, car, en traitant (1.4.4) comme une équation en ρ, on obtient,

$$\rho(x) = e^{-2\hat{\zeta}(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.5.1.}$$

où $\hat{\zeta}$ est une primitive de ζ déterminée sans ambiguité par la seconde condition (1.4.1).

De plus, on désigne toujours par Q un polynôme d'interaction standard (voir 1.3) [1], et par $\hat{Q}$ sa primitive centrée (voir B2). Dans ces conditions, on a d'abord,

<u>LEMME</u>.- Il existe une fonction $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et une seule vérifiant (1.4.1) ainsi que les équations équivalantes suivantes :

(d) $\zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = Q$ [2]

(d') $\zeta^2 - \zeta' = 2\hat{Q}$

(d") $-\frac{1}{2}(\rho^{1/2})'' + \hat{Q}\rho^{1/2} = 0.$

En outre, cette fonction ρ et la mesure μ_o de densité ρ vérifient

(1.5.2) $\rho^{1/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(1.5.3) $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, et,

(1.5.4) $\chi^k \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, pour tout k entier > 0 [3].

La mesure μ_o dont la densité ρ est caractérisée [4] par ce Lemme sera appelée la <u>mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q</u>. Ensuite,

<u>THEOREME 1.III</u>.- Soit H l'opérateur Hamiltonien dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ spécifié par le système de Heisenberg (Φ_o,π_o) et l'interaction Q [5]. Alors, pour que l'opérateur H soit tel que $\Omega_o \in D(H)$ et $H\Omega_o = 0$, il faut et il suffit que μ_o soit la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q. De plus, s'il en est ainsi , H coïncide avec l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o [6], et le système (Φ_o,π_o,H) est

----

(1) Voir la remarque 1.7.5.

(2) $\zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta')'$!

(3) χ désigne l'application identique de $\mathbb{R}$.

(4) Voir la remarque 1.7.2.

(5) Voir le Théorème 1.I.

(6) Voir le Théorème 1.II, en notant (1.5.3) ci-dessus.

l'image du système $(\underset{\sim}{\Phi}_o, \underset{\sim}{\Pi}_o, \underset{\sim}{H})$ (1) par la transformation unitaire $\varphi \to \rho^{-1/2}\varphi$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

Si μ_o est la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q, le champ $(D(H^2_o),\Omega_o,H,\Phi)$ (2) sur $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [où H est l'opérateur auto-adjoint introduit par le Théorème ci-dessus, et où $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ avec $\Phi_t = e^{itH}\,\Phi_o\,e^{-itH}$ $(t\in\mathbb{R})$] sera appelé la <u>réalisation de Guelfand-Segal du champ quantique d'interaction Q</u>.

En effet, le Lemme découle comme suit de la proposition B3 : remarquant que, d'après (1.4.4), $\zeta = -(\log \rho^{1/2})'$, on vérifie d'abord que $\zeta^2 - \zeta' = (\rho^{1/2})''/\rho^{1/2}$; ce qui entraîne que (d') équivaut à (d"), et que (d) équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{1}{2}(\rho^{1/2})''+(\hat{Q}-\lambda)\rho^{1/2} = 0$. Mais, d'une part, le corollaire de la proposition B3 entraîne que "$\varphi \in D(\underset{\sim}{H})$, $\underset{\sim}{H}\varphi = \lambda\varphi$, φ partout > 0 et $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 d\chi = 1$" équivaut à "$\varphi = \varphi_o$ et $\lambda = 0$" ; et, d'autre part, la relation $-\frac{1}{2}(\rho^{1/2})''+\hat{Q}\rho^{1/2} = \lambda\rho^{1/2}$, jointe à (1.4.1) entraîne que $\rho^{1/2} \in D(H)$ [relation (B1.1), proposition B1]. D'où $\rho^{1/2} = \varphi_o$; ce qui établit la première partie du Lemme et la relation (1.5.2) (puisque $\varphi_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en vertu de la proposition B3). Enfin, (1.5.3) et (1.5.4) résultent de (1.5.2) [en ce qui concerne (1.5.3), remarquer que $\zeta^2\rho = \frac{1}{4}\rho'^2/\rho = ((\rho^{1/2})')^2$]. D'où le Lemme.

Le Théorème 1.III va résulter du Théorème 1.II et du Lemme : on note d'abord que [quel que soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant (1.4.1)] l'opérateur unitaire $S : \varphi \to \rho^{-1/2}\varphi$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ applique $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et transforme le système $(\underset{\sim}{\Phi}_o,\underset{\sim}{\Pi}_o)$ en le système (Φ_o,π_o). Par ailleurs, l'hypothèse faite sur H entraîne (Théorème 1.I) que $H\psi = \frac{1}{2}\pi_o^2\psi + \hat{Q}(\Phi_o)\psi$ pour tout $\psi \in C^\infty(\Phi_o,\pi_o)$, donc aussi pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\Phi_o,\pi_o)$ d'après la remarque précédente. D'où il résulte que S transforme $\underset{\sim}{H}$ en H et $\underset{\sim}{H}\!\restriction\!\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $H\!\restriction\!\mathcal{D}(\mathbb{R})$;

----

(1) Voir A5 et B2.

(2) Voir le corollaire 3 du Théorème 1.I.

donc H possède la propriété (j) (Théorème 1.II) puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour $\underset{\sim}{H}$ (proposition B1), ainsi que la propriété (jj).

Cela étant, H satisfait (jjj) si et seulement si ρ vérifie l'équation (d") ; d'où la première partie du Théorème. Et s'il en est ainsi, ρ satisfait aussi l'équation (d') ; donc, d'après (1.4.6) [Théorème 1.II ; compte tenu de (1.5.3)], H est l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o.

cqfd.

1.6.- Quelques propriétés du Hamiltonien engendré par μ_o

Soient Q un polynôme d'interaction standard (voir 1.3), μ_o la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q (voir 1.5), et H l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o (voir 1.4). Alors,

PROPOSITION.- (1) L'opérateur H est auto-adjoint positif dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, admet $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme cœur , et vérifie,

(1.6.1) $$D(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o) \mid \psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}) \text{ et } -\tfrac{1}{2}\psi'' + \zeta\psi' \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)\},$$

et,

(1.6.2) $$H\psi = -\tfrac{1}{2}\psi'' + \zeta\psi' \quad \text{pour tout } \psi \in D(H).$$

(2) On a,

(1.6.3) $$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \subset \bigcap_{n>0} D(H^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \quad (1) \quad .$$

(3) Le sous-espace vectoriel dense $\mathcal{C}$ de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ engendré par les fonctions $e^{i\xi\chi}$ $(\xi \in \mathbb{R})$ (2) est un cœur pour H.

(4) La valeur propre 0 de H est simple et isolée.

----

(1) $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ désigne l'espace usuel des fonctions à croissance lente sur $\mathbb{R}$ (voir par exemple Trèves [4] page 275).

(2) χ désigne l'application identique de $\mathbb{R}$.

En effet, en vertu du Théorème 1.III, les propriétés (1) et (4) résultent des propriétés correspondantes de l'opérateur $\underset{\sim}{H}$ [propositions B1 et B3, et relation B2.1], les relations (1.6.1) et (1.6.2) s'obtiennent en calculant, pour $\psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R})$, $\rho^{-1/2}\, \underset{\sim}{H}(\rho^{1/2}\psi)$ au moyen de l'équation (d") que satisfait ρ (Lemme 1.5) ; la première inclusion (1.6.3) résulte de ce que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \bigcap_{n>0} D(H^n)$ (puisque $\underset{\sim}{H}$ applique $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même) et de ce que $\rho^{1/2}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ d'après (1.5.2) (Lemme 1.5) ; et la seconde inclusion (1.6.3) résulte de la propriété analogue de $\underset{\sim}{H}$ (proposition B4). Passant ensuite à la propriété (3), il suffit de vérifier que, pour $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I + H$ applique $\mathcal{C}$ sur un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Pour cela, soit $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ tel que,

$$(\psi|(\lambda I+H)e^{i\xi\chi}) = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Afin de montrer que $\psi = 0$ (ce qui établira la propriété), on transporte cette relation dans $L^2(\mathbb{R})$ grâce au Théorème 1.III, ce qui donne, en posant $\varphi_o = \rho^{1/2}$ [$\varphi_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, d'après (1.5.2)],

$\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}\, \varphi_o(\lambda I+\underset{\sim}{H})(\varphi_o e^{i\xi\chi})d\chi = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$; ou encore,

$$(1.6.4) \qquad < L(T_o),\varphi_o e^{i\xi\chi} > = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R},$$

en désignant par L l'application linéaire continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans lui-même qui est la transposée de la restriction de $\lambda I+\underset{\sim}{H}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, par $<\cdot,\cdot>$ la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et par T_o l'élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ défini par $\bar{\psi}\,\varphi_o \in L^2(\mathbb{R})$. Mais, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{\varphi_o T}$ de $\varphi_o T$ est la fonction $\xi \to < T,\varphi_o e^{i\xi\chi} >$ [en définissant la transformée de Fourier $\hat{\theta}$ de $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\hat{\theta} = \int_{\mathbb{R}} \theta(\xi)e^{i\xi\chi}d\xi$]. Ainsi, (1.6.4) entraîne que $(\varphi_o L(T_o))^{\wedge} = 0$; ou encore, $\varphi_o L(T_o) = 0$; donc aussi, puisque φ_o est partout > 0,

$$< L(T_o),\varphi > 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Mais, par définition de L et de T_o, cette relation s'écrit aussi,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}\, \varphi_o (\lambda I + \underset{\sim}{H})\varphi \, d\chi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \;;$$

d'où $\psi = 0$, puisque $\lambda I + \underset{\sim}{H}$ applique $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$ (proposition B4).

cqfd.

COROLLAIRE.- Il existe $C > 0$ tel que,

(1.6.5) $\qquad \|\chi^n\| \leqslant C^n \sqrt{n!}$ pour tout entier $n > 0$ (1).

En particulier,

(1.6.6) $\qquad e^{\lambda\,\chi} \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ pour tout $\lambda > 0$.

En effet, on déduit (1.6.6) de (1.6.5) et du Théorème de Beppo-Levi en écrivant,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\,\chi}\, d\mu_o\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sup_r \sum_{n=0}^{r} \frac{\lambda^n}{n!} \|\chi^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda c)^n}{\sqrt{n\,!}} < +\infty \,.$$

Pour établir (1.6.5), on remarque que,

(1.6.7) $\quad (\chi^n | H\chi^m) = \frac{mn}{2} (\Omega_o | \chi^{m+n+2}) \quad$ (m, n entiers > 0),

ainsi qu'on le vérifie facilement à partir de l'expression (1.6.2) de H [et compte tenu de ce que $\chi^n \in D(H)$ d'après (1.6.3)] ; donc,

(1.6.8) $\qquad \|H^{\frac{1}{2}}\chi^n\| \leqslant \frac{n}{\sqrt{2}} \|\chi^{n-1}\| \quad$ (n entier > 0).

Par ailleurs, d'après le Théorème 1.III et la relation (B5.2) (proposition B5), $\Phi_o \ll H^{\frac{1}{2}}$; donc, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que,

(1.6.9) $\qquad \|\chi^{n+1}\| \leqslant a\|H^{\frac{1}{2}}\chi^n\| + b\|\chi^n\| \quad$ (n entier > 0).

Et cette relation jointe à (1.6.8) permet de vérifier par récurrence

------

(1) $\|\ \|$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$.

sur n que (1.6.5) a lieu dès que $c \geqslant \|\chi\|$ et $c^2 > \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{2} c$.

cqfd.

1.7.- Compléments et remarques.

1.7.1.- Le champ libre de masse $m > 0$ correspond au cas où,

$$(1.7.1) \qquad Q(X) = m^2 X \quad ;$$

c'est-à-dire au cas où l'équation (1.1.6) du champ quantique est linéaire.

Une simple vérification donne alors, compte tenu de l'unicité stipulée par le Lemme 1.5,

$$(1.7.2) \qquad \rho(x) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{½} e^{-mx^2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad ;$$

$$(1.7.3) \qquad \zeta(x) = mx \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad ;$$

$$(1.7.4) \qquad \hat{Q}(X) = \frac{m^2}{2} X^2 - \frac{m}{2} \quad ;$$

La mesure μ_o est dans ce cas la mesure Gaussienne $\mu_o^{(m)}$ de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1/(2m)$; et l'opérateur Hamiltonien engendré par $\mu_o^{(m)}$ est donné par,

$$(1.7.5) \quad H^{(m)} \psi(x) = - \frac{1}{2} \psi''(x) + mx\psi(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) .$$

1.7.2.- En vertu du Théorème 1.III, les équations équivalentes (d), (d') et (d") (Lemme 1.5.) permettent de déterminer la mesure quasi-invariante μ_o à partir du polynôme d'interaction Q de telle sorte que le système (Φ_o, π_o, H) engendré par μ_o [voir 1.4, relation (1.4.2), (1.4.3) et (1.4.5)] soit le germe d'un champ quantique admettant l'interaction Q. Ainsi, ces équations font écho à l'équation (1.1.6) du champ (voir 1.1). On note le caractère hautement implicite de la correspondance faisant passer de Q à ρ : le calcul de ρ en fonction de Q équivaut, puisque a priori $\hat{Q}$ n'est connu qu'à une constante additive près, soit à la résolution de l'équation (d), dérivée de l'équation de Ricatti (d'), soit à la recherche du vecteur propre de valeur propre minimale pour l'opérateur anharmonique $\frac{1}{2} \underset{\sim}{\Pi}_o^2 + P(\underset{\sim}{\Phi}_o)$, où P est une primitive quelconque de Q (voir B3).

1.7.3.- Il serait intéressant (dans la perspective d'une extension aux cas où $d \geqslant 2$) d'obtenir, en termes de Q, une équation portant directement sur la variable μ_o (ou sur sa transformée de Fourier J_o) et non sur la densité ρ comme les équations (d), (d') ou (d"). Nous ne savons pas formuler de façon utilisable une telle équation [en particulier, traduite en termes de J_o, l'équation (d") présente des racines carrées de convolution peu abordables....].

Par contre, les équations (d) et (d') peuvent s'exprimer comme suit en termes de module de quasi-invariance a_o de la mesure μ_o : posant d'abord,

(1.7.6) $\qquad \Lambda_o(z,x) = \log(\rho(z+x)/\rho(x)) \qquad (z \in \mathbb{R} \ , \ x \in \mathbb{R}),$

(de telle sorte que $a_o = e^{\Lambda_o}$; voir A2), puis,

(1.7.7) $\qquad \Lambda_o^{(p)}(z,x) = z^p \left.\frac{d^p}{dy^p}\right/_{y=0} \Lambda_o(y,x) \qquad (z \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ p = 1,2,3,\ldots),$

les équations (d) et (d') sont équivalentes respectivement aux équations ($\underline{d}$) et ($\underline{d}$') ci-dessous,

($\underline{d}$) $\qquad \Lambda_o^{(1)}(z,x)\ \Lambda_o^{(2)}(z,x) + \Lambda_o^{(3)}(z,x) = 4\ z^3\ Q(x) \qquad (z \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$;

($\underline{d}$') $\qquad (\Lambda_o^{(1)}(z,x))^2 + 2\ \Lambda_o^{(2)}(z,x) = 8\ z^2\ P(x) \qquad (z \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}).$

Et le Lemme 1.5 peut alors être reformulé en disant qu'il existe un cocycle additif $\Lambda_o^{(1)}$ sur $\mathbb{R}$, et un seul, de classe C^∞ et satisfaisant aux équations équivalentes ($\underline{d}$) et ($\underline{d}$'). En particulier, l'équation ($\underline{d}$) détermine entièrement le cocycle additif Λ_o sur $\mathbb{R}$ [et, partant, la mesure μ_o (1)] à partir du polynôme d'interaction Q. Cette équa-

------

(1) Voir A2.

tion est ainsi une réplique en termes de la mesure μ_o, de l'équation du champ (1.1.6).

L'avantage de l'équation ($\underline{d}$) sur l'équation (d) réside dans le fait qu'on peut l'étendre aux cas où $d \geqslant 2$ en substituant les notions de mesure quasi-invariante et de cocycle additif à celles de mesure équivalente à la mesure de Lebesgue et de densité d'une telle mesure, ces dernières n'ayant plus alors de sens.

1.7.4.- Dans le contexte de la théorie des formes de Dirichlet où se place Gross dans [17], on peut compléter comme suit le Théorème 1.II : dans la situation de 1.4, l'opérateur Hamiltonien engendré par la mesure quasi-invariante μ_o sur $\mathbb{R}$ est l'unique opérateur fermé H dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ admettant $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme cœur et tel que,

$$(1.7.8) \qquad (\psi|H\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\psi'|^2 \, d\mu_o \qquad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Cette caractérisation de H est facile à vérifier à partir de son expression (1.4.5) : si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a, par définitions de μ_o et ζ en fonction de ρ,

$$(\psi|H\psi) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\psi'|^2 d\mu_o = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\psi}\rho\psi''+\bar{\psi}\rho'\psi'+\bar{\psi}'\rho\psi')d\chi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\psi}\rho\psi')'d\chi = 0.$$

1.7.5 - La théorie développée dans ce paragraphe lorsque Q est un polynôme d'interaction standard (voir 1.3, 1.5 et 1.6) peut être reprise de façon analogue lorsque Q est une fonction à croissance lente convenable; essentiellement lorsque la croissance à l'infini des dérivées de Q n'est pas plus rapide que celle de Q (1).

Plus généralement, dans la situation de 1.4, on peut se proposer de chercher quelles sont les fonctions $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

----

(1) voir aussi à ce sujet la fin de la remarque 1 de 6.3.1.

(1.4.1) et pour lesquelles l'opérateur Hamiltonien engendré par la mesure μ_o de densité ρ (avec, par définition, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme cœur) est auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Il semble raisonnable de penser que tel est le cas dès que $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais nous ne savons pas le démontrer.

1.7.6.- Pour préfigurer la théorie des champs vectoriels, on pourrait aussi se placer dans $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\mathbb{R}$. Mais le problème est plutôt de passer de $\mathbb{R}$ à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (voir 6.5.2 à ce sujet)....

***

§ 2.- CONSTRUCTION DE LA MESURE EUCLIDIENNE : PROCESSUS DE MARKOV STATIONNAIRE ET CHAMP EUCLIDIEN CORRESPONDANTS

Dans ce paragraphe, on introduit la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q et on étudie, du point de vue développé par Nelson dans [6], le processus de Markov qu'elle définit.

Il s'agit de construire une mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (muni de sa tribu standard) possédant la propriété de Markov relativement à la fonction aléatoire canonique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie sur cet espace : En utilisant le critère de continuité des trajectoires de Kolmogorov, on établit directement en 2.2. l'existence d'une telle mesure admettant la mesure quais-invariante μ_o sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q (voir 1.5) comme répartition commune aux X_t, et le semi-groupe $(e^{-tH})_{t \geqslant 0}$ d'opérateurs Markoviens dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ comme semi-groupe de transition (H désignant toujours le Hamiltonien engendré par μ_o ; voir 1.4 et la proposition 2.1.2). En outre, il existe une seule mesure ayant ces propriétés, et cette mesure est portée par un sous espace $\mathbb{W}$ de $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie l'invariance Euclidienne (Théorème 2.I en 2.1.3).

On introduit ensuite en 2.3 le champ Euclidien Σ en tant qu'application linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu)$ par la relation,

$$(2.i) \qquad \Sigma(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, X_t \, dt \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

Les propriétés qui font du système $(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu ; \Sigma)$ ainsi obtenu un champ Euclidien sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (au sens donné à ce vocable au § 6 de [6], y compris la propriété de réflexion et la propriété ergodique) sont énoncées dans le Théorème 2.II ; tandis que le théorème 2.III explicite la correspondance entre Σ et le champ quantique introduit au § 1.

La propriété de Markov de Σ découle de la continuité à droite de la famille croissante des tribus complétées $\overline{\mathcal{F}}_{(-\infty,t]}$ $(t \in \mathbb{R})$ associées à la fonction aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, laquelle est établie en 2.4 (proposition 2.4.3). Par ailleurs, au lieu du prolongement continu de Σ à $H^{-1}(\mathbb{R})$ que postule Nelson au § 2 de [6], on introduit un prolongement séquentiellement étroitement continu de Σ à l'espace des mesures bornées (propriété E6 du Théorème 2.III et alinéa 2.5.4).

L'exposé est complètement indépendant de la théorie des processus de diffusion basée sur les équations intégrales stochastiques et constitue une approche autonome de la question (voir 2.1.4).

2.1.- Résultat de base : Le processus de Markov stationnaire en cause

2.1.1.- On utilisera dans toute la suite les notations suivantes : Conformément au § 1, on désigne par Q un polynôme d'interaction standard (voir 1.3), par μ_o la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q (voir 1.5), par ρ la densité de μ_o et par H l'opérateur Hamiltonien associé à μ_o (voir 1.4). En vertu de la proposition 1.6, H est un opérateur auto adjoint positif dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$. Pour chaque $t \geqslant 0$, on désigne par N_t l'opérateur borné e^{-tH} dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$.

Par ailleurs, on désigne par $\mathbb{W}$ le sous-espace de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des applications continues ω de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que,

$$(2.1.1) \qquad \int_{\mathbb{R}} |\omega(t)|^p \frac{dt}{1+t^2} < +\infty \quad \text{pour tout } p \text{ entier} \geqslant 0 \quad ;$$

et, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on désigne par X_t la fonction coordonnée d'indice t sur W définie par,

$$(2.1.2) \qquad X_t(\omega) = \omega(t) \quad (\omega \in \mathbb{W}) .$$

Pour chaque sous-ensemble non vide J de $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathfrak{S}_J$ la plus petite tribu sur $\mathbb{W}$ rendant mesurables toutes les fonctions X_t avec $t \in J$ ($\mathbb{R}$ étant naturellement toujours muni de sa tribu borélienne) ; et on note $\mathfrak{S}$ la tribu $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}$.

Enfin, on désigne par $\mathbb{E}$ le groupe Euclidien de $\mathbb{R}$ (groupe constitué des transformations de la forme $t \to \epsilon t - u$, où $\epsilon = \pm 1$ et $u \in \mathbb{R}$), et, pour chaque $\eta \in \mathbb{E}$, par T_η la transformation $\mathcal{G}$-mesurable de $\mathbb{W}$ définie par,

(2.1.3) $$T_\eta(\omega) = \omega \circ \eta^{-1} \quad (\omega \in \mathbb{W}) \text{ , ou encore par,}$$

(2.1.4) $$X_{\eta(t)}(\omega) = X_t(T_\eta^{-1}(\omega)) \quad (t \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{W}).$$

En particulier, on note θ_u la transformation T_{τ_u} de $\mathbb{W}$ ($u \in \mathbb{R}$), où τ_u est la translation $t \to t - u$, et S la transformation T_σ où σ est la symétrie $t \to - t$; autrement dit, on a,

(2.1.5) $$X_{t+u} = X_t \circ \theta_u \quad \text{et} \quad X_{-t} = X_t \circ S \quad (t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}).$$

2.1.2- Les opérateurs N_t sont Markoviens et régularisants :

PROPOSITION - Pour chaque $t > 0$,

(1) Dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$, l'opérateur N_t est auto-adjoint, contractant, et Markovien en ce sens que,

(2.1.6) $$N_t\psi \geq 0 \quad \text{pour tout } \psi \geq 0 \quad (\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)) \quad ; \text{ et,}$$

(2.1.7) $$N_t\Omega_o = \Omega_o$$ (1) .

---

(1) $\Omega_o \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ désigne la (classe modulo μ_o de la) constante 1 (voir 1.4).

2.1.2, 2.1.3.

En particulier,

(2.1.8) $$\int_{\mathbb{R}} N_t \psi \, d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} \psi \, d\mu_o \quad \text{pour tout } \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o).$$

(2) L'opérateur N_t induit une contraction de $L^\infty(\mathbb{R}, \mu_o)$ dans lui-même (1).

(3) L'opérateur N_t applique $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

(voir la démonstration en 2.2.1).

2.1.3. La mesure Euclidienne μ peut être caractérisée comme suit à partir de μ_o et du semi-groupe $(N_t)_{t \geq 0}$:

THEOREME 2.1.- Il existe une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{S})$ et une seule possédant les propriétés M1 et M2 suivantes :

(M1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'image de μ par X_t est la mesure μ_o sur $\mathbb{R}$.

(M2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $h \geq 0$ et tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$,

(2.1.9) $$E_\mu[\psi \odot X_{t+h} / \mathfrak{S}_{(-\infty, t]}] = (N_h \psi) \odot X_t \qquad (2)$$

En outre, la mesure μ ainsi déterminée vérifie,

(M3) Pour tout $\eta \in \mathbb{E}$, μ est invariante par T_η ; et,

(M4) Pour chaque p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, l'application $t \to X_t$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu)$.

------

(1) Voir aussi la propriété (4) du lemme 4.2.7 ci-dessous et la proposition 6.1.1.

(2) Voir ci-après en ce qui concerne ces notations.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $\psi \in L^o(\mathbb{R}, \mu_o)$, on désigne par $\psi \odot X_t$ la classe modulo μ commune (d'après M1) aux fonctions $f \circ X_t$ avec $f \in \psi$ [En vertu de M1, $\psi \odot X_t$ appartient à $L^p(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu)$ si $\psi \in L^p(\mathbb{R}, \mu_o)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$]. Et, si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathfrak{S}$, et $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu)$, l'espérance conditionnelle $E_\mu[Z/\mathcal{B}]$ est l'élément de $L^1(\mathbb{W}, \mathcal{B}, \mu)$ défini par la relation (1),

$$(2.1.10) \qquad E_\mu[Y.E_\mu[Z/\mathcal{B}]] = E_\mu[Y.Z] \qquad \text{pour tout } Y \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{B}, \mu),$$

où $E_\mu[X]$ $[X \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu)]$ désigne l'intégrale $\int_{\mathbb{W}} Z \, d\mu$. Ainsi (2.1.9) est entendue comme égalité entre éléments de $L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu)$(i.e entre classes modulo μ).

La mesure μ sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{S})$ introduite par le théorème précédent sera appelée la <u>mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction</u> Q. Le système $(\mathbb{W}, \mathfrak{S}, \mu \,;\, (T_\eta)_{\eta \in \mathbb{E}} \,;\, (X_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est le processus de Markov stationnaire à partir duquel sera construit le champ Euclidien en 2.3.

La démonstration du Théorème 2.1 occupe les alinéas 2.2.2 à 2.2.5 ci-dessous (voir aussi 2.1.4 ci-après).

<u>2.1.4.- Remarque d'orientation</u> - La problématique adoptée ici diffère de celle où s'est fixée la théorie générale des processus de Markov après Dynkin et Meyer (voir par exemple Dynkin [11], § III.2, Getoor [10], § I.2, ou le séminaire [26]) en ce sens que la donnée de base, au lieu d'être un semi-groupe de noyaux Markoviens comme dans cette dernière, est constituée par une mesure de probabilité μ_o (ici sur $\mathbb{R}$) et par un semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$ d'opérateurs Markoviens dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ laissant μ_o invariante [proposition 2.1.2 ci-dessus]. En outre, la fonction aléatoire (X_t) en cause est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (et pas seulement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$) eu égard au caractère Euclidien (i.e stationnaire au sens strict et invariant par symétrie ;

----

(1) Voir par exemple le § IV.3 de Neveu [8]

propriété M3 du Théorème 2.1) du processus stochastique auquel on s'intéresse.

Le rapport des deux problématiques peut être précisé comme suit : Notant que, pour chaque $t > 0$, $\varphi \in C_o^+(\mathbb{R})$ entraîne $N_t\varphi \in C^+(\mathbb{R})$ [proposition 2.1.2], on définit un noyau borélien n_t sur $\mathbb{R}$(1) en posant, pour chaque $\varphi \in C_o^+(\mathbb{R})$,

$$(2.1.11) \qquad \int_{\mathbb{R}} n_t(x,dy)\varphi(y) = N_t\varphi(x) \quad \text{pour chaque} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le noyau n_t ainsi introduit est, en fait, Markovien(1), et la relation (2.1.11) a lieu pour toute fonction φ borélienne bornée sur $\mathbb{R}$ (en particulier, n_t est fortement Fellerien) ; donc, la famille $(n_t)_{t \geq 0}$ constitue un semi-groupe de noyaux(2) Markoviens ; autrement dit une <u>fonction de transition</u> sur $\mathbb{R}$ (ces propriétés sont établies par Priouret et Yor dans [27] ; voir aussi la remarque 2.2.2).

Cette fonction de transition $(n_t)_{t \geq 0}$ engendre un processus de Markov non interrompu $X = (\mathcal{W}, \mathcal{G}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+})$ sur $\mathbb{R}$ au sens donné à ce vocable, par exemple, par Getoor au § I.2 de [10]. Ce processus admet une version à trajectoires continues, et la mesure canonique $P_{\mu_o} = \int_{\mathbb{R}} P_x\mu_o(dx)$ sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ correspondant à la répartition initiale μ_o coïncide avec la mesure induite sur cet espace par la mesure μ qu'introduit le Théorème 2.I ; la mesure μ_o pouvant être caractérisée comme l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ invariante par la fonction de transition $(n_t)_{t \geq 0}$. En fait, le processus X ci-dessus est le processus engendré par l'opérateur différentiel $A : \varphi \to \frac{1}{2}\varphi'' - \zeta\varphi'$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$; et en tant que tel, il peut être construit à partir d'un mouvement Brownien

----

(1) Voir Meyer [9], alinéa IX.2.

(2) Voir Meyer [9], alinéa IX.36.

standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en résolvant l'équation intégrale stochastique

$$(2.1.12) \qquad X_t = X_o + B_t - \int_o^t \zeta(X_s)\,ds \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

On peut déduire le théorème 2.I de cette construction ; et obtenir ainsi une caractérisation du semi-groupe de noyaux $(n_t)_{t\geqslant 0}$ directement en termes de l'opérateur de diffusion A (voir à ce sujet Priouret et Yor [27]).

Conformément au point de vue Hilbertien adopté dans ce travail, le théorème 2.I va être établi ici en construisant directement la mesure μ sur $\mathbb{W}$ à partir de la mesure μ_o et du semi-groupe $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, sans passer par l'intermédiaire des mesures P_x $(x\in\mathbb{R})$ du processus de Markov X(1).

2.2.- <u>Démonstration</u> - <u>2.2.1</u>.- On établit d'abord la proposition 2.1.2 : L'opérateur N_t est auto-adjoint et contractant dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ par calcul fonctionnel, puisque H est auto-adjoint positif (proposition 1.6) ; et la relation (2.1.7) résulte de ce que $\Omega_o \in D(H)$ et $H\Omega_o = 0$ par définition de H (Théorèmes 1.II et 1.III en 1.4 et 1.5). Pour établir ensuite (2.1.6), il suffit, d'après la dernière assertion du Théorème 1.III, de vérifier que, pour $\psi\in L^2(\mathbb{R})$, $\psi\geqslant 0$ entraîne $e^{-t\underset{\sim}{H}}\psi\geqslant 0$. Or, cette propriété résulte de la formule de Trotter

$$(2.2.1) \qquad e^{-t\underset{\sim}{H}}\psi = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{t}{2n}\underset{\sim}{\pi}_o^2}\, e^{-\frac{t}{n}\hat{Q}(\Phi_o)}\right)^n \psi$$

et de ce que les opérateurs $e^{-\frac{t}{2n}\underset{\sim}{\pi}_o^2}$ et $e^{-\frac{t}{n}\hat{Q}(\underset{\sim}{\Phi}_o)}$ possèdent la même propriété ; la formule de Trotter (2.2.1) découlant du Théorème C4 et de

----

(1) Voir aussi à ce sujet la remarque 2 en 2.4.1 ci-dessous.

ce que $\underset{\sim}{H}$ coïncide avec la fermeture de l'opérateur $\frac{1}{2}\Pi_o^2 + \widehat{Q}(\Phi_o)$ (proposition B1). Enfin, (2.1.8) résulte de (2.1.7) et de ce que N_t est auto-adjoint via les égalités :
$\int_{\mathbb{R}} N_t\psi \, d\mu_o = (\Omega_o | N_t\psi) = (N_t\Omega_o | \psi) = (\Omega_o | \psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi \, d\mu_o$. D'où la propriété (1). En ce qui concerne la propriété (2), si $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu_o)$, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $-\|\psi\|_\infty \Omega_o \leqslant \mathcal{Re}\, e^{i\xi}\psi \leqslant \|\psi\|_\infty \Omega_o$: d'où, d'après (2.1.6) et (2.1.7), $-\|\psi\|_\infty \Omega_o \leqslant \mathcal{Re}\, e^{i\xi} N_t\psi \leqslant \|\psi\|_\infty \Omega_o$; donc aussi $\|\mathcal{Re}\, e^{i\xi} N_t\psi\|_\infty \leqslant \|\psi\|_\infty$; et finalement $\|N_t\psi\|_\infty \leqslant \|\psi\|_\infty$, puisque $\|N_t\psi\| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|\mathcal{Re}\, e^{i\xi} N_t\psi\|_\infty$. Enfin, la propriété (3) résulte de ce que N_t applique $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ dans $\bigcap_n D(H^n)$ et de la propriété (2) de la proposition 1.6.

cqfd.

<u>2.2.2.</u>- Pour établir le théorème 2.I, on commence par déterminer les lois marginales de la mesure μ cherchée (voir le lemme 2.2.3) :

<u>LEMME</u> - (1) Pour chaque partie finie J de $\mathbb{R}$ ayant $n \geqslant 2$ éléments, il existe une mesure de probabilités m_J et une seule sur $\mathbb{R}^J$ telle que, pour toute famille $(\varphi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

(2.2.2) $$\int_{\mathbb{R}^J} \Phi \, dm_J = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 N_{t_2-t_1}(\varphi_2 N_{t_3-t_2}(\ldots\ldots(\varphi_{n-1} N_{t_n-t_{n-1}} \varphi_n)\ldots)) d\mu_o{}^{(1)}$$

où $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ est la suite strictement croissante des éléments de J et où $\Phi = (\bigotimes_{1\leqslant j\leqslant n} \varphi_j) \circ \gamma_J$, en désignant par γ_J la bijection canonique $(x_t)_{t\in J} \to (x_{t_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^J$ sur $\mathbb{R}^n$. En outre, pour

----

(1) La quantité sous le signe somme au second membre est dans $L^\infty(\mathbb{R}, \mu_o)$ en vertu de la propriété (2) de la proposition 2.1.2

chaque partie J de $\mathbb{R}$ ayant un seul élément, on note m_J la mesure sur $\mathbb{R}^J$ canoniquement identifié à μ_o.

(2) Pour tout couple J_1, J_2 de parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $J_1 \subset J_2$, m_{J_1} est l'image de m_{J_2} par la projection canonique de $\mathbb{R}^{J_2}$ sur $\mathbb{R}^{J_1}$.

En effet, l'unicité de la mesure m_J vérifiant (2.2.2) pour toute famille $(\varphi_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est standard ; et on définit une telle mesure en posant, pour chaque partie borélienne A de $\mathbb{R}^J$,

$$(2.2.3) \quad m_J(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_o(dx_1) \int_{\mathbb{R}} n_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} n_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)$$

$$1_A(\gamma_J(x_1, \ldots, x_n)),$$

où, pour chaque $t > 0$, n_t est le noyau borélien sur $\mathbb{R}$ [1] défini par la relation,

$$(2.2.4) \quad \int_{\mathbb{R}} n_t(x,dy)\varphi(y) = N_t\varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi \in C_o(\mathbb{R}))\ ,$$

à partir de N_t considéré comme opérateur de $C_o(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$ [relation (2.1.6) et propriété (3) de la proposition 2.1.2]. On remarque que, en vertu de (2.1.7) et du théorème de Lebesgue appliqué à une suite (φ_n) d'éléments de $C_o(\mathbb{R})$ croissant vers 1, on a

$$(2.2.5) \quad n_t(x,\mathbb{R})=1 \qquad \text{pour } \mu_o\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}\ ;$$

d'où il résulte que (2.2.3) ci-dessus définit une mesure de probabilité.

----

(1) Voir Meyer [9], alinéa IX.2.

2.2.2, 2.2.3.

Ce qui établit la propriété (1). Et le caractère projectif de la famille des mesures m_J [propriété (2)] résulte aussi de l'expression (2.2.3) de ces mesures et de (2.2.5).

cqfd.

Remarque.- Ainsi qu'on l'a mentionné en 2.1.4, le noyau n_t défini par (2.2.4) est en fait Markovien ; autrement dit, on a,

$$n_t(x, \mathbb{R}) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Cela résulte de la théorie développée par Priouret et Yor dans [27] ; mais on aimerait pouvoir l'établir directement...quoi qu'il en soit, (2.2.6) suffit pour les besoins de la démonstration ci-dessus.

2.2.3.- L'unicité de la mesure μ résulte de façon standard de la définotion de la tribu $\mathfrak{F}$ et du lemme suivant où, pour chaque partie finie non vide J de $\mathbb{R}$, X_J désigne la projection canonique $\omega \to \omega/J$ de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{R}^J$:

LEMME.- Pour qu'une mesure de probabilité μ sur ($\mathbb{W}, \mathfrak{F}$) possède les propriétés M1 et M2, il faut et il suffit qu'elle vérifie : (ME) pour toute partie finie non vide J de $\mathbb{R}$, l'image de μ par l'application mesurable X_J coïncide avec m_J (1).

En effet (2), soit μ une mesure de probabilité sur ($\mathbb{W}, \mathfrak{F}$) satisfaisant M1. Si μ satisfait M2, on a aussi

(M2') Pour tout $n \geq 2$, toute suite $(t_j)_{1 \leq j \leq n}$ telle que $t_1 < \ldots < t_n$, et toute suite $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

----

(1) Voir le Lemme 2.2.2.

(2) Voir à ce sujet l'exposé N°3 de [26], le § I.2 de Getoor [10] ou le § III.2 de Dynkin [11].

$$(2.2.6)\quad E_\mu\Big[\prod_{j=1}^{n} \varphi_j \circ X_{t_j}\Big] = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 N_{t_2-t_1}(\varphi_2 N_{t_3-t_2}(\ldots(\varphi_{n-1} N_{t_n-t_{n-1}} \varphi_n)\ldots))d\mu_o$$

[vérification standard pour récurrence sur n . Inversement, si μ satisfait M2', alors, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $h \geqslant 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a,

$$E_\mu[F \cdot (\varphi \circ X_{t+h})] = E_\mu[F \cdot ((N_h\varphi) \circ X_{t+h})]$$

pour tout $F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{G}_{(-\infty,t]})$(1) de la forme $F = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j \circ X_{t_j}$ où $t_j \leqslant t$ et $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $(j = 1,2,\ldots,n\ ;\ n \geqslant 1)$; donc aussi pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{G}_{(-\infty,t]})$, d'après le théorème de prolongement par mesurabilité(2) ; autrement dit, μ satisfait M2. On conclut alors au lemme en remarquant que (2.2.6) s'écrit aussi $E_\mu[\Phi \circ X_J] = \int_{\mathbb{R}^J} \Phi\, dm_J$ avec les notations du lemme 2.2.2.

cqfd.

De ce lemme, il résulte que μ vérifie M3 dès qu'elle vérifie M1 et M2 : En effet, supposant que $X_J(\mu) = m_J$ pour chaque J, il suffit de montrer que les mesures $T_\eta(\mu)$ $(\eta \in \mathbb{E})$ ont la même propriété. Pour cela, désignant par η_J la bijection $(x_t)_{t \in J} \to (x_{\eta^{-1}(u)})_{u \in \eta(J)}$ de $\mathbb{R}^J$ sur $\mathbb{R}^{\eta(J)}$, on remarque que $X_J \circ T_\eta^{-1} = \eta_J^{-1} \circ X_{\eta(J)}$; donc, puisque $X_{\eta(J)}(\mu) = m_{\eta(J)}$ par hypothèse, on a $X_J(T_\eta^{-1}(\mu)) = m_J$ si et seulement si,

$$(2.2.7)\qquad m_{\eta(J)} = \eta_J(m_J)\ .$$

----

(1) Si $(E,\mathcal{E})$ est un espace mesurable, on note $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions complexes sur E qui sont $\mathcal{E}$-mesurables et bornées.

(2) Voir, par exemple, Meyer [9], Théorème I.20.

2.2.3, 2.2.4.

Il suffit donc de montrer que cette relation a lieu pour chaque J et chaque η. Mais, d'après la propriété (1) du Lemme 2.2.2, l'égalité (2.2.7) équivaut à l'égalité ,

$$(2.2.8)\quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_{u_1} N_{u_2-u_1}(..(\varphi_{u_{n-1}} N_{u_n-u_{n-1}} \varphi_{u_n})...)\, d\mu_o$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\eta(t_1)} N_{t_2-t_1}(...(\varphi_{\eta(t_{n-1})} N_{t_n-t_{n-1}} \varphi_{\eta(t_n)})....)\, d\mu_o ,$$

pour chaque famille $(\varphi_u)_{u \in \eta(J)}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, en désignant par $t_1 < ... < t_n$ (resp $u_1 < ... < u_n$) la suite trictement croissante des éléments de J (resp $\eta(J)$) . Or, si η est une translation τ_s, on a $u_j = \eta(t_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ et $u_j - u_{j-1} = t_j - t_{j-1}$ $(2 \leq j \leq n)$; donc (2.2.8) est identiquement satsifaite ; et si η est la symétrie $\sigma : t \to -t$, on a $u_j = \eta(t_{n-j+1})$ $(1 \leq j \leq n)$ et $u_j - u_{j-1} = t_{n-j+2} - t_{n-j+1}$ $(2 \leq j \leq n)$; ce qui fait que (2.2.8) résulte du caractère auto-adjoint des opérateurs N_t. Ainsi la relation (2.2.7) est satisfaite pour $\eta = \tau_s$ $(s \in \mathbb{R})$ et pour $\eta = \sigma$; donc pour tout $\eta \in \mathbb{E}$. D'où la propriété M3 pour μ en même temps que M1 et M2.

2.2.4.- Afin de montrer l'existence de μ, on commence par appliquer le théorème de Kolmogorov (1) au système projectif des mesures m_J (Lemme 2.2.2), ce qui fournit une mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ sur $(\tilde{W}, \tilde{\mathcal{G}})$ telle que $\tilde{X}_J(\tilde{\mu}) = m_J$ pour toute partie finie non vide J de $\mathbb{R}$, en posant $\tilde{W} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et en désignant par $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{X}_t$ et $\tilde{X}_J$ les termes canoniquement définis sur cet espace comme $\mathcal{G}$, X_t et X_J le sont sur W. Le processus stochastique $(\tilde{W}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mu} ; (\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ainsi construit possède la propriété de continuité suivante : (C) Il existe une famille $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications $\tilde{\mathcal{G}}$-mesurables de $\tilde{W}$ dans $\mathbb{R}$ telle que,

(C1) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mu}(\{\omega \in \tilde{W} | Y_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = 1$.

(C2) Pour chaque $\omega \in \tilde{W}$, l'application $t \to Y_t(\omega)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

----

(1) Voir par exemple [8] pages 78 et 79 ou [12] pages 20 et 21.

C'est un résultat classique de la théorie générale des fonctions aléatoires que cette propriété résulte de ce que,

LEMME - Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\widetilde{W}} |\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|^4 \, d\widetilde{\mu} \leqslant C \, |t - s|^2 . \tag{2.2.9}$$

[On peut établir que ce Lemme entraîne la propriété (C) à partir des propositions III.4.3 et III.5.3 de [8] : La proposition III.4.3 fournit d'abord une fonction aléatoire séparable $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ vérifiant C1 ; après quoi la proposition III.5.3 avec $\alpha = 4$ et $\beta = 1$ entraîne que l'on peut modifier $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur un sous-ensemble $\widetilde{\mu}$-négligeable de $\widetilde{W}$ de telle sorte que C2 soit aussi vérifiée. On peut aussi procéder directement (i.e sans faire appel à la notion de fonction aléatoire séparable) comme dans [12], pages 30 à 33].

On montre maintenant le Lemme ci-dessus : on remarque d'abord que, si $h = |t - s|$, on a,

$$\int_{\widetilde{W}} (\psi \circ \widetilde{X}_t)(\theta \circ \widetilde{X}_s) \, d\widetilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \psi \, N_h \theta \, d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} (N_h \psi) \, \theta \, d\mu_o , \tag{2.2.10}$$

pour tous ψ et θ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'après (2.2.2) et la définition de $\widetilde{\mu}$ (en prenant $J = \{t,s\}$) ; donc aussi pour tous ψ et θ dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$. Désignant alors par χ l'application identique de $\mathbb{R}$, et tenant compte de ce que $\chi^k \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ pour tout $k > 0$ [Lemme 1.5, relation (1.5.4.)], on a

$$\int_{\widetilde{W}} |\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|^4 d\widetilde{\mu} = 2 \int_{\mathbb{R}} \chi^4 d\mu_o - 4 \int_{\mathbb{R}} \chi N_h(\chi^3) d\mu_o + 6 \int_{\mathbb{R}} \chi^2 N_h(\chi^2) d\mu_o - 4 \int_{\mathbb{R}} \chi^3 N_h(\chi) d\mu_o ,$$

en développant $(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s)^4$ par la formule du binôme ; ce qui peut aussi s'écrire,

$$(2.2.11) \qquad \int_{\widetilde{W}} |\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|^4 d\widetilde{\mu} = 2(\Omega_o|\chi^4) - 8(\chi|N_h(\chi^3)) + 6(\chi^2|N_h(\chi^2)) ,$$

puisque $(\chi^3|N_h(\chi)) = (\chi|N_h(\chi^3))$. Mais, d'une part $\chi^k \in D(H^2)$ pour $k = 2,3$ (propriété (2) de la proposition 1.6), et d'autre part, pour $\psi \in D(H)$ et $s \geqslant 0$,

$$(2.2.12) \qquad N_s\psi = \psi - \int_o^s N_u H \psi \, du$$

[l'intégrale étant convergente dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$] ; d'où, en faisant dans cette relation, d'abord $\psi = \chi^k$, puis $\psi = H\chi^k$,

$$N_h(\chi^k) = \chi^k - \int_o^h N_v H(\chi^k)\, dv \qquad , \text{ puis,}$$

$$(2.2.13) \qquad N_h(\chi^k) = \chi^k - h\, H(\chi^k) + \int_o^h dv \int_o^v N_u\, H^2(\chi^k)\, du \qquad (k = 2,3) \;;$$

et en portant (2.2.13) dans (2.2.11), on obtient, après simplification,

$$(2.2.14) \qquad \int_{\widetilde{W}} |\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s|^4 d\widetilde{\mu} = 2\, h[4(\chi|H(\chi^3)) - 3(\chi^2|H(\chi^2))\,]$$
$$- 8(\chi|\int_o^h dv \int_o^v N_u H^2(\chi^3) du) + 6(\chi^2|\int_o^h dv \int_o^v N_u H^2(\chi^2) du) \;;$$

au second membre, le second et le troisième termes sont majorés en module respectivement par $4\, h^2\|\chi\|\, \|H^2(\chi^3)\|$ et $3\, h^2\|\chi^2\|\, \|H^2(\chi^2)\|$. Pour achever la démonstration du lemme, il suffit donc de montrer que,

$$(2.2.15) \qquad 4(\chi|H(\chi^3)) - 3(\chi^2|H(\chi^2)) = 0.$$

Or, $H(\chi^k)$ $(k = 2,3)$ étant donné par la relation (1.6.2) [proposition 1.6], on a,

$$H(\chi^k) = -\frac{1}{2}k(k-1)\chi^{k-2} + k\,\zeta\,\chi^{k-1} \qquad (k = 2,3)\ ;\ \text{d'où,}$$

$$4(\chi|H(\chi^3)) - 3(\chi^2|H(\chi^2))$$

$$= 4\int_{\mathbb{R}}[-3\chi^2 + 3\zeta\chi^3]\,d\mu_o - 3\int_{\mathbb{R}}[-\chi^2 + 2\zeta\chi^3]\,d\mu_o,$$

$$= -3\int[3\chi^2 - 2\zeta\chi^3]\,d\mu_o\ ,$$

$$= -3\int_{\mathbb{R}}[3x^2\rho(x) + x^3\rho'(x)]\,dx, \quad \text{puisque}$$

μ_o a pour densité ρ et puisque $\zeta = -\frac{1}{2}\rho'/\rho$ (voir 1.4),

$$= 0 \quad \text{puisque } \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ (Lemme 1.5).}$$

cqfd.

2.2.5 - Pour conclure, on établit l'existence de μ à partir de la propriété (C) : On remarque d'abord que $\tilde{\mu}$-presque toutes les tajectoires de la fonction aléatoire $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ vérifient la relation (2.1.1). En effet, l'application $(t,\omega) \to Y_t(\omega)$ étant mesurable de $\mathbb{R}\times\tilde{\mathbb{W}}$ dans $\mathbb{R}$ d'après C2, l'application $\omega \to \int_{\mathbb{R}}|Y_t(\omega)|^p\frac{dt}{1+t^2}$ de $\tilde{\mathbb{W}}$ dans $[0,+\infty]$ est mesurable pour chaque $p \geqslant 0$, et on a, d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\tilde{\mathbb{W}}}\tilde{\mu}(d\omega)\int_{\mathbb{R}}|Y_t(\omega)|^p\frac{dt}{1+t^2} = \int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+t^2}\int_{\tilde{\mathbb{W}}}|Y_t(\omega)|^p\,\tilde{\mu}(d\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+t^2}\int_{\tilde{\mathbb{W}}}|\tilde{X}_t(\omega)|^p\tilde{\mu}(d\omega) \quad \text{d'après C1,}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, \mu_o(dx) \quad \text{par construction de } \tilde{\mu} .$$

D'où, puisque $\chi^p \in L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ [lemme 1.5, relation (1.5.4)],

$$\text{(2.2.16)} \qquad \int_{\tilde{W}} \tilde{\mu}(d\omega) \int_{\mathbb{R}} |Y_t(\omega)|^p \frac{dt}{1+t^2} < +\infty.$$

Ainsi, désignant par $\tilde{W}_b$ l'ensemble des $\omega \in \tilde{W}$ tels que $\int_{\mathbb{R}} |Y_t(\omega)|^p \frac{dt}{1+t^2} < +\infty$ pour tout entier $p \geqslant 0$, on a $\tilde{W}_b \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mu}(\tilde{W}_b) = 1$. Cela étant, soit Y l'application de $\tilde{W}_b$ dans $\mathbb{W}$ associant à chaque $\omega \in \tilde{W}_b$ sa trajectoire $t \to Y_t(\omega)$ (laquelle appartient à $\mathbb{W}$ par définition de $\tilde{W}_b$). Cette application est mesurable lorsqu'on munit $\tilde{W}_b$ de la tribu $\tilde{\mathcal{F}}_b$ induite par $\tilde{\mathcal{F}}$, puisque $X_t(Y(\omega)) = Y_t(\omega)$ ($t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \tilde{W}_b$) ; et, pour chaque partie finie non vide J de $\mathbb{R}$, on a, d'après C1,

$$\text{(2.2.17)} \qquad X_J(Y(\omega)) = \tilde{X}_J(\omega) \text{ pour } \tilde{\mu}\text{-presque tout } \omega \in \tilde{W}_b.$$

Il est alors clair, d'après (2.2.17) et le lemme 2.2.3 que l'on obtient une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W}, \mathcal{F})$ possédant les propriétés M1 et M2 en prenant l'image par Y de la mesure induite sur $(\tilde{W}_b, \tilde{\mathcal{F}}_b)$ par la mesure $\tilde{\mu}$. En outre, cette mesure possède la propriété M3 ainsi qu'on l'a vu en 2.2.3. Enfin, en ce qui concerne la propriété M4, on remarque que l'ensemble des $X_t (t \in \mathbb{R})$ est borné dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu)$ pour tout $r < +\infty$ d'après la propriété M1 et le lemme 1.5 [relation (1.5.4)]. Ainsi, pour chaque $t_o \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant p < +\infty$, l'ensemble des $|X_t - X_{t_o}|^p$ ($t \in \mathbb{R}$) est borné dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu)$; donc cet ensemble est uniformément intégrable (voir Meyer [9], Théorème II. 22). D'où (voir Meyer [9], Théorème II. 21), $\lim_{t \to t_o} \|X_t - X_{t_o}\|_p = 0$, puisque $\lim_{t \to t_o} X_t(\omega) = X_{t_o}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{W}$.

cqfd.

2.3.- Champ Euclidien et champ quantique ; Théorie de Nelson en dimension $d = 1$ (1)

On désigne (2) par μ la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q (3), par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu)$, et, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, par $\underline{X}_t$ la classe (modulo μ) de X_t. D'après la propriété M4 (Théorème 2.I), l'application $\underline{X} : t \to \underline{X}_t$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$; on peut donc définir l'application linéaire Σ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$ en posant,

$$\Sigma(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \underline{X}_t \, dt \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})), \tag{2.3.1}$$

l'intégrale du second membre étant absolument convergente dans $\mathcal{H}$.

Pour chaque ouvert non vide U de $\mathbb{R}$, on désigne alors par $\mathcal{O}_U$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les $\Sigma(f)$ avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} f \subset U$ (autrement dit, $\mathcal{O}_U$ est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurables toutes les fonctions $G : \mathbb{W} \to \mathbb{C}$ appartenant aux classes $\Sigma(f)$ avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} f \subset U$) ; et, pour chaque fermé non vide F de $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{O}_F$ l'intersection des tribus $\mathcal{O}_U$ avec U ouvert et $U \supset F$. Enfin, on désigne par Ω la classe (modulo μ) de la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{W}$.

Cela étant,

<u>THEOREME 2.II</u> - Le système $\mathcal{E} = (\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu \; ; \; (T_\eta)_{\eta \in \mathbb{E}}, \Sigma)$ possède (en

----

(1) Un lecteur principalement intéressé par la quasi-invariance de la mesure Euclidienne peut sauter sans inconvénient cet alinéa.

(2) Avec les notations introduites au § 2.1.1.

(3) Voir 2.1.3

plus de M3[1]) les propriétés suivantes :

(E0) Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\Sigma(\bar{f}) = \overline{\Sigma(f)}$

(E1) L'application linéaire Σ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{K}$.

(E2) Pour toute demi-droite ouverte U et tout $Z \in L^2(\mathbb{W}.\mathcal{O}_U, \mu)$,

$$E_\mu[Z/\mathcal{O}_{\complement U}] = E_\mu[Z/\mathcal{O}_{\partial U}] \quad (2) \; ; \tag{2.3.2}$$

(E3) Pour tous $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\eta \in \mathbb{E}$,

$$\Sigma(f \circ \eta) = \Sigma(f) \odot T_\eta \quad ; \tag{2.3.3.}$$

(E4) Pour tout $Z \in L^2(\mathbb{W}, \mathcal{O}_{\{0\}}, \mu)$, $Z \odot T_\sigma = Z$.

(E5) La mesure μ est ergodique pour les translations $\theta_t (t \in \mathbb{R})$ en ce sens que les multiples de Ω (i.e les constantes) sont les seuls éléments Z de $\mathcal{K}$ tels que $Z \odot \theta_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour chaque $Z \in L^{\sigma}(\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu)$, $Z \odot T_\eta$ désigne naturellement la classe (modulo μ) commune (propriété M3) aux fonctions $G \circ T_\eta$ avec $G \in Z$.

Ainsi, $\mathcal{E} = (\mathbb{W}, \mathcal{F}, \mu \; ; \; (T_\eta)_{\eta \in \mathbb{E}}, \Sigma)$ constitue un champ Markovien Euclidien sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (propriétés E0 à E3) selon la définition donnée par Nelson au § 6 de [6] (avec $\mathcal{S}$ au lieu de $\mathcal{D}$; voir aussi la remarque 2.5.1) ; et ce champ possède la "propriété de réflexion" (E4) et la propriété ergodique (E5).

----

(1) Voir le Théorème 2.I en 2.1.3.

(2) Si $U = (-\infty, a]$ ou $U =]a, +\infty)$, $\partial U = \{a\}$; voir la remarque 2.5.1.

En outre, le champ Euclidien $\mathcal{E}$ fournit, par la démarche de Nelson, la réalisation de Guelfand-Segal du champ quantique d'interaction Q (voir le théorème 1.III en 1.5) :

THEOREME 2.III.- En plus de la propriété M3 et des propriétés E0 à E5, le système $\mathcal{E} = (\mathbb{W}\ \mathcal{F}, \mu\ ;\ (T_\eta)_{\eta \in \mathbb{E}}\ ;\ \Sigma)$ possède les propriétés suivantes :

(E6) L'application Σ se prolonge de façon unique en une application linéaire séquentiellement continue $\Sigma^{\#}$ de $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ muni de la topologie étroite [1] dans $\mathcal{K}$; et on a,

(2.3.4) $$\Sigma^{\#}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \underline{X}_t\ \xi(dt) \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})\ ;\ \text{et,}$$

(2.3.5) $$\underline{X}_t = \Sigma^{\#}(\delta_t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}\ ^{(2)}.$$

(E7) La tribu $\mathcal{O}_{\{0\}}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\underline{X}_o$; et l'application $U_o : \psi \to \psi \odot \underline{X}_o$ [3] est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ sur $L^2(\mathbb{W}, \mathcal{O}_{\{0\}}, \mu)$.

(E8) Pour tous $t \geqslant 0$ et $Z \in L^2(\mathbb{W}, \mathcal{O}_{\{0\}}, \mu)$,

(2.3.6) $$U_o^{-1} N_t\ U_o\ Z = E_\mu[Z \odot \theta_t / \mathcal{O}_{\{0\}}].$$

------

(1) $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ [resp $C_b(\mathbb{R})$] désigne l'espace des mesures [resp des fonctions continues] bornées sur $\mathbb{R}$; et la topologie étroite est la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}_b(\mathbb{R}), C_b(\mathbb{R}))$.

(2) Voir la remarque 2.5.4

(3) On désigne naturellement par $\psi \odot \underline{X}_o$ la classe (modulo μ) commune aux fonctions $f \circ G$ avec $f \in \psi$ et $G \in \underline{X}_o$ (voir 2.1.3).

(E9) Pour tous Y et Z appartenant à $L^2(\mathbb{W},\mathcal{O}_{\{0\}},\mu)$ tel que, $U_o^{-1}Y \in D(H^{1/2})$ et $U_o^{-1}Z \in D(H^{1/2})$, on a $\overline{Y}\,\underline{X}_o\, Z \in L^1(\mathbb{W},\mathcal{O},\mu)$, et,

$$(U_o^{-1}Y|\Phi_o U_o^{-1}Z) = E_\mu[\overline{Y}\,\underline{X}_o\, Z]^{(1)} \tag{2.3.7}$$

En particulier, il existe C > 0 tel que,

$$|E_\mu[\overline{Y}\,\underline{X}_o\, Z]| \leqslant C\, \|(I+H)^{1/2}\, U_o^{-1}Y\|\, \|(I+H)^{1/2}\, U_o^{-1}Z\| \tag{2.3.8}$$

pour tous Y et Z appartenant à $U_o(D(H^{1/2}))$.

Nous ignorons si le champ Euclidien $\mathcal{E}$ en cause ici admet (pour l'interaction Q la plus générale) un prolongement linéaire continu de $H^{-1}(\mathbb{R})$ dans $L^o(\mathbb{W}, \mathcal{O}, \mu)$ ainsi que le postule Nelson dans les § 2 à 5 de [6]. La propriété (E6) remplace avantageusement ici ce prolongement, et permet de "récupérer" le champ (Euclidien) $\underline{X}_t$ à l'instant t (relation (2.3.5)) à partir de Σ (défini seulement sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) sans avoir à affronter les difficultés du § 6 de [6][2] ; la propriété (E7) assure l'équivalence unitaire de l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{W},\mathcal{O}_{\{0\}},\mu)$ de Nelson avec l'espace $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ qui porte la réalisation de Guelfand-Segal du champ quantique d'interaction Q (voir 1.5). La relation (2.3.6) correspond alors à la relation (4) de [6] par laquelle Nelson définit le Hamiltonien H via le semi-groupe $(e^{-tH})_{t\geqslant 0}$. Enfin, la relation (2.3.7) relie le champ quantique Φ_o à l'instant zéro [considéré comme forme sesqui-linéaire sur $D(H^{1/2}) \times D(H^{1/2})$] au champ Euclidien $\underline{X}_o$ à l'instant zéro ; et la relation (2.3.8) exprime que l'hypothèse (A) de Nelson (§ 4 de [6]) est sa-

----

(1) $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, et Φ_o est l'opérateur de multiplication par χ dans cet espace (voir 1.4 et 1.5).

(2) Voir aussi la remarque 2.5.4.

tisfaite ici avec $k = - \ell = 1$.

2.4. - Compléments sur la propriété de Markov de la mesure Euclidienne $\mu^{(1)}$.

2.4.1.- On introduit d'abord la forme générale de la propriété de Markov :

PROPOSITION - (1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_{[t,+\infty)}, \mu)$,

(2.4.1) $$E_\mu[Z/ \mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] = E_\mu[Z/ \mathfrak{F}_{\{t\}}].$$

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_{(-\infty,t]}, \mu)$,

(2.4.2) $$E_\mu[Z/ \mathfrak{F}_{[t,+\infty)}] = E_\mu[Z/ \mathfrak{F}_{\{t\}}].$$

(3) Il existe une application linéaire continue M_μ de $L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_{[0,+\infty)}, \mu)$ dans $L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ et une seule telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_{[0,+\infty)}, \mu)$,

(2.4.3) $$M_\mu(Z) \odot X_t = E_\mu[Z \odot \theta_t/ \mathfrak{F}_{(-\infty,t]}].$$

En outre, M_μ est un opérateur Markovien en ce sens que,

(2.4.4) $M_\mu(Z) \geqslant 0$ pour tout $Z \geqslant 0$ $(Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_{[0,+\infty)}, \mu))$; et,

(2.4.5) $M_\mu(\Omega) = \Omega_o$;

----

(1) La situation et les notations sont celles intervenant en 2.3.

et, M_μ induit une contraction de $L^p(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[0,+\infty)}, \mu)$ dans $L^p(\mathbb{R}, \mu_o)$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Les propriétés (1) et (2) seront appelées respectivement la <u>propriété de Markov</u> et la <u>propriété de Markov rétrograde</u> de μ[1].

En effet, par une vérification standard, on déduit d'abord de la propriété M2 que (2.4.1) a lieu pour tout Z de la forme $\prod_{j=1}^{n} \psi_j \odot X_{t_j}$ avec $\psi_j \in L^\infty(\mathbb{R}, \mu_o)$ et $t_j \geqslant t$ $(j = 1,2,\dots,n \; ; \; n \geqslant 1)$; d'où il résulte que (2.4.1) a lieu pour tout $Z \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)}, \mu)$ d'après le théorème de prolongement par mesurabilité[2] ; et finalement pour tout $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)}, \mu)$ d'après la continuité en moyenne des espérances conditionnelles. D'où la propriété (1). On peut en déduire la propriété (2) en utilisant l'invariance de μ par la symétrie S (voir la remarque 1 ci-dessous) : Si $Z \in L^1(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{(-\infty,t]}, \mu)$, on a $Z \odot S \in L^1(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[-t,+\infty)}, \mu)$, et,

$$\begin{aligned} E_\mu[Z/\mathcal{F}_{[t,+\infty)}] &= E_\mu[Z \odot S/ \mathcal{F}_{(-\infty,-t]}] \odot S \text{ par l'invariance de } \mu, \\ &= E_\mu[Z \odot S/ \mathcal{F}_{\{-t\}}] \odot S \text{ d'après la propriété (1)}, \\ &= E_\mu[Z/ \mathcal{F}_{\{t\}}] \text{ de nouveau par l'invariance de } \mu. \end{aligned}$$

Enfin, remarquant que l'application $U_o : \psi \to \psi \odot X_o$ est une isométrie de $L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ sur $L^1(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{\{0\}}, \mu)$ [Théorème 2.I, propriété M1 de μ], la propriété (3) résulte immédiatement de la propriété (1) en posant $M_\mu(Z) = U_o^{-1}(E_\mu[Z/ \mathcal{F}_{\{0\}}])$; l'opérateur M_μ ainsi défini étant Markovien en même temps que les opérateurs U_o^{-1} et $E_\mu[\cdot/ \mathcal{F}_{\{0\}}]$.

cqfd.

------

(1) Voir 4.2.1 et la remarque 1 ci-dessous.

(2) Voir par exemple Meyer [9], Théorème I.20.

Remarque 1 - La propriété de Markov rétrograde de μ est conséquence de la propriété de Markov indépendamment de l'invariance de μ par la symétrie S [voir à ce sujet l'exposé N°3 de [26] (Théorème 1, page 3.03) ou le Théorème 1.3 au § I.3 de Getoor [10]].

Remarque 2 - On peut déduire de la proposition V.4.4 de Neveu [8] que l'opérateur Markovien M_μ est associé à une probabilité de transition $P(x,d\omega)$ de $\mathbb{R}$ dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$: une version de cette probabilité de transition est fournie par la famille $(P_x)_{x \in \mathbb{R}}$ des mesures qui constituent le processus de diffusion X mentionné en 2.1.4 ci-dessus.

2.4.2.- Pour chaque sous-ensemble non vide J de $\mathbb{R}$, on désigne par $\underline{\mathcal{F}}_J$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par $\mathcal{F}_J \cup \mathcal{N}_\mu$, où $\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{F} \mid \mu(A) = 0\}$, et par $\underline{\mathcal{F}}_J^+$ l'intersection des tribus $\underline{\mathcal{F}}_U$ avec U ouvert et $U \supset J$. On note que $\underline{\mathcal{F}}_J$ est aussi la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par la réunion des classes $\underline{X}_t$ avec $t \in J$[1]. Cela étant,

LEMME - (1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^1(W, \underline{\mathcal{F}}_{[t,+\infty)}, \mu)$,

$$E_\mu[Z/\underline{\mathcal{F}}^+_{(-\infty,t]}] = E_\mu[Z/\mathcal{F}_{\{t\}}]. \tag{2.4.6}$$

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^1(W, \underline{\mathcal{F}}_{(-\infty,t]}, \mu)$,

$$E_\mu[Z/\underline{\mathcal{F}}^+_{[t,+\infty)}] = E_\mu[Z/\mathcal{F}_{\{t\}}. \tag{2 4.7}$$

En effet, on déduit d'abord la propriété (2) de la propriété(1) comme en 2.4.1 la propriété de Markov rétrograde de la propriété de Markov. Ensuite, comme dans la démonstration de cette dernière en 2.4.1, on se ramène à établir la propriété correspondant à M2 : Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $h \geqslant 0$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$,

$$E_\mu[\psi \odot X_{t+h}/\underline{\mathcal{F}}^+_{(-\infty,t]}] = N_h\psi \odot X_t. \tag{2.4.8}$$

---

(1) Voir le début de 2.3.

2.4.2, 2.4.3.

Et, pour cela, il suffit [les deux membres de (2.4.8) étant fonctions continues de $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$] de montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $h \geqslant 0$, $\psi \in C_b(\mathbb{R})$ et $A \in \underline{\mathfrak{F}}^+_{(-\infty, t]}$, on a,

$$(2.4.9) \qquad E_\mu[1_A.(\psi \text{ o } X_{t+h})] = E_\mu[1_A.((N_h\, \psi) \text{ o } X_t)] \,.$$

[on note que $N_h\psi \in C_b(\mathbb{R})$ d'après la proposition 2.1.2]. Or, posant $t_n = t + \frac{1}{n}$ pour chaque n entier > 0, on a $A \in \underline{\mathfrak{F}}_{(-\infty, t_n]}$; donc, d'après M2,

$$E_\mu[1_A.(\psi \text{ o } X_{t_{n+h}})] = E_\mu[1_A.((N_h\, \psi) \text{ o } X_{t_n})] \,.$$

D'où (2.4.9) en passant à la limite dans cette relation lorsque n tend vers l'infini, ce qui est licite, d'après le théorème de Lebesgue et la continuité des trajectoires de la fonction aléatoire $(X_t)_{t\, \in\, \mathbb{R}}$, puisque les fonctions ψ et $N_h\psi$ sont continues et bornées.

cqfd.

Remarque - On établirait de même la propriété de Markov forte pour le processus en cause (voir à ce sujet Getoor [8], § I.8, Théorème 8.11).

2.4.3.- On en vient maintenant à la continuité à droite des tribus $\underline{\mathfrak{F}}_J$:

PROPOSITION - (1) Quel que soit $J \subset \mathbb{R}$ $(J \neq \emptyset)$, on a

$$(2.4.10) \qquad \mathfrak{F}_J = \mathfrak{F}_{\bar{J}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathfrak{F}}_J = \underline{\mathfrak{F}}_{\bar{J}} \text{ (1)} \,.$$

(2) Si J est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, on a,

$$(2.4.11) \qquad \underline{\mathfrak{F}}^+_J = \underline{\mathfrak{F}}_J$$

En effet, la seconde égalité (2.4.10) résulte de la première, laquelle découle de la continuité des trajectoires de la fonction aléatoire $(X_t)_{t\, \in\, \mathbb{R}}$. D'où la propriété (1). Pour établir ensuite la relation

------

(1) $\bar{J}$ désigne la fermeture de J dans $\mathbb{R}$.

(2.4.11), il suffit de montrer que ,

(2.4.12) $$E_\mu[Y/\underline{\mathcal{F}}_J^+] = E_\mu[Y/\underline{\mathcal{F}}_J]$$

pour tout $Y \in L^\infty(W,\mathcal{F},\mu)$. Supposant d'abord que $J = (-\infty,t]$, grâce au théorème de prolongement par mesurabilité, on se ramène à montrer que (2.4.12) a lieu lorsque $Y = Y_1Y_2$ avec $Y_1 \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{(-\infty,t]},\mu)$ et $Y_2 \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\mu)$; ce qui résulte des propriétés (1) de la proposition 2.4.1, du lemme 2.4.2 et de ce que $E_\mu[Y_1Y_2/\mathcal{B}] = Y_1E_\mu[Y_2/\mathcal{B}]$ pour $\mathcal{B}= \underline{\mathcal{F}}_{(-\infty,t]}$ et $\mathcal{B}= \underline{\mathcal{F}}^+_{(-\infty,t]}$. Et on conclurait de même lorsque $J = [t,+\infty)$ à partir des propriétés (2) des mêmes énoncés. Supposant ensuite que $J = [a,b]$ (avec $a\leqslant b$), il suffit de même de montrer que (2.4.12) a lieu lorsque $Y = Y_1Y_2Y_3$, avec $Y_1 \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{(-\infty,a]},\mu)$, $Y_2 \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{[a,b]},\mu)$ et $Y_3 \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{[b,+\infty)},\mu)$. Or, si $\mathcal{B} = \underline{\mathcal{F}}_{[a,b]}$ ou $\mathcal{B}= \underline{\mathcal{F}}^+_{[a,b]}$, on a, puisque $\mathcal{B} \subset \underline{\mathcal{F}}_{(-\infty,b]}$ et $\mathcal{B}\subset \underline{\mathcal{F}}_{[a,+\infty)}$ d'après ce qui précède,

$$E_\mu[Y_1Y_2Y_3/\mathcal{B}] = E_\mu[E_\mu[Y_1Y_2Y_3/ \underline{\mathcal{F}}_{(-\infty,b]}]/ \mathcal{B}],$$

$$= E_\mu[Y_1Y_2\ E_\mu[Y_3/ \underline{\mathcal{F}}_{(-\infty,b]}]/ \mathcal{B}],$$

$$= E_\mu[Y_1Y_2\ E_\mu[Y_3/\mathcal{F}_{\{b\}}]/ \mathcal{B}],$$ d'après la propriété de Markov de $\mu^{(1)}$,

$$= E_\mu[E_\mu[Y_1Y_2\ E_\mu[Y_3/\mathcal{F}_{\{b\}}]/\mathcal{F}_{[a,+\infty)}]/\mathcal{B}],$$

$$= E_\mu[Y_2\ E_\mu[Y_3/\mathcal{F}_{\{b\}}]E_\mu[Y_1/\mathcal{F}_{[a,+\infty)}]/ \mathcal{B}],$$

$$= E_\mu[Y_2\ E_\mu[Y_3/\mathcal{F}_{\{b\}}]\ E_\mu[Y_1/\mathcal{F}_{\{a\}}]/ \mathcal{B}],$$

d'après la propriété de Markov rétrograde de $\mu^{(1)}$. Ainsi,

$$E_\mu[Y_1Y_2Y_3/\mathcal{B}] = Y_2\ E_\mu[Y_1/\mathcal{F}_{\{a\}}]\ E_\mu[Y_3/\mathcal{F}_{\{b\}}]$$

D'où (2.4.12) lorsque $Y = Y_1Y_2Y_3$.

cqfd.

----

(1) Proposition 2.4.1.

2.4.5, 2.5.1.

Remarque - Nous ignorons si l'on a $\underline{\mathfrak{F}}^{+}_{J} = \underline{\mathfrak{F}}_{J}$ pour tout fermé non vide J de $\mathbb{R}$[1].

2.5.- Démonstration des Théorèmes 2.II et 2.III

2.5.1.- Les propriétés E0, E1 et E3 sont immédiates [voir(2.1.4) en ce qui concerne E3]. La propriété de Markov E2 résulte de la proposition 2.4.1 [propriétés (1) et (2)] et de la proposition suivante :

> PROPOSITION - Si $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert ou un intervalle fermé, on a $\mathcal{O}_J = \underline{\mathfrak{F}}_J$.

En effet, en vertu de la proposition 2.4.3 [propriété (2)], il suffit de montrer que $\mathcal{O}_J = \underline{\mathfrak{F}}_J$ lorsque J est un intervalle ouvert. Or, dans ce cas, en vertu de la continuité de l'application $t \to \underline{X}_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H} = L^2(W, \mathfrak{F}, \mu)$, d'une part $\mathcal{O}'_J$ contient $\underline{\mathfrak{F}}_J$ car, si (f_n) est une suite standard de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ approximant δ_t, on a $\underline{X}_t = \lim\limits_{n \to \infty} \Sigma(f_n)$ (limite dans $\mathcal{H}$), donc $\underline{X}_t \in L^2(W, \mathcal{O}'_J, \mu)$ pour tout $t \in J$; et d'autre part $\mathcal{O}_J$ contient $\underline{\mathfrak{F}}_J$, car, pour chaque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\Sigma(f)$ est limite dans $\mathcal{H}$ d'une suite de sommes de Rieman, lesquelles appartiennent à $L^2(W, \underline{\mathfrak{F}}_J, \mu)$ dès que supp $f \subset J$.

cqfd.

Remarque - Nous ignorons si on a $\mathcal{O}'_J = \underline{\mathfrak{F}}_J$ pour tout fermé non vide J de $\mathbb{R}$, et si la propriété de Markov (2.3.2) (propriété E2) a lieu pour tout U ouvert non vide de $\mathbb{R}$. La propriété de Markov pour les demi-droites qui vient d'être établie suffit à la Théorie de Nelson[2] ; et il n'y a pas d'inconvénient à s'y limiter.

----

(1) Voir la remarque 2.5.1.

(2) Plus généralement (i.e pour une dimension d quelconque), la théorie développée par Nelson dans [6] ne réclame la propriété de Markov du champ Euclidien que pour les demi-espaces ouverts.

2.5.2.- La propriété E4 résulte de la propriété E7 (Théorème 2.III), laquelle résulte elle-même de la proposition 2.5.1 (avec $J = \{0\}$) et de la propriété M1 (Théorème 2.I).

2.5.3.- La propriété ergodique E5 va résulter de la propriété asymptotique suivante :

PROPOSITION - Pour tout couple $(Z,Z') \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, on a,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \langle Z|Z' \odot \theta_t \rangle = \langle Z|\Omega \rangle \langle \Omega|Z' \rangle . \tag{2.5.1.}$$

On désigne ici par $\langle . | . \rangle$ le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

En effet, doit $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{H}$ qui est réunion des sous-espaces $L^2(\mathbb{W}, \underline{\mathfrak{F}}_J, \mu)$ avec J intervalle compact ($\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{H}$ car, si $Z \in \mathcal{H}$ est tel que $\langle Z, Z' \rangle = 0$ pour tout $Z' \in \mathcal{C}$, on a aussi $\langle Z|Z' \rangle 0$ pour tout $Z' \in L^\infty(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ d'après le théorème de prolongement par mesurabilité). Puisque $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et puisque $\|Y \odot \theta_t\| = \|Y\|$ pour tout $Y \in \mathcal{H}$, il suffit de montrer que (2.5.1) a lieu lorsque $Z \in L^2(\mathbb{W}, \underline{\mathfrak{F}}_{[a,b]},\mu)$ et $Z' \in L^2(\mathbb{W}, \underline{\mathfrak{F}}_{[a',b']},\mu)$. Or, dans ce cas, on a, dès que $a' + t \geqslant b$,

$$\langle Z|Z' \odot \theta_t \rangle = E_\mu[\overline{Z}\ E_\mu[Z' \odot \theta_t / \underline{\mathfrak{F}}_{(-\infty,a'+t]}]],$$

$$= E_\mu[\overline{Z}\ E_\mu[Z' / \underline{\mathfrak{F}}_{(-\infty,a']}] \odot \theta_t] \quad \text{d'après M3},$$

$$= E_\mu[\overline{Z}(\psi' \odot X_{a'}) \odot \theta_t] \text{ , d'après la propriété de Markov,}$$

en posant $\psi' = M_\mu(Z' \odot \theta_{a'}^{-1})$ [proposition 2.4.1, propriété (3)] ;

$$= E_\mu[\overline{Z}\ (\psi' \odot X_{a'+t})]$$

$$= E_\mu[(\overline{\psi} \odot X_b)(\psi' \odot X_{a'+t})], \text{ d'après la propriété de}$$

Markov rétrograde en posant $\psi = M_\mu(Z \odot \theta_b^{-1} \circ S)$,

2.5.3, 2.5.4.

$= (\psi | N_{a'+t-b} \psi')$ d'après M1 et M2 en désignant par $(.|.)$ le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$. Ainsi,

$$(2.5.2) \qquad < Z | Z' \odot \theta_t > = (\psi | N_{a'+t-b} \psi') \quad \text{dès que } a'+t \geqslant b.$$

Mais, en vertu de l'équivalence unitaire entre H et l'opérateur anharmonique $\underset{\sim}{H}$ (Théorème 1.III) et de la propriété (3) de la proposition B3, O est valeur propre simple de H ; ce qui entraîne que,

$$(2.5.3) \qquad \lim_{t \to +\infty} (\psi | N_{a'+b-b} \psi') = (\psi | \Omega_o)(\Omega_o | \psi') .$$

D'où la relation (2.5.1) lorsque $t \to +\infty$ puisque $(\psi|\Omega_o) = < Z | \Omega >$ et $(\Omega_o | \psi') = < \Omega | Z' >$, donc aussi par symétrie lorsque $t \to -\infty$.

cqfd.

La propriété E5 en résulte sans difficulté comme suit : soit Z un élément de $\mathcal{K}$ tel que $Z \odot \theta_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posant $Z_1 = Z - < Z | \Omega > \Omega$, on a encore $Z_1 \odot \theta_t = Z_1$; donc $< Z_1 | Z_1 \odot \theta_t > = \|Z_1\|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; et la relation (2.5.1) avec Z_1 mis pour Z et pour Z' entraîne que $\|Z_1\|^2 = 0$, puisque $< \Omega | Z_1 > = 0$ par construction. D'où $Z = < Z | \Omega > \Omega$.

<u>Remarque</u> - La démonstration ci-dessus repose essentiellement sur le fait que O est valeur propre simple de H et ne fait intervenir que la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne de μ. Inversement, si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ vérifiant ces propriétés ainsi que la propriété ergodique E5, alors O est valeur propre simple du Hamiltonien associé (voir à ce sujet la proposition 5.1.1 et la remarque 2 de 5.1.2) : on établit ce résultat sans difficulté en transcrivant au cas particulier en cause ici la démonstration du théorème 3 de Nelson [6].

<u>2.5.4.</u>- En ce qui concerne la propriété E6, l'unicité du prolongement Σ résulte de ce que toute mesure $\xi \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ est limite [pour la topologie étroite $\sigma(\mathcal{M}_b, C_b)$] d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ [ξ est d'abord

limite étroite de la suite des mesures à support compact $\varphi_n.\xi$ où $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $1_{[-n,n]} \leqslant \varphi_n \leqslant 1_{[-n-1,n+1]}$; puis chaque mesure à support compact est limite de la suite de ses régularisées]. Et pour établir l'existence, il suffit de montrer que l'application linéaire $\Sigma^{\#}$ de $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$ définie par (2.3.4) est séquentiellement continue. Or, en calculant scalairement deux fois l'intégrale (2.3.4) après l'avoir portée au second membre de l'égalité $\|\Sigma^{\#}(\xi)\|^2 = <\Sigma^{\#}(\xi)|\Sigma^{\#}(\xi)>$, on obtient,

$$(2.5.4) \qquad \|\Sigma^{\#}(\xi)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi(ds) \int_{\mathbb{R}} \xi(dt) <\underline{X}_s|\underline{X}_t> = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} <\underline{X}_s|\underline{X}_t> \xi\otimes\xi(ds \times dt).$$

D'où la continuité en vue, puisque, d'une part la fonction $(s,t) \to <\underline{X}_s|\underline{X}_t>$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (propriété M4, Théorème 2.I) et, d'autre part, l'application $\xi \to \xi\otimes\xi$ est séquentiellement continue de $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ lorsque ces espaces sont munis de la topologie étroite [cette dernière propriété découle immédiatement du Théorème de continuité de Paul Levy (voir, par exemple, [15], Théorème 2, page 311-08)].

<u>Remarque</u> - La relation (2.5.4) entraîne que,

$$(2.5.5) \qquad \|\Sigma^{\#}(\xi)\| \leqslant k\ \|\xi\| \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}),$$

avec $k = \|\underline{X}_o\|$.

Plus généralement, soit Σ une application linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans un espace de Hilbert (quelconque) $\mathcal{H}$ telle que,

$$(2.5.6) \qquad \|\Sigma(f)\| \leqslant k \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\ dt \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(c) L'application Σ se prolonge en une application linéaire séquentiellement continue $\Sigma^{\#}$ de $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ muni de la topologie étroite dans $\mathcal{H}$.

2.5.4, 2.5.5, 2.6.

(cc) Il existe une application continue et bornée $t \to \underline{X}_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{K}$ telle que Σ soit de la forme (2.3.1).

Et si ces conditions sont satisfaites, (2.3.4), (2.3.5) et (2.5.5) sont vérifiées.

Ainsi, en particulier, la propriété E6 est caractéristique des champs Euclidiens Σ de la forme (2.3.1).

Par ailleurs, en vertu de la propriété M4 (Théorème 2.I), l'intégrale (2.3.4) (Théorème 2.III) converge aussi dans $L^p(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$; ce qui fait que $\Sigma^*(\xi) \in L^p(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$, et qu'on pourrait établir une propriété analogue à E6 dans $L^p(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

2.5.5.- Enfin, les propriétés E8 et E9 ne sont que transcriptions : la relation (2.3.6) résulte de ce que $\mathcal{O}_{\{0\}} = \underline{\mathfrak{F}}_{\{0\}}$ (propriété E7, voir 2.5.2. ci-dessus) et de la propriété de Markov M2 ; et E9 résulte de M1 et de ce que Φ_o est dominé par $H^{1/2}$ de même que $\underset{\sim}{\Phi}_o$ est dominé par $\underset{\sim}{H}^{1/2}$ (Théorème 1.III et propriété (1) de la proposition B5).

2.6.- Compléments et remarques

2.6.1.- Le choix de l'espace $\mathbb{W}$ retenu pour porter la mesure Euclidienne μ (voir 2.1) n'est pas impératif. Pour ce qui est de l'étude faite ci-dessus du champ Euclidien, ainsi que pour les développements du § 3 ci-dessous, on aurait pu remplacer $\mathbb{W}$ par $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par contre, pour l'étude de μ du point de vue de sa quasi-invariance, il importe que μ soit portée par un sous-espace $\mathcal{W}$ de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que, pour tout $\omega \in \mathcal{W}$, $\int_{\mathbb{R}} |\omega(t)|^p |f(t)| \, dt < +\infty$ pour tout $p > 0$ et tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [ce qui entraîne, en particulier, que $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$] ; or, $\mathbb{W}$ constitue, parmi d'autres possibles, un tel sous-espace de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (voir à ce sujet 4.1 ainsi que la remarque 4 de 6.1.2 et la remarque 6.4.1).

2.6.2 - Dans le cas du <u>champ libre</u> de masse $m > 0$ (voir 1.7.1), d'une part, pour chaque $t > 0$, l'opérateur $N_t^{(m)} = e^{-tH^{(m)}}$ est défini par un noyau Markovien $n_t^{(m)}(x,dy)$ sur $\mathbb{R}$[1] dont le symbole est donné par la formule,

$$(2.6.1) \qquad \int_{\mathbb{R}} n_t^{(m)}(x,dy)\, e^{i\xi y} = e^{-\frac{\xi^2}{4m}(1-e^{-2mt})}\, e^{i\xi e^{-mt}x}$$

$$(x \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}) \quad ;$$

autrement dit, $n_t^{(m)}(x,.)$ est la mesure Gaussienne sur $\mathbb{R}$ de moyenne $e^{-mt}x$ et de variance $(1-e^{-2mt})/2m$ [2]. D'autre part, la mesure Euclidienne $\mu^{(m)}$ spécifiée par le polynôme $Q(x) = m^2X$ [voir (1.7.1)] est déterminée par sa transformée de Fourier via la relation,

$$(2.6.2) \qquad \int_{\mathbf{W}} e^{i\int_{\mathbb{R}}\omega(t)f(t)dt}\, \mu^{(m)}(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}<f,\Sigma_m^{-1}f>}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, où $<.,.>$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$ et Σ_m la transformation $f \to -f''+m^2f$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; autrement dit, la mesure sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associée à $\mu^{(m)}$ (voir 2.6.1) est la mesure Gaussienne de moyenne nulle et de covariance Σ_m^{-1}. Ces résultats sont bien connus[3]; ils peuvent être établis comme suit dans le présent contexte : D'une part, on vérifie (en raisonnant sur les symboles) que (2.6.1) définit un semi-groupe de noyaux qui induit un semi-groupe fortement continu $(\tilde{N}_t^{(m)})_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs auto-adjoints dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o^{(m)})$; puis que le générateur infinitésimal $\tilde{H}^{(m)}$ de ce semi-groupe est tel que ,

$e^{i\xi\chi} \in D(\tilde{H}^{(m)})$ et $\tilde{H}^{(m)}(e^{i\xi\chi}) = (\frac{1}{2}\xi^2 + im\xi\chi)\, e^{i\xi\chi}$ $(\xi \in \mathbb{R})$; d'où on conclut que $\tilde{H}^{(m)} = H^{(m)}$ et $\tilde{N}_t^{(m)} = N_t^{(m)}$ $(t \geqslant 0)$ grâce à la propriété (3) de la proposition 1.6. D'autre part, en ce qui concerne (2.6.2), on rappelle d'abord que,

$$(2.6.3) \qquad \Sigma_m^{-1}f(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_m(t-u)\, du \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}),$$

------

(1) Voir 2.1.4 et 2.2.2.

(2) $n_t^{(m)}$ est connu comme le "noyau de Mehler"

(3) Voir par exemple Nelson [7]

où la fonction γ_m est définie par,

(2.6.4) $$\gamma_m(s) = \frac{1}{2m} e^{-m|s|} \qquad (s \in \mathbb{R}) \quad (1) \ ;$$

ce qui fait que l'on a,

(2.6.5) $$< f, \Sigma_m^{-1} f > = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \gamma_m(u-t) f(t) f(u) \, dt \, du \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})) \ .$$

Cela étant, on va voir que,

(2.6.6) $$\int_W e^{i\int_{\mathbb{R}} \omega(t)\xi(dt)} \mu^{(m)}(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \gamma_m(u-t)\xi(dt)\xi du)} ,$$

pour toute mesure ξ sur $\mathbb{R}$ à support compact ; d'où il résultera, d'après (2.6.5), que (2.6.2) a lieu pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; donc aussi pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par continuité des deux membres pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Puisque toute mesure ξ sur $\mathbb{R}$ à support dans un compact est limite vague d'une suite de mesures à supports finis dans ce compact, il suffit de montrer que (2.6.6) a lieu lorsque ξ est une mesure à support fini ; autrement dit, que, si $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}$ et $(t_j)_{1\leq j\leq n}$ sont des suites finies de nombres réels, on a,

(2.6.7) $$\int_W e^{i\sum_{j=1}^n \alpha_j \omega(t_j)} \mu(d\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \alpha_j\alpha_k\gamma_m(t_j-t_k)} ;$$

ce qui est facile à déduire de (2.6.1), de (2.6.4) et de l'expression (2.2.2) (Lemme. 2.2.2) des marginales de la mesure μ.

*
* *

----

(1) Voir l'appendice F.

§ 3.- FORMULE DE FEYNMAN-KAC

L'essentiel de ce paragraphe concerne la résolution "stochastique", en termes de la mesure Euclidienne μ, de l'équation d'évolution non homogène,

(3.i) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \psi_s = (H - K(\Phi_o, t))\, \psi_t \quad (t < u) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}, \mu_o) \quad ^{(1)},$$

où K est une fonction complexe sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ localement régulière et non bornée, mais telle que, localement uniformément en $t \in \mathbb{R}$, la fonction $|\mathcal{Re}\, K(\cdot, t)|$ soit strictement dominée à l'infini par $|\chi|^{q+1}$ où q est le degré de Q.

On montre que l'unique solution forte $t \to \psi_t$ $(t \leqslant u)$ de cette équation telle que $\psi_u = \psi$ [où ψ est donnée dans $L^r(\mathbb{R}, \mu_o)$ avec $r > 2$] est fournie par la formule de Feynman-Kac,

(3,ii) $$\psi_t \circ X_t = E_\mu\Big[(\operatorname{Exp}\{\int_t^u K(X_s, s)\, ds\})(\psi \circ X_u) / \mathcal{G}_{(-\infty, t]}\Big] \quad (t \in u),$$

(voir le Théorème 3.I en 3.1.2), et que le problème de Cauchy pour l'équation (3.i) ainsi fortement résolue par (3.ii) donne lieu à unicité faible (voir le Théorème 3.II en 3.3).

En outre, en 3.5, on retrouve directement à partir de cette formule (reprise en 3.4 dans le cas homogène) la variante, ici complètement explicite (i.e sans intégrale stochastique), de la formule de Cameron-Martin qui donne la densité mutuelle des restrictions aux tribus locales $\mathcal{G}_{[a,b]}$ des mesures Euclidiennes μ_1 et μ_2 sur W spécifiées par deux polynômes d'interaction Q_1 et Q_2.

----

(1) H étant l'opérateur Hamiltonien engendré par la mesure μ_o sur $\mathbb{R}$ [voir la relation (1.i) (introduction du §1) et les alinéas 1.4 et 1.6]

3.1.- Résultat principal : cas non homogène

3.1.1- Définition de la classe $\mathbb{K}^{(q)}$ - La situation est celle intervenant en 2.1 : $Q, \rho, \mu_o, H, (N_t)_{t \geqslant 0}$ et $(\mathbb{W}, \mathcal{G})$ ayant la même acception que dans ce numéro , (Φ_o, π_o) désigne le système de Heisenberg standard dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ engendré par μ_o (voir 1.4 et A6), et μ désigne la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q. En outre, q désigne le degré du polynôme Q.

On désigne de plus par $\mathbb{K}^{(q)}$ l'espace des fonctions complexes $K : (x,t) \to K(x,t)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, boréliennes, localement bornées et vérifiant les conditions K1, K2 et K3 ci-dessous :

(K1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $K(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(K2) pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, on a,

$$(3.1.1) \qquad \lim_{|x| \to +\infty} \sup_{t \in J} |K(x,t)|/|x|^{q+1} = 0$$

(K3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $K(x,\cdot)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$; et, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, on a,

$$(3.1.2) \qquad \int_{\mathbb{R}} (\sup_{t \in J} |\frac{d}{ds} / K(x,s)|_{s=t})^p \mu_o(dx) < +\infty \quad \text{pour } 1 \leqslant p < +\infty \cdot$$

Un exemple important ici (1) d'élément de $\mathbb{K}^{(q)}$ est fourni par les fonctions K polynômiales en x, c'est-à-dire de la forme,

$$(3.1.3) \qquad K(x,t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, x^j \qquad (x \in \mathbb{R} , t \in \mathbb{R}),$$

où $n \leqslant q$ et où les a_j sont continûment dérivables.

Si $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note K(t) la fonction $K(\cdot,t)$ sur $\mathbb{R}$, et

----

(1) Voir le paragraphe 4.

$\underline{K}(t)$ l'opérateur fermé $K(\Phi_o,t)$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [i.e $\underline{K}(t)$ est, dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, l'opérateur de multiplication par la classe modulo μ de la fonction $K(t)$]. Ces opérateurs donnent lieu au résultat préliminaire suivant :

> <u>LEMME</u> - Pour chaque $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ (1),
>
> (1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D(H) \subset D(\underline{K}(t))$ et l'opérateur $H - \underline{K}(t)$ est quasi-accrétif maximal (2).
>
> (2) De plus, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, il existe $\lambda_o > 0$ tel que l'opérateur $H - \underline{K}(t)$ soit λ_o-accrétif maximal (2) pour tout $t \in J$.

(voir le Lemme 3.2.1 et sa démonstration).

Cela étant, on s'intéresse au problème de Cauchy :

(3.1.4) $\qquad W'(t) = (H - \underline{K}(t))\, W(t) \qquad (t < u)$

$\qquad\qquad W(u) = \psi \qquad\qquad$ avec $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

Plus précisément, $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et $u \in \mathbb{R}$ étant donnés, on appellera ici <u>solution avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K</u> toute application continue $t \to \psi_t$ de l'intervalle fermé $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dérivable en tout point t de l'intervalle ouvert $(-\infty,u[$ (3) et telle que,

(3.1.5) $\qquad \psi_t \in D(H)$ et $\left.\dfrac{d}{ds}\psi_s\right|_{s=t} = (H - \underline{K}(t))\, \psi_t$ pour tout $t \in (-\infty,u[$.

----

(1) Voir la remarque finale de 3.2.1.

(2) Voir C1 .

(3) Continuité et dérivabilité de l'application $t \to \psi_t$ sont entendues "fortement" [i.e $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ étant muni de sa topologie d'espace de Hilbert].

3.1.1, 3.1.2.

La propriété (2) du Lemme ci-dessus et le Lemme d'unicité forte D1 [sous l'hypothèse UO avec $A_t = H - \underline{K}(u-t)(t \leqslant u)$[1] entraînent que, pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, il existe, pour l'équation d'évolution spécifiée par K, au plus une solution $t \to \psi_t$ telle que $\psi_u = \psi$. Le théorème 3.I ci-dessous que l'on a en vue fournit une solution "stochastique" à cette équation.

3.1.2 - Si $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ avec $t \leqslant u$, on désigne par $M^{[K]}_{t,u}$ la classe (modulo μ) dans $L^o(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ de la fonction complexe $\omega \to \mathrm{Exp}\,\{\int_t^u K(\omega(s),s)ds\}$ $(\omega \in \mathbb{W})$ [la continuité de chaque $\omega \in \mathbb{W}$ et le fait que K est localement borné sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ entraînent que l'intégrale écrite est absolument convergente et définit une fonction $\mathfrak{F}_{[t,u]}$-mesurable de $\omega \in \mathbb{W}$]. Ainsi,

(3.1.6) $\qquad M^{[K]}_{t,u} \in L^o(\mathbb{W},\mathfrak{F}_{[t,u]},\mu)$ pour chaque $t \leqslant u$,

(3.17) $\qquad M^{[K]}_{u,u} = \Omega$ [2]

et la famille $(M^{[K]}_{t,u})_{t\leqslant u}$ est multiplicative en ce sens que,

(3.1.8) $\qquad M^{[K]}_{t,u}\, M^{[K]}_{u,v} = M^{[K]}_{t,v}$ si $t \leqslant u \leqslant v$.

On peut alors énoncer :

THEOREME 3.I - Pour chaque $K \in \mathbb{K}^{(q)}$,

(1) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que $t \leqslant u$, on a,

(3.1.9) $\qquad M^{[K]}_{t,u} \in L^p(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$.

(2) L'opérateur linéaire continu $N^{[K]}_{t,u}$ de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dans $L^1(\mathbb{R},\mu_o)$

----

(2) Ω désigne la classe (modulo μ) de la constante 1 (voir 2.3)

(1) Voir l'appendice D.

défini sans ambiguité (1) par la relation,

(3.1.10) $N^{[K]}_{t,u}\psi \odot X_t = E_\mu[M^{[K]}_{t,u}.(\psi \odot X_u)/\mathcal{G}_{\{t\}}$ $(\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o))$

applique en fait continûment $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même. En outre, on a,

(3.1.11) $N^{[K]}_{t,t} = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et,

(3.1.12) $N^{[K]}_{t,u}\, N^{[K]}_{u,v} = N^{[K]}_{t,v}$ dès que $t \leqslant u \leqslant v$.

(3) Pour tous $u \in \mathbb{R}$, $r \in]2,+\infty]$ et $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, l'application $t \to \psi_t = N^{[K]}_{t,u}\psi$ $(t \leqslant u)$ de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ est, pour l'équation d'évolution spécifiée par K, l'unique solution avant u (2) telle que $\psi_u = \psi$. De plus, cette application est continue de $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour $1 \leqslant r' < r$.

La relation (3.1.10) ci-dessus, qui définit l'opérateur $N^{[K]}_{t,u}$ résolvant avant u l'équation d'évolution (3.1.5), est la <u>formule de Feynman-Kac</u> annoncée (à propos de cette formule, voir par exemple [20], le § XIII-4 de [11], et [30]).

On note que, d'après (3.1.9) et l'inégalité de Hölder, $M^{[K]}_{t,u}.(\psi \odot X_u)$ appartient à $L^{r'}(W,\mathcal{G},\mu)$ si $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ $(r \geqslant 2)$ et $1 \leqslant r' < r$. Donc, a priori, l'opérateur $N^{[K]}_{t,u}$ applique seulement $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$; et c'est la propriété (3) qui, jointe au Lemme d'unicité forte D1 [majoration (D1.3) applicable sous l'hypothèse UO avec $A_t = H - \underline{K}(u-t)(t \leqslant u)$ (3) grâce à la propriété (2) du Lemme ci-

----

(1) Grâce à (3.1.9) et à la propriété M1 de μ (Théorème 2.I) ; voir ci-après.

(2) Selon la définition donnée ci-dessus d'une telle solution.

(3) Voir l'appendice D

dessus] entraîne a posteriori que l'opérateur $N^{[K]}_{t,u}$ applique continûment $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même.

La démonstration du Théorème 3.I occupe les alinéas 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4 ci-dessous. Son pivot est constitué par les propositions A et B énoncées en 3.2.2.

3.2.- Démonstration du théorème 3.I

3.2.1.- Opérateurs de multiplication par les fonctions de la classe $\mathbb{V}^{(q)}$.

On désigne par $\mathbb{V}$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$, boréliennes et localement bornées ; et par $\mathbb{V}^{(q)}$ le sous-espace de $\mathbb{V}$ formé des fonctions $V \in \mathbb{V}$ telles que,

(3.2.1) $$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) / |x|^{q+1} = 0.$$

Pour chaque $V \in \mathbb{V}$, on désigne par $\underline{V}$ l'opérateur $V(\Phi_o)$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [i.e $\underline{V}$ est, dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ l'opérateur de multiplication par (la classe modulo μ_o de) la fonction V]. On note que, pour chaque $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $K(t) = K(\cdot,t)$ appartient à $\mathbb{V}^{(q)}$.

LEMME - (1) Pour tout $V \in \mathbb{V}^{(q)}$, on a $\underline{V} \lll H$ (1) et l'opérateur $H - \underline{V}$ est m-sectoriel (2)(3).

(2) Pour tout $V \in \mathbb{V}^{(q)}$ et tout $r \in \,]2,+\infty]$, $L^r(\mathbb{R},\mu_o) \subset D(\underline{V})$ et $\underline{V}$ applique continûment $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

(3) Pour tout $K \in \mathbb{K}^{(q)}$, tout $r \in \,]2,+\infty]$ et tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, il existe $C(r,J) > 0$ tel que,

----

(1) Voir CO (Appendice C)

(2) Voir C3

(3) Voir aussi le lemme 3.3.

$$(3.2.2)\quad \|\underline{K}(t) - \underline{K}(t')\|_{2,r} \leqslant C(r,J)\,|t-t'| \quad \text{pour tous } t \in J \text{ et } t' \in J\ .^{(1)}$$

[On désigne ici par $\|\underline{V}\|_{2,r}$ la norme de $\underline{V}$ en tant qu'application linéaire continue de $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$].

En effet, en ce qui concerne la propriété (1), d'une part la condition (3.2.1) et le fait que V est localement borné entraînent que $\underline{V} \lll \Phi_o^{q+1}$; d'où $\underline{V} \lll H$, puisque $\Phi_o^{q+1} \ll H$ en vertu du Théorème 1.III et de la proposition B5 [propriété (1)]. D'autre part, la condition (3.2.1) entraîne aussi que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon > 0$ tel que,

$$3.2.3)\quad |(\psi|\underline{V}\psi)| \leqslant \varepsilon(\psi\,|\,|\psi_o|^{q+1}\psi) + b_\varepsilon\|\psi\|^2 \qquad \text{pour tout } \psi \in D(\Phi_o^{q+1})\ ;$$

donc, en vertu de (B5.3) (et du théorème 1.III), on a,

$$(3.2.4)\quad |(\psi|\underline{V}\,\psi| \leqslant \tfrac{1}{2}(\psi|H\psi) + b\|\psi\|^2 \qquad \text{pour tout } \psi \in D(H),$$

en posant $b = ½ + b_{½\alpha}$; d'où il résulte que $H - \underline{V}$ est m-sectoriel. En particulier, $H - \underline{V}$ est quasi-accrétif (plus précisément $H - \underline{V}$ est 2b-accrétif), donc puisque $\underline{V} \lll H$, $H - \underline{V}$ est quasi-accrétif maximal (proposition C2). D'où la propriété (1) du Lemme ci-dessus ainsi que la propriété (1) du Lemme 3.1.1. En outre, la propriété (2) de ce dernier découle de ce que, grâce à l'uniformité postulée dans (3.1.1) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon > 0$ tel que la majoration (3.2.3) ait lieu pour tout V appartenant à $\{K(t)\,|\,t \in J\}$.

La propriété (2) du Lemme ci-dessus résulte immédiatement de l'inégalité de Hölder et de ce que la mesure μ_o admet des moments de tous les ordres [Lemme 1.5, relation (1.5.4)] puisque les hypothèses faites sur V entraînent que $|V| \leqslant \text{cte}\ |\chi|^{q+1}$.

----

(1) Voir la remarque ci-dessous.

Enfin, la propriété (3) résulte de l'hypothèse K3 faite sur K : si r' est déterminé par l'égalité $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$, il suffit de montrer qu'il existe C(r,J) tel que,

$$(3.2.5) \quad \|K(t') - K(t)\|_{r'} \leqslant C(r,J) \; |t' - t| \quad \text{pour tous } t \in J \text{ et } t' \in J.$$

Or, on a, si $t \in J$, $t' \in J$ et $t \leqslant t'$

$$(3.2.6) \quad \|K(t') - K(t)\|_{r'}^{r'} = \int_{\mathbb{R}} |K(x,t') - K(x,t)|^{r'} \mu_o(dx),$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_t^{t'} \frac{\partial}{\partial u}\Big/_{u=s} K(x,u) \, ds \right|^{r'} \mu_o(dx),$$

$$\leqslant |t'-t|^{r'} \int_{\mathbb{R}} \Big(\sup_{s \in J} \Big| \frac{\partial}{\partial u}\Big/_{u=s} K(x,u) \Big| \Big)^{r'} \mu_o(dx) \; ;$$

d'où (3.2.5) en vertu de (3.2.2) (condition K3).

cqfd.

<u>Remarque</u> - Les conclusions du Lemme 3.1.1 réclament seulement que la fonction K sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soit localement bornée et vérifie K2 ; et la propriété (3) du Lemme ci-dessus réclame, en plus, K3. Mais la condition de continuité K1 n'intervient pas ici [(1)(2)].

3.2.2.- <u>Schéma de la démonstration du Théorème 3.I : une forme intégrale pour l'équation d'évolution spécifiée par K.</u>

Pour chaque $V \in \mathbb{V}^{(q)}$, l'opérateur $H - \underline{V}$ est quasi-accrétif maximal avec le même domaine que H (Lemme 3.2.1) ; on désigne, pour chaque $t \geqslant 0$, par $N_t^{[V]}$ l'opérateur [borné dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$] $e^{-t(H-\underline{V})}$ [(3)]

------

(1) Cette condition intervient dans la démonstration de la proposition A en 3.2.4 pour établir la relation (3.2.43).

(2) Voir aussi le Lemme 3.3.

(3) Voir C1 ainsi que 3.4.

Cela étant, l'équation intégrale en vue s'écrit, si $t \leqslant t'$,

$$(3.2.7) \qquad \psi_t = N^{[V]}_{t'-t}\, \psi_{t'} + \int_t^{t'} N^{[V]}_{s-t}\, (\underline{K}(s) - \underline{V})\, \psi_s \, ds.$$

Plus précisément, $K \in \mathbb{K}^{(q)}$, $V \in \mathbb{V}^{(q)}$ et $u \in \mathbb{R}$ étant donnés, on appellera <u>solution avant u pour l'équation intégrale spécifiée par</u> K <u>et</u> V, toute application continue $s \to \psi_s$ de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ telle que,

(S1) Il existe $r' > 2$ tel que $s \to \psi_s$ applique continûment $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$;

(S2) Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$ tels que $t \leqslant t' \leqslant u$, l'équation (3.2.7) est vérifiée.

On note que la condition S1 entraîne, en vertu du Lemme 3.2.1, que $\psi_s \in D(\underline{K}(s) - \underline{V})$ pour tout $s \in (-\infty,u]$ et que l'application $s \to (\underline{K}(s) - \underline{V})\psi_s$ est continue de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$; ce qui fait que la fonction intégrée au second membre de (3.2.7) est aussi continue.

Le théorème 3.I est alors une conséquence immédiate des deux propositions suivantes et du Lemme d'unicité forte D1 (appendice D) :

<u>PROPOSITION A</u> - Etant donnés $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et $u \in \mathbb{R}$,

(1) Pour chaque $t \leqslant u$ et $1 \leqslant p < +\infty$, $M^{[K]}_{t,u} \in L^p(\mathbb{W},\mathcal{F},u)$.

(2) Pour chaque r tel que $2 < r \leqslant +\infty$ et chaque $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, l'application $t \to \psi_t$ de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ définie sans ambiguité(1) par la relation,

----

(1) En vertu de la propriété (1) [qui est aussi celle du Théorème 3.I] et de l'inégalité de Hölder.

(3.2.8) $\psi_t \odot X_t = E_\mu[M_{t,u}^{[K]} \cdot (\psi \odot X_u)/\mathcal{G}_{\{t\}}]$ $(t \leq u)$,

envoie continûment $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout r' tel que $2 \leq r' < r$, et constitue, pour chaque $V \in \mathbf{V}^{(q)}$, une solution avant u pour l'équation intégrale spécifiée par K et V.

PROPOSITION B - Etant donnés $K \in \mathbf{K}^{(q)}$ et $u \in \mathbb{R}$, soit $t \to \psi_t$ une application de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ qui est, pour chaque $V \in \mathbf{V}^{(q)}$ [ou seulement pour chaque $V \in \{K(t)|t < u\}$(1)], solution avant u pour l'équation intégrale spécifiée par K et V. Alors, $t \to \psi_t$ est aussi solution avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K.

La démonstration donnée ci-dessous pour la proposition A (voir 3.2.4) utilise, en fait, la proposition B qui est établie pour cela au préalable.

3.2.3- Démonstration de la proposition B -

Soit $s \to \psi_s$ une application continue de $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ (avec $r' > 2$) qui est solution avant u pour l'équation intégrale spécifiée par K et $K(t_o)$(2), où $t_o < u$ est donné. On va montrer que, dans ces conditions, $s \to \psi_s$ est dérivable en $s = t_o$, $\psi_{t_o} \in D(H - \underline{K}(t_o))$, et $\frac{d}{ds}\Big/_{s=t_o} \psi_s = (H - \underline{K}(t_o))\psi_{t_o}$. Le point $t_o < u$ étant arbitraire, la proposition B sera ainsi établie.

On pose ici $H^o = H - \underline{K}(t_o)$ et $N_t^o = N_t^{[K(t_o)]} = e^{-tH^o}$ $(t \geq 0)$; et on désigne par J l'intervalle $[t_o-1,u]$. L'opérateur H^o étant m-sectoriel d'après le Lemme 3.2.1, d'une part,

----

(1) Voir la remarque 3.2.3.

(2) Voir la remarque ci-dessous.

(3.2.10) $\quad N_t^o\psi \in D(H^o) \quad$ pour tous $t > 0$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R},u_o)$,

et d'autre part, il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que, pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$,

(3.2.11) $\quad \|N_t^o\psi\| \leqslant C_1\|\psi\| \quad$ si $0 \leqslant t \leqslant u - t_o+1$, et,

(3.2.12) $\quad \|\frac{1}{h}(N_h^o - I)N_t^o\psi\| \leqslant \frac{C_2}{t}\|\psi\| \quad$ si $h \geqslant 0$ et $0 < t \leqslant u - t_o + 1$

[cela résulte immédiatement de (C1-3) et (C3-2) en C1 et C3].

Par ailleurs, la relation (3.2.2) [Lemme 3.2.1] donne, avec $C_3 = C(r',J)$,

(3.2.13) $\quad \|\underline{K}(s_2) - \underline{K}(s_1)\|_{2,r'} \leqslant C_3|s_2 - s_1|$ pour tous $s_1 \in J$, $s_2 \in J$.

Enfin, la continuité de $s \to \psi_s$ entraîne qu'il existe $C_4 > 0$ tel que,

(3.2.14) $\quad \|\psi_s\|_{r'} \leqslant C_4 \quad$ pour tout $s \in J$.

Cela étant, on s'occupe d'abord de la <u>dérivabilité à gauche</u> : pour chaque $h > 0$, on a, en vertu de (3.2.7) écrite pour $t = t_o - h$ ou $t = t_o$, $t' = u$ et $V = K(t_o)$,

$$- \frac{1}{h}(\psi_{t_o-h} - \psi_{t_o}) = - \frac{1}{h}(N_h^o - I)N_{u-t_o}^o\psi_u - \frac{1}{h}\int_{t_o-h}^{t_o} N_{s-t_o+h}^o(\underline{K}(s)-K(t_o))\psi_s\,ds$$

$$- \int_{t_o}^{u} (\frac{1}{h}(N_h^o - I))N_{s-t_o}^o(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds.$$

Examinant successivement chacun des trois termes au second membre, on voit que, d'une part, d'après (3.2.10) [et puisque $t_o < u$],

(3.2.15) $\quad N_{u-t_o}^o\psi_u \in D(H^o)$ et $\lim\limits_{h \downarrow 0} - \frac{1}{h}(N_h^o - I)N_{u-t_o}^o\psi_u = H^oN_{u-t_o}^o\psi_u$;

d'autre part, d'après (3.2.11), (3.2.13) et (3.2.14), pour $0 < h \leqslant 1$,

$$\left\|\frac{1}{h}\int_{t_o-h}^{t_o} N^o_{s-t_o+h}(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\psi_s ds\right\| \leqslant C_1C_2C_3\,\frac{1}{h}\int_{t_o-h}^{t_o} |s-t_o|ds \leqslant C_1C_3C_4h \ ;$$

d'où,

$$(3.2.16) \qquad \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{t_o-h}^{t_o} N^o_{s-t_o+h}(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\psi_s\, ds = 0.$$

Enfin, pour $t_o \leqslant s \leqslant u$, d'après (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14),

$$\left\|\frac{1}{h}(N^o_h - I)N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\psi_s\right\| \leqslant C_2C_3C_4 \text{ pour tout } h \geqslant 0, \text{ et,}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} -\frac{1}{h}(N^o_h - I)N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\psi_s = H^oN^o_{s-t_o}(\underline{K}(s) - \underline{K}(t_o))\psi_s \text{ , d'après}$$

(3.2.10) ; donc, d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{h\downarrow 0} -\int_{t_o}^{u} (\frac{1}{h}(N^o_h - I))N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s\, ds = \int_{t_o}^{u} H^oN^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s\, ds.$$

D'où, puisque,

$$\int_{t_o}^{u} (\frac{1}{h}(N^o_h - I))N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\, ds = \frac{1}{h}(N^o_h - I)\int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s ds,$$

$$(3.2.17) \qquad \int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s ds \quad \text{appartient à } D(H^o), \text{ et,}$$

(3.2.18)

$$\lim_{h\downarrow 0} -\int_{t_o}^{u} (\frac{1}{h}(N^o_h- I))N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s\, ds = H^o\int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\psi_s\, ds.$$

Et finalement, (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17) et (3.2.18) entraînent que $\psi_{t_o} \in D(H^o)$ et $\lim_{h\downarrow 0} -\frac{1}{h}(\psi_{t_o-h} - \psi_{t_o}) = H^o\psi_{t_o}$.

Passant ensuite à la <u>dérivabilité à droite</u> : pour $0 < h \leqslant u-t_o$, on a, en vertu de (3.2.7) écrite pour $t = t_o+h$ ou $t = t_o$, $t' = u$ et $V = K(t_o)$,

$$\frac{1}{h}(\psi_{t_o+h}-\psi_{t_o}) = \frac{1}{h}(N^o_{u-t_o-h} - N^o_{u-t_o})\psi_u - \frac{1}{h}\int_{t_o}^{t_o+h} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds$$

$$+ \frac{1}{h}\int_{t_o+h}^{u} (N^o_{s-t_o-h} - N^o_{s-t_o})(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds.$$

Cela étant, d'une part, d'après (3.2.10),

(3.2.19) $N^o_{u-t_o}\psi_u \in D(H^o)$ et $\lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(N^o_{u-t_o-h} - N^o_{u-t_o})\psi_u = H^o N^o_{u-t_o}\psi_u$;

d'autre part, de même que ci-dessus (3.2.16),

$$(3.2.20)\quad \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{t_o}^{t_o+h} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds = 0.$$

Enfin, on va montrer que, compte tenu de (3.2.17), on a,

$$(3.2.21)\quad \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{t_o+h}^{u} (N^o_{s-t_o-h} - N^o_{s-t_o})(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds =$$

$$H^o \int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds \;;$$

Cette relation, jointe à (3.2.19) et (3.2.20) entraînera la dérivabilité à droite cherchée ; et la proposition B sera sinsi établie. Or, si h et ε sont tels que $0 < h < \varepsilon \leqslant u-t_o$, on peut écrire,

$$(3.2.22)\quad \frac{1}{h}\int_{t_o+h}^{u} (N^o_{s-t_o-h}-N^o_{s-t_o})(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds =$$

$$\theta_o(h,\varepsilon) + \theta_1(h,\varepsilon) + \theta_3(h,\varepsilon), \text{ avec,}$$

$$\theta_o(h,\varepsilon) = \frac{1}{h}\int_{t_o+\varepsilon}^{u} (N^o_{s-t_o-h}-N^o_{s-t_o})(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds,$$

$$\theta_1(h,\varepsilon) = \int_{t+h}^{t+\varepsilon} (\tfrac{1}{h}(N^o_h-I))\,N^o_{s-t_o-h}(\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o+h))\,\psi_s\,ds, \text{ et,}$$

$$\theta_2(h,\varepsilon) = \frac{1}{h}\int_{t_o+h}^{t_o+\varepsilon} (N^o_{s-t_o-h} - N^o_{s-t_o})(\underline{K}(t_o+h) - \underline{K}(t_o))\,\psi_s\,ds.$$

Cela étant, on a, d'une part, d'après (3.2.11), (3.2.13) et (3.2.14),

$$(3.2.23)\qquad \|\theta_2(h,\varepsilon)\| \leq 2\, C_1C_3C_4 \int_{t_o+h}^{t_o+\varepsilon} (h/h)ds \leq 2\, C_1C_3C_4\, \varepsilon, \quad \text{et,}$$

d'après (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14),

$$(3.2.24)\qquad \|\theta_1(h,\varepsilon)\| \leq C_2C_3C_4 \int_{t+h}^{t+\varepsilon} (s-t_o-h)/(s-t_o-h)ds \leq C_2C_3C_4\varepsilon \ ; \ \text{d'où}$$

$$(3.2.25)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \theta_2(h,\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (\theta_1(h,\varepsilon) = 0 \quad \text{uniformément en } h.$$

Enfin, si ε' est tel que $0 < h < \varepsilon' < \varepsilon \leq u-t_o$,

$$\theta_o(h,\varepsilon) = \frac{1}{h}(N^o_{\varepsilon'-h} - N^o_{\varepsilon'}) \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o-\varepsilon'} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds \ ;$$

d'où, compte tenu de ce que (3.2.10) entraîne que,

$$(3.2.26)\qquad \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds \quad \text{appartient à } D(H^o)\ ,$$

$$(3.2.27)\qquad \lim_{h\downarrow 0} \theta_o(h,\varepsilon) = H^o \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds\ .$$

Pour conclure alors à (3.2.21), il reste, d'après (3.2.22), (3.2.25) et (3.2.27) [et, compte tenu de (3.2.17)], à vérifier que,

$$(3.2.28)\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} H^o \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s ds = H^o \int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-K(t_o))\, \psi_s\, ds.$$

Or, on a, d'abord,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds = \int_{t_o}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds \ ;$$

Ensuite, puisque l'opérateur $H^oN^o_\varepsilon$ est borné,

$$(3.2.29)\qquad H^o \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s ds = \int_{t_o+\varepsilon}^{u} H^oN^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds \ ;$$

Enfin, d'après (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14),

$$\|H^o N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\| \leqslant C_2 C_3 C_4 \qquad \text{pour } t_o \leqslant s \leqslant u \;;$$

donc, d'après le théorème de convergence, dominée de Lebesgue appliqué au second membre de (3.2.29),

$$(3.2.30) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^o \int_{t_o+\varepsilon}^{u} N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds = \int_{t_o}^{u} H^o N^o_{s-t_o} (\underline{K}(s)-\underline{K}(t_o))\, \psi_s\, ds.$$

Et la relation (3.2.28) résulte alors de (3.2.26), (3.2.29) et (3.2.30) puisque l'opérateur H^o est fermé.

cqfd.

<u>Remarque</u> - La question se pose naturellement de savoir si la conclusion de la proposition B subsiste lorsqu'on suppose seulement que l'application $t \to \psi_t$ est une solution avant u pour l'équation intégrale spécifiée par K et V = 0 :

$$(3.2.31) \quad \psi_t = N_{t'-t}\psi_{t'} + \int_t^{t'} N_{s-t}\, \underline{K}(s)\, \psi_s\, ds \qquad (t \leqslant t' \leqslant u).$$

La démonstration ci-dessus est alors en défaut : par exemple, la convergence du terme $\int_{t_o}^{u} (\frac{1}{h}(N_h - I) N_{s-t_o} \underline{K}(s) \psi_s ds$ intervenant dans la décomposition de $-\frac{1}{h}(\psi_{t_o-h} - \psi_{t_o})$ ne peut plus être établie, comme pour (3.2.18), en utilisant le théorème de Lebesgue, puisque on a alors seulement $\|\frac{1}{h}(N_h - I) N_{s-t_o} \underline{K}(s) \psi_s\| \leqslant \text{cte}(s-t_o)^{-1}$. On voit ainsi que la démonstration repose essentiellment sur l'hypothèse que l'équation intégrale (3.2.7) est vérifiée pour V = K(t) (t < u).

Cependant, on peut énoncer des hypothèses supplémentaires portant sur l'application $t \to \psi_t$ (1) qui, d'une part, jointes à l'équation intégrale (3.2.31), entraînent la conclusion de la proposition B et, d'autre part, sont vérifiées par l'application stochastiquement défi-

---

(1) entre autres l'hypothèse (venant renforcer S1) que $t \to \psi_t$ est localement lipchitzienne de $(-\infty, u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R}, \mu_o)$.

nie par la formule de Feynman-Kac (3.2.8). Mais la variante de la démontration du Théorème 3.III ainsi obtenue n'aurait un intérêt que si l'on établissait (3.2.31) plus simplement que (3.2.7), ce qui n'est pas le cas par la méthode employée ici (voir 3.2.4).

3.2.4.- Démonstration de la proposition A

On désigne ici par $\tilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ boréliennes, localement bornées et vérifiant les conditions K1 et K2 [(1)] et par $\tilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ (resp $\mathbb{K}_b^{(q)}$) le sous-espace de $\tilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ (resp $\mathbb{K}^{(q)}$) formé des fonctions de $K\in\tilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ telles que,

$$(3.2.32) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R},\, t\in\mathbb{R}} \mathcal{Re}\, K(x,t) < +\infty.$$

On étend naturellement aux fonctions $K\in\tilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ la définition de $M_{t,u}^{[K]}$ ainsi que ses propriétés (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.8) [(2)]. On dira que $K\in\mathbb{K}^{(q)}$ est adéquat si la propriété (1) de la proposition A est satisfaite pour tout $u\in\mathbb{R}$. Si $K\in\tilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$, K est adéquat car,

$$(3.2.33) \qquad M_{t,u}^{[K]} \in L^{\infty}(W,\mathcal{F},\mu) \quad \text{pour tous } t\leqslant u.$$

On suppose donnés dans la suite $u\in\mathbb{R}$, $r\in\,]2,+\infty]$ et $\psi\in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$; et, si $K\in\tilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ est adéquat, on désigne par $t\to\psi_t^{[K]}$ l'application de $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ (avec $2\leqslant r'<r$) définie par (3.2.8). Si $K\in\tilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$, $\psi_t^{[K]}\in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $t\leqslant u$.

Cela étant, on va établir les propriétés auxiliaires suivantes :

----

(1) Voir 3.2.1.

(2) Voir 3.1.1.

(A1) Si $V \in \mathbb{V}^{(q)}$ est tel que $\lambda = \operatorname{Sup} V < +\infty$, alors, pour tout $p \in [2,+\infty]$ et tout $t \geqslant 0$, l'opérateur $N_t^{[V]}$ applique continûment $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même et on a,

$$(3.2.34) \qquad \|N_t^{[V]}\theta\|_p \leqslant e^{\lambda t}\|\theta\|_p \quad \text{pour tout} \quad \theta \in L^p(\mathbb{R},\mu_o).$$

(A2) Si $K^o \in \widetilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ est positif et adéquat, et si $K \in \widetilde{\mathbb{K}}^{(q)}$ est tel que $\mathcal{Re}\, K \leqslant K^o$, alors K est adéquat et l'application $t \to \psi_t^{[K]}$ est continue de $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $r' < r$.

(A3) Si K^o, K et K_n $(n \in \mathbb{N})$, éléments de $\widetilde{\mathbb{K}}^{(q)}$, et $t \leqslant u$ sont tels que K^o est positif et adéquat, $|K_n| \leqslant K^o$ pour tout n, et $\lim_{n\to\infty} K_n(x,s) = K(x,s)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $s \in [t,u]$, alors, d'une part,

$$(3.2.35) \qquad \lim_{n\to\infty} \|\psi_s^{[K_n]} - \psi_s^{[K]}\|_2 = 0 \quad \text{pour tout } s \in [t,u] \ ;$$

et d'autre part, pour tout $V \in \mathbb{V}^{(q)}$,

$$(3.2.36) \qquad \lim_{n\to\infty} \|(\underline{K}_n(s) - \underline{V})\psi_s^{[K_n]} - (\underline{K}(s) - \underline{V})\psi_s^{[K]}\|_2 = 0$$

pour tout $s \in [t,u]$, et,

$$(3.2.37) \qquad \sup_n \sup_{s\in[t,u]} \|(\underline{K}_n(s) - \underline{V})\psi_s^{[K_n]}\|_2 < +\infty$$

(A4) Si K_n $(n \in \mathbb{N})$, éléments de $\mathbb{K}^{(q)}$, et $t \leqslant u$ sont tels que,

$$(3.2.38) \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \sup_n \sup_{s\in[t,u]} |K_n(x,s)|/|x|^{q+1} = 0,$$

alors il existe $\lambda_o > 0$ tel que l'opérateur $H - \underline{K}_n(s)$ soit λ_o-accrétif maximal pour tous n et $s \in [t,u]$.

La propriété A1 résulte, par un raisonnement de compacité faible standard, de la formule de Trotter (voir C4) appliquée aux opérateurs accrétifs maximaux H et $-\underline{V}_o$ où $V_o = V - \lambda$ et de ce que les opérateurs $N_{\frac{t}{n}} = e^{-\frac{t}{n}H}$ et $e^{\frac{t}{n}V_o}$ sont contractants dans $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ [le premier en vertu de la proposition 2.1.2 et du Théorème de Riesz-Thorin [(1)], et le second en vertu de ce que $-V_o \geqslant 0$ par définition de λ].

Pour établir la propriété A2, on remarque d'abord que,

$$(3.2.39) \qquad |M_{s,u}^{[K]}| \leqslant M_{t,u}^{[K^o]} \quad \text{pour tout } s \in [t,u].$$

Donc, K est adéquat comme K^o. Cela étant, d'après (3.2.8) et l'inégalité de Hölder, on a, si $\frac{1}{r''} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}$,

$$\|\psi_{s'}^{[K]} - \psi_s^{[K]}\|_{r'} \leqslant \|M_{s',u}^{[K]} - M_{s,u}^{[K]}\|_{r''}\ \|\psi\|_r \quad \text{pour } s \in [t,u],\ s' \in [t,u].$$

D'où la continuité cherchée puisque $\lim\limits_{s' \to s} \|M_{s',u}^{[K]} - M_{s,u}^{[K]}\|_{r''} = 0$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la majoration (3.2.39) et la relation $\lim\limits_{s' \to s} M_{s',u}^{[K]} = M_{s,u}^{[K]}$ μ-presque partout, laquelle résulte, par le même théorème, de ce que K est localement borné et de ce que $W \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En ce qui concerne la propriété A3, les hypothèses faites entraînent que, pour tout $s \in [t,u]$, $|M_{s,u}^{[K_n]}| \leqslant M_{t,u}^{[K^o]}$ pour tout n, et $\lim\limits_{n \to \infty} M_{s,u}^{[K_n]} = M_{s,u}^{[K]}$ μ-presque partout. Cela étant, par application répétée du Théorème de Lebesgue et de l'inégalité de Hölder, on obtient d'abord, d'après les relations précédentes et (3.2.8),

$$(3.2.40) \quad \lim_{n \to \infty} \|\psi_s^{[K_n]} - \psi_s^{[K]}\|_{r'} = 0 \quad \text{et} \quad \|\psi_s^{[K_n]}\|_{r'} \leqslant \|M_{t,u}^{[K^o]}\|_{r''} \|\psi\|_r,$$

pour tout $s \in [t,u]$ [d'où (3.2.35)] ; puis les relations (3.2.36) et

----

(1) Voir à ce sujet la propriété (4) du Lemme 4.2.7.

(3.2.37) [en décomposant de façon standard le membre de gauche de (3.2.36) en somme de deux termes] à partir de (3.2.40), des hypothèses $|K_n| \leqslant K^o$ et $\lim_{n \to \infty} K_n(x,s) = K(x,s)(x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R})$, et des conditions à l'infini (3.1.1) [pour K^o] et (3.2.1), lesquelles entraînent la condition uniforme $\sup_n \sup_{s \in [t,u]} |K_n(x,t)-K(x,t)| \leqslant C(t)|x|^{q+1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Enfin, on établit la propriété A4 comme la propriété (2) du Lemme 3.1.1 (voir 3.2.1).

Les propriétés A1, A2, A3 et A4 étant acquises, on envisage d'abord le cas où $K \in \mathbb{K}_b^{(q)}$: la propriété (1) de la proposition A étant alors satisfaite d'après (3.2.33), et l'application $t \to \psi_t^{[K]}$ étant continue de $(-\infty,u]$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après A2 [avec $K^o = (\sup \mathcal{R}e\,K)^+$], il reste seulement à montrer que cette application vérifie (3.2.7) pour $t \leqslant t' \leqslant u$. Pour cela, on va commencer par établir (3.2.7) lorsque $K \in \tilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ est tel que, W désignant un élément de $\mathbb{V}^{(q)}$, on a,

$$K(s) = W \quad \text{pour tout} \quad s \in \,]t,t'[, \tag{3.2.41}$$

et lorsque V = W. On note que l'on a alors, d'après (3.2.32)

$$\lambda = \sup W < +\infty. \tag{3.2.42}$$

Dans ce cas la relation (3.2.7) à établir se réduit à,

$$\psi_t^{[K]} = N_{t'-t}^{[W]}\ \psi_{t'}^{[K]}\ . \tag{3.243}$$

Afin de montrer cette relation, on remarque d'abord que, d'après (3.2.8), (3.1.6), (3.1.8) et la propriété de Markov de μ, on a,

$$\psi_t^{[K]} \odot X_t = E_\mu[M_{t,t'}^{[K]}\ \psi_{t'}^{[K]} \odot X_{t'}/\mathcal{F}_{(-\infty,t']}]\ . \tag{3.2.44}$$

Mais, posant, $h = t'-t$ et $t_{n,j} = t + jh/n$ (n entier > 0 et $j = 1,2,\ldots,n$) on a, puisque la fonction $W = K(s)$ $(s \in \,]t,t'[)$ est continue d'après K1,

$$M^{[K]}_{t,t'} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{n} W\right) \odot X_{t_{n,j}}$$ μ-presque partout et,

$\left| \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{n} W\right) \odot X_{t_{n,j}} \right| \leqslant e^{\lambda(t'-t)}$ d'après (3.2.42) ; d'où, d'après (3.2.44) et le Théorème de Lebesgue,

$$(3.2.45)\quad \lim_{n\to\infty} \left\| E_\mu\left[\left(\prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{n}W\right)\odot X_{t_{n,j}}\right)\left(\psi^{[K]}_{t'} \odot X_{t'}\right) / \mathcal{F}_{(-\infty,t]}\right] - \psi^{[K]}_{t} \odot X_{t} \right\|_2 = 0.$$

Mais, par récurrence sur $k = 1,2,\ldots,n$ et par application de la propriété de Markov M2 de μ [1] aux instants $t_{n,k}$, on voit que,

$$E_\mu\left[\left(\prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{n}W\right)\odot X_{t_{n,j}}\right)\left(\psi^{[K]}_{t'} \odot X_{t'}\right) / \mathcal{F}_{(-\infty,t]}\right]$$

$$= E_\mu\left[\left(\prod_{j=1}^{n-k} \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{n}W\right)\odot X_{t_{n,j}}\right)\left(\left(N_{\frac{h}{n}}\, e^{\frac{h}{n}W}\right)^k \psi^{[K]}_{t'}\right)\odot X_{t_{n,n-k}} / \mathcal{F}_{(-\infty,t]}\right] ;$$

d'où, en portant cette relation écrite pour $k = n$ dans (3.2.45),

$\psi^{[K]}_{t} = \lim_{n\to\infty} \left(N_{\frac{h}{n}}\, e^{\frac{h}{n}W}\right)^n \psi^{[K]}_{t'}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, et la relation (3.2.43) en vertu de la formule de Trotter (voir C4).

Toujours, sous l'hypothèse (3.2.41) sur $K \in \widetilde{\mathbb{K}}^{(q)}_b$, on établit ensuite (3.2.7) pour $V \in \mathbb{V}^{(q)}$ quelconque: la formule de Duhamel (voir C5), applicable aux opérateurs H, $-\underline{V}$ et $-\underline{W}$ grâce au Lemme 3.2.1 [propriété (1)] donne, après changement de variable linéaire,

$$(3.2.46)\quad N^{[W]}_{t'-t}\theta = N^{[V]}_{t'-t}\theta + \int_t^{t'} N^{[V]}_{s-t}\,(\underline{W} - \underline{V})\, N^{[W]}_{t'-s}\theta\, ds \quad (\theta \in D(H)).$$

Et compte tenu de (3.2.43), cette relation fournit (3.2.7) si elle est valable pour $\theta = \psi^{[K]}_{t'}$ [2]. Or, si (θ_n) est une suite d'éléments

----

(1) Théorème 2.I en 2.1.3.

(2) A posteriori, les propositions A et B entraînent que $\psi^{[K]}_{t'} \in D(H)$; mais on ne le sait pas au stade actuel de la démonstration.

de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant vers $\psi_{t'}^{[K]}$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$(avec $2 < r' < r$), la propriété A1 ci-dessus jointe au Lemme 3.2.1 [propriété (2)] entraîne que, lorsque n tend vers l'infini, les deux membres de (3.2.46) écrite pour $\theta = \theta_n$ [on a $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset D(H)$] convergent dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$[grâce au Théorème de Lebesgue et à (3.2.34) pour l'intégrale au second membre] vers les membres correspondants de (3.2.7).

On va maintenant établir (3.2.7) lorsque $K \in \widetilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ est en escaliers, c'est-à-dire est telle que, $K(s) = W_j$ pour $j = 1,2,\ldots,n$ et tout $s \in]t_{j-1},t_j[$, où $W_j \in \mathbb{V}^{(q)}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ et où $t = t_o < t_1 < t_n = t'$. Pour cela, on vérifie par récurrence sur j que, pour $j = 1,2,\ldots,n$,

$$(3.2.47) \qquad \psi_t^{[K]} = N_{t_j-t}^{[V]}\, \psi_{t_j}^{[K]} + \int_t^{t_j} N_{s-t}^{[V]}(\underline{K}(s)-\underline{V})\; \psi_s^{[K]}\, ds.$$

[en effet, en substituant à $\psi_{t_j}^{[K]}$ dans (3.2.47) le second membre de (3.2.7) déjà établie ci-dessus pour $t = t_j$ et $t' = t_{j+1}$, on obtient (3.2.47) avec j+1 mis pour j]. D'où (3.2.7) en faisant j = n dans (3.2.47)[on note que la fonction intégrée au second membre est continue par morceaux à cause de la continuité de $s \to \psi_s^{[K]}$ et du caractère en escalier de K].

Soit alors K un élément quelconque de $\mathbb{K}_b^{(q)}$. On construit sans difficulté une suite (K_n) de fonctions en escalier de $\widetilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ et une fonction positive K^o de $\widetilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ satisfaisant aux hypothèses de la propriété A3 [en particulier, $K^o \in \widetilde{\mathbb{K}}_b^{(q)}$ entraîne que K^o est adéquat] ; et pour chaque n, on a , en vertu de ce qui précède,

$$(3.2.48) \qquad \psi_t^{[K_n]} = N_{t'-t}^{[V]}\psi_{t'}^{[K_n]} + \int_t^{t'} N_{t-s}^{[V]}\,(\underline{K}_n(s)-\underline{V})\,\psi_s^{[K_n]} ds.$$

Cela étant, les conclusions (3.2.35) et (3.2.36) de A3 entraînent que, lorsque n tend vers l'infini, les deux membres de cette égalité convergent dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [grâce au Théorème de Lebesgue et à (3.2.37) pour l'intégrale au second membre] vers les membres correspondants de (3.2.7) ainsi établie pour tout $K \in \mathbb{K}_b^{(q)}$ et $V \in \mathbb{V}^{(q)}$.

Passant enfin au cas général, soit K un élément quelconque de $\mathbb{K}^{(q)}$. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on définit $K_n \in \mathbb{K}_b^{(q)}$ par, $K_n(x,s) = n + \beta(\mathcal{Re}\, K(x,s)-n) + i\mathcal{I}m\, K(x,s)$ $(x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R})$, où β est une application continûment dérivable et croissante de $\mathbb{R}$ dans $(-\infty, 0]$ telle que $\beta(x) = x$ si $x \leqslant -1$ et $\beta(x) = 0$ si $x \geqslant 1$ [i.e la fonction $\beta_n(\cdot) = n + \beta(\cdot - n)$ approxime différentiablement la fonction $x \to n \wedge x$]. En vertu de ce qui précède et de la proposition B, l'application $s \to \psi_s^{[K_n]}$ est solution avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K_n. En outre, la condition d'uniformité (3.2.38) étant satisfaite puisque $|\beta_n(x)| \leqslant |x| + 2$ $(x \in \mathbb{R})$, il existe, d'après A4, $\lambda_o > 0$ tel que l'opérateur $H - \underline{K}_n(s)$ soit λ_o-accrétif maximal pour tous n et $s \in [t,u]$. Le Lemme d'unicité forte D1 (majoration (D1.3) sous l'hypothèse U0) entraîne donc, puisque $\psi_u^{[K_n]} = \psi$, que,

(3.2.49) $$\|\psi_t^{[K_n]}\|_2 \leqslant e^{\lambda_o(u-t)} \|\psi\|_2 \quad \text{pour tout } n.$$

D'où, d'après cette relation écrite pour $\psi = \Omega_o$, celle obtenue en prenant l'espérance E_μ des deux membres de (3.2.8) et l'inégalité $\|\psi_t^{[K_n]}\|_1 \leqslant \|\psi_t^{[K_n]}\|_2$,

(3.2.50) $$|E_\mu[M_{t,u}^{[K_n]}]| \leqslant e^{\lambda(u-t)} \quad \text{pour tout } n.$$

Par ailleurs, la majoration $|K_n| \leqslant |K| + 2$ $(n \in \mathbb{N})$ et la relation $\lim_{n\to\infty} K_n(x,s) = K(x,s)$ $(x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R})$ entraînent, d'après le Théorème de Lebesgue appliqué aux intégrales intervenant dans les $M_{t,u}^{[K_n]}$, que,

(3.2.51) $$\lim_{n \to \infty} M_{t,u}^{[K_n]} = M_{t,u}^{[K]} \quad \mu\text{-presque partout}$$

Cela étant, si K est réel, $M_{t,u}^{[K_n]}$ est positif pour tout n, donc (3.2.50) et (3.2.51) entraînent, d'après le Lemme de Fatou, que

$E_\mu[M_{t,u}^{[K]}] < +\infty$; ce qui établit que tout $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ est adéquat, puisque $|M_{t,u}^{[K]}| = M_{t,u}^{[\mathcal{Re} K]}$ ($\mathcal{Re} K$ appartenant à $\mathbb{K}^{(q)}$ en même temps que K) et $(M_{t,u}^{[K]})^p = M_{t,u}^{[pK]}$. D'où la propriété (1) de la proposition A. Et la propriété (2) résulte alors de la propriété déjà établie pour les K_n [relation (3.2.48)] et [en remarquant que, pour tout $K \in \mathbb{K}^{(q)}$, il existe $K^o \in \mathbb{K}$ tel que $K^o \geqslant 0$ et $K^o \geqslant \mathcal{Re} K$] des propriétés A2 et A3 qui entraînent que l'on peut passer à la limite, lorsque n tend vers l'infini, dans les deux membres de (3.2.48). Ce qui achève d'établir la proposition A et le Théorème 3.I.

3.3.- Unicité faible pour l'équation d'évolution spécifiée par K

Etant donnés $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ et $u \in \mathbb{R}^{(1)}$, on appellera solution faible avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K toute application continue $t \to \psi_t$ de l'intervalle fermé $(-\infty, u]$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ (2) telle que,

(SF') Pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $t < u$, la fonction complexe $s \to (\theta|\psi_s)$ est dérivable en t et on a,

$$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t}(\theta|\psi_s) = ((H-\underline{\bar{K}}(t))\theta|\psi_t) \quad {}^{(3)} \quad , \tag{3.3.1}$$

où $\bar{K}$ désigne la fonction complexe conjuguée de K [on a évidemment $\bar{K} \in \mathbb{K}^{(q)}$]. On note que,

$$H-\underline{\bar{K}}(t) = (H-\underline{K}(t))^* \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.2}$$

[en effet, $H-\underline{\bar{K}}(t)$ et $(H-\underline{K}(t))^*$ sont quasi-accrétifs maximaux (Lemme

----

(1) La situation est la même qu'en 3.1.

(2) La continuité de l'application $t \to \psi_t$ est entendue "fortement" (i.e $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ étant muni de sa topologie d'espace de Hilbert).

(3) $(\cdot|\cdot)$ désigne toujours le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$.

3.1.1 et Théorème C1), et $(H-K(t))^*$ prolonge $H-\underline{K}(t))]$.
D'où il résulte que, pour l'équation d'évolution spécifiée par K, toute solution avant u (voir 3.1.1) est aussi solution faible avant u. Le résultat en vue est alors,

<u>THEOREME 3.II</u> - On suppose que $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ vérifie,

($K3^{\#}$) La fonction $(x,t) \to \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} K(x,s)$ est localement bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et, pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$,

$$(3.3.3) \qquad \lim_{|x| \to +\infty} \sup_{t \in J} \left|\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} K(x,s)\right| / |x|^{q+1} = 0.$$

Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, et tout $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, l'équation d'évolution spécifiée par K possède au plus une solution faible $t \to \psi_t$ avant u telle que $\psi_u = \psi$.

<u>COROLLAIRE</u> (1) - Pour tous $u \in \mathbb{R}$, $r \in]2,+\infty)$ et $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, l'application $t \to \psi_t = N_{t,u}^{[K]}\psi$ (2) est, pour l'équation d'évolution spécifiée par K, l'unique solution faible avant u telle que $\psi_u = \psi$.

Le corollaire résulte immédiatement du Théorème 3.I (voir (3.1.2), du Théorème 3.II et de ce que toute solution avant u est aussi solution faible avant u.

Le Théorème 3.II va résulter du Lemme d'unicité faible D2. Etant donnés $u \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$, il suffit de vérifier que les conditions de validité de ce Lemme sont satisfaites par la famille $(A_t)_{o \leqslant t \leqslant \tau}$ d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ définie par,

$$(3.3.4) \qquad A_t = H-\underline{K}(u-t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

Pour cela, on va s'appuyer sur le Lemme suivant qui complète les Lemmes 3.1.1. et 3.2.1 .

----

(1) Sous la même hypothèse K3 que le Théorème 3.II.

(2) Voir le Théorème 3.I en 3.1.2

LEMME - Soit $L : (x,t) \to L(x,t)$ une fonction complexe sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, borélienne, localement bornée et vérifiant la condition K2 [1] ainsi que,

(K4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $L(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors : (1) Pour tout intervalle compact J de $\mathbb{R}$, il existe C_1, C_2 et $C_3 > 0$, tels que, pour tous $t \in J$ et $\psi \in D(H)$,

(3.3.5) $$\|\underline{L}(t)\psi\| \leqslant C_1(\|H\psi\| + \|\psi\|), \quad \text{et,}$$

(3.3.6) $$C_3(\|H\psi\| + \|\psi\|) \leqslant \|(H-\underline{L}(t))\,\psi\| \leqslant C_2(\|H\psi\| + \|\psi\|)$$ [2]

(2) Pour tout $\psi \in D(H)$, l'application $t \to \underline{L}(t)\psi$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

En effet, les hypothèses faites sur L entraînent que, uniformément lorsque t décrit l'intervalle compact J, $\underline{L}(t) \lll \Phi_o^{q+1}$; donc aussi $\underline{L}(t) \lll H$, puisque $\Phi_o^{q+1} \ll H$ d'après le Théorème 1.III et la proposition B5. D'où, d'une part (3.3.5) et la seconde inégalité (3.3.6) ;et d'autre part la première inégalité (3.3.6) grâce à la relation (C2.2) écrite pour $B = \underline{L}(t)$. En ce qui concerne la propriété (2), on remarque que, si $t_o \in \mathbb{R}$ et $J = [t_o-1,t_o+1]$, la fonction $\sup\limits_{t \in J} |L(t)|$ appartient à $\mathbb{V}^{(q)}$ en vertu de K2 et de ce que L est localement bornée ; ce qui entraîne que, si $\psi \in D(H)$, la fonction $\sup\limits_{t \in J} |L(t)|^2|\psi|^2$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mu_o)$ [propriété (1) du Lemme 3.2.1 ou raisonnement ci-dessus] ; donc

$$\lim_{t \to t_o} \|\underline{L}(t)\psi - \underline{L}(t_o)\psi\|^2 = \lim_{t \to t_o} \int_{\mathbb{R}} |L(t)- L(t_o)|^2 \; |\psi|^2 \, d\mu_o = 0$$

en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de l'hypothèse K4. D'où le lemme.

----

(2) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $L(t) = L(\cdot,t)$ appartient à $\mathbb{V}^{(q)}$ (voir 3.2.1) ; en particulier, $D(H) \subset D(\underline{L}(t))$ (Lemme 3.2.1), en notant $\underline{L}(t)$ l'opérateur $\underline{L(t)} = L(t,\Phi_o)$ comme en 3.1.1.

(1) Voir 3.1.1.

Cela étant, on remarque d'abord que, d'après (3.3.4) et (3.3.2),

(3.3.7) $$A_t^* = H-\underline{\bar{K}}(u-t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

Et, en appliquant le lemme aux fonctions $L = K$ et $L = \bar{K}$, les inégalités (3.3.6) fournissent les inégalités (D2.1) et (D2.2) ; ce qui fait que les conditions U1 et U2 sont satisfaites en posant,

(3.3.8) $$\mathcal{X} = \mathcal{X}_* = D(H) \quad \text{et} \quad |||\psi||| = |||\psi|||_* = \|H\psi\| + \|\psi\| \quad (\psi \in \mathcal{X}).$$

En outre, l'existence de $\lambda_o > 0$ tel que U0 soit satisfaite résulte de la propriété (2) du Lemme (3.1.1).

En ce qui concerne U3, U4 et U5, on remarque d'abord que la fonction $\dot{K}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par,

(3.3.9) $$\dot{K}(x,t) = \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} K(x,s) \qquad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}),$$

satisfait aux hypothèses du Lemme. Donc, d'une part $\mathcal{X} \subset D(\underline{\dot{K}}(t))$ et $\mathcal{X} \subset D(\underline{\dot{\bar{K}}}(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; d'autre part, d'après (3.3.5) avec $\dot{\bar{K}}$ mis pour L et (3.3.38), il existe $C'' > 0$ tel que,

(3.3.10) $$\|\underline{\dot{\bar{K}}}(t)\psi\| \leqslant C''|||\psi||| \qquad \text{pour tous } \psi \in \mathcal{X} \text{ et } t \in [u-\tau,u] \ ;$$

enfin, pour chaque $\psi \in \mathcal{X}$, les applications $t \to \underline{\dot{K}}(t)\psi$ et $t \to \underline{\dot{\bar{K}}}(t)\psi$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Ainsi, pour montrer que la condition U3 est satisfaite, il suffit de vérifier que, pour tous $\psi \in \mathcal{X}$ et $t \in [u-\tau,u]$, on a,

(3.3.11) $$\lim_{h \to 0} \left\|\frac{1}{h}(\underline{K}(t+h)-\underline{K}(t))\psi-\underline{\dot{K}}(t)\psi\right\|^2$$
$$= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{h}(K(t+h)-K(t)) -\dot{K}(t)\right|^2 |\psi|^2\, d\mu_o = 0.$$

Or, cette relation découle du Théorème de Lebesgue et de ce que, d'une part $\left|\frac{1}{h}(K(t+h)-K(t))-\dot{K}(t)\right| \leqslant 2 \sup_{s \in J} |\dot{K}(s)|$ si $-1 \leqslant h \leqslant 1$ et $J = [u-\tau-1, u+1]$; et, d'autre part, la fonction $\sup_{s \in J} |\dot{K}(s)|^2 |\psi|^2$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mu_o)$, puisque $\sup_{s \in J} |\dot{K}(s)| \leqslant \mathbb{V}^{(q)}$ en vertu de l'hypothèse $K3^{\#}$. En outre, (3.3.11) entraîne que,

$$\dot{A}_t \psi = -\underline{\dot{K}}(u-t)\psi \quad \text{et} \quad \dot{A}^*_t \psi = -\dot{\underline{K}}(u-t)\psi \tag{3.3.12}$$

pour tous $\psi \in \mathcal{X}$ et $t \in [0,\tau]$; donc, d'après (3.3.10),

$$\|\dot{A}^*_t \psi\| \leqslant C'' \, |||\psi||| \quad \text{pour tous } \psi \in \mathcal{X} \text{ et } t \in [0,\tau]. \tag{3.3.13}$$

Choisissant $\lambda > \lambda_o$, la validité des conditions U4 et U5 résulte alors, d'une part de (3.3.13) et de la continuité de l'application $t \to \dot{A}^*_t \psi$ $(\psi \in \mathcal{X})$, et, d'autre part, de la majoration (D2.11) et de la continuité de l'application $t \to R^*_{\lambda,t}\psi$ $(\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o))$ de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{X}$, ces dernières découlant des propriétés U0, U1, U2 et U3 déjà établies [(1)].

cqfd.

3.4.- Cas homogène

La situation étant toujours celle de 3.1 et 3.2, si la fonction $V \in \mathbb{V}^{(q)}$ est continue, la fonction $K : (x,t) \to V(x)$ $(x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$ appartient à $\mathbb{K}^{(q)}$ (voir 3.1.1 et 3.2.1), et le Théorème 3.I entraîne que l'on a, pour $t \leqslant u$,

$$N^{[K]}_{t,u} = N^{[V]}_{u-t}, \tag{3.4.1}$$

$$M^{[V]}_{t,u} \in L^p(\mathbb{W},\mathcal{G},\mu) \quad \text{pour } 1 \leqslant p < +\infty, \qquad \text{et,} \tag{3.4.2}$$

---

(1) Voir la démonstration du Lemme D2.

(3.4.3) $(N_{u-t}^{[V]}\,\psi)\circ X_t = E_\mu[M_{t,u}^{[V]} \cdot (\psi\circ X_u)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]$ $(\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o))$,

en notant $M_{t,u}^{[V]}$ au lieu de $M_{t,u}^{[K]}$.

La formule de Feynman-Kac (3.4.3) admet l'extension suivante que l'on utilisera ci-dessous en 3.5 : Soit $\mathbb{V}^b$ le sous-espace de $\mathbb{V}$ formé des fonctions $V \in \mathbb{V}$ telles que, d'une part,

(3.4.4) $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{Re}\, V(x) < +\infty ,$$

et, d'autre part, l'opérateur $(H-\underline{V})^-$ (fermeture de l'opérateur quasi-accrétif $H-\underline{V}$) est quasi-accrétif maximal dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$; et pour chaque $V \in \mathbb{V}^b$ et $t \geqslant 0$, soit $N_t^{[V]}$ l'opérateur [borné dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$] $e^{-t(H-\underline{V})^-}$. Cela étant, en désignant par $M_{t,u}^{[V]}$ la classe modulo μ de la fonction $\mathcal{F}$-mesurable $\omega \to \mathrm{Exp}\{\int_t^u V(\omega(s))\, ds\}$ $(\omega \in \mathbb{W})$, on a,

> PROPOSITION - Si $V \in \mathbb{V}^b$ et si V est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors, pour tous $t \leqslant u$, $M_{t,u}^{[V]} \in L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$, et la formule de Feynman-Kac (3.4.3) est vérifiée.

Cette proposition peut être établie à partir de la formule de Trotter comme la relation (3.2.43) dans la démonstration de la proposition A ci-dessus (voir 3.2.4).

On peut montrer (1) que $V \in \mathbb{V}^b$ dès que V vérifie (3.4.4) et appartient à $\bigcup_{p>2} \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mu_o)$; mais on n'utilisera ici que le résultat plus faible suivant,

> LEMME - Si V est un polynôme réel borné supérieurement, alors V appartient à $\mathbb{V}^b$.

----

(1) Voir [30] en notant que l'hypercontractivité du semi-groupe $(N_t)_{t\geqslant 0}$ n'intervient pas ici à cause de l'hypothèse (3.4.4).

En effet, en transportant la situation dans $L^2(\mathbb{R})$ au moyen de l'isométrie $\psi \to \rho^{1/2}\psi$ ($\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$), on est ramené à montrer que, avec les notations de B1 et B2, l'opérateur $\underset{\sim}{H} - V(\underset{\sim}{\Phi}_o)$ est essentiellement auto-adjoint ; ce qui résulte immédiatement de l'hypothèse faite sur V et de la proposition B1, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset D(\underset{\sim}{H} - V(\underset{\sim}{\Phi}_o))$.

3.5.- Une variante de la formule de Cameron-Martin

On désigne ici par Q_1 et Q_2 des polynômes d'interaction standard ; et on note, pour i = 1,2, q_i le degré de Q_i, $\mu_{i,o}$ la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q_i, ρ_i sa densité, H_i l'opérateur de diffusion associé et μ_i la mesure Euclidienne spécifiée par Q_i. Cela étant, si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leqslant b$, on pose,

$$(3.5.1) \quad \Delta^{2/1}_{a,b}(\omega) = \varphi_{2/1}(\omega(a))\, \varphi_{2/1}(\omega(b))\, e^{-\int_a^b [\hat{Q}_2(\omega(s)) - \hat{Q}_1(\omega(s))]\, ds} \quad (\omega \in \mathbb{W}), \text{ où }^{(1)}$$

$$(3.5.2) \quad \varphi_{2/1}(x) = (\rho_2(x)/\rho_1(x))^{1/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

On note que la fonction $\Delta^{2/1}_{a,b}$ sur $\mathbb{W}$ ainsi définie est partout > 0 et $\mathcal{F}_{[a,b]}$-mesurable. On peut énoncer,

THEOREME 3.III - (1) Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, on a,

$$(3.5.3) \quad E_{\mu_1}[\Delta^{2/1}_{a,b}] = 1, \quad \text{et,}$$

$$(3.5.4) \quad E_{\mu_2}[F] = E_{\mu_1}[F.\Delta^{2/1}_{a,b}] \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[a,b]}) .$$

(2) Les mesures μ_1 et μ_2 sur $(\mathbb{W},\mathcal{F})$ sont étrangères si $Q_1 \neq Q_2$.

Ainsi, les restrictions des mesures μ_1 et μ_2 aux tribus locales $\mathcal{F}_{[a,b]}$ sont équivalentes, bien que les mesures μ_1 et μ_2

----

(1) $\hat{Q}_i$ désigne la primitive centrée de Q_i (voir B2).

sur ($\mathbb{W}, \mathcal{F}$) soient étrangères. La relation (3.5.4) est la variante en vue de la formule de Cameron-Martin (voir par exemple [13] au sujet de cette formule en théorie des processus de diffusion et [30] en théorie des champs).

On va déduire la propriété (1) de la formule de Feynman-Kac (3.4.3) (voir 3.4 ci-dessus). Tout d'abord, en tenant compte de ce que $\Delta_{a,b}^{1/2} = (\Delta_{a,b}^{2/1})^{-1}$, on se ramène à l'un ou l'autre des cas suivants : soit $q_2 > q_1$ [cas (1)], soit $q_2 = q_1$ et $a_2 > a_1$ [cas (2)], soit $q_2 = q_1$ et $a_2 = a_1$ [cas (3)], en notant a_i le coefficient dominant de Q_i $(i = 1,2)$. Posant alors $V = \hat{Q}_1 - \hat{Q}_2$, on va s'appuyer sur le lemme suivant :

LEMME.- (1) On a $V \in \mathbb{V}^{(b)}$ (1) dans les cas (1) et (2) , et $V \in \mathbb{V}^{(q_1)}$ (2) dans le cas (3) .

(2) $\qquad \varphi_{2/1} \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{1,o}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, et,

(3.5.5) $\qquad N_{1,t}^{[V]} \varphi_{2/1} \qquad$ pour tout $\qquad t > 0.$

(3) Pour chaque $t \geqslant 0$,

(3.5.6) $\qquad N_{1,t}^{[V]}(\varphi_{2/1}\varphi) = \varphi_{2/1} N_{2,t}\varphi \qquad$ pour tout $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On note ici $N_{2,t}$ l'opérateur e^{-tH_2} dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_{2,o})$ et $N_{1,t}^{[V]}$ l'opérateur $e^{-t(H_1-V)}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_{1,o})$ [ce dernier étant bien défini en vertu de la propriété (1) du Lemme, ce qu'est $\mathbb{V}^{(b)}$ dans les cas (1) et (3) et d'après le Lemme 3.2.1 dans le cas (3)].

En effet, d'abord la propriété (1) découle immédiatement des définitions de $\mathbb{V}^{(b)}$ et de $\mathbb{V}^{(q_1)}$ et du Lemme 3.4 ; et la relation $\varphi_{2/1} \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{1,o}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ résulte de ce que ρ_1 et ρ_2 sont partout > 0 et appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ensuite, pour établir (3.5.5), il suffit,

----

(1) Voir 3.4.

(2) Voir 3.2.1.

d'après le Lemme d'unicité D1, de montrer que,

(3.5.7) $\qquad \varphi_{2/1} \in D(H_1-\underline{V}) \quad$ et $\quad (H_1-\underline{V})\varphi_{2/1} = 0.$

Or, cette relation est facile à vérifier en transportant la situation dans $L^2(\mathbb{R})$ au moyen de l'isométrie $\psi \to \rho_1^{1/2}\psi$ ($\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_{1,o})$) : d'une part $\rho_1^{1/2}\varphi_{2/1} = \rho_2^{1/2}$, $\rho_2^{1/2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset D(\underset{\sim}{H}_2)$ et $\underset{\sim}{H}_2\rho_2^{1/2} = 0$ d'après le Lemme 1.5 ; et d'autre part, $\underset{\sim}{H}_1 - V(\underset{\sim}{\Phi}_o)$ et $\underset{\sim}{H}_2$ ont même restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par définition de V. Enfin, pour établir (3.5.6), il suffit [toujours d'après le Lemme d'unicité D1, et compte tenu de ce que $S : \psi \to \varphi_{2/1}\psi$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R},\mu_{2,o})$ sur $L^2(\mathbb{R},\mu_{1,o})$] de montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(3.5.8) $\qquad (H_1-\underline{V})(\varphi_{2/1}\varphi) = \varphi_{2/1}H_2\varphi$.

Or, si S_i désigne l'isométrie $\psi \to \rho_i^{-1/2}\psi$ de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R},\mu_{i,o})$ ($i = 1,2$), on a,

$$\begin{aligned}(H_1-\underline{V})(\varphi_{2/1}\varphi) &= (H_1-\underline{V})\ S_1S_2^{-1}\varphi \\ &= S_1(\underset{\sim}{H}_1 - V(\underset{\sim}{\Phi}_o))\ S_2^{-1}\varphi \\ &= S_1\underset{\sim}{H}_2S_2^{-1}\varphi = S_1S_2^{-1}H_2\varphi = \varphi_{2/1}H_2\varphi\ .\end{aligned}$$

D'où (3.5.8) et le lemme.

Désignant alors, pour $a \leqslant b$, par $M_{a,b}^{[V]}$ la classe modulo μ de la fonction $\omega \to \mathrm{Exp}\{\int_a^b V(\omega(s))\,ds\}$ ($\omega \in \mathbb{W}$), on a, d'après le Lemme ci-dessus [propriété (1) et (2)] et la formule de Feynman-Kac (3.4.3) (voir 3.4),

(3.5.9) $\qquad M_{a,b}^{[V]} \in L^p(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu_1) \quad$ pour $1 \leqslant p < +\infty$, $\qquad$ et,

(3.5.10) $\qquad \varphi_{2/1}\odot X_a = E_{\mu_1}\left[M_{a,b}^{[V]}\,.(\varphi_{2/1}\odot X_b)/\mathcal{F}_{(-\infty,a]}\right]$ (1) .

----

(1) Voir remarque ci-dessous.

Cela étant, on raisonne de façon standard comme suit : on remarque d'abord que (3.5.10) entraîne que,

$$E_{\mu_1}[(\varphi_{2/1}\odot X_a)M^{[V]}_{a,b}(\varphi_{2/1}\odot X_b)] = E_{\mu_1}[(\varphi_{2/1}\odot X_a)^2] \ ;$$

d'où (3.5.3), puisque $E_{\mu_1}[(\varphi_{2/1}\odot X_a)^2] = \int_{\mathbb{R}}(\varphi_{2/1})^2 \, d\mu_1 = 1.$

Ensuite, grâce au théorème de prolongement par mesurabilité (voir Meyer [9], Théorème I.20), on se ramène à montrer que (3.5.4) a lieu lorsque $F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[a,b]})$ est de la forme $\prod_{j=1}^{n} \varphi_s \text{ o } X_{t_j}$, avec $a \leqslant t_1 \leqslant \ldots\ldots \leqslant t_n \leqslant b$ et $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Et, en raisonnant par récurrence sur n, on voit qu 'il suffit pour cela de montrer que, pour $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$, si,

(3.5.11) (3.5.4) est vérifiée pour tout $F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[a,s]})$,

alors (3.5.4) est aussi vérifiée pour tout F de la forme $G.(\varphi \text{ o } X_t)$, avec $G \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[a,s]})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Or, on a,
$E_{\mu_2}[G.(\varphi \text{ o } X_t)] = E_{\mu_2}[G.(N_{2,t-s}\varphi \text{ o } X_s)]$ d'après la propriété de Markov de μ_2 [en notant que $N_{2,t-s}\varphi \in C_b(\mathbb{R})$],

$= E_{\mu_1}[G.(N_{2,t-s}\varphi \text{ o } X_s).\Delta^{2/1}_{a,b}]$ d'après l'hypothèse de récurrence (3.5.11),

$$= E_{\mu_1}[Z(\varphi_{2/1}\odot X_a)M^{[V]}_{a,s}(N_{2,t-s}\varphi\odot X_s)M^{[V]}_{s,b}(\varphi_{2/1}\odot X_b)],$$

par définition de $\Delta^{2/1}_{a,b}$ et en désignant par Z la classe modulo μ_1 de la fonction G,

$= E_{\mu_1}[Z(\varphi_{2/1}\odot X_a)M^{[V]}_{a,s}((\varphi_{2/1}N_{2,t-s}\varphi)\odot X_s)]$ d'après (3.5.10) écrite avec s mis paur a,

$= E_{\mu_1}\left[Z(\varphi_{2/1} \odot X_a) M_{a,s}^{[V]}(N_{1,t-s}^{[V]}(\varphi_{2/1}\varphi) \odot X_s)\right]$, d'après la propriété (3) du lemme,

$= E_{\mu_1}\left[Z(\varphi_{2/1} \odot X_a) M_{a,s}^{[V]} M_{s,t}^{[V]}((\varphi_{2/1}\varphi) \odot X_t)\right]$, d'après la formule de Feynman-Kac (3.4.3),

$= E_{\mu_1}\left[Z(\varphi \odot X_t)(\varphi_{2/1} \odot X_a) M_{a,t}^{[V]}(\varphi_{2/1} \odot X_t)\right]$

$= E_{\mu_1}\left[Z(\varphi \odot X_t)(\varphi_{2/1} \odot X_a) M_{a,t}^{[V]} M_{t,b}^{[V]}(\varphi_{2/1} \odot X_b)\right]$, d'après (3.5.10) écrite avec t mis pour a,

$= E_{\mu_1}\left[G(\varphi \circ X_t)\Delta_{a,b}^{2/1}\right]$.

D'où (3.5.4) avec $G.(\varphi \circ X_t)$ mis pour F et la propriété (1) du Théorème 3.III. Afin d'établir la propriété (2), on raisonne par contraposition en supposant que μ_1 et μ_2 ne sont pas étrangères, c'est-à-dire que la mesure $\nu = \mu_1 \wedge \mu_2$ est non nulle (voir Neveu [8], § IV.1, p. 102). Alors, d'une part, la mesure ν est absolument continue par rapport à μ_1 et par rapport à μ_2 ; soit $Z_i \in L^1(\mathbb{W}, \mathfrak{F}, \mu_i)$ la densité de ν par rapport à $\mu_i (i = 1,2)$. Et, d'autre part, ν est invariante par les transformations θ_t $(t \in \mathbb{R})$ en même temps que μ_1 et μ_2. D'où il résulte que $Z_i \odot \theta_t = Z_i$; donc aussi $(n \wedge Z_i) \odot \theta_t = n \wedge Z_i$; pour tout $n > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}\,(i = 1,2)$. Et la propriété ergodique E5 (Théorème 2.II en 2.3) entraîne que Z_1 et Z_2 sont des constantes α_1 et α_2 ; constantes qui sont égales puisque μ_1 et μ_2 sont des mesures de probabilité et non nulles puisque $\nu \neq 0$ par hypothèse. Ainsi $\mu_1 = \mu_2$; d'où $\mu_{1,o} = \mu_{2,o}$; puis $\rho_{1,o} = \rho_{2,o}$ et enfin $Q_1 = Q_2$ d'après l'équation (d) (Lemme 1.5). Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.III.

Remarque - Les relations (3.5.9) et (3.5.10) expriment que, pour chaque $a \in \mathbb{R}$, le processus stochastique

$$(3.5.12) \qquad \left(\mathbb{W}, \mathfrak{F}, \mu_1 \; ; \; (\Delta_{a,t}^{2/1})_{t \in [a,+\infty)}\right)$$

est une martingale par rapport à la famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_{[a,t]})_{t \in [a,+\infty)}$. Ce fait joue aussi un rôle central dans la démonstration de la formule de Cameron-Martin à partir de la formule d'Ito (voir par exemple [13]).

§ 4.- QUASI-INVARIANCE DE LA MESURE EUCLIDIENNE

Dans ce paragraphe, on montre que la mesure Euclidienne μ spécifiée par le polynôme d'interaction Q (Théorème 2.I) est quasi-invariante par les translations de $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et on explicite le module de quasi-invariance correspondant (Théorème 4 en 4.1.2).

La démonstration de ce résultat donnée en 4.2 est basée sur la formule de Feynman-Kac (Théorèmes 3.I et 3.II) selon les étapes suivantes : on obtient d'abord (proposition 4.2.2) des conditions portant sur une fonction $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ (voir 3.1.1) pour que la fonctionnelle $\underset{\sim}{M}^{[K]}$ sur W définie par,

$$(4.i) \qquad \underset{\sim}{M}^{[K]}(\omega) = \exp \{\int_{\mathbb{R}} K\,(\omega(s),s)\,ds\}\ (\omega \in \mathbb{W}),$$

soit la densité par rapport à μ de la mesure translatée $\mu^f = \mu(\cdot+f)$ $(f \in \mathcal{S})$; et on établit que ces conditions déterminent une fonction $K = Q_f$, ce qui fournit un calcul a priori du module de quasi-invariance (proposition 4.2.4). On montre ensuite (proposition 4.2.5) que la fonction Q_f ainsi introduite vérifie la condition en question. Pour cela, on s'appuie, d'une part lorsque f a son support compact, (voir 4.2.6 et 4.2.7) sur la résolution explicite de l'équation d'évolution spécifiée par Q_f et sur les résultats du paragraphe 3 (Théorèmes 3.I et 3.II) ; et, d'autre part (voir 4.2.8) sur un calcul préalable de la martingale,

$$(4,ii) \qquad U^{(f)}_{t,+} = E_\mu[\underset{\sim}{M}^{[Q_f]}/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] \quad (t \in \mathbb{R}),$$

lequel permet de montrer a priori son uniforme intégrabilité et la relation fondamentale $E_\mu[\underset{\sim}{M}^{[Q_f]}] = 1$ lorsque $f \in \mathcal{S}$ est quelconque. Cette démonstration satisfait à l'esprit "non perturbatif" de ce travail en ce sens qu'elle procède directement avec la mesure Euclidienne spécifiée par Q et non par perturbation de celle du champ libre. La quasi-invariance de cette dernière étant aussi établie indépendamment en s'appuyant sur l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures (voir 4.3.2), une démonstration basée sur l'approche perturbative et la formule de Cameron-Martin (Théorème 3.III) est donnée par ailleurs en 4.3.3 (voir aussi [27] à ce sujet).

4.1.- Enoncé du resultat

4.1.1.- La situation et les notations étant celles intervenant en 2.1, on désigne par $\mathfrak{S}$ le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ formé des fonctions réelles et on met $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{W}$ en dualité par la forme bilinéaire réelle standard,

$$(4.1.1) \qquad < \omega, f > = \int_{\mathbb{R}} \omega(t)\ f(t)\ dt \qquad (\omega \in \mathfrak{W}\ ,\ f \in \mathfrak{S})$$

(on note que la condition (2.1.1) qui définit $\mathfrak{W}$ dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ entraîne que l'intégrale figurant au second membre est absolument convergente). Le triplet ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{W}$, $<\cdot,\cdot>$) ainsi défini constitue une spécification de la situation envisagée dans l'appendice A (voir A1) : avec $\mathfrak{S}$ mis pour $\mathcal{V}$ et $\mathfrak{W}$ mis pour $\mathcal{W}$, on a ici exactement $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ et $\vec{f} = f$ pour tout $f \in \mathcal{V}$; le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ sur $\mathfrak{S}$ coïncide avec celui induit par $L^2(\mathbb{R})$; et la plus petite tribu $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{W}$ rendant mesurables les fonctions $\omega \to < \omega, f >$ ($f \in \mathfrak{S}$) coïncide avec la tribu $\mathfrak{F}$ (proposition 2.5.1).

4.1.2.- Etant donné un polynôme d'interaction standard Q (1), pour chaque $f \in \mathfrak{S}$, on désigne par Q_f la fonction rélle sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par,

$$(4.1.2) \qquad Q_f(x,t) = \left[x + \tfrac{1}{2} f(t)\right] f''(t) - \left[\hat{Q}(f(t)+x) - \hat{Q}(x)\right]$$

$$(x \in \mathbb{R}\ ,\ t \in \mathbb{R})\ ,$$

où $\hat{Q}$ désigne une primitive de Q ; et on pose, pour chaque $\omega \in \mathfrak{W}$,

$$(4.1.3) \qquad \Lambda(f,\omega) = \int_{\mathbb{R}} Q_f(\omega(s),s)ds\ ,$$

l'intégrale figurant au second membre étant absolument convergente en vertu de la relation (2.1.1) qui définit $\mathfrak{W}$.

---

(1) Voir 1.3.

On vérifie que la fonction $\Lambda : \mathcal{S} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est un cocycle additif [relation (A2.1)], et que, pour tout $f \in \mathcal{S}$ la fonction $\Lambda(f,\cdot)$ est $\mathfrak{G}$-mesurable sur $\mathcal{W}$.

Cela étant,

THEOREME 4.- La mesure Euclidienne μ spécifiée par l'interaction Q [1] est quasi-invariante par les translations de $\mathcal{S}$ et admet le cocycle multiplicatif e^{Λ} : $(f,\omega) \to e^{\Lambda(f,\omega)}$ comme module de quasi-invariance.

Autrement dit, [2] pour chaque $f \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathcal{W}} e^{\Lambda(f,\omega)} \mu(d\omega) = 1, \qquad \text{et,} \tag{4.1.4}$$

$$\int_{\mathcal{W}} F(\omega - f) \; \mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} F(\omega) \; e^{\Lambda(f,\omega)} \; \mu(d\omega) \tag{4.1.5}$$

pour tout $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{W},\mathfrak{G})$ [3].

Une première démonstration de ce théorème est donnée en 4.2 (voir d'abord 4.2.2 et 4.2.5) ; et diverses variantes figurent en 4.3.

4.2.- Démonstration du Théorème 4[4]

4.2.1.- Fonctionnelles multiplicatives et mesures Markoviennes.- Si ν est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{W},\mathfrak{G})$, on appelle ici fonctionnelle multiplicative relativement à ν tout élément M de $L^1(\mathcal{W},\mathfrak{G},\nu)$ tel que

----

(1) Théorème 2.I en 2.1.3.

(2) Voir A1 et A2.

(3) On désigne par $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{W},\mathfrak{G})$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathcal{W}$, $\mathfrak{G}$-mesurables et bornées.

(4) Voir d'abord 4.2.2 et 4.2.5.

(FM1) M est strictement positive ν-presque partout et,

(4.2.1) $$E_\nu[M] = 1$$

(FM2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $M_{-,t} \in L^0(\mathbb{W},\mathfrak{F}_{(-\infty,t]},\nu)$ et $M_{t,+} \in L^0(\mathbb{W},\mathfrak{F}_{[t,+\infty)},\nu)$ tels que,

(4.2.2) $$M_{-,t} \geq 0 \quad , \quad M_{t,+} \geq 0 \quad \text{et} \quad M = M_{-,t}.M_{t,+}$$ (1)

Par ailleurs, on dira qu'une mesure de probabilité ν sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ est <u>Markovienne</u> si elle vérifie la propriété de <u>Markov</u> (2) :

<u>MK</u>(ν) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $Z \in L^1(\mathbb{W},\mathfrak{F}_{[t,+\infty)},\nu)$,

$$E_\nu[Z/\mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] = E_\nu[Z/\mathfrak{F}_{\{t\}}].$$

On s'appuiera ci-dessous sur les propriétés suivantes de ces mesures ;

<u>LEMME</u> - (1) Soient ν et ν' des mesures Markoviennes sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$. Alors $\nu = \nu'$ si et seulement si, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$,

(4.2.3) $$E_\nu[(\theta \circ X_t)(\varphi \circ X_u)] = E_{\nu'}[(\theta \circ X_t)(\varphi \circ X_u)]$$

pour tous $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(2) Soient ν une mesure Markovienne sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$, et M une fonctionnelle multiplicative relativement à ν. Alors la mesure $M.\nu$ sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ est aussi Markovienne.

En effet, en ce qui concerne la propriété (1), supposant que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, (4.2.3) est vérifiée, on remarque

----

(1) Cette définition est à rapprocher de celle donnée par Nelson au § 4 de [21].

(2) Voir la propriété (1) de la proposition 2.4.1.

d'abord que cette relation entraîne que les mesures ν et ν' ont même marginale $m_{t,u}$ d'ordre 2. D'où on déduit qu'il existe une probabilité de transition $P_{t,u}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $P_{t,u}\varphi \circ X_t$ sur $\mathbb{W}$ soit à la fois un représentant de la classe $E_\nu[\varphi \circ X_u/\mathcal{F}_{\{t\}}] \in L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F},\nu)$ et un représentant de la classe $E_{\nu'}[\varphi \circ X_u/\mathcal{F}_{\{t\}}] \in L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F},\nu')$ [appliquer le théorème d'existence des probabilités conditionnelles régulières (1) dans l'espace de probabilité $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, m_{t,u})$]. Et cette propriété, jointe aux propriétés de Markov de ν et de ν', permet de vérifier que les marginales $X_J(\nu)$ et $X_J(\nu')$ [voir 2.2.3] coïncident pour toute partie finie non vide J de $\mathbb{R}$ [le raisonnement est standard par récurrence sur le nombre d'éléments de J]. D'où $\nu = \nu'$ et la propriété (1).

Afin d'établir la propriété (2), on pose $\nu' = M.\nu$ et on désigne par Z un élément de $L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\nu) = L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\nu')$ et par Y un élément de $L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{(-\infty,t]},\nu) = L^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{(-\infty,t]},\nu')$. On a alors, en supposant $Z \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$,

$$E_{\nu'}[Y\,E_{\nu'}[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]] = E_{\nu'}[Y.Z]$$

$$= E_\nu[Y\,M_{-,t}\,M_{t,+}\,Z] \quad \text{d'après } (4.2.2)$$

$$= E_\nu[Y\,M_{-,t}\,E_\nu[M_{t,+}\,Z/\mathcal{F}_{\{t\}}]] \quad \text{d'après}$$

$\underline{\underline{MK}}$ (ν) (2) ;

$$= E_\nu[Y\,M_{-,t}E_\nu[M_{t,+}Z/\mathcal{F}_{\{t\}}](E_\nu[M_{t,+}/\mathcal{F}_{\{t\}}])^{-1}\,M_{t,+}],$$

encore d'après $\underline{\underline{MK}}$ (ν) (en notant que $E_\nu[M_{t,+}/\mathcal{F}_{\{t\}}]$ est > 0 ν-presque partout comme $M_{t,+}$). Ainsi,

----

(1) Voir par exemple le corollaire de la proposition V.4.4. de Neveu [8] p. 185.

(2) Voir le nota ci-dessous.

$$E_{\nu'}\left[Y\, E_{\nu'}\left[Z/\mathscr{F}_{(-\infty,t]}\right]\right] = E_{\nu'}\left[Y\, E_{\nu}\left[M_{t,+}\, Z/\mathscr{F}_{\{t\}}\right]\left(E_{\nu}\left[M_{t,+}/\mathscr{F}_{\{t\}}\right]\right)^{-1}\right] ;$$

D'où, puisque Y est arbitraire,

$$(4.2.4) \quad E_{\nu'}\left[Z/\mathscr{F}_{(-\infty,t]}\right] = E_{\nu}\left[M_{t,+}\, Z/\mathscr{F}_{\{t\}}\right]\left(E_{\nu}\left[M_{t,+}/\mathscr{F}_{\{t\}}\right]\right)^{-1} ;$$

et finalement $E_{\nu'}\left[Z/\mathscr{F}_{(-\infty,t]}\right] = E_{\nu'}\left[Z/\mathscr{F}_{\{t\}}\right]$, puisque le second membre de (4.2.4) est $\mathscr{F}_{\{t\}}$-mesurable.

<u>Nota</u> - Si ν est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathscr{F})$, si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{F}$ et si $X \in L^{o}_{[0,+\infty]}(\mathbb{W},\mathscr{F},\nu)$ (1), on pose,

$$(4.2.5) \qquad E_{\nu}\left[X/\mathscr{B}\right] = \sup_{n \in \mathbb{N}} E_{\nu}\left[n \wedge X/\mathscr{B}\right] .$$

Alors, $E_{\nu}\left[X/\mathscr{B}\right]$ est un élément de $L^{o}_{[0,+\infty]}(\mathbb{W},\mathscr{B},\nu)$ qui est caractérisé par la relation,

$$(4.2.6) \qquad E_{\nu}\left[Y\, E_{\nu}\left[X/\mathscr{B}\right]\right] = E_{\nu}\left[X\, Y\right]$$

pour tout $Y \in L^{o}_{[0,+\infty]}(\mathbb{W},\mathscr{B},\nu)$. [avec la convention $0 \,.\, (+\infty) = 0$].

<u>4.2.2.- Expression analytique de la quasi-invariance de μ</u>

La situation étant celle du théorème 4.I (voir 4.1.1 et 4.1.2), on désigne par K un élément de $\mathbb{K}^{(q)}$ (2). On suppose d'abord que,

(4.2.7) K est réel et $\int_{\mathbb{R}} |K(\omega(s),s)|\, ds < +\infty$ pour tout $\omega \in \mathbb{W}$.

Et on désigne par $M^{[K]}_{-,t}$ (resp $M^{[K]}_{t,+}$, $M^{[K]}$) la classe(modulo μ) dans $L^{o}(\mathbb{W},\mathscr{F},\mu)$ de la fonction numérique

----

(1) $L^{o}_{[0,+\infty]}(\mathbb{W},\mathscr{B},\nu)$ désigne naturellement le cône des classes (modulo ν) d'applications $\mathscr{B}$-mesurables de $\mathbb{W}$ dans $[0,+\infty]$.

(2) Voir 3.1.1.

$\omega \to \operatorname{Exp}\{\int_{-\infty}^{t} K(\omega(s),s)ds\}$ (resp $\omega \to \operatorname{Exp}\{\int_{t}^{+\infty} K(\omega(s),s)\, ds\}$,

$\omega \to \operatorname{Exp}\{\int_{\mathbb{R}} K(\omega(s),s)ds\}$). On note que (voir 3.1.2),

$$(4.2.8) \quad M^{[K]}_{-,t} \in L^{o}(\mathbb{W},\mathcal{F}_{(-\infty,t]},\mu) \quad , \quad M^{[K]}_{t,+} \in L^{o}(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\mu),$$

$$(4.2.9) \quad M^{[K]}_{-,t} \geqslant 0 \quad , \quad M^{[K]}_{t,+} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad M^{[K]} = M^{[K]}_{-,t} \cdot M^{[K]}_{t,+} .$$

On suppose ensuite que,

$$(4.2.10) \qquad E_{\mu}[M^{[K]}] = 1.$$

Ainsi, $M^{[K]}$ est une fonctionnelle multiplicative relativement à la mesure μ (voir 4.2.1). Enfin, on considère les éléments $\psi^{[K]}_{-,t}$ et $\psi^{[K]}_{t,+}$ de $L^{o}_{[0,+\infty]}(\mathbb{R},\mu_o)$ définis par les relations (1).

$$(4.2.11) \qquad \psi^{[K]}_{-,t} \odot X_t = E_{\mu}[M^{[K]}_{-,t}/\mathcal{F}_{\{t\}}], \qquad \text{et,}$$

$$(4.2.12) \qquad \psi^{[K]}_{t,+} \odot X_t = E_{\mu}[M^{[K]}_{t,+}/\mathcal{F}_{\{t\}}] \quad ;$$

et on suppose que,

(4.2.13) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi^{[K]}_{-,t}$ et $\psi^{[K]}_{t,+}$ appartiennent à $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$.

Par ailleurs, pour chaque $z \in \mathbb{R}$, d'une part, on désigne par $T_o(z)$ la transformation linéaire de $L^{o}(\mathbb{R},\mu_o)$ induite par la transformation $g \to g(\cdot + z)$ des fonctions $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$; et d'autre part on désigne par $a_o(z)$ la fonction $\rho(\cdot + z)/\rho(\cdot)$ de $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $a_o(z) \in L^{1}(\mathbb{R},\mu_o)$, et,

$$(4.2.14) \quad \int_{\mathbb{R}} T_o(z)\psi \, d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} \psi \, a_o(-z) \, d\mu_o \quad \text{pour tout } \psi \in L^{\infty}(\mathbb{R},\mu_o).$$

Enfin, on désigne par f un élément de $\mathcal{S}$ (2) et par μ^{f} la mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathcal{F})$ qui est image de μ par l'application $\mathcal{F}$-mesurable $\omega \to \omega - f$ de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{W}$; autrement dit,

----

(1) Voir le nota en 4.2.1.

(2) Voir 4.1.1

$$(4.2.15) \qquad \int_{\mathbb{W}} F(\omega)\mu^f(d\omega) = \int_{\mathbb{W}} F(\omega-f)\ \mu(d\omega) \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}).$$

Cela étant,

PROPOSITION [1]- Pour que les mesures $M^{[K]}.\mu$ et μ^f soient égales, il faut et il suffit que,

$$(4.2.16) \qquad \psi^{[K]}_{-,t} \cdot \psi^{[K]}_{t,+} = a_o(f(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \qquad \text{et,}$$

$$(4.2.17) \qquad N^{[K]}_{t,u}\varphi = \psi^{[K]}_{t,+}\ T_o(f(t))\ N_{u-t}\ T_o(f(u))^{-1}((\psi^{[K]}_{u,t})^{-1}\varphi)$$

pour tous $t \leqslant u$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ [2].

On note que, si (4.2.16) est satisfaite, $(\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}$ est bien défini comme élément de $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après l'hypothèse (4.2.13) puisque $a_o(f(t))$ est inversible dans l'algèbre $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ [en effet, $a_o(f(t)$ est continue et partout > 0 comme ρ] ; ainsi $(\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}\varphi \in L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$ et le second membre de (4.2.17) est bien défini comme élément de $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ puisque $\psi^{[K]}_{t,+} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après l'hypothèse (4.2.13) et puisque les opérateurs $T_o(f(u))^{-1}$, N_{u-t} et $T_o(f(t))$ appliquent $L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même. Par ailleurs, le premier membre de (4.2.17) appartient à D(H) d'après le théorème 3.I, donc aussi à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ [proposition 1.6].

Pour montrer cette proposition, on vérifie d'abord que la mesure μ^f est markovienne en même temps que μ (voir 4.2.1) : si $t \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{(-\infty,t]})$ et $G \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)})$ [3], on a, aussi $F(\cdot-f) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{(-\infty,t]})$ et $G(\cdot-f) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[t,+\infty)})$; donc

----

(1) Sous les hypothèses (4.2.7), (4.2.10) et (4.2.13) faites ci-dessus sur K.

(2) En ce qui concerne l'opérateur $N^{[K]}_{t,u}$, voir le théorème 3.I en 3.1.2.

(3) Si $(E,\mathcal{E})$ est un espace mesurable,on note $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions complexes sur E qui sont $\mathcal{E}$-mesurables et bornées ; on note $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

$E_{\mu^f}[FG] = E_\mu[F(\cdot -f)G(\cdot -f)]$

$= E_\mu[Z\ E_\mu[G(\cdot -f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]]$, en désignant par Z la classe modulo μ de $F(\cdot -f)$,

$= E_\mu[Z\ E_\mu[G(\cdot -f)/\mathcal{F}_{\{t\}}]$ d'après $\underline{\underline{MK}}(\mu)$,

$= E_\mu[F(\cdot -f)\ g \circ X_t]$, où $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ (1) est tel que

$g \circ X_t \in E_\mu[G(\cdot -f)/\mathcal{F}_{\{t\}}]$. Ainsi, $E_{\mu^f}[F.G] = E_{\mu^f}[F.g(\cdot+f(t))\circ X_t]$;

d'où la propriété $\underline{\underline{MK}}(\mu^f)$ puisque t, F et G sont arbitraires.

Par ailleurs, la mesure $\nu = M^{[K]}.\mu$ est aussi Markovienne d'après la propriété (2) du Lemme 4.2.1. Donc, d'après la propriété (1) du même Lemme, $\nu = \mu^f$ si et seulement si, pour tous $t \leqslant u$ et tout $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $g \geqslant 0$ et à support compact,

(4.2.18) $\quad E_\nu[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)] = E_{\mu^f}[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)]$

pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\theta \geqslant 0$.

Or, désignant par γ la classe de g dans $L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$, on a,

$E_\nu[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)] = E_\mu[M^{[K]}_{-,u}(\theta \odot X_t)(\gamma \odot X_u)\ M^{[K]}_{u,+}]$ d'après (4.2.9),

$= E_\mu[M^{[K]}_{-,u}(\theta \odot X_t)(\gamma \odot X_u)(\psi^{[K]}_{u,+} \odot X_u)]$ d'après la propriété de Markov $\underline{\underline{MK}}(\mu)$ et (4.2.12) (voir le nota en 4.2.1),

$= E_\mu[M^{[K]}_{-,t}(\theta \odot X_t) M^{[K]}_{t,u}((\psi^{[K]}_{u,+}\ \gamma) \odot X_u)]$

$= E_\mu[((\theta\ \psi^{[K]}_{-,t}) \odot X_t)\ M^{[K]}_{t,u}((\psi^{[K]}_{u,+}\ \gamma) \odot X_t)]$ d'après

----

(1) Voir la note (3) page précédente.

la propriété de Markov rétrograde de μ [propriété (2) de la proposition 2.4.1] et (4.2.11),

$$= E_\mu[(\theta\psi^{[K]}_{-,t}\, N^{[K]}_{t,u}(\psi^{[K]}_{u,+}\,\gamma))\odot X_u],$$ d'après (3.1.10) (Théorème 3.I en 3.1.2) et l'hypothèse (4.2.13) laquelle entraîne que $\psi^{[K]}_{u,+}\gamma \in L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$ [compte tenu de ce que g a son support compact]. D'où

$$(4.2.19) \qquad E_\nu[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)] = \int_{\mathbb{R}} \theta\psi^{[K]}_{-,t}\, N^{[K]}_{t,u}\, (\psi^{[K]}_{u,+}\,\gamma)\, d\mu_o\ .$$

D'autre part,

$$E_{\mu^f}[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)] = E_\mu[((T_o(f(t))^{-1}\ \theta)\odot X_t)((T_o(f(u))^{-1}\gamma)\odot X_u)]$$

$$= E_\mu[((T_o(f(t))^{-1}\theta)\ N_{u-t}(T_o(f(u))^{-1}\gamma))\odot X_t],$$

d'après la propriété de Markov M2 de μ (Théorème 2.I en 2.1). D'où en vertu de (4.2.14),

$$(4.2.20) \qquad E_{\mu^f}[(\theta \circ X_t)(g \circ X_u)] = \int_{\mathbb{R}} \theta\ a_o(f(t))\ T_o(f(t))\ N_{u-t}\ T_o(f(u))^{-1}\gamma\ d\mu_o.$$

Ainsi, en comparant les seconds membres de (4.2.19) et (4.2.20), on voit que (4.2.18) équivaut à

$$(4.2.21) \qquad \psi^{[K]}_{-,t}N^{[K]}_{t,u}(\psi^{[K]}_{u,+}\gamma) = a_o(f(t))\ T_o(f(t))\ N_{u-t}T_o(f(u))^{-1}\gamma,$$

où γ désigne la classe de g dans $L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$.

Cela étant, la condition annoncée est nécessaire car, si $\nu = \mu^f$, alors (4.2.21) a lieu pour tout $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$ à support compact et pour tous $t \leqslant u$. D'où, d'abord (4.2.16) en faisant $t = u$; puis (4.2.17) en prenant $\gamma = (\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}\varphi$ ($\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Inversement, si (4.2.16) et (4.2.17) sont satisfaites, alors (4.2.21) a lieu pour tout γ de la forme $(\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; donc (4.2.18) a lieu pour tout g de la forme $h_u \varphi$ avec $h_u \in (\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Mais, en vertu de (4.2.16), on peut choisir h_u partout > 0 et appartenant à $\mathcal{L}^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ ainsi que son inverse $1/h_u$; et le théorème de prolongement par mesurabilité (1) entraîne alors que (4.2.18) a lieu pour tout $g \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$ à support compact ; d'où $\nu = \mu^f$.

cqfd.

4.2.3.- Un calcul préliminaire

Le Lemme suivant sera crucial pour établir (voir 4.2.4 et 4.2.7) que la condition de quasi-invariance (4.2.17)(proposition 4.2.2) est vérifiée si (et seulement si ; voir 4.2.4) $K = Q_f$:

LEMME - (1) soient $\psi \in D(H)$, $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$. Alors, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\gamma\, T_o(z)\psi \in D(H)$ et on a,

(4.2.22) $$H(\gamma T_o(z)\psi) = \gamma T_o(z)H\psi + (H\gamma)T_o(z)\psi + [\gamma(\zeta - T_o(z)\zeta) - D\gamma]T_o(z)D\psi$$

(2) Soient $K \in \mathbb{K}^{(q)}$, $f \in \mathfrak{S}$, $u \in \mathbb{R}$; et soit $t \to \psi_t$ une solution avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K. Alors, pour tout $t < u$, tous $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et tout $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ identique à 1 au voisinage du support de θ, la fonction complexe $s \to (\theta | \theta_1 \psi_s T_o(f(s))\, N_{u-s}\varphi)$ (2) est dérivable en t et on a,

(4.2.23) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta|\theta_1\psi_s T_o(f(s))\, N_{u-s}\varphi) = ((H-\underline{K}(t))\theta|\theta_1\psi_t T_o(f(t))\, N_{u-t}\varphi)$$
$$+ (\theta|\theta_1(D\psi_t - [\zeta - T_o(f(t))\,\zeta - f'(t)\Omega_o]\psi_t)T_o(f(t))DN_{u-t}\varphi).$$

On désigne ici par $D\psi \in C(\mathbb{R})$ la dérivée de $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. En effet, la propriété (1) est facile à vérifier à partir de l'expression (1.6.2)de H. Afin d'établir la propriété (2), on va vérifier que la

----

(1) Voir par exemple Meyer [9], Théorème I.20.

(2) $(\cdot|\cdot)$ désigne toujours le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

fonction complexe R définie, sur $U = (-\infty,u[^3$, par,

$$(4.2.24)\quad R(s_1,s_2,s_3) = (\theta|\theta_1\psi_{s_1}T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}\varphi)\quad (s_i \leq u,\ i=1,2,3),$$

admet des dérivées partielles données par,

$$(4.2.25)\quad \frac{d}{ds}\Big/_{s=s_1} R(s\ ,s_2,s_3) = ((H-\underline{K}\,(s_1))\,\overline{\psi}_{s_1}|\overline{\theta}\ T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}\varphi),$$

$$(4.2.26)\quad \frac{d}{ds}\Big/_{s=s_2} R(s_1,s\ ,\ s_3) = f'(s_2)(\overline{\psi}_{s_1}|\overline{\theta}\ T_o(f(s_2))\,DN_{u-s_3}\varphi),\ \text{et},$$

$$(4.2.27)\quad \frac{d}{ds}\Big/_{s=s_3} R(s_1,s_2,s\ ) = (\overline{\psi}_{s_1}|\overline{\theta}\ T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}H\varphi)\quad ;$$

et que ces dérivées sont fonctions continues sur U. Il en résultera la dérivabilité cherchée et l'expression,

$$(4.2.28)\quad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t}(\theta|\theta_1\psi_sT_o(f(s))\,N_{u-s}\varphi) = ((H-\underline{K}(t))\overline{\psi}_t|\overline{\theta}T_o(f(t))N_{u-t}\varphi)$$

$$+\ f'(t)(\overline{\psi}_t|\overline{\theta}T_o(f(t))\,DN_{u-t}\varphi)$$

$$+\ (\overline{\psi}_t|\overline{\theta}T_o(f(t))\,N_{u-t}H\varphi).$$

D'abord, remarquant que $R(s_1,s_2,s_3) = (\overline{\psi}_{s_1}|\overline{\theta}T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}\varphi)$ puisque $\theta_1\theta = \theta$, la relation (4.2.25) résulte de ce que l'application $s \to \psi_s$ est fortement dérivable de $(-\infty,u[$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ par hypothèse ; la relation (4.2.26) s'obtient par dérivation standard sous le signe somme dans l'intégrale qui exprime $R(s_1,s_2,s_3)$; et la relation (4.2.27) résulte de la dérivabilité forte de l'application $s \to N_{u-s}\varphi$ en écrivant, d'après (4.2.14) (voir 4.2.2),

$$R(s_1,s_2,s_3) = (a_o(-f(s_2))\,T_o(-f(s_2))(\theta\psi_{s_1})\,|N_{u-s}\varphi).$$

Pour montrer ensuite que les dérivées partielles (4.2.25), (4.2.26) et (4.2.27) sont fonctions continues de $(s_1,s_2,s_3) \in U$, on note que la continuité de l'application $t \to \psi_t$ de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ entraîne celle de l'application $t \to \overline{\theta}_1 \underline{K}(t)\psi_t$ [grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, cela résulte de ce que K est localement borné et de ce que l'application $t \to K(x,t)$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$ (condition K3 en 3.1.1)] ; ce qui permet de se ramener à établir que les applications R_1, R_2 et R_3 de $(-\infty,u[\times (-\infty,u[$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ définies par

$R_1(s_2,s_3) = H(\overline{\theta}T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}\varphi)$, $R_2(s_2,s_3) = \overline{\theta}T_o(f(s_2))DN_{u-s_3}\varphi$

et $R_3(s_2,s_3) = \overline{\theta}T_o(f(s_2))\,N_{u-s_3}H\varphi$ $(s_i < u \;;\; i = 2,3)$ sont continues.

Or, ces continuités ne sont pas difficiles à vérifier en utilisant d'une part celle des applications $s \to N_{u-s}\varphi$ et $s \to N_{u-s}H\varphi$, le théorème de Lebesgue et (4.2.14) ;et d'autre part, en ce qui concerne R_1 et R_2, la relation $\pi_o \ll H$ (Théorème 1.III et proposition B5) après avoir calculé $R_1(s_2,s_3)$ au moyen de (4.2.22) [avec $\psi = N_{u-s_3}\varphi$, $\gamma = \overline{\theta}$ et $z = f(s_2)$] et exprimé $DN_{u-s_3}\varphi$ en fonction de $\pi_o N_{u-s_3}\varphi$ grâce à (A5.7). D'où la relation (4.2.28).

Il reste alors à transformer le second membre de (4.2.28) en celui de (4.2.23). Pour cela, il suffit de calculer la quantité $H(\theta_1\psi_t T_o(f(t))\,N_{u-t}\varphi)$ [que l'on fait apparaître au second membre de (4.2.23) puisque H est symétrique] au moyen de la propriété (1) du Lemme : une première application de (4.2.22) avec $\psi = \psi_t$, $\gamma = \theta_1 T_o(f(t))\,N_{u-t}\varphi$ et $z = 0$ donne une expression où figure le terme $H\gamma = H(\theta_1 T_o(f(t))\,N_{u-t}\varphi)$, lequel est à calculer par une seconde application de (4.2.22) avec $\psi = N_{u-t}\varphi$, $\gamma = \theta_1$ et $z = f(t)$; et l'expression de $(\theta|H(\theta_1\psi_t T_o(f(t))\,N_{u-t}\varphi))$ ainsi obtenue (compte tenu de ce que $(\theta|D\theta_1) = (\theta|H\theta_1) = 0$ par définition de θ_1) fournit (4.2.23) lorsqu'on la confronte au second membre de (4.2.28).

cqfd.

4.2.4.- Détermination a priori du module de quasi-invariance (1)

Comme en 4.2.2, on désigne par K un élément réel de $\mathbb{K}^{(q)}$ et par f un élément de $\mathcal{S}$, mais on suppose ici qu'il existe un intervalle compact $[t_o, t_1]$ de $\mathbb{R}$ tel que,

(4.2.30) $f(t) = 0$ et $K(t) = 0$ pour tout $t \notin [t_o, t_1]$.

La condition (4.2.7) est alors satisfaite, et on a (avec les notations introduites en 3.1.1 et 4.2.2),

(4.2.31) $$M^{[K]}_{t,+} = \Omega \quad \text{si } t_1 \leqslant t,$$

(4.2.32) $$M^{[K]}_{t,+} = M^{[K]}_{t,t_1} \quad \text{si } t \leqslant t_1$$, et,

(4.2.33) $$M^{[K]} = M^{[K]}_{t,t_1} \quad \text{si } t \leqslant t_o.$$

En particulier, d'après (4.2.33) et la proposition (1) du Théorème 3.I, $M^{[K]} \in L^1(W, \mathcal{F}, \mu)$.

Cela étant,

PROPOSITION - On suppose (2) que (4.2.10) est vérifiée et que les mesures $M^{[K]}.\mu$ et μ^f sont égales (3). Alors,

(1) Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\psi^{[K]}_{t,+}$ appartient à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifie l'équation différentielle

---

(1) Cet alinéa constitue une justification a priori de la forme explicite du module de quasi-invariance de μ. Son contenu est logiquement indépendant de la démonstration du Théorème 4.I (voir 4.2.5 à son sujet) mais cherche à l'introduire "naturellement".....

(2) en plus de (4.2.30)

(3) Avec les notations introduites en 4.2.2.

$$(4.2.34)\qquad \frac{d}{dy}\Big/_{y=x}\ \psi^{[K]}_{t,+}(y) = \big[\zeta(x)-\zeta(x+f(t)) - f'(t)\big]\psi^{[K]}_{t,+}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(2) Il existe une fonction numérique α sur $\mathbb{R}$, continûment dérivable et telle que,

$$(4.2.35)\qquad \psi^{[K]}_{t,+}(x) = e^{\alpha(t)}\ e^{-[x+\frac{1}{2}f(t)]f'(t)}\ e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),x)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$(4.2.36)\qquad K(x,t) = -\alpha'(t) + Q_f(x,t)$$

$$4.2.37)\qquad \alpha(t) = 0 \quad \text{si } t \notin [t_o,t_1] .$$

On rappelle (voir 1.7.3) que l'on a posé,

$$(4.2.38)\qquad \Lambda_o(z,x) = \log(\rho(z+x)/\rho(x)) \qquad (z \in \mathbb{R} ,\ x \in \mathbb{R}) ,$$

de telle sorte que $\exp\{\Lambda_o(z,\ )\} = a_o(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ [1].

Cette proposition fournit de façon naturelle, au moins lorsque f a son support compact, la formule donnant le module de quasi-invariance présumé de μ [relation (4.2.36)] en supposant seulement que ce module est de la forme $M^{[K]}$ où $K \in \mathbb{K}^{(q)}$ satisfait la condition de localité (4.2.30). En outre, la relation (4.2.35) donne la forme explicite des fonctions $\psi^{[K]}_{t,+}$ qui jouera un rôle central dans la démonstration du Théorème 4.I (voir 4.2.5). On note l'indétermination représentée par la fonction α ; indétermination qui ne contredit pas l'expression (4.1.3) de $\Lambda(f,\omega)$ en termes de Q_f puisque $\int_{\mathbb{R}} \alpha'(t)dt = 0$ d'après (4.2.37).

Le pivot de la démonstration de la proposition ci-dessus va être l'équation différentielle (4.2.34) que l'on va commencer par établir. Pour cela, on remarque d'abord que, d'une part, d'après

----

(1) Avec les notations introduites en 4.2.2

(4.2.31), (4.2.32) et (3.1.10) [Théorème 3.I],

(4.2.39) $\psi^{[K]}_{t,+} = \Omega_o$ si $t_1 \leqslant t$, et,

(4.2.40) $\psi^{[K]}_{t,+} = N^{[K]}_{t,u}\,\Omega_o$ si $t \leqslant u$ et $t_1 \leqslant u$;

et, d'autre part, en vertu de l'invariance de μ par la symétrie S,

(4.2.41) $\psi^{[K]}_{-,t} = \psi^{[\check{K}]}_{-t,+}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

où $\check{K} \in \mathbb{K}^{(q)}$ est défini par $\check{K}(x,t) = K(x,-t)$ $(x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$; et ces relations, jointes au Théorème 3.I, entraînent que $\psi^{[K]}_{-,t}$ et $\psi^{[K]}_{t,+}$ appartiennent à D(H), donc aussi à $C^1(\mathbb{R})$ [Lemme 4.2.3, propriété (1)]. En particulier, la condition (4.2.13) est satisfaite et on se trouve dans les hypothèses de validité de la proposition 4.2.2. Fixant $u > t_1$, l'hypothèse $M^{[K]}.\mu^f$ entraîne donc que (4.2.17) a lieu, laquelle s'écrit, puisque $T_o(f(u))^{-1}((\psi^{[K]}_{u,+})^{-1}\varphi) = \varphi$ d'après (4.2.30) et (4.2.39),

(4.2.42) $N^{[K]}_{t,u}\varphi = \psi^{[K]}_{t,+}\ T_o(f(t))\ N_{u-t}\varphi$ $(t \leqslant u,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$.

Mais, pour $t < u$ et pour $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, d'après le Théorème 3.I, la fonction $s \to (\theta | N^{[K]}_{s,u}\varphi)$ est dérivable en t, et on a

$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta | N^{[K]}_{s,u}\varphi) = ((H - \underline{K}(t))\,\theta | N^{[K]}_{t,u}\varphi)$, puisque, K étant réel, l'opérateur $H - \underline{K}(t)$ est auto-adjoint ; ou encore, d'après (4.2.42),

(4.2.43)
$$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta | \theta_1 \psi^{[K]}_{t,+}\ T_o(f(t))\ N_{u-t}\varphi) =$$
$$((H-\underline{K}(t))\,\theta | \theta_1 \psi^{[K]}_{t,+}\ T_o(f(t))\ N_{u-t}\varphi),$$

où $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est identique à 1 sur le support de θ. Par ailleurs, d'après (4.2.39), (4.2.40) et le Théorème 3.I, l'application $s \to \psi^{[K]}_{s,+}$ est solution avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par K ; on peut donc lui appliquer le lemme 4.2.3 ; et la comparaison de la relation (4.2.23) [avec $\psi_{t,+}^{[K]}$ mis pour ψ_t] ainsi obtenue avec (4.2.43) fournit la relation,

(4.2.44) $$(\theta|\theta_1(D\psi_{t,+}^{[K]} - [\zeta - T_o(f(t))\zeta - f'(t)\Omega_o]\psi_{t,+}^{[K]})T_o(f(t))D\,N_{u-t}\varphi) = 0 \;;$$

ou encore, puisque $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est arbitraire,

(4.2.45) $$(D\psi_{t,+}^{[K]} - [\zeta - T_o(f(t))\zeta - f'(t)\Omega_o]\psi_{t,+}^{[K]})T_o(f(t))\,DN_{u-t}\varphi = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour conclure alors à (4.2.34), on remarque que, pour tout intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $DN_{u-t}\varphi$ n'est pas identiquement nulle sur J [en effet, dans le cas contraire, il existerait J tel que $N_{u-t}\varphi$ serait constante sur J pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; ce qui entraînerait que, si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a son support dans J et $(\theta|\Omega_o) = 0$, on aurait $(N_{u-t}\theta|\varphi) = (\theta|N_{u-t}\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; c'est-à-dire $N_{u-t}\theta = 0$; donc $\theta = 0$ puisque N_{u-t} est injectif ; ce qui est absurde]. Et de cette propriété, on déduit que, si $\psi \in C(\mathbb{R})$ est tel que $\psi T_o(f(t))D\,N_{u-t}\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\psi = 0$. D'où l'équation (4.2.34) d'après (4.2.45) ; et la propriété (1).

L'intégration de cette équation fournit alors immédiatement l'expression (4.2.35) de $\psi_{t,+}^{[K]}$. La fonction $t \to \alpha(t)$ ainsi introduite est continûment dérivable en même temps que les fonctions $t \to (\theta|\psi_{t,+}^{[K]})$ et $t \to (\theta|\psi_{t,+}^{(f)})$ $(\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$, où on a posé,
$\psi_{t,+}^{(f)}(x) = \mathrm{Exp}\,\{-[x + \frac{1}{2}f(t)]f'(t) + \frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),x)\}$ $(t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$; et puisque $\psi_{t,+}^{(f)} = \Omega_o$ si $t \notin [t_o,t_1]$ d'après (4.2.30), on a $\alpha(t) = 0$ si $t \geqslant t_1$ d'après (4.2.39), et $\alpha(t) = 0$ si $t \leqslant t_o$ d'après (4.2.32), (4.2.33) et (4.2.10) [en calculant l'espérance E_μ des deux membres de (4.2.12)]. D'où (4.2.37).

Enfin, ont peut obtenir comme suit l'expression (4.2.36) de K : puisque l'application $s \to \psi_{s,+}^{[K]}$ est une solution de l'équation d'évolution spécifiée par K,on a,d'après (4.2.35), pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi_{t,+}^{(f)} \in D(H)$ et,

$$(4.2.46)\quad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta|\psi_{s,+}^{(f)}) = -\alpha'(t)(\theta|\psi_{t,+}^{(f)}) + (\theta|(H-\underline{K}(t))\,\psi_{t,+}^{(f)})\ ;$$

ou encore,

$$(4.2.47)\quad \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta}[K(t)+\alpha'(t)\Omega_o]\psi_{t,+}^{(f)}d\mu_o = (\theta|H\psi_{t,+}^{(f)}) - \frac{d}{ds}\Big/_{s=t}(\theta|\psi_{s,+}^{(f)})\ .$$

Et il suffit de calculer le second membre pour obtenir l'expression (4.2.36) de K [ce calcul est fait ci-dessous en 4.2.6 ; voir la relation (4.2.60) et ce qui la suit].

c.q.f.d.

4.2.5.- Articulation de la démonstration

Désignant par f un élément de $\mathfrak{S}$, on pose d'abord,

$$(4.2.48)\quad \psi_{-,t}^{(f)}(x) = e^{[x+\frac{1}{2}f(t)]f'(t)}\, e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),x)}\ ,\ \text{et},$$

$$(4.2.49)\quad \psi_{t,+}^{(f)}(x) = e^{-[x+\frac{1}{2}f(t)]f'(t)}\, e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),x)}\qquad (t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}),$$

où Λ_o est défini, comme ci-dessus en 1.7.3, par,

$$(4.2.50)\qquad \Lambda_o(z,x) = \log(\rho(z+x)/\rho(x))\qquad (z\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}).$$

Les fonctions $\psi_{-,t}^{(f)}$ et $\psi_{t,+}^{(f)}$ ainsi définies appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R})$ et sont partout > 0.

On pose ensuite, pour chaque $t \leqslant u$ et chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$,

$$(4.2.51)\quad N_{t,u}^{(f)}\varphi = \psi_{t,+}^{(f)}T_o(f(t))N_{u-t}T_o(f(u))^{-1}((\psi_{u,+}^{(f)})^{-1}\varphi)$$

[où $(\psi_{u,+}^{(f)})^{-1}$ désigne la fonction $x \to 1/\psi_{u,+}^{(f)}(x)$]. La fonction $N_{t,u}^{(f)}\varphi$ ainsi définie appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ puisque la fonction $T_o(f(u))^{-1}((\psi_{u,+}^{(f)})^{-1}\varphi)$ appartient à $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$, et puisque l'opérateur N_{u-t} applique $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ [propriété (3) de la proposition 2.1.2].

4.2.5

Les définitions précédentes sont motivées par l'expression analytique (4.2.16)-(4.2.17) dela quasi-invariance [proposition 4.2.2] et par les formules (4.2.35) [proposition 4.2.4] et (4.2.41). De plus, on remarque que la fonction Q_f [définie par (4.1.2)] appartient à $\mathbb{K}^{(q)}$ et vérifie la condition (4.2.7) [voir 4.2.2] en vertu de la relation (2.1.1) qui définit $\mathbf{W}$. Cela étant,

<u>PROPOSITION</u> - Pour chaque $f \in \mathfrak{S}$ (1),

(C_f1) $E_\mu[M^{[Q_f]}] = 1.$

(C_f2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_{-,t}^{[Q_f]} = \psi_{-,t}^{(f)} \text{ , et,} \tag{4.2.52}$$

$$\psi_{t,+}^{[Q_f]} = \psi_{t,+}^{(f)} \text{ .} \tag{4.2.53}$$

(C_f3) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, tout $t \leqslant u$ et tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$,

$$N_{t,u}^{[Q_f]}\varphi = N_{t,u}^{(f)}\varphi \quad (2) \text{ .} \tag{4.2.54}$$

Le Théorème 4 va résulter de cette proposition et de la proposition 4.2.2 : en effet, pour chaque $f \in \mathfrak{S}$, les propriétés C_f1 et C_f2 entraînent que la fonction $K = Q_f$ satisfait aux conditions (4.2.10) et (4.2.13) préliminaires à la proposition 4.2.2 [en même temps que (4.2.7) elle aussi satisfaite par Q_f]. Et, comme par définition (4.2.48) et (4.2.49), on a,

$$\psi_{-,t}^{(f)} \cdot \psi_{t,+}^{(f)} = e^{\Lambda_o(f(t),\cdot)} = a_o(f(t)) \qquad (t \in \mathbb{R}) \text{ ,} \tag{4.2.55}$$

les propriétés C_f2 et C_f3 entraînent, compte tenu de la définition (4.2.51), que les relations (4.2.16) et (4.2.17) de la proposition

----

(1) avec les notations introduites en 4.2.2.

(2) En ce qui concerne l'opérateur $N_{t,u}^{[Q_f]}$, voir le Théorème 3.I en 3.1.2.

4.2.2 sont vérifiées. D'où, en vertu de cette proposition, l'égalité dēs mesures $M^{[Q_f]}.\mu$ et μ^f ; et la quasi-invariance de μ annoncée par le Théorème 4.

La proposition précédente est établie ci-dessous en 4.2.6, 4.2.7 et 4.2.8, en commençant par le cas où f a son support compact.

4.2.6.- Démonstration des propriétés C_f1 et C_f2 lorsque f a son support compact

Soit f un élément de $\mathcal{S}$ ayant son support dans l'intervalle compact $[t_o,t_1]$. La propriété de localité de Q_f (1) entraîne alors que, $Q_f(t) = 0$ pour tout $t \notin [t_o,t_1]$ (2). D'où il résulte que,

$$M_{t,+}^{[Q_f]} = M^{[Q_f]} \quad \text{si } t \leqslant t_o \text{ , et,} \tag{4.2.56}$$

$$\psi_{t,+}^{[Q_f]} = N_{t,u}^{[Q_f]}\Omega_o \quad \text{si} \quad t \leqslant u \quad \text{et} \quad t_1 \leqslant u \text{ .} \tag{4.2.57}$$

Cela étant, on remarque d'abord que la propriété C_f1 découle facilement (3) de la propriété C_f2 : en effet, en prenant l'espérance E_μ des deux membres de (4.2.12) écrite pour $K = Q_f$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \psi_{t,+}^{[Q_f]} d\mu_o = E_\mu[M_{t,+}^{[Q_f]}]$; d'où, d'après (4.2.56),

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{t,+}^{[Q_f]} d\mu_o = E_\mu[M^{[Q_f]}] \quad \text{si } t \leqslant t_o. \tag{4.2.58}$$

Mais, $\psi_{t,+}^{(f)} = \Omega_o$ si $t \leqslant t_o$, puisque supp $f \subset [t_o,t_1]$. Donc (4.2.53)

----

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_f(x,t) = 0$ dès que $t \notin$ Supp f ; voir aussi 6.4.2. à ce sujet.

(2) Ce qui fait que l'on est ici dans la situation de 4.2.2 avec $K = Q_f$.

(3) dans le cas particulier envisagé ici (f à support compact) ; il n'en sera pas du tout de même dans le cas général (voir 4.2.8) !

écrite pour $t \leqslant t_o$ entraîne $C_f 1$. On remarque ensuite que (4.2.53) pour $t = s$ entraîne (4.2.52) pour $t = - s$, puisque, d'une part $\psi^{(f)}_{-,s} = \psi^{(\check{f})}_{-s,t}$ [avec $\check{f}(s) = f(-s)(s \in \mathbb{R})$] et, d'autre part $\psi^{[Q_f]}_{-,s} = \psi^{[Q_{\check{f}}]}_{-s,+}$ en vertu de l'invariance de μ par la symétrie S et de la relation $Q_f(-s) = Q_{\check{f}}(s)$ [on note que l'hypothèse de support faite sur f n'intervient pas ici].

On est ainsi ramené à établir (4.2.53) ; et pour cela, d'après (4.2.57), la propriété (3) du Théorème 3.I et le Théorème 3.II (voir 3.1.2 et 3.3), il suffit de montrer que l'application $t \to \psi^{(f)}_{t,+}$ est solution faible (avant u avec $u > t_1$) pour l'équation d'évolution spécifiée par Q_f [on note que la condition de validité $K3^*$ du Théorème 3.II est satisfaite pour $K = Q_f$].

Tout d'abord, on vérifie facilement à partir de (4.2.49) et (4.2.14) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$),

$$(4.2.59)\qquad \int_{\mathbb{R}} (\psi^{(f)}_{t,+})^2 d\mu_o = e^{f(t)f'(t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-2f'(t)x}\, \mu_o(dx) \quad ;$$

Donc, d'après le corollaire de la proposition 1.6, $\psi^{(f)}_{t,+}$ appartient à $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et, en vertu du Théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué au second membre de (4.2.59), l'application $t \to \|\psi^{(f)}_{t,+}\|$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, il est clair que l'application $t \to (\theta|\psi^{(f)}_{t,+})$ est continue pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; et de ces deux continuités résulte celle (au sens fort) de l'application $t \to \psi^{(f)}_{t,+}$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

Il reste alors à montrer que, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction numérique $s \to (\theta|\psi^{(f)}_{s,+})$ est dérivable et vérifie,

$$(4.2.60)\qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta|\psi^{(f)}_{t,+}) = ((H-Q_f(t))\theta|\psi^{(f)}_{t,+}) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

Or, d'une part, par dérivation standard sous le signe somme, et compte tenu de ce que,

(4.2.61) $$\frac{d}{dy}\Big/_{y=z} \Lambda_o(y,x) = \rho'(z+x)/\rho(z+x) = -2\zeta(z+x),$$

on obtient la dérivabilité cherchée et la relation (1),

(4.2.62) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t}(\theta|\psi^{(f)}_{s,+}) = (\theta|\theta_1[-(\chi + \tfrac{1}{2}f(t)\Omega_o)f''(t) - \tfrac{1}{2}f'(t)^2\Omega_o - f'(t)T_o(f(t))\zeta]\psi^{(f)}_{t,+}),$$

où $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est identique à 1 sur le support de θ. D'autre part, on a, puisque $\theta_1\psi^{(f)}_{t,+} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(4.2.63) $$(H\theta|\psi^{(f)}_{t,+}) = (\theta|H(\theta_1\psi^{(f)}_{t,+}))^{(1)} .$$

Mais désignant par $D\psi$ la dérivée de $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, et compte tenu de ce que, d'après (4.2.50),

(4.2.64) $$\frac{d}{dy}\Big/_{y=x} \Lambda_o(z,y) = 2(\zeta(x)-\zeta(z+x)) \quad (z \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}),$$ on a,

$$D\psi^{(f)}_{t,+} = [-f'(t)\Omega_o+\zeta-T_o(f(t))\zeta]\psi^{(f)}_{t,+}, \quad \text{et}$$

$$D^2\psi^{(f)}_{t,+} = [D\zeta-DT_o(f(t))\zeta+(-f'(t)\Omega_o+\zeta-T_o(f(t))\zeta)^2]\,\psi^{(f)}_{t,+} \;;$$

et, en portant dans (4.2.63) la valeur de $H(\theta_1\psi^{(f)}_{t,+})$ calculée à partir de ces relations, on obtient, après simplifications [compte tenu de ce que $H\theta_1$ et $D\theta_1$ sont nulles sur le support de θ et de ce que $\zeta^2-D\zeta = 2\hat{Q}$ (Lemme 1.5)],

(4.2.65) $$(H\theta|\psi^{(f)}_{t,+}) = (\theta|\theta_1[-(T_o(f(t))\hat{Q} - \hat{Q}) - \tfrac{1}{2}f'(t)^2\Omega_o - f'(t)T_o(f(t))\zeta]\psi^{(f)}_{t,+}).$$

----

(1) χ désigne l'application identique de $\mathbb{R}$.

(2) à ce stade de la démonstration, on ne sait pas encore que $\psi^{(f)}_{t,+} \in D(H)$.

D'où la relation (4.2.60) cherchée en confrontant (4.2.62) et (4.2.65) avec la définition (4.1.2) de Q_f.

cqfd.

4.2.7.- Démonstration de la propriété C_f3

On va s'appuyer sur les résultats auxiliaires suivants :

LEMME - Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $r \geqslant 2$. Alors,

(1) Pour chaque $f \in \mathcal{S}$, l'application $t \to \psi_{t,+}^{(f)}$ est solution de l'équation d'évolution spécifiée par Q_f, et envoie continûment $\mathbb{R}$ dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$.

(2) L'application $z \to a_o(z)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$.

(3) Si $r' \in \mathbb{R}$ est tel que $1 \leqslant r' < r$, l'application $z \to T_o(z)\psi$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$; en particulier, pour tout compact J de $\mathbb{R}$, il existe $C > 0$ tel que,

$$\|T_o(z)\psi\|_{r'} \leqslant C\|\psi\|_r \quad \text{pour tous } z \in J \text{ et } \psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o). \tag{4.2.66}$$

(4) Pour chaque $t \geqslant 0$, l'opérateur N_t induit une contraction de $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même ; et pour chaque $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, l'application $t \to N_t\psi$ est continue de $[0,+\infty)$ dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$.

En effet, remarquant sur l'expression (4.2.49) que $\psi_{t,+}^{(f)}$ ne dépend que des valeurs de f au voisinage de t, on se ramène à montrer la propriété (1) lorsque f a son support compact. Or, si f a son support dans l'intervalle compact $[t_o,t_1]$, on a, d'après (4.2.53) [déjà établie dans ce cas en 4.2.6] et (4.2.57),

$$\psi_{t,+}^{(f)} = N_{t,u}^{[Q_f]}\Omega_o \quad \text{si } t \leqslant u \text{ et } t_1 \leqslant u \;; \tag{4.2.67}$$

et la propriété annoncée résulte de cette relation et du Théorème 3.I. Grâce à l'inégalité de Hölder, la propriété (2) découle de la propriété (1), de la relation (4.2.55) et de ce que $\psi^{(f)}_{-,t} = \psi^{(\check{f})}_{-t,+}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En ce qui concerne la propriété (3), si $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, on a,

$$\int_{\mathbb{R}} |T_o(z)\psi|^{r'} d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} |\psi|^{r'} a_o(-z)\, d\mu_o \qquad \text{d'après 4.2.14 ;}$$

donc, d'après l'inégalité de Hölder,

$$(4.2.68) \qquad \|T_o(z)\psi\|_{r'} \leqslant \|a_o(-z)\|_{r''}^{1/r'} \|\psi\|_r \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{R},$$

où r'' est déterminé par $\frac{1}{r''} + \frac{r'}{r} = 1$. D'où, d'après la propriété (2) avec r'' mis pour r, $T_o(z)\psi \in L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et (4.2.66) avec $C = \sup_{z \in J} \|a_o(-z)\|_{r''}^{1/r'}$. En outre, il est clair que l'application $z \to T_o(z)\psi$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^{r'}(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; d'où la continuité cherchée pour tout $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, en vertu de l'uniformité locale en z qui a lieu dans (4.2.66).

Enfin, en ce qui concerne la propriété (4) [(1)], pour chaque $t \geqslant 0$, N_t induit une contraction de $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même d'après le Théorème de Riesz-Thorin et la proposition 2.1.2 ; et l'adjoint N_t^* de N_t dans l'anti-dualité entre $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ et $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$) constitue un opérateur contractant de $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ qui prolonge N_t. En outre, en vertu de la majoration $\|N_t^*\theta-\theta\|_p \leqslant 2\|\theta-\psi\|_p + \|N_t\psi-\psi\|_2$ $[\theta \in L^p(\mathbb{R},\mu_o)$, $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, $t \geqslant 0]$ $(N_t^*)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe fortement continu dans $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$, vu que $(N_t)_{t \geqslant 0}$ l'est dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Il en résulte que pour tout $\psi \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$, $\lim_{t \downarrow 0} N_t\psi = \psi$ faiblement dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$; d'où la continuité forte annoncée pour l'application $t \to N_t\psi$ en vertu du Théorème IX.1 (page 233) de Yosida [3] ; ce qui achève d'établir le Lemme.

On peut alors établir la propriété C_f3 comme suit : d'après

----

(1) voir aussi la démonstration de la proposition 6.1.1.

les Théorèmes 3.I et 3.II (voir 3.1.2 et 3.3), il suffit de vérifier que l'application $t \to N_{t,u}^{(f)}\varphi$ $(t \leqslant u)$ est une solution faible avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par Q_f. Tout d'abord, cette application est continue de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [et même dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ pour tout $r \in [2,+\infty)$] en vertu de l'inégalité de Hölder car les applications $t \to \psi_{t,+}^{(f)}$ et $t \to T_o(f(t))N_{u-t}\varphi_u$, où $\varphi_u = T_o(f(u))^{-1}((\psi_{u,+}^{(f)})^{-1}\varphi)$, sont continues de $(-\infty,u]$ dans $L^{2r}(\mathbb{R},\mu_o)$ [avec $r \in [2,+\infty)$] ; la première d'après la propriété (1) du Lemme, et la seconde d'après les propriétés (3) et (4), compte tenu de ce que φ_u appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ [donc à $L^{2r}(\mathbb{R},\mu_o)$] comme φ. Cela étant, il reste à montrer que, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $t < u$, la fonction complexe $s \to (\theta|N_{s,u}^{(f)}\varphi)$ est dérivable en t et vérifie,

$$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\theta|N_{s,u}^{(f)}\varphi) = ((H-\underline{Q}_f(t))\theta|N_{t,u}^{(f)}\varphi).$$

Or, cette relation résulte du Lemme 4.2.3 [propriété (2) appliquée avec Q_f mis pour K, $\psi_{t,+}^{(f)}$ pour ψ_t et φ_u pour φ], de la propriété (1) du Lemme ci-dessus et de ce que $\psi_{t,+}^{(f)}$ satisfait l'équation,

$$D\psi_{t,+}^{(f)}-[\zeta-T_o(f(t))\,\zeta-f'(t)\Omega_o]\,\psi_{t,+}^{(f)} = 0 \quad (1) \tag{4.2.69}$$

cqfd.

4.2.8.- Démonstration des propriétés C_f1 et C_f2 dans le cas général

Pour chaque $f \in \mathcal{S}$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, on pose,

$$U_{-,t}^{(f)} = (\psi_{-,t}^{(f)} \otimes X_t) \,.\, M_{t,+}^{[Q_f]} \,, \quad \text{et,} \tag{4.2.70}$$

$$U_{t,+}^{(f)} = (\psi_{t,+}^{(f)} \otimes X_t) \,.\, M_{-,t}^{[Q_f]} \,. \tag{4.2.71}$$

Ces termes, définis comme éléments > 0 de $L^o(W,\mathcal{G},\mu)$, sont en fait dans $L^1(W,\mathcal{G},\mu)$ et donnent lieu à l'énoncé suivant qui va constituer le pivot de la démonstration des propriétés C_f1 et C_f2 (2) :

(1) Voir la proposition 4.2.4 à ce sujet.

(2) Voir la remarque 2 ci-dessous.

<u>PROPOSITION</u> - Pour chaque $f \in \mathcal{S}$ (1)

($C_f^{\#}1$) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(4.2.72) $$E_\mu[U_{-,t}^{(f)}] = 1, \quad \text{et,}$$

(4.2.73) $$E_\mu[U_{t,+}^{(f)}] = 1$$

($C_f^{\#}2$) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(4.2.74) $$U_{-,t}^{(f)} = E_\mu[M^{[Q_f]}/\mathcal{G}_{[t,+\infty)}], \quad \text{et,}$$

(4.2.75) $$U_{t,+}^{(f)} = E_\mu[M^{[Q_f]}/\mathcal{G}_{(-\infty,t]}].$$

En vertu des propriétés (4.2.8) et (4.2.9) de la fonctionnelle multiplicative $M^{[Q_f]}$ (voir 4.2.1 et 4.2.2) et de ce que, d'après la propriété de Markov et la propriété de Markov rétrograde de μ (2),

(4.2.76) $$\psi_{-,t}^{[Q_f]} \odot X_t = E_\mu[M_{-,t}^{[Q_f]}/\mathcal{G}_{[t,+\infty)}] \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ et,}$$

(4.2.77) $$\psi_{t,+}^{[Q_f]} \odot X_t = E_\mu[M_{t,+}^{[Q_f]}/\mathcal{G}_{(-\infty,t]}] \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

la conjonction de C_f1 et C_f2 équivaut à celle de $C_f^{\#}1$ et $C_f^{\#}2$. Il s'agit donc d'établir ces dernières pour tout $f \in \mathcal{S}$. Pour cela, on va s'appuyer sur le Lemme suivant :

<u>LEMME</u> - Pour chaque $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \psi_{-,t}^{(f)} \odot X_t = \lim_{t \to \pm\infty} \psi_{t,+}^{(f)} \odot X_t = \Omega,$$

ces limites ayant lieu dans $L^1(W, \mathcal{G}, \mu)$, donc aussi dans $L^0(W, \mathcal{G}, \mu)$ (i.e en μ-mesure).

----

(1) voir la remarque 1 ci-dessous.

(2) voir 2.4.1.

En effet, en vertu de la propriété M1 de μ (Théorème 2.I en 2.1.3), il suffit de montrer que,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \psi^{(f)}_{-,t} = \lim_{t \to \pm\infty} \psi^{(f)}_{t,+} = \Omega_o \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R},\mu_o) \ ;$$

ou encore, par définitions (4.2.48) et (4.2.49) de $\psi^{(f)}_{-,t}$ et $\psi^{(f)}_{t,+}$, et d'après l'inégalité de Hölder, que,

$$(4.2.78) \quad \lim_{t \to \pm\infty} e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),\cdot)} = \Omega_o \quad \text{dans } L^r(\mathbb{R},\mu_o) \text{ pour } 1 \leqslant r < 2, \text{ et,}$$

$$(4.2.79) \quad \lim_{t \to \pm\infty} e^{\epsilon[\chi + \frac{1}{2}f(t)]f'(t)} = \Omega_o \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R},\mu_o) \text{ pour } 1 \leqslant p < +\infty$$

et $\epsilon = \pm 1$. Or, en ce qui concerne (4.2.78), on a, $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$, et pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(z,x)} = \lim_{z \to 0} (\rho(z+x)/\rho(x))^{1/2} = 1, \qquad \text{et,}$$

$$e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(z,x)} \leqslant \|\rho\|_\infty \, \rho(x)^{-1/2} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{R} \ ;$$

et on conclut grâce au Théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (Lemme 1.5) entraîne que,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)^{-r/2}\mu_o(dx) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)^{(1-\frac{r}{2})} dx < +\infty \quad \text{si } 1 \leqslant r < 2.$$

Ensuite, en ce qui concerne (4.2.79), on a, pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to \pm\infty} e^{\epsilon[x + \frac{1}{2}f(t)]f'(t)} = 1 \text{ et } \left(e^{\epsilon[x+\frac{1}{2}f(t)]f'(t)}\right)^p \leqslant c\, e^{a|x|},$$

avec $c = e^{\frac{p}{2}\|f\|_\infty \|f'\|_\infty}$ et $a = p\|f'\|_\infty$; et on conclut grâce au Théorème de Lebesgue et au corollaire de la proposition 1.6.

cqfd.

On peut alors procéder comme suit pour établir $C^{\#}_f 1$ et $C^{\#}_f 2$: d'abord, lorsque f a son support compact, $C_f 1$ et $C_f 2$ ont été établies en 4.2.6, donc $C^{\#}_f 1$ et $C^{\#}_f 2$ sont aussi vérifiées dans ce cas.

On suppose ensuite que f a son support borné inférieurement, supp $f \subset [t_o,+\infty)$; et on désigne, pour chaque entier $n > 0$, par f_n^+ la fonction $t \to f(t)h(t-n)$ de $\mathcal{S}$, où $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ est donnée telle que $1_{(-\infty,0]} \leqslant h \leqslant 1_{(-\infty,1]}$. Pour chaque n, d'une part f_n^+ a son support compact, supp $f_n^+ \subset [t_o,n+1]$; et d'autre part, f_n^+ coïncide avec f sur $(-\infty,n]$; donc,

$$(4.2.80) \qquad M_{-,t}^{[Q_f]} = M_{-,t}^{[Q_{f_n^+}]} \qquad \text{pour tout } t \leqslant n,$$

$$(4.2.81) \quad \psi_{-,t}^{(f)} = \psi_{-,t}^{(f_n^+)} \quad \text{et} \quad \psi_{t,+}^{(f)} = \psi_{t,+}^{(f_n^+)} \quad \text{pour tout } t \leqslant n.$$

Il en résulte d'abord que,

$$(4.2.82) \qquad U_{t,+}^{(f)} = U_{t,+}^{(f_n^+)} \qquad \text{pour tout } t \leqslant n.$$

Et, en prenant l'espérance des deux membres de cette relation, on obtient (4.2.73) pour tout $t \leqslant n$ en vertu de $C^{\#}_{f_n^+}1$ déjà établie, donc aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En outre, d'après le Lemme, on a,

$$(4.2.85) \qquad \lim_{t \to +\infty} U_{t,+}^{(f)} = M^{[Q_f]} \qquad \text{en } \mu\text{-mesure ;}$$

donc, en extrayant une sous-suite (t_p) pour laquelle la convergence a lieu presque partout, et en appliquant le Lemme de Fatou à la suite $(U_{t_p}^{(f)})$, on obtient, en vertu de (4.2.73) que l'on vient d'établir pour tout t,

$$(4.2.86) \qquad E_\mu[M^{[Q_f]}] \leqslant 1.$$

Pour obtenir l'égalité dans cette relation (i.e $C_f 1$), on remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, (4.2.52) est satisfaite [en effet, si $t \leqslant n$, d'une part, $\psi_{-,t}^{[Q_f]} = \psi_{-,t}^{[Q_{f_n^+}]}$ d'après (4.2.80) ; d'autre part $\psi_{-,t}^{[Q_{f_n^+}]} = \psi_{-,t}^{(f_n)}$ en vertu de $C_{f_n^+}2$ déjà établie ; et enfin $\psi_{-,t}^{(f_n^+)} = \psi_{-,t}^{(f)}$ d'après (4.2.81)]. Donc, d'après (4.2.76), (4.2.74) est aussi satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte, compte tenu de ce que $M^{[Q_f]} \in L^1(W, \mathfrak{S}, \mu)$, d'après (4.2.86), que l'ensemble des $U^{(f)}_{-,t}$ $(t \in \mathbb{R})$ est uniformément intégrable (voir Meyer [9], Théorème V.19). En outre, d'après le Lemme, on a,

$$(4.2.87) \qquad \lim_{t \to +\infty} U^{(f)}_{-,t} = \Omega \quad \text{en } \mu\text{-mesure} ;$$

donc, en vertu de l'uniforme intégrabilité que l'on vient d'établir $\lim_{t \to +\infty} E_\mu[U^{(f)}_{-,t}] = 1$ (voir Meyer [9], Théorème II.21). Mais, d'après (4.2.74), $E_\mu[U^{(f)}_{-,t}] = E_\mu[M^{[Q_f]}]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; d'où $C_f 1$ et (4.2.72) pour tout $t \in \mathbb{R}$; donc aussi $C^{\#}_f 1$, puisque (4.2.73) a déjà été établie. Enfin, pour montrer (4.2.75) [toujours en supposant que supp f $[t_o, +\infty)$] on remarque d'une part que,

$$(4.2.88) \qquad \lim_{n \to \infty} M^{[Q_{f_n^+}]} = M^{[Q_f]} \quad \mu\text{-presque partout}$$

[en effet, cela résulte, en appliquant le Théorème de Lebesgue, pour chaque $\omega \in W$, à l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} Q_{f_n^+}(\omega(t), t)dt$, de la propriété (2.1.1) de ω et de ce que $f_n^+(t)$ et $f_n^{+\prime\prime}(t)$ sont majorées uniformément en n par cte $(1+t^2)^{-1}$ $(t \in \mathbb{R})$] ; et d'autre part que (4.2.82) s'écrit aussi, d'après $C^{\#}_{f_n^+} 2$,

$$(4.2.89) \qquad U^{(f)}_{t,+} = E_\mu[M^{[Q_{f_n^+}]} / \mathfrak{S}_{(-\infty,t]}] \quad \text{pour tout } t \leqslant n ;$$

donc, d'après le Lemme de Fatou pour les espérances condtionnelles (voir Neveu [8], § IV.3) appliqué à la suite $(M^{[Q_{f_n^+}]})$,

$$(4.2.90) \qquad U^{(f)}_{t,+} \geqslant E_\mu[M^{[Q_f]} / \mathfrak{S}_{(-\infty,t]}] \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} ;$$

Et dans cette relation, on ne peut avoir que l'égalité puisque les espérances des deux membres valent 1 ainsi qu'on vient de le montrer. Ce qui achève d'établir les propriétés $C_f 1$, $C^{\#}_f 1$, $C_f 2$, et $C^{\#}_f 2$ lorsque $f \in \mathfrak{S}$ a son support borné inférieurement.

Pour finir, soit f un élément quelconque de $\mathfrak{S}$; et, pour chaque entier $n > 0$, soit f_n^- la fonction $t \to f(t)h(-t-n)$ de $\mathfrak{S}$ où $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ est donnée comme ci-dessus. Pour chaque n, d'une part, on a,

$$\text{(4.2.91)} \qquad \operatorname{supp} f_n^- \subset [-n-1,+\infty] \ ;$$

et d'autre part, f_n^- coïncide avec f sur $[-n,+\infty)$; donc,

$$\text{(4.2.92)} \qquad M_{t,+}^{[Q_f]} = M_{t,+}^{[Q_{f_n^-}]} \qquad \text{pour tout } t \geqslant -n,$$

$$\text{(4.2.93)} \qquad \Psi_{-,t}^{(f)} = \Psi_{-,t}^{(f_n^-)} \quad \text{et} \quad \Psi_{t,+}^{(f)} = \Psi_{t,+}^{(f_n^-)} \quad \text{pour tout } t > -n.$$

Il en résulte d'abord que,

$$\text{(4.2.94)} \qquad U_{-,t}^{(f)} = U_{-,t}^{(f_n^-)} \qquad \text{pour tout } t \geqslant -n.$$

Et, en prenant l'espérance des deux membres de cette relation, on obtient (4.2.72 pour tout $t > -n$ en vertu de $C^{\#}_{f_n^-}$- 1 [laquelle est vérifiée d'après (4.2.91) et ce qui précède], donc aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il résulte ensuite de (4.2.92) et (4.2.93) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, (4.2.53) est satisfaite [en effet, si $t > -n$, d'une part, $\Psi_{t,+}^{[Q_f]} = \Psi_{t,+}^{[Q_{f_n^-}]}$ d'après (4.2.92) ; d'autre part, $\Psi_{t,+}^{[Q_{f_n^-}]} = \Psi_{t,+}^{(f_n^-)}$ en vertu de C_f-2 ; et enfin, $\Psi_{t,+}^{(f_n^-)} = \Psi_{t,+}^{(f)}$ d'après (4.2.94)]. Donc (4.2.75) est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}$ d'après (4.2.77) [l'égalité ayant lieu dans $L^0_{[0,+\infty)}(W,\mathfrak{F},\mu)$; voir le nota en 4.2.1]. Mais, $f \in \mathfrak{S}$ étant ici arbitraire (4.2.72) et (4.2.75) sont aussi satisfaites pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $\check{f}$ mis pour f ; d'où résultent (4.2.73) et (4.2.74) en vertu de la relation,

$$\text{(4.2.95)} \qquad U_{-t,+}^{(f)} = U_{-,t}^{(\check{f})}\, S \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et de l'invariance de μ par la symétrie S. Ce qui achève d'établir la proposition ci-dessus, la proposition 4.2.5 et le Théorème 2.I.

<u>Remarque 1</u>.- La démonstration ci-dessus fournit, en fait, la quasi-invariance de la mesure μ par toutes les translations de W dont le

vecteur f est une fonction réelle de $C^2(\mathbb{R})$ telle que,

(4.2.96) $\sup_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2)\,|f^{(k)}(t)| < +\infty$ pour $k = 0,1,2$.

Remarque 2.- La proposition ci-dessus entraîne que les familles $(U^{(f)}_{-,t})_{t\in\mathbb{R}}$ et $(U^{(f)}_{t,+})_{t\in\mathbb{R}}$ sont des martingales positives uniformément intégrables relativement aux familles croissantes de tribus $(\mathcal{F}_{[t,+\infty)})_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\mathcal{F}_{(-\infty,t]})_{t\in\mathbb{R}}$ respectivement. On trouvera dans [27] une exploitation systématique de ce fait dans ses liens avec le "Problème des martingales" en théorie des processus de diffusion. La démonstration ci-dessus ne fait pas appel à la théorie des martingales, mais elle a été élaborée à partir des idées de Pierre Priouret s'appuyant sur cette théorie.

4.3.- Variantes à la démonstration du Théorème 4.

4.3.1.- On peut établir la proposition 4.2.5 en s'appuyant seulement sur l'unicité forte à laquelle donne lieu l'équation d'évolution spécifiée par Q_f conformément au Théorème 3.I (i.e sans faire intervenir l'unicité faible stipulée par le Théorème 3.II) : en ce qui concerne, par exemple, la démonstration de la propriété C_f3, le Théorème 3.I permet de se ramener à montrer que (avec les notations de 4.2.5 et 4.2.7) l'application $t \to \psi_t = N^{(f)}_{t,u}\varphi$ est solution (forte) avant u pour l'équation d'évolution spécifiée par Q_f (voir 3.1.1). Pour cela, la difficulté est de montrer la dérivabilité (forte) de cette application, car, une fois cette dérivabilité obtenue, la vérification de l'équation d'évolutio (3.1.5) (avec Q_f mis pour K) peut être faite "faiblement" comme à la fin de 4.2.7 en s'appuyant sur le Lemme 4.2.3, lequel est indépendant du Théorème 3.II (et la situation est analogue en ce qui concerne la démonstration de la propriété C_f2). Or, la démonstration directe de la dérivabilité forte en cause (1) est délicate, au moins

----

(1) démonstration directe, car cette dérivabilité est établie indirectement en 4.2.7 en s'appuyant sur l'unicité faible.

à la mesure de nos possibilités techniques actuelles, et réclame à peu près autant de travail que l'ensemble des démonstrations du lemme d'unicité faible (appendice D) et du Théorème 3.II en s'appuyant, de plus, sur l'hypercontractivité du semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$ (laquelle n'est pas intervenue dans la démonstration donnée en 4.2.7). L'idée de départ consiste à calculer comme suit la quantité $\Psi^{(f)}_{t,+} T_o(f(t))\, \theta$ $(\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$: on remarque d'abord que, d'après (4.2.49),

$$\Psi^{(f)}_{t,+}\, T_o f(t))\, \theta = e^{-\frac{1}{2}f(t)f'(t)}\, e^{-f'(t)\Phi_o}\, (e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),\cdot)}\, T_o(f(t))\, \theta);\ \text{d'où}$$

$$(4.3.1) \quad \Psi^{(f)}_{t,+} T_o(f(t))\, \theta = e^{-\frac{1}{2}f(t)f't)}\, e^{-f'(t)\Phi_o}\, e^{if(t)\pi_o}\theta, \ \text{puisque}$$

$$e^{\frac{1}{2}\Lambda_o(f(t),\cdot)}\, T_o(f(t))\, \theta = e^{if(t)\pi_o}\theta, \quad \text{d'après (A3.3) et (A5.1).}$$

Mais, par prolongement analytique de la relation de commutation de Weyl $e^{i\alpha\Phi_o}\, e^{i\beta\pi_o}\, \theta = e^{-i\alpha\beta}\, e^{i\beta\pi_o}\, e^{i\alpha\Phi_o}$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R})$, on obtient

$$(4.3.2) \quad e^{z\Phi_o}\, e^{i\beta\pi_o}\theta = e^{-z\beta}\, e^{i\beta\pi_o}\, e^{z\Phi_o}\theta \quad (z \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{R}),$$

en notant que $e^{i\beta\pi_o}\theta$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en même temps que θ. D'où, en faisant dans cette relation $z = -f'(t)$ et $\beta = f(t)$, et en portant dans (4.3.1),

$$(4.3.3) \quad \Psi^{(f)}_{t,+} T_o(f(t))\theta = e^{\frac{1}{2}f(t)f'(t)}\, e^{if(t)\pi_o}\, e^{-f'(t)\Phi_o}\theta\ .$$

Il en résulte que, avec le notations de la fin de 4.2.7, on a,

$$(4.3.4) \quad N^{(f)}_{t,u}\varphi = e^{\frac{1}{2}f(t)f'(t)}\, e^{if(t)\pi_o}\, e^{-f'(t)\Phi_o}\, N_{u-t}\varphi_u,$$

le second membre étant bien défini, puisque, si $2 < r < +\infty$, $N_{u-t}\varphi_u \in L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après le Lemme 4.2.7 [propriété (4)], et $L^r(\mathbb{R},\mu_o) \subset D(e^{-f'(t)\Phi_o})$ d'après le corollaire de la proposition 1.6.

Ainsi, on est ramené à montrer que l'application

$$(t_1,t_2,t_3) \to e^{if(t_1)\pi_o} e^{-f'(t)\Phi_o} N_{u-t_3}\theta \text{ de } (-\infty, u[^3 \text{ dans } L^2(\mathbb{R},\mu_o)$$

admet des dérivées partielles continues (et c'est pour traiter la dérivée partielle par rapport à t_3 qu'intervient la continuité des opérateurs N_t $(t > 0)$ de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ pour une valeur au moins de $r > 2$)....

4.3.2.- Dans le cas du champ libre de masse $m > 0$, la quasi-invariance (par les translations de $\mathcal{S}$) de la mesure Euclidienne $\mu^{(m)}$ (voir 2.6.2) est un cas particulier d'un Théorème général sur les mesures Gaussiennes (1). Elle peut être établie très simplement à partir de l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures bornées (sur $\mathbb{W}$ ou sur $\mathcal{S}'$, voir 2.6.1), en même temps que l'on vérifie que le cocycle $\Lambda^{(m)}$ correspondant est donnée par,

$$\Lambda^{(m)}(f,\omega) = - <\omega + \frac{1}{2} f, \Sigma_m f> \qquad (f \in \mathcal{S}, \ \omega \in \mathbb{W}). \tag{4.3.5}$$

En effet, en vertu de l'injectivité précitée et de la relation (2.6.2) qui définit la transformée de Fourier de $\mu^{(m)}$, il suffit de vérifier que pour tous $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S}$,

$$e^{-i<f,g>} e^{-\frac{1}{2}<g,\Sigma_m^{-1}g>} = \int_{\mathbb{W}} e^{i<\omega,g>} e^{-<\omega+\frac{1}{2}f,\Sigma_m f>} \mu^{(m)}(d\omega) ;$$

ou encore que,

$$\int_{W} e^{i<\omega,g>} e^{-<\omega,\Sigma_m f>} \mu^{(m)}(d\omega) = e^{-i<f,g> - \frac{1}{2}<g,\Sigma_m^{-1}g> + \frac{1}{2}<f,\Sigma_m f>} . \tag{4.3.6}$$

Or, d'après (2.6.2), on a, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$,

----

(1) Voir, par exemple, le Théorème 3 du § IV.5.2 de [19].

$$\int_{\mathbb{W}} e^{i\alpha < \omega,g > + i\beta < \omega,\Sigma_m f >} \mu^{(m)}(d\omega) = e^{-\frac{1}{2} < \alpha g+\beta\Sigma_m f,\ \Sigma_m^{-1}(\alpha g+\beta\Sigma_m f) >} ;$$

c'est-à-dire,

$$(4.3.7) \quad \int_{\mathbb{W}} e^{i\alpha < \omega,g > + i\beta < \omega,\Sigma_m f >} \mu^{(m)}(d\omega) = e^{-\frac{\alpha^2}{2} < g,\Sigma_m^{-1} g > - \frac{\beta^2}{2} < f,\Sigma_m f > - \alpha\beta < g,f >} ,$$

pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; donc aussi, par prolongement analytique, pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Et on obtient (4.3.6) en faisant $\alpha = 1$ et $\beta = i$ dans (4.3.7).

4.3.3.- Dans le cas d'un polynôme d'interaction Q quelconque, la quasi-invariance de la mesure Euclidienne μ par les translations de $\mathbb{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [relations (4.1.4) et (4.1.5) pour tout $f \in \mathbb{D}$] peut être déduite du résultat correspondant pour le champ libre établi ci-dessus et de la formule de Cameron-Martin (voir 3.5) : en effet, conjuguant le Théorème 3.III avec m^2X mis pour $Q_1(X)$ et Q mis pour Q_2 avec l'égalité de quasi-invariance (4.1.5) écrite pour $\mu^{(m)}$, on obtient, pour $a < b$, $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[a,b]})$ et $f \in \mathbb{D}$,

$$(4.3.8) \qquad \int_{\mathbb{W}} F(\omega-f)\mu(d\omega) = \int_{\mathbb{W}} F(\omega)\ e^{\Lambda^{(m)}(f,\omega)}\ \frac{\Delta_{a,b}(\omega+f)}{\Delta_{a,b}(\omega)}\ \mu(d\omega) ,$$

en notant $\Delta_{a,b}$ au lieu de $\Delta_{a,b}^{2/1}$. Mais si Supp $f \subset [a,b]$, l'expression (3.5.1) de $\Delta_{a,b}$ donne, pour tout $\omega \in \mathbb{W}$,

$$\frac{\Delta_{a,b}(\omega+f)}{\Delta_{a,b}(\omega)} = e^{-\int_{\mathbb{R}}[\hat{Q}(\omega(s)+f(s))-\hat{Q}(\omega(s))]ds}\ e^{\int_{\mathbb{R}}[\hat{Q}^{(m)}(\omega(s)+f(s))-\hat{Q}^{(m)}(\omega(s))]ds} ,$$

où $\hat{Q}^{(m)}(X) = \frac{m^2}{2} X^2 - \frac{m}{2}$ [relation (1.7.4)] et où $\hat{Q}$ désigne la primitive centrée de Q ; d'où il résulte, compte tenu de l'expression (4.3.5) de $\Lambda^{(m)}$, que, lorsque Supp $f \subset [a,b]$,

$$(4.3.9) \qquad e^{\Lambda^{(m)}(f,\omega)}\ \frac{\Delta_{a,b}(\omega+f)}{\Delta_{a,b}(\omega)} = e^{\Lambda(f,\omega)} \qquad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{W},$$

où $\Lambda(f,\omega)$ est défini par les relations (4.1.2) et (4.1.3). On a ainsi établi l'égalité de quasi-invariance (4.1.5) pour tout $f \in \mathbb{D}$ et tout $F \in \bigcup_n \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F}_{[-n,n]})$; donc aussi pour tout $F \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{W},\mathcal{F})$ en vertu du théorème de prolongement par mesurabilité. D'où la quasi-invariance de μ par les translations de $\mathbb{D}$.

Remarque .- La démonstration ci-dessus de la quasi-invariance de la mesure Euclidienne μ par les translations de $\mathbb{D}$ est évidemment plus simple que celle que l'on a choisi de présenter ici en priorité (voir 4.2 ci-dessus). Ce choix est essentiellement motivé par l'esprit général de ce travail, lequel consiste à construire directement les champs avec interaction pour qu'ils satisfassent une équation donnée d'avance plutôt qu'à perturber un champ libre selon l'esprit de la théorie constructive (voir la complainte finale 6.5 à ce sujet). Par ailleurs, à partir de la quasi-invariance par les translations de $\mathbb{D}$, il n'est pas simple d'obtenir, pour $f \in \mathbb{D}$, les évaluations (4.2.52) et (4.2.53) [proposition 4.2.5] sur lesquelles est basée la démonstration de la quasi-invariance par les translations de $\mathfrak{S}$ donnée en 4.2.8.

***

§ 5.- ÉQUATIONS DE SYMANZIK ET DE SCHWINGER

On s'interesse ici à diverses conséquences de la quasi-invariance de la mesure Euclidienne μ établie au § 4 : on montre que la transformée de Fourier $\mathcal{X}$ de μ vérifie l'équation de Symanzik (Théorème 5.I en 5.1.2), et que les moments de μ vérifient le système infini des équations de Schwinger (Théorème 5.II en 5.3). Ces équations apparaissent comme des formes infinitésimales de la quasi-invariance en ce sens qu'elles sont obtenues en dérivant par rapport à α en $\alpha = 0$ l'égalité de quasi-invariance,

$$(5,i) \qquad \int_W F(\omega-\alpha f)\mu(d\omega) = \int_W F(\omega)e^{\Lambda(\alpha f,\omega)}\mu(d\omega) \qquad (f \in \mathfrak{S})$$

pour $F(\omega) = e^{i<\omega,g>}$ dans le cas de l'équation de Symanzik et pour $F(\omega) = \prod_{j=1}^{n} \omega(t_j)$ dans le cas des équations de Schwinger. On établit aussi l'équation suivante $\left[\text{où } \sum_{k=0}^{q} a_k X^k = Q(X)\right]$,

$$(5,ii) \qquad 2i\pi(f)\Omega - \Phi(f'')\Omega + \sum_{k=0}^{q} a_k \Phi^k(f)\Omega = 0 \qquad (f \in \mathfrak{S}),$$

que vérifie la représentation des relations de commutation canoniques $(\Phi(\cdot),\pi(\cdot))$ dérivée de la représentation de Weyl associée à μ (voir 5.4.3), après avoir étudié le domaine de cette représentation (proposition 5.4.2).

5.1.- Equation de Symanzik

5.1.1.- On définit d'abord la classe des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathfrak{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [1] qui vont intervenir dans l'équation. Munissant $\mathfrak{S}$ de sa topologie canonique d'espace de Frechet nucléaire, on désigne par $\mathcal{G}^0(\mathfrak{S})$ l'espace des fonctions complexes continues sur $\mathfrak{S}$, et, pour chaque entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{G}^n(\mathfrak{S})$ le sous-espace de $\mathcal{G}^0(\mathfrak{S})$ formé des fonctions $F \in \mathcal{G}^0(\mathfrak{S})$ telles que, pour chaque $g \in \mathfrak{S}$, les conditions G1 et G2 ci-dessous soient satisfaites :

----

(1) voir 4.1.1.

(G1) Pour chaque $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{S}^n$, la fonction

$$(5.1.1) \qquad (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \rightarrow F(g + \sum_{j=1}^{n} t_j f_j) \qquad ((t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n)$$

est n fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

(G2) Il existe une fonction continue et bornée φ sur $\mathbb{R}^n$ telle que l'on ait,

$$(5.1.2) \quad \frac{\partial}{\partial s_1}\Big/_{s_1=0} \cdots \frac{\partial}{\partial s_n}\Big/_{s_n=0} F(g + \sum_{j=1}^{n} s_j f_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(t_j)\varphi(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n,$$

pour tout $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{S}^n$.

Remarquant que la fonction φ intervenant dans la propriété G2 est déterminée de façon unique par (5.1.2), on notera $\partial_{t_1, \ldots, t_n} F(g)$ le nombre $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ $((t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n)$. En particulier (cas où n = 1), si $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$ et $g \in \mathcal{S}$, les nombres $\partial_t F(g)$ $(t \in \mathbb{R})$ sont déterminés par la continuité de la fonction $t \rightarrow \partial_t F(g)$ et par la condition,

$$(5.1.3) \qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=0} F(g+sf) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\partial_t F(g)dt \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}.$$

Autrement dit, si $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S})$, F est différentiable au sens de Gateaux, et, pour tout $g \in \mathcal{S}$, sa différentielle $f \rightarrow \delta_f F(g) = \frac{d}{ds}\Big/_{s=0} F(g+sf)$ en g est une mesure admettant conformément à (5.1.3), la fonction $t \rightarrow \partial_t F(g)$ comme densité continue et bornée.

On désigne alors par $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ le sous-espace de $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{C}^n(\mathcal{S})$ formé des fonctions F telles que, pour tout entier $n \geqslant 1$, d'une part la fonction $(t_1, \ldots t_n, g) \rightarrow \partial_{t_1, \ldots, t_n} F(g)$ soit continue et bornée sur $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{S}$, et d'autre part, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\partial_{t_1,\ldots,t_n} F : g \to \partial_{t_1,\ldots,t_n} F(g)$ appartienne à $\mathcal{B}^p(\mathfrak{S})$ et vérifie,

$$(5.1.4) \qquad \partial_{u_1,\ldots,u_p} \partial_{t_1,\ldots,t_n} F(g) = \partial_{u_1,\ldots,u_p,t_1,\ldots,t_n} F(g) \quad ,$$

pour tous $g \in \mathfrak{S}$ et $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$.

Dans ces conditions, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\partial_t : F \to \partial_t F$ induit une application linéaire de $\mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S})$ dans lui-même, et on a, d'après (5.1.4), pour $n \geqslant 1$ et $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$,

$$(5.1.5) \qquad \partial_{t_1,\ldots,t_n} F = \partial_{t_1} \ldots \partial_{t_n} F \text{ pour tout } F \in \mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S}).$$

En outre, la condition G1 implique que,

$$(5.1.6) \qquad \partial_s \partial_t F = \partial_t \partial_s F \text{ pour tous } s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \text{ et } F \in \mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S}).$$

L'espace $\mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S})$ et les opérateurs $\partial_t (t \in \mathbb{R})$ étant ainsi définis, si $R(X) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell$ est un polynôme et si $F \in \mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S})$, on désigne naturellement par $R(\partial_t)F$ l'élément $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \partial_t^\ell F$ de $\mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S})$; et la fonction $(t,g) \to R(\partial_t)F(g)$ est alors continue et bornée sur $\mathbb{R} \times \mathfrak{S}$.

5.1.2.- Etant donné un polynôme d'interaction standard Q (1), on dira que $\mathfrak{I} \in \mathcal{B}^\infty(\mathfrak{S})$ est <u>une solution de</u> (ou vérifie) <u>l'équation de Symanzik spécifiée par</u> Q si, pour tout $g \in \mathfrak{S}$, la fonction $t \to \partial_t \mathfrak{I}(g)$ est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a,

$$(5.1.7) \qquad - \frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \partial_s \mathfrak{I}(g) + iQ(\tfrac{1}{i}\partial_t)\, \mathfrak{I}(g) + g(t)\, \mathfrak{I}(g) = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Cela étant,

----

(1) Voir 1.3.

THEOREME 5.I.- Soit $\mathbb{J}$ la transformée de Fourier de la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q [1]. Alors,

(1) Pour tout $\eta \in \mathbb{E}$ et tout $g \in \mathfrak{S}$ [2],

$$\mathbb{J}(g \circ \eta) = \mathbb{J}(g). \tag{5.1.8}$$

(2) $\mathbb{J}$ appartient à $\mathcal{B}^{\infty}(\mathfrak{S})$.

(3) $\mathbb{J}$ vérifie l'équation de Symanzik spécifiée par Q.

La transformée de Fourier $\mathbb{J}$ de μ est définie par,

$$\mathbb{J}(g) = \int_W e^{i < \omega, g >} \mu(d\omega) \qquad (g \in \mathfrak{S}). \tag{5.1.9}$$

Ce Théorème est établi en 5.2 : d'abord en 5.2.2. à partir de la quasi-invariance de μ ; puis en 5.2.3 directement.

5.2.- Démonstration du Théorème 5.I

5.2.1.- Quasi-invariance infinitésimale.- Dans la situation générale mise en place en A1 (appendice A), on suppose donnés, d'une part un cocycle additif $\Lambda : (f,\omega) \to \Lambda(f,\omega)$ ($f \in \mathcal{V}$, $\omega \in \mathcal{W}$; voir A2) tel que, pour tout $f \in \mathcal{V}$, la fonction $\Lambda(f,\cdot)$ soit $\mathcal{A}$-mesurable sur $\mathcal{W}$; et d'autre part une mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{W},\mathcal{A})$, quasi invariante par les translations de $\mathcal{V}$ et admettant le cocycle multiplicatif $a = e^{\Lambda}$ comme module de quasi-invariance [relation (A1.1)]. Cela étant,

PROPOSITION.- On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites par Λ et μ :

(L1) Pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $\omega \in \mathcal{W}$, la fonction numérique $u \to \Lambda(uf,\omega)$ est dérivable en $u = 0$; et on pose,

----

(1) Voir 2.1.3.

(2) $\mathbb{E}$ désigne le groupe Euclidien de $\mathbb{R}$; voir 2.1.1

(5.2.1) $$\dot{\Lambda}(f,\omega) = \frac{d}{du}\Big/_{u=0}\Lambda(uf,\omega) \qquad (f \in \mathcal{V},\ \omega \in \mathcal{W}).$$

(L2) pour tout $f \in \mathcal{V}$, d'une part,

(5.2.2) $$\int |\dot{\Lambda}(f,\omega)|\mu(d\omega) < +\infty \quad ;$$

et d'autre part, pour tout $\omega \in \mathcal{W}$, la fonction $u \to \dot{\Lambda}(f,\omega+u\vec{f})$ $(u \in \mathbb{R})$ est localement sommable sur $\mathbb{R}$ (1).

Alors, on a,

(5.2.3) $$-i \int_{\mathcal{W}} e^{i<\omega,g>} \dot{\Lambda}(f,\omega)\mu(d\omega) + <f,g> \int_{\mathcal{W}} e^{i<\omega,g>}\mu(d\omega) = 0$$

pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $g \in \mathcal{V}$ (2).

En effet, l'équation (5.2.3) s'obtient formellement en calculant la dérivée par rapport à u en u = 0 des deux membres de l'équation,

(5.2.4) $$e^{-iu<f,g>} \int_{\mathcal{W}} e^{i<\omega,g>}\mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} e^{i<\omega,g>} e^{\Lambda(uf,\omega)}\mu(d\omega),$$

laquelle n'est autre que l'égalité (A1.1) exprimant la quasi-invariance de μ avec $e^{i<\omega,g>}$ mis pour $F(\omega)$ et uf mis pour f (2). Et la dérivation sous le signe somme perpétrée au second membre de (5.2.4) pour obtenir (5.2.3) est justifiée par le lemme suivant qui interviendra aussi plus loin :

LEMME.- Soit B une fonction complexe sur $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}$-mesurable, bornée et telle que, pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $\omega \in \mathcal{W}$, la fonction $u \to B(\omega-u\vec{f})$ soit continue sur $\mathbb{R}$ Alors (3), pour tout $f \in \mathcal{V}$, la fonction $u \to \int_{\mathcal{W}} B(\omega)\, e^{\Lambda(uf,\omega)}\mu(d\omega)$ $(u \in \mathbb{R})$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

----

(1) Voir la remarque 2 ci-dessous.

(2) Voir la remarque 1 ci-dessous.

(3) Sous les hypothèses L1 et L2.

on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(5.2.5)\quad \frac{d}{du}\Big/_{u=t} \int_{\mathcal{W}} B(\omega) e^{\Lambda(uf,\omega)} \mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} B(\omega - t\vec{f}) \quad \dot{\Lambda}(f,\omega)\mu(d\omega).$$

On peut déduire ce Lemme comme suit du critère donné dans l'appendice E : prenant pour $(Z, \mathcal{Z}, \nu)$ l'espace de probabilité $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et pour J un intervalle $[a,b]$ tel que $0 \in]a,b[$, on pose

$$(5.2.6)\qquad F(t,\omega) = B(\omega)\, e^{\Lambda(tf,\omega)} \quad , \text{ et}$$

$$(5.2.7)\qquad G(t,\omega) = B(\omega)\, \dot{\Lambda}(f,\omega + t\vec{f})\, e^{\Lambda(tf,\omega)} \quad (t \in J, \omega \in \mathcal{W}),$$

où f est fixé dans $\mathcal{V}$. La relation de cocycle (voir A2.1), $\Lambda((t+s)f,\omega) = \Lambda(tf,\omega) + \Lambda(sf, \omega + t\vec{f})$ $(t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R})$, jointe à l'hypothèse L1 montre d'abord que la fonction $u \to \Lambda(uf,\omega)$ est dérivable en tout point $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a,

$$(5.2.8)\qquad \frac{d}{du}\Big/_{u=t} \Lambda(uf,\omega) = \dot{\Lambda}(f,\omega + t\vec{f}) \quad .$$

En particulier, par définitions (5.2.6) et (5.2.7) de F et G, pour tout $\omega \in \mathcal{W}$ et tout $t \in J$, la fonction $F(\cdot,\omega)$ est dérivable en t et on a,

$$(5.2.9)\qquad \frac{d}{du}\Big/_{u=t} F(u,\omega) = G(t,\omega) \quad ;$$

d'où il résulte que $F(\cdot,\omega)$ est continue sur J pour chaque $\omega \in \mathcal{W}$; donc la fonction F est $\mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$-mesurable sur $J \times \mathcal{W}$; et il en est de même de la fonction G d'après (5.2.9). On vérifie alors que les conditions (δ), $(\delta\delta)$, $(\delta\delta\delta)$ et (δV) sont satisfaites : d'abord,

$$\int_a^b ds \int |G(s,\omega)\mu(d\omega) \leqslant \int_a^b ds \int |B(\omega)|\; |\dot{\Lambda}(f,\omega + t\vec{f})|\; e^{\Lambda(tf,\omega)}\mu(d\omega)$$

$$\leqslant (b-a)\|B\|_\infty \int_{\mathcal{W}} |\dot{\Lambda}(f,\omega)|\mu(d\omega) < +\infty,$$

d'après la quasi-invariance de μ et l'hypothèse (5.2.1). Ensuite, la condition ($\delta\delta$) est satisfaite d'après (5.2.9) puisque, pour tout $\omega \in \mathcal{W}$, la fonction $G(\cdot,\omega)$ est sommable sur J d'après la seconde partie de l'hypothèse L2 ; et la condition ($\delta\delta\delta$) en vertu de la relation,

$$(5.2.10) \qquad \int_{\mathcal{W}} G(s,\omega)\mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} B(\omega - s\vec{f}\,)\ \dot{\Lambda}(f,\omega)\mu(d\omega) \qquad (s \in J)$$

(laquelle résulte de la quasi-invariance de μ), de l'hypothèse faite sur B et du Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Enfin, la condition (δV) est évidemment satisfaite puisque $\int_{\mathcal{W}} e^{\Lambda(tf,\omega)}\mu(d\omega) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela étant, la conclusion (E.2) jointe à (5.2.10) fournit celle du Lemme en cause.

cqfd.

Remarque 1.- L'équation (5.2.3) peut aussi s'écrire,

$$(5.2.11) \qquad -i \int_{\mathcal{W}} e^{i<\omega,g>}\ \dot{\Lambda}(f,\omega)\mu(d\omega) + <f,g>\mathbb{J}(g) = 0,$$

en termes de la transformée de Fourier $\mathbb{J}$ de μ ; et, en vertu de la biunivocité de la correspondance entre $\mathbb{J}$ et μ, le permier terme de l'équation (5.2.11) peut être considéré comme une fonction donnée Ξ de f, g et $\mathbb{J}$; de telle sorte que l'équation (5.2.3) peut aussi être considérée comme l'équation en $\mathbb{J}$,

$$(5.2.12) \qquad \Xi(f,g,\mathbb{J}) + <f,g>\mathbb{J}(g) = 0 \qquad (f \in \mathcal{V},\ g \in \mathcal{V}).$$

Dans le cas particulier en cause ici [cas où $\mathcal{V} = \mathfrak{S}$ et $\mathcal{W} = \mathbb{W}$, et où Λ est donnée par (4.1.2) et (4.1.3) ; voir 5.2.2 ci-dessous] l'équation (5.2.12) convenablement explicitée fournira l'équation de Symanzik.

Vu la manière dont (5.2.3) a été obtenue [en dérivant (5.2.4)], (5.2.3) et (5.2.12) apparaissent comme des propriétés de "quasi-invariance infinitésimale". Nous ignorons dans quelle mesure on peut remonter ("intégrer") cette quasi-invariance infinitésimale en la quasi-invariance elle-même (on note à ce sujet que $\dot{\Lambda}$ détermine Λ ; voir aussi les remarques de 5.3.3 et 6.3.2, ainsi que le début de 1.7.3 et 6.5.1).

Remarque 2.- Sans altérer la conclusion (5.2.3), on peut affaiblir les hypothèses L1 et L2 de la proposition ci-dessus en mettant "pour μ-presque tout $\omega \in \mathcal{W}$" au lieu de "pour tout $\omega \in \mathcal{W}$".

5.2.2.- Equation de Symanzik déduite de la quasi-invariance de la mesure μ

On désigne ici, d'une part par μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$ et par $\mathbb{L}$ sa transformée de Fourier [définie par (5.1.9)], et d'autre part par Λ le cocycle additif défini par (4.1.2) et (4.1.3) à partir du polynôme d'interaction standard Q. Cela étant,

PROPOSITION.- (1) la fonctionnelle $\mathbb{L}$ appartient à $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{S})$ (1) dès que,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{W}} |\omega(t)|^r \mu(d\omega) < +\infty \quad \text{pour tout } r \in [1,+\infty) \; ; \tag{5.2.13}$$

et pour tout entier $n > 0$, tout $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et tout $g \in \mathfrak{S}$, on a,

$$\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n} \mathbb{L}(g) = i^n \int_{\mathbb{W}} \prod_{j=1}^{n} \omega(t_j) e^{i <\omega, g>} \mu(d\omega) \; . \tag{5.2.14}$$ (2)

(2) Si la mesure μ vérifie (5.2.13)et possède la propriété de quasi-invariance par les translations de $\mathfrak{S}$ avec e^{Λ} comme module de quasi-invariance (3), alors la fonctionnelle $\mathbb{L}$ vérifie l'équation de Symanzik (4). •

Si μ est la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q, la condition (5.2.13) est satisfaite (propriété M4 du Théorème 2.I en 2.1.3), ce qui fait que les propriétés (2) et (3) du Théorème 5.I

----

(1) Voir 5.1.1.

(2) Intégrale absolument convergente en vertu de (5.1.13) ; voir le Lemme suivant.

(3) i.e si (4.1.4) et (4.1.5) sont vérifiés pour tout $f \in \mathfrak{S}$.

(4) Voir 5.1.2.

résultent du Théorème 4 et de la proposition ci-dessus [la propriété (1) découlant immédiatement de l'invariance Euclidienne M3 de μ.

Pour établir la proposition ci-dessus :

<u>LEMME</u>.- On suppose que la mesure μ vérifie (5.2.13). Alors, pour tout $r \in [1,+\infty)$ et tout entier $n > 0$,

(1) L'application $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \to \prod_{j=1}^{n} X_{t_j}$ est continue et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$.

(2) La fonction $\omega \to \prod_{j=1}^{n} \langle\omega,f_j\rangle$ appartient à $\mathcal{L}^r(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$ pour tout $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathfrak{S}^n$.

En effet, (5.2.13) et le fait que $\mathbb{W} \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ entraîne d'abord que l'application $t \to X_t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty)$ (voir, à la fin de l'alinéa 2.2.5 la démonstration de la propriété M4) ; d'où la propriété (1) d'après l'inégalité de Hölder $\left\|\prod_{j=1}^{n} X_{t_j}\right\|_r \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|X_{t_j}\|_{rn}$. Et, en ce qui concerne la propriété (2), toujours d'après l'inégalité de Hölder, il suffit de montrer que $\langle\cdot,f\rangle \in \mathcal{L}^p(\mathbb{W},\mathcal{F},\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty)$, ce qui résulte du Théorème de Fubini via les inégalités,

$$\int_{\mathbb{W}} |\langle\omega,f\rangle|^p \mu(d\omega) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} dt_1,\dots dt_p \prod_{k=1}^{p} |f(t_k)| \int_{\mathbb{W}} \prod_{k=1}^{p} |\omega(t_k)|\,\mu(d\omega)$$

$$(5.2.15) \qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^{p} |f(t_k)| \prod_{\ell=1}^{p} \|X_{t_\ell}\|_p \; dt_1,\dots,dt_p,$$

$$\leqslant \|f\|_1^p \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{W}} |\omega(t)|^p \mu(d\omega)\right) < +\infty.$$

Afin d'établir alors que Π appartient à $\mathfrak{S}^\infty(\mathfrak{S})$, on commence par déduire du Lemme de dérivation sous le signe somme (appendice E), grâce au Théorème de convergence dominée de Lebesgue et au Lemme ci-dessus, que, pour $(t_\ell)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$,

$(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathfrak{S}^p$ et $g \in \mathfrak{S}$, $\int_{\mathbb{W}} \prod_{\ell=1}^{m} \omega(t_\ell) \prod_{k=1}^{p} e^{iu_k\langle\omega,f_k\rangle} e^{i\langle\omega,g\rangle} \mu(d\omega)$

est une fonction p fois continûment différentiable de

$(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ et que l'on a,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\Big/_{u_1=0} \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial u_p}\Big/_{u_p=0} \int_{\mathbb{W}} \prod_{\ell=1}^{m} \omega(t_\ell) \prod_{k=1}^{p} e^{iu_k<\omega,f_k>} e^{i<\omega,g>} \mu(d\omega)$$

$$(5.2.16) \qquad = i^p \int_{\mathbb{W}} \prod_{\ell=1}^{m} \omega(t_\ell) \prod_{k=1}^{p} <\omega,f_k> e^{i<\omega,g>} \mu(d\omega).$$

Il en résulte d'abord que, pour chaque entier $n > 0$, la fonctionnelle $\mathbb{J}$ appartient à $\mathscr{B}^n(\mathfrak{S})$ et que l'on a,

$$(5.2.17) \qquad \partial_{t_1,\ldots,t_n} \mathbb{J}(g) = i^n \int_{\mathbb{W}} \prod_{j=1}^{n} \omega(t_j)\, e^{i<\omega,g>} \mu(d\omega),$$

pour tout $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$; puis que la fonctionnelle $\partial_{t_1,\ldots,t_n} \mathbb{J}$ appartient à $\mathscr{B}^p(\mathfrak{S})$ pour tout entier $p > 0$ et que (5.1.4) est satisfaite avec $\mathbb{J}$ mis pour F [la fonction $(t_1,\ldots,t_n,g) \to \partial_{t_1,\ldots,t_n} \mathbb{J}(g)$ étant continue et bornée sur $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{S}$ en vertu de la propirété (1) du Lemme ci-dessus (avec r = 2) et de la continuité de l'application $g \to e^{i<\cdot,g>}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{W},\mathfrak{S},\mu)$]. D'où la propriété (1) de la proposition. En ce qui concerne la propriété (2), on va déduire de la quasi-invariance postulée pour μ et de la proposition 5.2.1 que, pour tout $g \in \mathfrak{S}$ et tout $f \in \mathfrak{S}$,

$$(5.2.18) \qquad -\int_{\mathbb{R}} f''(t)\partial_t \mathbb{J}(g)dt + i\int_{\mathbb{R}} f(t)Q(\tfrac{1}{i}\partial_t)\, \mathbb{J}(g)dt + <f,g>\mathbb{J}(g) = 0.$$

Pour cela, on vérifie d'abord, par dérivation sous le signe somme dans l'intégrale (4.1.3) qui définit Λ, que la condition L1 (proposition 5.2.1) est satisfaite et que l'on a,

$$(5.2.19) \qquad \dot{\Lambda}(f,\omega) = \int_{\mathbb{R}} [f''(t)\omega(t) - f(t)Q(\omega(t))]dt \qquad (f \in \mathfrak{S},\ \omega \in \mathbb{W})$$

[l'intégrale au second membre étant absolument convergente en vertu de (2.1.1)]. Après quoi, la condition L2 est satisfaite : vu l'expression (5.2.19) de $\dot{\Lambda}$, la relation (5.2.2) découle de l'hypothèse (5.2.13) et $\dot{\Lambda}(f,\omega+uf)$ est une fonction polynômiale de u. Il suffit alors de porter (5.2.19) dans l'équation (5.2.3) que fournit la proposition 5.2.1 et de tenir compte de (5.2.14) pour obtenir l'équation de Symanzik "faible" (5.2.18). Mais, compte tenu de ce que les fonctions $t \to \partial_t \mathbb{\Pi}(g)$, $t \to Q(\frac{1}{i}\partial_t)\, \mathbb{\Pi}(g)$ et g sont continues et bornées, le fait que cette équation soit vérifiée pour tout $f \in \mathfrak{S}$ entraîne que la fonction $t \to \partial_t \mathbb{\Pi}(g)$ est deux fois continûment dérivable et vérifie l'équation de Symanzik "forte" (5.1.7) [voir le corollaire de la proposition de l'appendice F].

cqfd.

5.2.3.- Etude directe de l'équation de Symanzik

On va donner ci-dessous une démonstration de la propriété (3) du Théorème 5.I basée sur la formule de Feynman-Kac et complètement indépendante de la quasi-invariance de la mesure Euclidienne μ que stipule le Théorème 4 [la propriété (2) du Théorème 5.I résultant comme ci-dessus de la propriété (1) de la proposition 5.2.2].

La situation et les notations étant celles de 3.I, pour chaque $g \in \mathfrak{S}$, on considère l'élément K_g de $\mathbb{K}^{(q)}$ (voir 3.1.1) défini par,

$$K_g(x,t) = i\, g(t)x \quad (x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}) \;;$$

et, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\psi^{\{g\}}_{-,t}$ et $\psi^{\{g\}}_{t,+}$ les éléments de $L^{\infty}(\mathbb{R},\mu_o)$ définis par,

$$\psi^{\{g\}}_{-,t} \odot X_t = E_\mu[M^{[K_g]}_{-,t} / \mathfrak{S}_{\{t\}}], \qquad \text{et,} \tag{5.2.20}$$

$$\psi^{\{g\}}_{t,+} \odot X_t = E_\mu[M^{[K_g]}_{t,+} / \mathfrak{S}_{\{t\}}], \tag{5.2.21}$$

où $M^{[K_g]}_{-,t}$ (resp $M^{[K_g]}_{t,+}$) désigne toujours [1] la classe modulo μ de la fonction complexe de module un $\omega \to \mathrm{Exp}\{i \int_{-\infty}^{t} g(s)\omega(s)ds\}$ (resp $\omega \to \mathrm{Exp}\,\{i \int_{t}^{+\infty} g(s)\omega(s)ds\}$) ; en notant que,

----

(1) Voir 3.1.2 et 4.2.2.

(5.2.22) $\quad M_{-,t}^{[K_g]} \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{(-\infty,t]},\mu)$ et $M_{t,+}^{[K_g]} \in L^\infty(W,\mathcal{F}_{[t,+\infty)},\mu)$.

Ces définitions sont évidemment motivées par les formules,

(5.2.23) $\quad \mathcal{J}(g) = (\overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid \psi_{t,+}^{\{g\}}) \quad (t \in \mathbb{R})$, et, [1]

(5.2.24) $\quad \delta_t^n \mathcal{J}(g) = i^n(\overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid \Phi_o^n\, \psi_{t,+}^{\{g\}}) \quad$ (n entier > 0, $t \in \mathbb{R}$)

lesquelles se déduisent des expressions (5.1.9) de $\mathcal{J}(g)$ et (5.2.14) de $\delta_t^n \mathcal{J}(g)$ (proposition 5.2.2) grâce à la propriété de Markov et à la propriété de Markov rétrograde de μ [on note, en ce qui concerne (5.2.24) que $\psi_{t,+}^{\{g\}} \in D(\Phi_o^n)$, puisque $L^\infty(\mathbb{R},\mu_o) \subset D(\Phi_o^n)$; voir le lemme 1.5, relation (1.5.4)].

Cela étant, le pivot de la démonstration que l'on a en vue ici va être le Lemme suivant :

<u>LEMME</u>.- Pour chaque $g \in \mathfrak{S}$,

(1) L'application $t \to \psi_{t,+}^{\{g\}}$ est solution de l'équation d'évolution spécifiée par K_g [2].

(2) Pour tout $r \in [1,+\infty)$, l'application $t \to \psi_{t,+}^{\{g\}}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$.

(3) L'application $t \to H\psi_{t,+}^{\{g\}}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [3].

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_{-,t}^{\{g\}} = \psi_{-t,+}^{\{\check{g}\}}$.

En effet, fixant $u \in \mathbb{R}$, et rappelant que,

----

(1) $(\cdot|\cdot)$ désigne toujours le produit scalaire (antilinéaire à gauche) de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

(2) Eu égard à la définition donnée en 3.1.1, "solution" est mis ici pour "solution avant u pour tout $u \in \mathbb{R}$".

(3) $\psi_{t,+}^{\{g\}} \in D(H)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ d'après la propriété (1).

$$\psi_{t,+}^{\{g\}} \in L^{\infty}(\mathbb{R},\mu_o) \ , \tag{5.2.25}$$

on a, avec les notations introduites en 3.1.2,

$$\psi_{t,+}^{\{g\}} = N_{t,u}^{[K_g]} \ \psi_{u,t}^{\{g\}} \quad \text{pour tout } t \leqslant u, \tag{5.2.26}$$

ainsi qu'il résulte de (5.2.21), (5.2.22), (3.1.10) et de la propriété de Markov de μ, via les égalités,

$$\begin{aligned}
\psi_{t,+}^{\{g\}} \odot X_t &= E_\mu[M_{t,+}^{[K_g]}/\mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] \\
&= E_\mu[M_{t,u}^{[K_g]} \ M_{u,+}^{[K_g]}/\mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] \\
&= E_\mu[M_{t,u}^{[K_g]} \ E_\mu[M_{u,+}^{[K_g]}/\mathfrak{F}_{(-\infty,u]}]/\mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] \\
&= E_\mu[M_{t,u}^{[K_g]} \ \psi_{u,+}^{\{g\}} \odot X_u/\mathfrak{F}_{(-\infty,t]}] = (N_{t,u}^{[K_g]} \ \psi_{u,+}^{\{g\}}) \odot X_t.
\end{aligned}$$

Et, $u \in \mathbb{R}$ étant arbitraire, les propriétés (1) et (2) du Lemme sont conséquences de (5.2.25), (5.2.26) et de la propriété(3) du Théorème 3.I. Pour établir la propriété (3), on va utiliser la forme intégrale de l'équation d'évolution spécifiée par K_g (voir 3.2.2) : en vertu de la proposition A, on a, d'après (5.2.25) et (5.2.26),

$$\psi_{t,+}^{\{g\}} = N_{u-t}^{[V]} \ \psi_{u,+}^{\{g\}} + \int_t^u N_{s-t}^{[V]} \ (ig(s)\Phi_o - \underline{V}) \ \psi_{s,+}^{\{g\}} \ ds, \tag{5.2.27}$$

pour tout $t \leqslant u$ et tout $V \in \mathbb{V}^{(q)}$. Afin de montrer d'abord que la fonction $t \to \|H\psi_{t,+}^{\{g\}}\|$ est localement bornée, on applique l'opérateur $H^{(t)} = H - \underline{K}_g(t)$ aux deux membres de (5.2.27) écrite avec $K_g(t)$ mis pour V [on note que $\psi_{t,+}^{\{g\}} \in D(H^{(t)}) = D(H)$ d'après la propriété (1)] ; ce qui donne,

$$H^{(t)}\psi_{t,+}^{\{g\}} = H^{(t)}N_{u-t}^{(t)}\psi_{u,+}^{\{g\}} + iH^{(t)}\int_t^u g(s)-g(t)) \ N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}} \ ds, \tag{5.2.28}$$

pour tout $t \leqslant u$, en posant $N_v^{(t)} = N_v^{[K_g(t)]}$ $(v \geqslant 0)$; ou encore,

$$H\psi_{t,+}^{\{g\}} = ig(t)\Phi_o\psi_{t,+}^{\{g\}} + H^{(t)}N_{u-t}^{(t)}\psi_{u,+}^{\{g\}}$$

$$(5.2.29) \qquad + i\int_t^u (g(s)-g(t))\, H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds.$$

On note que l'intégrale au second membre est absolument convergente car, d'une part il existe $\lambda_o > 0$ tel que,

$$(5.2.30) \qquad \|H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\psi\| \leqslant (e^{-1}(s-t)^{-1} + |\lambda_o|)\, e^{\lambda_o t}\|\psi\|$$

pour tous $s > t$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$,

d'après la propriété (1) du Lemme 3.2.1 et le Théorème C3, et d'autre part,

$$(5.2.31) \qquad \sup_{t\leqslant s\leqslant u} \|\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\| < +\infty \quad \text{pour tout } t < u,$$

d'après la propriété (2) établie ci-dessus et la propriété (2) du Lemme 3.2.1 avec χ mis pour V. En outre, l'égalité,

$$H^{(t)}\int_t^u (g(s)-g(t))\, N_{s-t}^{(t)}\,\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}ds = \int_t^u (g(s)-g(t))\, H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds,$$

qui permet de passer de (5.2.28) à (5.2.29) résulte de façon standard de ce que l'opérateur $H^{(t)}$ est fermé, des majorations (5.2.30) et (5.2.31) qui, jointes à la majoration $|g(s)-g(t)| \leqslant \|g'\|_\infty(s-t)$ entraînent (en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue) que,

$$\int_t^u (g(s)-g(t))\, H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds = \lim_{n\to+\infty}\int_{t+\frac{1}{n}}^u (g(s)-g(t))\, H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds,$$

et de ce que,

$$\int_{t+\frac{1}{n}}^u (g(s)-g(t))\, H^{(t)}N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds = H^{(t)}\int_{t+\frac{1}{n}}^u (g(s)-g(t))\, N_{s-t}^{(t)}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\, ds,$$

puisque l'opérateur $H^{(t)}N_{\frac{1}{n}}^{(t)}$ est borné et que l'on a,

$N_{s-t}^{(t)} = N_{\frac{1}{n}}^{(t)}N_{s-t-\frac{1}{n}}^{(t)}$ pour tout $s \geqslant t + \frac{1}{n}$. Et on voit alors que la fonction $t \to \|H\psi_{t,+}^{\{g\}}\|$ est localement bornée en portant les majorations (5.2.30) et (5.2.31) au second membre de (5.2.29). Cela étant, pour établir la continuité cherchée de l'application $t \to H\psi_{t,+}^{\{g\}}$, on applique l'opérateur H aux deux membres de (5.2.27) écrite pour V = 0 ; ce qui donne,

$$(5.2.32) \qquad H\psi_{t,+}^{\{g\}} = N_{u-t}H\psi_{u,+}^{\{g\}} + iH\int_t^u g(s)N_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\,ds,$$

pour tout $t \leqslant u$. Et on remarque que, pour tout $u_o < u$, il existe $C > 0$ tel que,

$$(5.2.33) \qquad \|HN_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\| \leqslant C(s-t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour } u_o \leqslant t < s \leqslant u.$$

[en effet, compte tenu de ce que $\sup\limits_{u_o \leqslant s \leqslant u} \|H\psi_{s,+}^{\{g\}}\| < +\infty$ ainsi qu'on vient de l'établir, cette majoration résulte, d'une part, de ce que $H^{\frac{1}{2}}\Phi_o \ll H$ d'après le Théorème 1.III et la propriété (5) de la proposition B5, ce qui entraîne que, pour tout $s > t$,

$$\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}} \in D(H^{\frac{1}{2}}) \qquad \text{et} \qquad HN_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}} = H^{\frac{1}{2}}N_{s-t}H^{\frac{1}{2}}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}} \; ;$$

et d'autre part de ce que,

$$\|H^{\frac{1}{2}}N_v\psi\| \leqslant 2^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}\, v^{-\frac{1}{2}}\, \|\psi\| \qquad (v > 0,\; \psi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)) \, ,$$

puisque H est un opérateur auto-adjoint positif]. Mais, de la majoration (5.2.33), on déduit d'abord de façon standard que,

$$(5.2.34) \qquad H\int_t^u g(s)N_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}ds = \int_t^u g(s)HN_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}\,ds \; ;$$

puis, par le traitement classique des noyaux intégrables, que l'application $t \to \int_t^u g(s)HN_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}ds$ est continue de $(-\infty,u]$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [en effet, il suffit d'écrire,

$$\int_t^u g(s)HN_{s-t}\Phi_o\psi_{s,+}^{\{g\}}ds = \int_{-\infty}^u I(t,s)\,ds \qquad (t \leqslant u), \qquad \text{où}$$

$I(s,t) = g(s)HN_{s-t}\Phi_o\psi^{\{g\}}_{s,+}$ si $t < s \leqslant u$ et $I(s,t) = 0$, sinon, et de remarquer que le noyau $I(\cdot,\cdot)$ ainsi défini sur $(-\infty,u]$ est intégrable d'après (5.2.33) et que, pour chaque $s \in \mathbb{R}$, l'application $t \to I(t,s)$ est continue sur le complémentaire de $\{s\}$, car pour $t<s-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, on a $HN_{s-t} = HN_\varepsilon N_{s-t-\varepsilon}$ et HN_ε est un opérateur borné]. D'où la continuité stipulée par la propriété (3) en portant (5.2.34) dans (5.2.32). Enfin, la propriété (4) résulte de l'invariance de la mesure μ par symétrie S. Ce qui achève la démonstration du Lemme.

On peut alors établir comme suit la propriété (2) du Théorème : partant de l'expression (5.2.24) de $\partial_t\, \mathbb{J}(g)$, on va d'abord montrer que l'application $t \to \partial_t\, \mathbb{J}(g)$ est dérivable en tout point t de $\mathbb{R}$ et que l'on a,

$$(5.2.35) \qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \partial_s\, \mathbb{J}(g) = -\,(\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t}} \mid \pi_o\psi^{\{g\}}_{t,+})$$

[on note que $\psi^{\{g\}}_{t,+} \in D(\pi_o)$ car, d'une part, $\psi^{\{g\}}_{t,+} \in D(H)$ d'après le Lemme, et d'autre part $\pi_o \ll H$ d'après le Théorème 1.III et la propriété (3) de la proposition B5]. Pour cela, on considère la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ définie par,

$$F(t_1,t_2) = i(\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \Phi_o\psi^{\{g\}}_{t_2,+}) = i(\overline{\Phi_o\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \psi^{\{g\}}_{t_2,+}).$$

D'après les propriétés (1) et (4) du Lemme, cette fonction admet des dérivées partielles données par,

$$(5.2.36) \qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t_1} F(s,t_2) = -i\,(\overline{(H+ig(t_1)\Phi_o)\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \Phi_o\psi^{\{g\}}_{t_2,+}),\ \text{et}$$

$$(5.2.37) \qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t_2} F(t_1,s) = i(\overline{\Phi_o\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid (H-ig(t_2)\Phi_o)\psi^{\{g\}}_{t_2,+})\ ;$$

et ces dérivées partielles sont fonctions continues de $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ en vertu du Lemme ci-dessus et de la propriété (2) du Lemme 3.2.1 avec χ mis pour V. D'où la dérivabilité annoncée de l'application $t \to \partial_t\, \mathbb{J}(g) = F(t,t)$; et, en faisant $t_1 = t_2 = t$ dans (5.2.36) et (5.2.37),

$$(5.2.38)\qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \partial_s \mathbb{J}(g) = i\{(\Phi_o \overline{\psi^{\{g\}}_{-,t}} \mid H\psi^{\{g\}}_{t,+}) - (H\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t}} \mid \Phi_o \psi^{\{g\}}_{t,+})\ .$$

Mais, d'après la propriété (ii) de H (Théorème 1.I en 1.3 [(1)]), on a

$$(5.2.39)\qquad (\Phi_o \psi \mid H\theta) - (H\psi \mid \Phi_o \theta) = i(\Phi \mid \pi_o \theta),$$

pour tout $\psi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ et tout $\theta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$; donc aussi pour tout $\psi \in D(H)$ et tout $\theta \in D(H)$, puisque $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour H (proposition 1.6 ou Théorème 1.4) et que Φ_o et π_o sont dominés par H (Théorème 1.III et proposition B5). D'où (5.2.35) en portant (5.2.39) avec $\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t}}$ mis pour ψ et $\psi^{\{g\}}_{t,+}$ mis pour θ) dans (5.2.38). Partant maintenant de (5.2.35), on va montrer que l'application $t \to \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \partial_s \mathbb{J}(g)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a,

$$(5.2.40)\qquad \frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \partial_s \mathbb{J}(g) = iQ(\tfrac{1}{i}\,\partial_t)\,\mathbb{J}(g) + g(t)\,\mathbb{J}(g) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\ ;$$

ce qui achèvera d'établir la propriété cherchée. Pour cela, de façon analogue à ce qui précède, on considère la fonction G sur $\mathbb{R}^2$ définie par,

$$(5.2.41)\qquad G(t_1,t_2) = -(\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \pi_o \psi^{\{g\}}_{t_2,+}) = -(\pi_o \overline{\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \psi^{\{g\}}_{t_2,+}).$$

D'après les propriétés (1) et (4) du Lemme, cette fonction admet des dérivées partielles données par,

$$(5.2.42)\qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t_1} G(s,t_2) = ((H+ig(t_1)\Phi_o)\overline{\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid \pi_o \psi^{\{g\}}_{t_2,+})\quad , \quad \text{et,}$$

$$(5.2.43)\qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t_2} G(t_1,s) = -(\pi_o \overline{\psi^{\{g\}}_{-,t_1}} \mid (H-ig(t_2)\Phi_o)\psi^{\{g\}}_{t_2,+})\quad ;$$

et ces dérivées partielles sont fonctions continues de $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ en vertu du Lemme ci-dessus et de ce que π_o est dominé par H. D'où la dérivabilité annoncée de l'application $t \to \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \partial_s \mathbb{J}(g) = G(t,t)$; et, en

------

(1) ou encore de la propriété (jj) (Théorème 1.II en 1.4).

faisant $t_1 = t_2 = t$ dans (5.2.42) et (5.2.43),

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big/_{s=t} \partial_s \mathcal{J}(g) = (H\overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid \pi_o \psi_{t,+}^{\{g\}}) - (\pi_o \overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid H\psi_{t,+}^{\{g\}})$$

(5.2.44) $$+ ig(t)\{(\pi_o \overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid \Phi_o \psi_{t,+}^{\{g\}}) - (\Phi_o \overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}} \mid \pi_o \psi_{t,+}^{\{g\}})\}.$$

Mais, d'après la propriété (iii) de H (Théorème 1.I [(1)]) et la relation de commutation canonique (A5.2), on a,

(5.2.45) $$(H\psi \mid \pi_o\theta) - (\pi_o\psi \mid H\theta) = i(\psi \mid Q(\Phi_o)\theta), \quad \text{et,}$$

(5.2.46) $$(\pi_o\psi \mid \Phi_o\theta) - (\Phi_o\psi \mid \pi_o\theta) = -\, i(\psi \mid \theta),$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; donc aussi pour tout $\psi \in D(H)$ et tout $\theta \in D(H)$, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour H et que Φ_o et π_o sont dominés par H. D'où (5.2.40) en portant (5.2.45) et (5.2.46) (avec $\overline{\psi_{-,t}^{\{g\}}}$ mis pour ψ et $\psi_{t,+}^{\{g\}}$ mis pour θ) dans (5.2.44) et en tenant compte de (5.2.23) et (5.2.24).

cqfd.

5.3.- Equations de Schwinger

5.3.1.- Formulation des équations - On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace $\prod_{n=0}^{\infty} C_b(\mathbb{R}^n)$ [où $C_b(\mathbb{R}^o)$ est identifié à $\mathbb{R}$ et où $C_b(\mathbb{R}^n)$ $(n \geqslant 1)$ désigne l'espace des fonctions complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$] et par $\mathcal{C}_{sym}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé des suites $(S_n)_{n \geqslant 0}$ telles que, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction S_n est symétrique en ses n arguments. Par ailleurs, on désigne toujours par Q un polynôme d'interaction standard :

(5.3.1) $$Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k .$$

On dira alors qu'un élément $(S_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{C}$ est <u>une solution des</u> (ou vérifie les) <u>équations de Schwinger spécifiées par Q</u>, si, d'une part,

----

(1) ou encore la relation (1.4.7) jointe à l'équation (d) (Théorème 1.II et Lemme 1.5).

pour tout $f \in \mathfrak{S}$ [1],

$$(5.3.2) \qquad \int_{\mathbb{R}} f''(t) S_1(t)\,dt = \sum_{k=0}^{q} a_k \int_{\mathbb{R}} f(t) S_k(t,\dots,t)\,dt,$$

et, d'autre part, pour tout $n \geqslant 1$, tout $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et tout $f \in \mathfrak{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f''(t) S_{n+1}(t,t_1,\dots,t_n)\,dt = -\sum_{j=1}^{n} f(t_j) S_{n-1}(t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n)$$

$$(5.3.3) \qquad + \sum_{k=0}^{q} a_k \int_{\mathbb{R}} f(t) S_{n+k}(t,\dots t,t_1,\dots,t_n)\,dt$$

[le premier terme au second membre se réduisant au nombre S_o lorsque $n = 1$]. Cela étant,

<u>THEOREME 5.II</u>.- Soient μ la mesure Euclidienne spécifiée par Q, $\mathcal{I}$ sa transformée de Fourier et $(S_n)_{n \geqslant 0}$ l'élément de $\mathcal{G}_{sym}$ défini par,

$$(5.3.4) \qquad S_o = 1, \quad \text{et,}$$

$$(5.3.5) \qquad S_n(t_1,\dots,t_n) = \int_{\mathbb{W}} \prod_{j=1}^{n} \omega(t_j)\,\mu(d\omega)$$

$$(n \text{ entier } \geqslant 0,\ (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n).$$

Alors :

(1) La suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une solution des équations de Schwinger spécifiées par Q.

(2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, tout $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\eta \in \mathbb{E}$ [2],

$$(5.3.6) \qquad S_n(\eta(t_1),\dots,\eta(t_n)) = S_n(t_1,\dots,t_n)$$

(3) Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$,

$$(5.3.7) \qquad S_n(t_1,\dots,t_n) = i^{-n}\, \partial_{t_1} \dots \partial_{t_n} \mathcal{I}(0).$$

----

(1) $\mathfrak{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{E}$ désigne le groupe Euclidien de $\mathbb{R}$; voir 2.1.1.

(4) On a,

(5.3.8) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \|S_n\|_\infty < +\infty \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad \text{et,}$$

(5.3.9) $$\mathbb{J}(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} S_n(t_1 \ldots, t_n) \prod_{j=1}^{n} g(t_j) dt_1 \ldots dt_n$$

pour tout $g \in \mathfrak{S}$.

On note que l'intégrale figurant au second membre de (5.3.5) est absolument convergente en vertu de la propriété M4 de μ (Théorème 2.I en 2.1.3), et que la série figurant au second membre de (5.3.9) est absolument convergente en vertu de (5.3.8) (écrite pour $\lambda = \|g\|_1$).

Pour chaque $n \geqslant 1$, la fonction S_n définie par (5.3.5) est la <u>fonction de Schwinger</u> d'ordre n associée à la mesure μ.

Ce théorème est établi en 5.3.3 à partir de la proposition 5.3.2 ci-dessous.

5.3.2.- Equations de Schwinger et équation de Symanzik

<u>PROPOSITION</u>.- Soit $\mathbb{J} \in \mathscr{G}^\infty(\mathfrak{S})$ une solution de l'équation de Symanzik spécifiée par Q(1). Alors, on définit une solution $(S_n)_{n \geqslant 0}$ des équations de Schwinger spécifiées par Q, en posant,

(5.3.10) $$S_o = \mathbb{J}(0) \quad , \quad \text{et,}$$

(5.3.11) $$S_n(t_1, \ldots, t_n) = i^{-n} \partial_{t_1} \ldots \partial_{t_n} \mathbb{J}(0)$$

$$(n \text{ entier} \geqslant 1, \ (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

et cette solution appartient à $\mathfrak{G}_{sym}$.

En effet, d'une part la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ définie par (5.3.10) et (5.3.11) appartient à $\mathfrak{G}_{sym}$ par définition de $\mathscr{G}^\infty(\mathfrak{S})$ (voir 5.1.2).

----

(1) Voir 5.1.2.

D'autre part, de l'équation de Symanzik (5.1.7) que vérifie $\mathcal{T}$ par hypothèse, on déduit que, pour tout $g \in \mathcal{S}$ et tout $f \in \mathcal{S}$,

$$(5.3.12)\qquad -\int_{\mathbb{R}} f''(t)\partial_t \mathcal{T}(g)dt = -<f,g>\mathcal{T}(g) - i\int_{\mathbb{R}} f(t)Q(\tfrac{1}{i}\partial_t)\mathcal{T}(g)dt$$

(voir la relation 5.2.18 en 5.2.2). Cela étant, on voit d'abord que, compte tenu de (5.3.10) et (5.3.11), (5.3.12) se réduit à l'équation de Schwinger (5.3.2) lorsqu'on y fait $g = 0$. Puis on obtient l'équation (5.3.3) en appliquant l'opérateur $\partial_{t_1}\ldots\partial_{t_n}$ aux deux membres de (5.3.12) (considérés comme fonctions de $g \in \mathcal{S}$) et en faisant $g = 0$ dans l'égalité obtenue. Ce procédé est justifié par le Lemme suivant de dérivation fonctionnelle sous le signe somme :

<u>LEMME</u>.- Soient R un polynôme, $f \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$. Alors, la fonctionnelle $\mathcal{T}_{R,f} : g \to \int_{\mathbb{R}} f(t)R(\partial_t)\mathcal{T}(g)dt$ sur $\mathcal{S}$ appartient aussi à $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$, et on a,

$$(5.3.13)\qquad \partial_{t_1}\ldots\partial_{t_n}\mathcal{T}_{R,f}(g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\partial_{t_1}\ldots\partial_{t_n} R(\partial_t)\mathcal{T}(g)dt$$

pour tout $g \in \mathcal{S}$, tout entier $n \geqslant 1$ et tout $(t_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

En effet, notant que le second membre de (5.3.13) est une fonction continue et bornée de $(t_1,\ldots,t_n,g)$ dès que $\mathcal{T} \in \mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$, et tenant compte de la commutativité (5.1.6), on se ramène à montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \in \mathbb{R}^p$, la fonction $(s_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \to \mathcal{T}_{R,f}(g + \sum_{k=1}^{p} s_k f_k)$ est p fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^p$ et que l'on a,

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\Big/_{s_1=0}\cdots\frac{\partial}{\partial s_p}\Big/_{s_p=0}\mathcal{T}_{R,f}(g + \sum_{k=1}^{p} s_k f_k)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{p} f_k(u_k)\left\{\int_{\mathbb{R}} f(t)\partial_{u_1}\ldots\partial_{u_p} R(\partial_t)\mathcal{T}(g)dt\right\}du_1\ldots du_p\ ;$$

ce qui peut être fait de façon standard, par exemple en utilisant le Lemme donné dans l'appendice E.

cqfd.

5.3.3.- Démonstration du Théorème 5.II.

Les propriétés (1) et (3) résultent de la proposition ci-dessus et de la proposition 5.2.2 [relation (5.2.14)][(1)], et la propriété (2) de l'invariance Euclidienne de μ. La relation (5.3.8) découle du corollaire de la proposition 1.6, puisque $\|S_n\|_\infty \leqslant \int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu_o(dx)$ d'après l'inégalité de Hölder $\| \prod_{j=1}^{n} X_{t_j} \|_1 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|X_{t_j}\|_n$. Enfin, pour établir (5.3.9), on écrit l'expression (5.1.9) de $\mathcal{J}(g)$ sous la forme ,

$$(5.3.14) \qquad \mathcal{J}(g) = \int_W \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} < \omega, g >^n \right\} \mu(d\omega) \quad ;$$

et on remarque que, d'après les inégalités (5.2.15) (voir 5.2.2),

$$(5.3.15) \quad \int_W |<\omega, g>|^n \mu(d\omega) \leqslant \|g\|_1^n \int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu_o(dx) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0 \ ;$$

d'où il résulte, d'après le corollaire de la proposition 1.6, que,

$$\int_W \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |<\omega, g>|^n \right\} \mu(d\omega) < + \infty \quad ;$$

et, en appliquant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue au second membre de (5.3.14), on obtient,

$$\mathcal{J}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_W <\omega, g>^n \mu(d\omega) \quad ;$$

d'où (5.3.9), puisque, d'après le Théorème de Fubini,

$$\int_W <\omega, g>^n \mu(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} S_n(t_1, \ldots, t_n) \prod_{j=1}^{n} g(t_j) dt_1 \ldots dt_n .$$

cqfd.

Remarque.- On peut aussi déduire les équations de Schwinger [propriété (1) du Théorème 5.II] directement de la quasi-invariance de la mesur μ par le procédé de dérivation qui a fourni en 5.2. l'équation de Symanzik : afin d'obtenir l'équation (5.3.3), il suffit d'écrire l'éga-

----

(1) Voir aussi la remarque ci-dessous.

lité de quasi-invariance (4.1.5) avec $\prod_{j=1}^{n} X_{t_j}$ mis pour F et uf ($u \in \mathbb{R}$) mis pour f ; puis de dériver par rapport à u en u = 0 les deux membres de l'égalité obtenue ; et enfin de tenir compte de l'expression (5.1.19) de $\dot{\Lambda}$ (voir 5.2.2), la dérivation sous le signe somme perpétrée pouvant être justifiée de façon analogue au Lemme 5.2.1 grâce à la propriété M4 de μ (Théorème 2.I), laquelle entraîne ici que,

(5.3.16) $\quad \dot{\Lambda}(f,\cdot) \in L^p(W,\mathcal{C},\mu) \quad$ pour tout $p \in [1,+\infty)$.

5.3.4.- Forme intégrale des équations de Schwinger

Le polynôme d'interaction Q étant donné par (5.3.1),

PROPOSITION.- Pour qu'un élément $(S_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{C}^{(1)}$ vérifie les équations de Schwinger spécifiées par Q, il faut et il suffit que, pour chaque $m > 0$, d'une part pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S_1(t) = \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|} S_1(s)\,ds - \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{q} a_k \int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|} S_k(s,..,s)\,ds, \tag{5.3.17}$$

et, d'autre part, pour tout $n \geq 2$ et tout $(t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} S_n(t_1,\dots,t_n) &= \frac{1}{2m}\sum_{j=2}^{n} e^{-m|t_1-t_j|} S_{n-2}(t_2,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n) \\ &+ \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t_1-s|} S_n(s,t_2,\dots,t_n)\,ds \\ &- \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{q} a_k \int_{\mathbb{R}} e^{-m|t_1-s|} S_{k+n-1}(s,\dots,s;t_2\ \dots,t_n)\,ds. \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

En outre, ces relations ont lieu pour tout $m > 0$ dès qu'elles ont lieu pour une valeur de $m > 0$.

Cet énoncé découle immédiatement de la proposition de l'appendice F.

------

(1) Voir 5.3.1.

Remarque.- Le système d'équations ci-dessus peut aussi s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$(5.3.19) \qquad S = \Gamma^{(m)}S + \Gamma_Q^{(m)}S \quad \text{avec} \quad S = (S_n)_{n \geqslant 0} \quad ,$$

où $\Gamma^{(m)}$ [resp $\Gamma_Q^{(m)}$] est l'application linéaire de l'espace $\mathcal{G}$ dans lui-même pour laquelle la projection d'indice n de $\Gamma_Q^{(m)}$ [resp $\Gamma_Q^{(m)}S$] est fournie par le premier terme [resp la somme des deux derniers termes] de (5.3.18) (ou de (5.3.17) si n = 1, en posant en outre $(\Gamma^{(m)}S)_o = S_o$ et $(\Gamma^{(m)}S)_1 = 0$ [resp $(\Gamma_Q^{(m)}S)_o = 0$]). Il est tentant d'essayer d'appliquer un Théorème de point fixe à l'équation (5.3.19) ; mais nous ne savons pas le faire [on note que $\Gamma^{(m)}$ et $\Gamma_Q^{(m)}$ n'appliquent pas $\mathcal{G}_{sym}$ dans lui-même] [(1)].

5.3.5.- Analyticité des fonctions de Schwinger

Par utilisation répétée de la propriété de Markov de la mesure Euclidienne μ, on vérifie que la fonction de Schwinger S_n d'ordre $n \geqslant 2$ associée à μ est donnée par la relation,

$$S_n(t_1,\dots,t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi \, N_{t_2-t_1}(\chi \, N_{t_3-t_2}(\dots N_{t_n-t_{n-1}}\chi)\dots)) \, d\mu_o$$

$$(5.3.20) \qquad = (\Omega_o | \chi N_{t_2-t_1}(\chi \, N_{t_3-t_2}(\dots N_{t_n-t_{n-1}}\chi)\dots)) \,)$$

si $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$ (χ désignant toujours l'application identique de $\mathbb{R}$). On note que le second membre de (5.3.20) est bien défini, car, pour tout $r \in [2,+\infty)$, $\chi \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R},\mu_o)$ (Lemme 1.5) et l'opérateur $N_t (t \geqslant 0)$ applique $L^r(\mathbb{R},\mu_o)$ dans lui-même (Lemme 4.2.7). De l'expression (5.3.20), on peut déduire que la fonction S_n est analytique réelle sur l'ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ formé des $(t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tels que $t_j \neq t_{j'}$ si $j \neq j'$.

----

(1) Voir la propriété (3) de la proposition 6.4.1. à ce sujet.

<u>Remarque</u>.- Pour chaque $n \geqslant 2$, (5.3.20) peut aussi être écrite,

$$(5.3.21) \qquad S_n(t_1,\dots,t_n) = (\Omega_o | \Phi_o e^{(t_2-t_1)H} \Phi_o \dots \Phi_o e^{(t_n-t_{n-1})H} \Phi_o \Omega_o).$$

Par ailleurs, revenant à la réalisation de Guelfand-Segal du champ quantique d'interaction Q (voir 1.5), on a (formellement, voir ci-dessous), d'après (1.1.3) et (1.1.1), si $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$,

$$(5.3.22) \qquad (\Omega_o | \Phi_{u_1} \Phi_{u_2} \dots \Phi_{u_n} \Omega_o) = (\Omega_o | \Phi_o e^{i(u_2-u_1)H} \Phi_o \dots \Phi_o e^{i(u_n-u_{n-1})H} \Phi_o \Omega_o).$$

Ainsi, on pressent l'existence d'une fonction W_n, analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant l'ensemble des $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tels que $\mathrm{Im}(z_{j+1}-z_j) < 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, telle que, d'une part,

$$(5.3.23) \qquad S_n(t_1,\dots,t_n) = W_n(-it_1,\dots,-it_n)$$

$$\text{pour tout } (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } t_1 < t_2 < \dots < t_n \ ,$$

et d'autre part (formellement),

$$(5.3.24) \qquad \lim_{\varepsilon_n < \dots < \varepsilon_1 \downarrow 0} W_r(u_1+ i\varepsilon_1,\dots,u_n+ i\varepsilon_n) = (\Omega_o | \Phi_{u_1} \Phi_{u_2} \dots \Phi_{u_n} \Omega_o)$$

$$\text{pour tout } (u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n.$$

Nous ignorons si $\Omega_o \in D(\Phi_{u_1} \dots \Phi_{u_n})$ pour chaque $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, ce qui permettrait de donner un sens à (5.3.22) et (5.3.24). Il suffirait pour cela que l'opérateur Φ_o laisse stable $C^\infty(H) = \bigcap_{n>0} D(H^n)$ (ce que nous ignorons). De toute façon, on peut développer ici la théorie de Wightman (voir le chapitre 3 de [1] ou le § 2 de [5]) en introduisant les opérateurs $\Phi(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\Phi_t dt$ ($h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) sur le domaine $C^\infty(H)$, lequel est stable par ces opérateurs ; et alors, (5.3.24) s'écrit rigoureusement,

$$\lim_{\epsilon_n < \dots < \epsilon_1 \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} W_n(u_1 + i\epsilon_1, \dots, u_n + i\epsilon_n) \prod_{j=1}^{n} h_j(u_j)\, du_1 \dots du_n$$

$$= (\Omega_o | \Phi(h_1)\Phi(h_2)\dots\Phi(h_n)\Omega_o). \tag{5.3.25}$$

pour tout $(h_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^n$.

5.4.- Représentation de Weyl Euclidienne

Afin d'étudier la représentation des relations de commutation canoniques associée à la mesure Euclidienne (voir 5.4.3 ci-dessous), on envisage, en 5.4.1 et 5.4.2 dans la situation générale de l'appendice A, comment la régularité du cocycle Λ se traduit en termes de la représentation de Weyl correspondante.

5.4.1.- La situation et les données étant les mêmes qu'en 5.2.1, on désigne par (U,V) la représentation de Weyl engendrée par la mesure quasi-invariante μ [conformément à A3, (U,V) est ainsi une représentation de Weyl à valeurs dans l'espace $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et de modèle $(v, \langle\cdot,\cdot\rangle)$]. Cela étant,

PROPOSITION.- On suppose que le cocycle Λ possède la propriété suivante :

(LO) Pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $\omega \in \mathcal{W}$,

$$\lim_{t \to 0} \Lambda(tf,\omega) = 0 \tag{5.4.1}$$

Alors la représentation de Weyl (U,V) est régulière [(1)].

En effet, il s'agit de montrer que l'on a $\lim_{t \to 0} U(tf)Z = Z$ et $\lim_{t \to 0} V(tf)Z = Z$ dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $f \in \mathcal{V}$ et pour tout $Z \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$; ou seulement pour tout Z appartenant à un sous-ensemble total dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$. Donc, puisqu'il en est ainsi de l'ensemble des classes modulo μ des fonctions $e^{i\langle\cdot, g\rangle}$ $(g \in \mathcal{V})$, il

----

(1) Voir A3.

suffit de montrer que, pour $f \in \mathcal{V}$ et $F = e^{i\langle \cdot , g \rangle}$ (avec $g \in \mathcal{V}$), on a,

$$(5.4.2) \qquad \lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{W}} \left| e^{i\langle \omega , tf \rangle} F(\omega) - F(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) = 0, \qquad \text{et,}$$

$$(5.4.3) \qquad \lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{W}} \left| e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} F(\omega + t\vec{f}) - F(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) = 0 \, .$$

Or, d'abord, (5.4.2) découle immédiatement du Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ensuite, en ce qui concerne (5.4.3), on commence par écrire,

$$\int_{\mathcal{W}} \left| e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} F(\omega + t\vec{f}) - F(\omega) \right|^2 \mu(d\omega)$$

$$(5.4.4) \qquad \leqslant 2 \int_{\mathcal{W}} e^{\Lambda(tf,\omega)} \left| F(\omega + t\vec{f}) - F(\omega) \right|^2 \mu(d\omega)$$

$$+ \, 2 \int_{\mathcal{W}} \left| e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} - 1 \right|^2 \mu(d\omega)$$

[utiliser l'inégalité $|a+b|^2 \leqslant 2(|a|^2 + |b|^2)$]. Mais, d'une part

$$(5.4.5) \qquad \int_{\mathcal{W}} e^{\Lambda(tf,\omega)} \left| F(\omega, t\vec{f}) - F(\omega)^2 \right| \mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} \left| F(\omega) - F(\omega - t\vec{f}) \right|^2 \mu(d\omega),$$

d'après l'égalité de quasi-invariance, et,

$$(5.4.6) \qquad \lim_{t \to 0} \int \left| F(\omega) - F(\omega - t\vec{f}) \right| \mu(d\omega) = 0,$$

en vertu du Théorème de Lebesgue et de la spécification de F.

D'autre part,

$$(5.4.7) \qquad \int_{\mathcal{W}} \left| e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} - 1 \right|^2 \mu(d\omega) = 2\left(1 - \int_{\mathcal{W}} e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} \mu(d\omega)\right) \quad \text{, puisque}$$

$$(5.4.8) \qquad \int_{\mathcal{W}} e^{\Lambda(tf,\omega)} \mu(d\omega) = 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Enfin,

$$(5.4.9) \qquad \lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{W}} e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} \mu(d\omega) = 1,$$

car, l'ensemble des fonctions $e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\ )}$ ($t \in \mathbb{R}$) étant borné dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ d'après (5.4.8), cet ensemble est uniformément intégrable (voir Meyer [9], Théorème II.22) ; et, par conséquent, l'hypothèse LO entraîne que (5.4.9) a lieu (voir Meyer [9], Théorème II.21). Et (5.4.4), (5.4.5), (5.4.6), (5.4.7) et (5.4.9) entraînent (5.4.3).

cqfd.

<u>Remarque</u>.- Si $\mathcal{V}$ est muni d'une topologie d'EVT métrisable rendant continu le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et si Λ est tel que, pour tout $\omega \in \mathcal{W}$, l'application $\Lambda(\cdot,\omega)$ est continue sur $\mathcal{V}$, alors la représentation de Weyl (U,V) est continue (1) (même raisonnement que ci-dessus).

<u>5.4.2</u>.- La situation étant la même qu'en 5.4.1, on suppose que la condition LO est satisfaite et, pour chaque $f \in \mathcal{V}$, on désigne par $\Phi(f)$ [resp $\pi(f)$] l'unique opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ tel que $e^{it\Phi(f)}$ U(tf) [resp $e^{it\Phi(f)} = V(tf)$] pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose ici d'expliciter les opérateurs $\Phi(f)$ et $\pi(f)$. Pour cela, on désigne par $\mathcal{G}^1(\mathcal{V},\mathcal{W},\mu)$ le sous-espace de $L^o(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ formé des $Z \in L^o(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ admettant un représentant $F \in Z$ tel que

(5.4.10) pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $\omega \in \mathcal{W}$, la fonction $t \to F(\omega,t\vec{f})$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ (2) ;

et pour un tel Z et pour $f \in \mathcal{V}$, on désigne par $\delta_f Z$ l'élément de $L^o(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ défini par,

$$(5.4.11) \qquad \delta_f Z = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Z \odot \Gamma_{t_f} - Z) \ , \quad ^{(3)}$$

[la limite au second membre existant dans $L^o(\mathcal{W},\mathcal{A},\mu)$ par définition de $\mathcal{G}^1(\mathcal{V},\mathcal{W};\mu)$: $\delta_f Z$ est la classe modulo μ de la fonction $\omega \to \frac{d}{dt}\Big/_{t=0} F(\omega+t\vec{f})$. Ainsi $\mathcal{G}^1(\mathcal{V},\mathcal{W},\mu)$ est l'espace des classes modulo μ des fonctions "continûment différentiables au sens de Gateaux "].

------

(1) Voir A3.

(2) Voir la remarque ci-dessous.

(3) Γ_f est défini en A1 et $Z \odot \Gamma_f$ en A3.

On peut alors énoncer :

PROPOSITION.- (1) Pour tout $f \in \mathcal{V}$, $\Phi(f)$ coïncide [1] avec l'opérateur induit dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ par l'opérateur de multiplication $Z \to \Sigma(f)Z$, où $\Sigma(f)$ désigne la classe modulo μ de la fonction $\langle \cdot, f \rangle$ sur $\mathcal{W}$.

(2) On suppose que Λ possède les propriétés L1 et L2 [2], et même que l'on a,

$$(5.4.12) \qquad \int_{\mathcal{W}} |\dot{\Lambda}(f,\omega)|^p \mu(d\omega) < +\infty \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{V},$$

avec $2 \leqslant p < +\infty$. Alors, si $r \in]2, +\infty)$ est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$, pour chaque $f \in \mathcal{V}$, le domaine de $\pi(f)$ contient l'ensemble des $Z \in \mathcal{B}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}; \mu) \cap L^r(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ tels $\delta_f Z \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$; et, pour un tel Z, on a,

$$(5.4.13) \qquad \pi(f)Z = \frac{1}{i}(\delta_f Z + \frac{1}{2}\underline{\dot{\Lambda}}(f)Z),$$

où $\underline{\dot{\Lambda}}(f)$ désigne la classe modulo μ de $\dot{\Lambda}(f, \ )$. En particulier,

$$(5.4.14) \qquad \Omega \in D(\pi(f)) \quad \text{et} \quad 2i\ \pi(f)\Omega = \underline{\dot{\Lambda}}(f)$$ [3].

En effet, on rappelle d'abord que, pour le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire fortement continu $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ [4], le domaine faible coïncide avec le domaine fort. Cela étant, le domaine de $\Phi(f)$ coïncide avec l'ensemble des $Z \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ tels que, pour tout $Y \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$,

----

(1) Domaines compris !

(2) Voir la proposition 5.2.1, en notant que L1 implique L0.

(3) On désigne toujours par Ω la classe modulo μ de la constante 1 sur $\mathcal{W}$.

(4) Et plus généralement, pour le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continus d'opérateurs contactrants.

(5.4.15) $\quad \int_{\mathcal{W}} \overline{Y} W_t(f) Z\, \Sigma(f)\, d\mu$ a une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $t \to 0$, où

$W_t(f)$ désigne la classe modulo μ de la fonction

$\omega \to 1_{\{\langle \cdot, f\rangle \neq 0\}}(\omega)(e^{it\langle \omega, f\rangle} - 1)/t\langle \omega, f\rangle$ sur $\mathcal{W}$. Or, d'une part, (5.4.15) a lieu dès que $Z\Sigma(f) \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $|W_t(f)| \leqslant 1$ et $\lim\limits_{t \to 0} W_t(f) = i$ μ-presque sûrement. Et, inversement, si (5.4.15) a lieu pour tout $Y \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$, d'après le Théorème de Banach Steinhaus et le Théorème de Riesz, il existe $Z' \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ tel que $\lim\limits_{t \to 0} W_t(f) Z\Sigma(f) = Z'$ faiblement dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$; d'où compte tenu de ce que $\lim\limits_{t \to 0} W_t(f) Z\Sigma(f) = iZ\Sigma(f)$ μ-presque sûrement, il résulte que $Z\Sigma(f) = -iZ'$; donc $Z\Sigma(f) \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$. Ensuite, pour établir la propriété (2), il suffit de montrer que,
si $Z \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mu) \cap L^r(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et tel que $\delta_f Z \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$, alors pour tout $Y \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$,

$$(5.4.16) \qquad \lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{W}} \overline{Y}(V(tf)Z - Z)\, d\mu = \frac{1}{i} \int_{\mathcal{W}} \overline{Y}(\delta_f Z + \tfrac{1}{2}\dot{\Lambda}(f) Z)\, d\mu .$$

Pour cela, on peut utiliser comme suit le Théorème de dérivation sous le signe somme de l'appendice E : prenant pour $(Z, \mathcal{Z}, \nu)$ l'espace de probabilité $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et pour J un intervalle $[a,b]$ tel que $0 \in]a,b[$, on désigne par F un représentant de Z vérifiant (5.4.10) et par K un représentant de la classe Y, et on pose,

$$F(t,\omega) = \overline{K(\omega)}\, e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} F(\omega + t\vec{f}), \text{ et}$$

$$G(t,\omega) = \tfrac{1}{2}\overline{K(\omega)}\, \dot{\Lambda}(f, \omega + t\vec{f}) e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} F(\omega + t\vec{f}) + \overline{K(\omega)} e^{\frac{1}{2}\Lambda(tf,\omega)} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} F(\omega + s\vec{f}).$$

Remarquant d'abord que,

$$\int_{\mathcal{W}} |G(t,\omega)|\, \mu(d\omega) \leqslant \tfrac{1}{2}\|K\|_2 \Big(\int_{\mathcal{W}} |\dot{\Lambda}(f, \omega + t\vec{f})|^2 |F(\omega + t\vec{f})|^2\, e^{\Lambda(tf,\omega)} \mu(d\omega)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \|K\|_2 \Big(\int_{\mathcal{W}} \Big|\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} F(\omega, s\vec{f})\Big|^2\, e^{\Lambda(tf,\omega)} \mu(d\omega)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

l'égalité de quasi-invariance de μ jointe à l'égalité de Hölder entraîne que,

$$\int_{\mathcal{W}} |G(t,\omega)|\mu(d\omega) \leqslant \frac{1}{2} \|Y\|_2 \|\dot{\Lambda}(f)\|_p \|Z\|_r + \|Y\|_2 \|\delta_f Z\|_2 \ ;$$

d'où il résulte que la condition (δ) est satisfaite. La condition ($\delta\delta$) est ensuite satisfaite en vertu de la seconde partie de l'hypothèse L2, de (5.2.8) et de (5.4.10), la condition ($\delta\delta\delta$) en vertu de la forte continuité de V (proposition 5.4.1) puisque, pour chaque $t \in J$, la classe de la fonction $G(t,\cdot)$ coïncide avec la quantité $\overline{Y}V(tf)(\frac{1}{2}\dot{\Lambda}(f)Z + \delta_f Z)$, et la condition ($\delta V$) par définition de V. Cela étant, la relation (5.4.16) cherchée s'obtient par dérivation sous le signe somme pour $t = 0$ de l'intégrale $\int_{\mathcal{W}} F(t,\omega)\mu(d\omega)$.

cqfd.

<u>Remarque</u>.- On peut évidemment affaiblir la condition (5.4.10) qui définit l'espace $\mathcal{B}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W} ; \mu)$; et, ainsi, le domaine de l'opérateur $\pi(f)$ est strictement plus grand que l'ensemble des $Z \in \mathcal{B}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}; \mu) \cap L^r(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ tels que $\delta_f Z \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$. Il serait intéressant d'arriver à délimiter exactement ce domaine [en introduisant un espace de Sobolev convenable sur $\mathcal{W}$ ......].

<u>5.4.3</u>.- Si on prend pour $\mathcal{V}$ l'espace $\mathfrak{S}$, pour $(\mathcal{W}, \mathcal{A})$ l'espace $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$, et pour μ la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q [le cocycle Λ étant alors défini par (4.1.2) et (4.1.3) ; voir 2.1.3 et 4.1], les hypothèses de la proposition 5.4.2 sont satisfaites et (5.4.12) a lieu pour tout $p < +\infty$ ainsi qu'il résulte de l'expression (5.2.19) de $\dot{\Lambda}$ et de (1.5.4) (Lemme 1.5). Et cette expression de $\dot{\Lambda}$ permet d'expliciter comme suit l'équation (5.4.14) : pour chaque k entier $\geqslant 0$ et chaque $f \in \mathfrak{S}$, soit $\Sigma^{(k)}(f)$ la classe modulo μ de la fonction $\omega \to \int_{\mathbb{R}} \omega(t)^k f(t)dt$ sur $\mathbb{W}$ [avec $\Sigma^{(o)}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.\Omega$] ; et soit $\Phi^{(k)}(f)$ l'opérateur(auto-adjoint) dans $L^2(\mathbb{W}, \mathfrak{F}, \mu)$ induit par l'opérateur de multiplication $Z \to \Sigma^{(k)}(f)Z$. La relation (1.5.4) entraîne que $\Omega \in D(\Phi^{(k)}(f))$ pour tout k entier $\geqslant 0$ et pour tout $f \in \mathcal{V}$, et l'équation (5.4.14) s'écrit alors, si $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$,

$$2i\pi(f)\Omega - \Phi(f'')\Omega + \sum_{k=0}^{q} a_k \Phi^{(k)}(f)\Omega = 0 \qquad (f \in \mathfrak{S}). \tag{5.4.17}$$

Cette équation est la forme rigoureuse que prend ici l'équation (23) de [5].

Remarque 1.- Soit $\mathfrak{D}$ le sous-espace de $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ formé des $Z \in \mathfrak{S}^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{W}; \mu) \cap (\bigcap_{p<+\infty} L^p(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu))$ tels que, pour tout n entier > 0 et tout $(f_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{V}^n$, $\delta_{f_1} \dots \delta_{f_n} Z \in \bigcap_{p<+\infty} L^p(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$; où $\mathfrak{S}^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{W}; \mu)$ désigne le plus grand des sous-espaces $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{S}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}; \mu)$ tels que $Z \in \mathfrak{S}$ entraîne $\delta_f Z \in \mathfrak{S}$ pour tout $f \in \mathcal{V}$. On remarque que $\mathfrak{D}$ est une sous-algèbre de $L^0(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et que, dans le cas particulier en cause ici, on a,

$$\Sigma(f) \in \mathfrak{D} \qquad (f \in \mathcal{V}) \qquad \text{et,} \tag{5.4.18}$$

$$\dot{\underline{\Lambda}}(f) \in \mathfrak{D} \qquad (f \in \mathcal{V}) . \tag{5.4.19}$$

Donc, d'après la proposition 5.4.2, pour tout $f \in \mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ est contenu dans les domaines de $\Phi(f)$ et $\pi(f)$ et stable par ces opérateurs. Par ailleurs, $\mathfrak{D}$ est dense dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$[en effet, la classe modulo μ de $e^{i<\cdot,g>}$ appartient à $\mathfrak{D}$ pour tout $g \in \mathcal{V}$ d'après (5.4.18)] et $\mathfrak{D}$ est stable par les opérateurs $U(f)$ $(f \in \mathcal{V})$; donc $\mathfrak{D}$ est un cœur pour les opérateurs $\Phi(f)$ $(f \in \mathcal{V})$. Il est naturel de se demander, dans le cas particulier en cause ici [ou plus généralement sous les hypothèses (5.4.18) et (5.4.19)] si $\mathfrak{D}$ est aussi un cœur pour les opérateurs $\pi(f)$. Il suffirait pour cela que $\mathfrak{D}$ soit stable par les opérateurs $V(f)$; ou encore que la classe modulo μ de $e^{\Lambda(f,\cdot)}$ appartienne à $\mathfrak{D}$ [on note que cela a lieu d'après la propriété (1) du Théorème 3.I lorsque $f \in \mathfrak{S}$ est à support compact].

Remarque 2.- Pour chaque k entier > 0, l'espace $\mathfrak{D}$ est contenu dans le domaine des opérateurs $\Phi^{(k)}(f)$ $(f \in \mathfrak{S})$ et stable par ces opérateurs ; et on a,

$$(5.4.20)\qquad \Phi^{(k)}(f)\pi(g)Z - \pi(g)\Phi^{(k)}(f)Z = ik\Phi^{(k-1)}(gf)Z$$

$$(f \in \mathfrak{S},\ g \in \mathfrak{S},\ Z \in \mathfrak{D}),$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier à partir de (5.4.13) et de l'expression (5.2.19) de $\dot{\Lambda}$. En outre, on a,

$$(5.4.21)\qquad \Phi^{(k)}(f)\Phi^{(\ell)}(g)Z = \Phi^{(\ell)}(g)\Phi^{(k)}(f)Z\ , \qquad \text{et}$$

$$(5.4.22)\qquad \pi(f)\pi(g)Z = \pi(g)\pi(f)Z$$

$$(k,\ \ell \text{ entiers } \geqslant 0,\ f \in \mathfrak{S},\ g \in \mathfrak{S},\ Z \in \mathfrak{D}).$$

En vertu des relations (5.4.17) et (5.4.20), le plus petit sous-espace $\mathfrak{D}_{\#}$ de $\mathfrak{D}$ contenant Ω et stable par les opérateurs $\Phi^{(k)}(f)$ (k entier > 0, $f \in \mathfrak{S}$) est aussi stable par les opérateurs $\pi(g)$; et le système

$$(\mathfrak{D}_{\#}\ ,\Omega,(\Phi^{(k)}_{\#}(f))_{k \in \mathbb{N}, f\in \mathfrak{S}},(\pi_{\#}(g))_{g \in \mathfrak{S}})$$

obtenu en prenant les restrictions $\Phi^{(k)}_{\#}(f)$ et $\Phi_{\#}(g)$ de $\Phi^{(k)}(f)$ et $\pi(g)$ à $\mathfrak{D}_{\#}$ peut recevoir une définition axiomatique en termes des relations (5.4.21), (5.4.22), (5.4.20) et (5.4.17) ci-dessus. Cela étant, on peut se proposer de chercher quelles conditions supplémentaires imposer à un tel système pour en obtenir l'unicité à un isomorphisme unitaire près (voir à ce sujet la première partie de [34]).

***

§6.- QUESTIONS D'UNICITÉ

Etant donné un polynôme d'interaction standard Q, on s'intéresse ici à la caractérisation de la mesure Euclidienne μ spécifiée par Q : caractérisation directement en termes de Q et pas seulement (comme en 2.1 dans le Théorème 2.I) en termes des éléments constitutifs de la réalisation de Guelfand-Segal du champ quantique, que sont la mesure μ_o et le semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$, lesquels ne sont déterminés par Q que très implicitement (voir 1.3, 1.5 et 1.7.2). Remarquant à ce sujet que le module de quasi-invariance $e^{\wedge}$ de μ [défini par (4.1.2) et (4.1.3)] ainsi que le premier membre de l'équation de Symanzik (5.1.7) s'expriment explicitement en termes de Q, il est naturel de se demander si μ est la seule mesure de probabilité sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$ qui soit quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $e^{\wedge}$ comme module de quasi-invariance (première question), ou dont la transformée de Fourier appartienne à $\mathfrak{G}^{\infty}(\mathfrak{S})$ et vérifie l'équation de Symanzik (seconde question) ; et on peut poser une question analogue en termes des équations de Schwinger.

Dans le cas où $Q(X) = m^2 X$ (avec $m > 0$; cas du champ libre, voir 1.7 1, 2.6.2 et 4.3.2), la réponse à chacune de ces questions est affirmative (proposition 6.4.1). Dans le cas général, le problème est ouvert ; mais nous conjecturons que la réponse est aussi affirmative (voir aussi les remarques 3 et 4 de 6.1.2 et la remarque 2 de 6.3.1 où sont présentées d'autres conjectures, ainsi que 6.4.2 où est étudié le lien entre la propriété de Markov et la propriété de localité du module de quasi-invariance).

Une réponse partielle à la première question est fournie par le Théorème 6.I (voir 6.1.2) ; réponse partielle en ce sens que l'unicité n'est obtenue que dans la classe des mesures μ possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne, et telles que la marginale μ_o et le Hamiltonien H associé (ce dernier étant défini par la construction de Nelson grâce aux propriétés précédentes ; proposition 6.1.1) satisfasse à diverses conditions de régularité et à la condition spectrale selon laquelle O est valeur propre simple et isolée de H. Ce résultat est établi en 6.3, en commençant par déduire de l'hypothèse de quasi-invariance une équation que satisfait le système $(\mu_o,(e^{-tH})_{t \geqslant 0})$ (propositions 6.3.1 et 6.3.2) ; puis en montrant, grâce à une variante convenable de la caractérisation du Hamiltonien de Guelfand-Segal (Théorème 6.II en 6.2), que le système spécifié par Q est la seule solution de cette équation satisfaisant les conditions énoncées.

Ainsi, on n'a pu aborder ici le problème central de l'existence et de l'unicité de la mesure Euclidienne μ lorsque son module de quasi-invariance est donné, que par la voie détournée consistant à ramener ce problème à l'étude de certains semi-groupes d'opérateurs Markoviens sur $\mathbb{R}$: la complainte finale 6.5 appelle une attaque de front ! (1)

----

(1) Une telle attaque vient d'être menée à bien de façon remarquablement élégante par G. Royer (voir [35]).

6.1.- Une caractérisation de la mesure Euclidienne en termes de quasi-invariance

6.1.1.- Construction de Nelson .- Les significations des termes $\mathbb{W}$, $X_t (t \in \mathbb{R})$, $\mathfrak{F}_J (J \subset \mathbb{R})$, $\mathfrak{F}$, $\theta_t (t \in \mathbb{R})$ et S étant les mêmes qu'en 2.1.1 on s'intéresse ici, pour une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$, d'une part à la propriété de Markov $\underline{\underline{M}}\underline{K}(\mu)$ (voir 4.2.1), et d'autre part à la propriété d'invariance Euclidienne, laquelle stipule que μ est invariante par les transformations $\theta_t (t \in \mathbb{R})$ et S. En outre, la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui est l'image de μ par X_o sera désignée par μ_o et appelée la marginale fondamentale de μ (si μ possède la propriété d'invariance Euclidienne, μ_o est aussi l'image de μ par X_t pour tout $t \in \mathbb{R}$). Cela étant,

PROPOSITION.- Soient μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$ [1] possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne, et, pour chaque $t \geqslant 0$, N_t l'opérateur linéaire contractant de $L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ dans lui-même défini par la relation,

$$(6.1.1) \qquad N_t \psi \circ X_o = E_\mu [\psi \circ X_t / \mathfrak{F}_{\{o\}}] \qquad (\psi \in L^1(\mathbb{R}, \mu_o)) \ ^{(2)} .$$

Alors,

(1) Pour chaque $t \geqslant 0$, N_t est un opérateur Markovien en ce sens que,

$$(6.1.2) \qquad N_t \psi \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \psi \geqslant 0 \quad (\psi \in L^1(\mathbb{R}, \mu_o)) , \quad \text{et,}$$

$$(6.1.3) \qquad N_t \Omega_o = \Omega_o \ ^{(3)} .$$

Et, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, N_t induit un opérateur contractant dans $L^p(\mathbb{R}, \mu_o)$ et on a, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $(1 \leqslant p' \leqslant +\infty)$,

-----

(1) Voir la remarque 3 de 6.1.2.

(2) Avec les notations précisées en 2.1.3 à la suite du Théorème 2.I.

(3) On désigne toujours par Ω_o la classe modulo μ_o de la constante 1.

(6.1.4) $\int_{\mathbb{R}} \theta N_t \psi d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} (N_t\theta)\psi d\mu_o \qquad (\theta \in L^p(\mathbb{R},\mu_o)\ ,\ \psi \in L^{p'}(\mathbb{R},\mu_o))$

(2) Pour $1 \leqslant p < +\infty$, la famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ induit un semi-groupe fortement continu dans $L^p(\mathbb{R},\mu)$.

(3) En particulier, la famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ induit dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs contractants et auto-adjoints.

La famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ définie par (6.1.1) sera appelée le <u>semi-groupe de transition</u> associé à μ ; et l'unique opérateur auto-adjoint positif H dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, l'opérateur e^{-tH} coïncide avec la restriction de N_t à $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ sera appelé <u>l'opérateur Hamiltonien</u> associé à μ. En vertu de (6.1.3), on a,

(6.1.5) $$\Omega_o \in D(H) \quad \text{et} \quad H\Omega_o = 0.$$

Le procédé ci-dessus [faisant correspondre à la mesure μ l'opérateur Hamiltonien qui lui est associé dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$] représente la <u>construction de Nelson</u> dans le cas particulier en cause ici (voir le § 3 de [6].

Si Q est un polynôme d'interaction standard et si μ est la mesure Euclidienne spécifiée par Q, la marginale fondamentale μ_o de μ coïncide avec la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q (voir 1.5), et l'opérateur Hamiltonien associé à μ coïncide avec l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o (voir 1.4, 1.6 et le Théorème 2.I).

La démonstration de la proposition ci-dessus est standard[1]: les opérateurs $N_t (t \geqslant 0)$ sont Markoviens et contractants dans $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ en vertu des propriétés correspondantes de l'espérance conditonnelle (voir Neveu [8], § IV.3) ; et ces opérateurs sont auto-adjoints [relation (6.1.4)] en vertu de l'invariance de μ par la symé-

----

(1) Voir la démonstration du Théorème 1 de [6].

trie S. La famille $(N_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe en vertu de la propriété de Markov de μ et de son invariance par les translations θ_t $(t \in \mathbb{R})$. Enfin, la forte continuité du semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$ dans $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ (avec $1 \leqslant p < +\infty$) résulte de ce que $\mathbb{W} \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$: cette propriété et le Théorème de convergence dominée de Lebesgue entraînent en effet que la fonction $t \to \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta} N_t \psi d\mu_o = E_\mu[(\overline{\theta} \odot X_o)(\psi \odot X_t)]$ $(t \geqslant 0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\theta \in L^{p'}(\mathbb{R},\mu_o)$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et pour tout $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$; donc aussi pour tout $\psi \in L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ en vertu de l'inégalité de Hölder, de la densité de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},\mu_o)$ (si $1 \leqslant p < +\infty$) et de ce que N_t est contractant dans cet espace. Et on conclut, grâce au Théorème IX.1 (page 233) de Yosida [3].

6.1.2.- Désignant toujours par Q un polynôme d'interaction standard(1) et, avec les notations de 4.1, par Λ le cocycle additif défini par les relations (4.1.2) et (4.1.3), la caractérisation que l'on a en vue peut être énoncée comme suit :

THEOREME 6.I.- La mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q est la seule mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W},\mathcal{O})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ (2) avec e^Λ comme module de quasi-invariance, possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne (3), et telle que les conditions suivantes soient satisfaites par la marginale fondamentale μ_o et l'opérateur Hamiltonien H associé à μ (3) :

(RE1) La valeur propre 0 de H est simple et isolée.

(RE2) Le domaine de H contient $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(RE3) La mesure μ_o admet une densité ρ partout >0 et de classe C^∞ ; et on a,

(6.1.6) $$Q \in L^2(\mathbb{R},\mu_o).$$

----

(1) Voir 1.3.

(2) Voir la remarque 4 ci-dessous.

(3) Voir 6.1.1.

Ce théorème est établi en 6.3 ci-dessous à partir de la caractérisation du Hamiltonien de Guelfand-Segal donnée en 6.2. On note ici que les conditions de régularité RE1, RE2 et RE3 sont satisfaites par la mesure Euclidienne spécifiée par Q en vertu de la proposition 1.6 et du Lemme 1.5 (les autres propriétés en cause étant satisfaites en vertu du Théorème 2.I, de la proposition 2.4.1 et du Théorème 4).

Remarque 1.- Les conditions imposées à μ dans le Théorème ci-dessus en plus de la quasi-invariance sont assez naturelles dans le contexte de ce travail : la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne sont à la base de la construction de Nelson permettant d'associer un Hamiltonien à μ (voir 6.1.1) ; la condition spectrale RE1 est un des pivots de la théorie quantique des champs ; et les conditions RE2 et RE3 s'inscrivent dans l'approche du Hamiltonien de Guelfand-Segal présentée au § 1.

Remarque 2.- En ce qui concerne la condition spectrale RE1, on note que si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{S})$ possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne et si H est le Hamiltonien associé, la valeur propre Ω_o de H est simple si et seulement si μ est ergodique par les translations θ_t $(t \in \mathbb{R})$ (voir la remarque 2.5.3 à ce sujet).

Remarque 3.- Nous pensons que, en fait, la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q est la seule mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{S})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ avec $e^{\wedge}$ comme module de quasi-invariance. Autrement dit, nous pensons que les conditions imposées à μ dans le Théorème en plus de la quasi-invariance découlent de cette dernière (voir 6.4.2 à ce sujet , ainsi que [35]).

Remarque 4.- La proposition 6.1.1 et le Théorème 6.I énoncés ci-dessus pour une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W},\mathfrak{S})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ restent valables si on substitue à $\mathbb{W}$ l'espace $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et à $\mathfrak{S}$ l'espace $\mathbb{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [avec les définitions canoniques correspondantes pour les projections X_t $(t \in \mathbb{R})$, les tribus $\mathfrak{S}_J (J \subset \mathbb{R})$ et le cocycle $\wedge$; voir 2.6.1]. Autrement dit, la caractérisation qu'énonce le Théorème ci-dessus ne met en jeu que les translations de $\mathbb{D}$ et ne fait pas intervenir la propriété de croissance à l'infini exprimée par le fait que μ est portée par $\mathbb{W}$. Nous pensons qu'il existe une infinité de mesures de probabilité sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, quasi-invariantes par les translations de $\mathbb{D}$ avec $e^{\wedge}$ comme module de quasi-invariance ; mais que, parmi ces mesures, la mesure Euclidienne spécifiée par l'interaction Q est la seule qui soit portée par $\mathbb{W}$, et également la seule possédant la propriété d'invariance Euclidienne (cette conjecture est vérifiée dans le cas du champ libre : voir la remarque 6.4.1)

6.2.- Une caractérisation du Hamiltonien de Guelfand-Segal

6.2.1.- Le résultat suivant complète les caractérisations que fournissent les Théorèmes 1.II et 1.III :

THEOREME 6.II.- Soient μ_o une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, H un opérateur symétrique et fermé dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, et Q un polynôme d'interaction standard (1). On suppose que μ_o admet une densité ρ partout > 0 et de classe C^∞, et que l'on a,

(6.2.1) $$Q \in L^2(\mathbb{R},\mu_o).$$

Alors, pour que μ_o soit la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q (2) et H l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o) (3), il faut et il suffit que les propriétés suivantes soient satisfaites par le couple (μ_o,H) :

($j^{\#}$) Le domaine de H contient $\mathcal{D}(\mathbb{R})$;

($jj^{\#}$) Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(6.2.2) $$\pi_o\psi = i(H(\chi\,\psi) - \chi H\psi).$$

(jjj) $\Omega_o \in D(H)$ et $H\Omega_o = 0$.

(jV) $\chi \in D(H^2)$ et $H^2\chi = Q$.

----

(1) Voir 1.3.

(2) Voir 1.5 .

(3) Voir 1.4.

Comme en 1.4, on désigne ici par (Φ_o, π_o) le système de Heisenberg standard engendré par la mesure quasi-invariante μ_o (voir A6) et par Ω_o la classe modulo μ_o de la fonction constante égale à 1. En outre, on désigne toujours par χ l'application identique de $\mathbb{R}$ (identifiée à sa classe modulo μ_o) ;et on note qu'a priori, l'égalité (6.2.2) a seulement lieu dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mu_o)$.

6.2.2.- On utilisera plusieurs fois dans la suite le lemme suivant qui vient compléter le lemme 1.3 :

LEMME.- Soient μ_o une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et M une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu_o)$ telle que,

$$M(\chi\psi) = \chi M\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{ et,} \tag{6.2.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\theta} M\psi d\mu_o = \int \overline{(M\theta)}\psi d\mu_o \quad \text{pour tous } \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{6.2.4}$$

Alors, il existe un élément réel γ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mu_o)$ tel que,

$$M\psi = \gamma\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{6.2.5}$$

En effet, en posant $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, (6.2.3) entraîne que,

$$M(\eta\psi) = \eta M\psi \quad (\psi \in \mathcal{D}) \tag{6.2.6}$$

pour toute fonction polynomiale η sur $\mathbb{R}$. Et (6.2.6) équivaut à,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\theta}\eta M\psi d\mu_o \quad \int_{\mathbb{R}} \overline{\theta} M(\eta\psi) d\mu_o \quad (\theta \in \mathcal{D}, \ \psi \in \mathcal{D}) \ ; \tag{6.2.7}$$

ou encore, compte tenu de (6.2.4), à ,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\theta}\eta M\psi d\mu_o = \int_{\mathbb{R}} (\overline{M\theta})\eta\psi d\mu_o \quad (\theta \in \mathcal{D}, \psi \in \mathcal{D}). \tag{6.2.8}$$

Mais cette relation étant valable pour toute fonction polynômiale η, l'est aussi pour toute fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ [ainsi qu'on le voit en considérant une suite (η_n) de fonctions polynômiales telle

que $\lim_{n \to \infty} \eta_n = \eta$ uniformément sur un compact contenant supp $\theta \cup$ supp ψ].
D'où il résulte, en remontant de (6.2.8) à (6.2.7) puis à (6.2.6), que cette dernière relation a lieu pour tout $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$; ce qui entraîne la conclusion annoncée [γ devant être réel d'après (6.2.4)].

cqfd.

6.2.3.- Démonstration du Théorème 6.II

Posant $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, on commence par un résultat partiel :

LEMME.- (1) Soit H un opérateur fermé et symétrique dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ possédant les propriétés ($j^\#$), ($jj^\#$) et (jjj). Alors,

(6.2.9) $\quad (\pi_o\theta|\Omega_o) = i(H\theta|\chi)$ pour tout $\theta \in \mathfrak{D}$.

On note que $\chi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ en vertu de l'hypothèse (6.2.1). En effet, d'après ($j^\#$) et ($jj^\#$), on a,

(6.2.10) $\quad (\theta|\pi_o\psi) = i(\theta|H(\chi\psi) - (\chi\theta|H\psi) \quad (\theta \in \mathfrak{D}, \psi \in \mathfrak{D})$;

d'où, puisque π_o et H sont symétriques,

(6.2.11) $\quad (\pi_o\theta|\Omega_o) = i(H\theta|\chi) - i(H(\chi\theta|\Omega_o) \quad (\theta \in \mathfrak{D})$,

ainsi qu'on le voit en considérant une suite (ψ_n) d'éléments de $\mathfrak{D}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \psi_n = \Omega_o$ et $\lim_{n \to \infty} \chi\psi_n = \chi$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Et (6.2.9) résulte de (6.2.11), de (jjj) et de ce que H est symétrique. D'où le lemme.

Cela étant, on suppose d'abord que μ_o est la mesure quasi-invariante spécifiée par Q et que H coïncide avec l'opérateur Hamiltonien $\underline{H}$ engendré par μ_o. Les propriétés ($j^\#$), ($jj^\#$) et (jjj) sont alors satisfaites d'après le Théorème 1.II ;et on a, $\chi \in D(H)$ d'après la proposition 1.6 [propriété (2)], et $\Omega_o \in D(\pi_o)$ d'après (A6.4) et (1.5.3). Il résulte donc du lemme ci-dessus que,

----

(1) dans la situation du Théorème ; en désignant toujours par $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$

(6.2.12) $$(\theta|\pi_o\Omega_o) = i(\theta|H\chi) \quad (\theta \in \mathfrak{D}) \; ;$$ ou encore,

(6.2.13) $$\pi_o\Omega_o = i\,H\chi.$$

Par ailleurs, d'après 1.4.7 et l'équation (d) (Lemme 1.5) qui détermine μ_o, on a,

$$H\pi_o\psi - \pi_o H\psi = i\,Q\psi \quad (\psi \in \mathfrak{D}) \; ;$$ donc aussi,

puisque π_o et H sont symétriques, pour tout $\theta \in \mathfrak{D}$,

(6.2.14) $$(\pi_o H\theta|\psi) - (H\pi_o\theta|\psi) = i(Q\theta\,|\,\psi) \quad (\psi \in \mathfrak{D}) \; ;$$

ou encore, par densité de $\mathfrak{D}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, puis d'après (jjj),

(6.2.15) $$(\pi_o H\theta|\Omega_o) = i(Q\theta|\Omega_o) .$$

Mais, $Q \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ [Lemme 1.5, relation (1.5.4)] et $\Omega_o \in D(H\pi_o)$ [en effet, $\Omega_o \in D(H^2)$ d'après (jjj) et $H\pi_o \ll H^2$ d'après le Théorème 1.III et la propriété (4) de la proposition B5] ; donc (6.2.15) peut s'écrire $(\theta|H\pi_o\Omega_o) = i(\theta|Q)$; et, finalement, $\theta \in \mathfrak{D}$ étant arbitraire dans cette dernière relation, on a, $H\pi_o\Omega_o = i\,Q$; d'où (jV) en tenant compte de (6.2.13). Ce qui achève d'établir que les conditions énoncées sont nécessaires.

Inversement, supposant que H, opérateur fermé et symétrique dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ vérifie ($j^{\#}$), ($jj^{\#}$), (jjj) et (jV), on remarque d'abord que l'on a,

(6.2.16) $$\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o),$$ et,

(6.2.17) $$\pi_o\Omega_o = i\,H\chi$$

[(6.2.16) entraîne que $\Omega_o \in D(\pi_o)$ d'après (A6.4)]. En effet, d'après le lemme ci-dessus, on a, pour tout $\theta \in \mathfrak{D}$,

(6.2.18) $$(\pi_o\theta|\Omega_o) = i(\theta|H\chi)$$

puisque $\chi \in D(H)$ d'après (jV). Mais, $\mathfrak{D}$ étant un cœur pour π_o (voir A6), (6.2.18) a lieu pour tout $\theta \in D(\pi_o)$; ce qui entraîne que $\Omega_o \in D(\pi_o^*) = D(\pi_o)$; d'où (6.2.16) d'après (A6.4), puis (6.2.17) d'après (6.2.18). Cela étant, on va montrer que,

(6.2.19) $$H\psi = \underline{H}\psi \quad \text{pour tout } \psi \in \mathfrak{D} ,$$

où $\underline{H}$ désigne encore l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o [lequel est bien défini en vertu de (6.2.16) ci-dessus ; voir 1.4]. Pour cela, on considère l'opérateur M dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ défini, avec $\mathfrak{D}$ comme domaine, par,

(6.2.20) $$M\psi = H\psi - \underline{H}\psi \quad (\psi \in \mathfrak{D}).$$

Puisque les opérateurs H et $\underline{H}$ possèdent tous deux la propriété (jj$^{\#}$), on a, $M(\chi\psi) = \chi M\psi$ pour tout $\psi \in \mathfrak{D}$; et, puisque H et $\underline{H}$ sont des opérateurs symétriques dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ (H par hypothèse et $\underline{H}$ d'après le Théorème 1.II), il en est de même de M; ce qui fait que, d'après le Lemme 6.2.2, il existe $\gamma \in L^2_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ tel que $M\psi = \gamma\psi$ pour tout $\psi \in \mathfrak{D}$. Mais, cette relation entraîne, par définition (6.2.20) de M, que, pour chaque $\theta \in \mathfrak{D}$,

(6.2.21) $$(H\theta|\psi) - (\underline{H}\theta|\psi) = (\gamma\theta|\psi) \quad (\psi \in \mathfrak{D}) ;$$

d'où, par densité de $\mathfrak{D}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$,

$$(H\theta|\Omega_o) - (\underline{H}\theta|\Omega_o) = (\gamma\theta|\Omega_o) \quad ;$$

donc aussi, puisque H et $\underline{H}$ vérifient (jjj) (H par hypothèse et $\underline{H}$ par définition), $(\gamma\theta|\Omega_o) = 0$; d'où, puisque $\theta \in \mathfrak{D}$ est arbitraire, $\gamma = 0$ et (6 2.19). De cette relation on déduit, puisque H est supposé fermé et que $\mathfrak{D}$ est un cœur pour $\underline{H}$ [Théorème 1.II, propriété (j)], que H prolonge $\underline{H}$. On va alors expliciter l'hypothèse (jV) [(1)] pour conclure comme suit : d'après (1.4.7) (Théorème 1.II) et ce qui précède, on a,

----

(1) Cette hypothèse n'est intervenue plus haut dans la démonstration que pour montrer que $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$; voir la remarque ci-dessous.

$$(6.2.22) \qquad H\pi_o\psi - \pi_o H\psi = iF'\psi \quad (\psi \in \mathfrak{D}),$$

où $F = \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta')$. Et de cette relation, il résulte, puisque H et π_o sont symétriques et appliquent $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$, que, pour tout $\theta \in \mathfrak{D}$,

$$(\pi_o H\theta|\psi) - (H\pi_o\theta|\psi) = i(F'\theta|\psi) \quad (\psi \in \mathfrak{D}) ;$$

donc, par densité de $\mathfrak{D}$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$,

$$(\pi_o H\theta|\Omega_o) - (H\pi_o\theta|\Omega_o) = i(F'\theta|\Omega_o) ;$$

ou encore, d'après (6.2.17) et (jjj), $(H\theta|H\chi) = (F'\theta|\Omega_o)$; et enfin, d'après (jV), $(\theta|Q) = (F'\theta|\Omega_o)$. D'où, puisque $\theta \in \mathfrak{D}$ est arbitraire, $F' = Q$. Autrement dit, la densité ρ de μ_o satisfait l'équation (d) (Lemme 1.5) ; ce qui fait que μ_o coïncide avec la mesure quasi-invariante spécifiée par Q. Et, d'après le Théorème 1.III (ou la proposition 1.6), l'opérateur $\underline{H}$ est alors auto-adjoint. D'où $H = \underline{H}$, puisque H est symétrique et prolonge $\underline{H}$ ainsi qu'on l'a vu ci-dessus.

cqfd.

<u>Remarque</u>.- La démonstration précédente montre aussi que, la mesure μ_o étant donnée comme en 1.4 [de telle sorte que $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$], l'opérateur Hamiltonien H engendré par μ_o est le seul opérateur fermé et symétrique dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ admettant $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ comme cœur et possédant les propriétés $(jj^{\#})$ et (jjj). Autrement dit, dans la caractérisation de H qu'énonce le Théorème 1.II, on peut supprimer l'hypothèse que H applique $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$ [propriété (j)] à condition de supposer que H est symétrique dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$.

6.3.- Démonstration du Théorème 6.I

On va procéder en trois étapes par introduction progressive des conditions imposées à la mesure en cause en plus de la quasi-invariance : le Théorème 6.I résulte ainsi des propositions 6.3.1, 6.3.2 et 6.3.3 ci-dessous, où on désigne toujours par Q un polynôme d'interaction standard, et par χ l'application identique de $\mathbb{R}$.

6.3.1.- Exploitation de la quasi-invariance : première équation du semi-groupe de transition

Le cocycle additif Λ étant défini comme en 6.1.2,

PROPOSITION.- Soient μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ (1) possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne, μ_o sa marginale fondamentale et $(N_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de transition associé (2). On suppose que μ est quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ avec e^{Λ} comme module de quasi-invariance et que,

$$Q \in L^1(\mathbb{R},\mu_o). \tag{6.3.1.}$$

Alors, le couple $(\mu_o,(N_t)_{t\geq 0})$ vérifie la propriété suivante ;

(SG) Pour tous $m > 0$, $\theta \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\psi \in C_b^1(\mathbb{R})$ et $(s,t,u) \in \mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,u\}}\theta)(N_{\{t,u,s\}}\psi)(N_{\{u,s,t\}}\chi)\,d\mu_o$$

$$= \frac{1}{2m} e^{-m|u-s|} \int_{\mathbb{R}} \theta' N_{|t-s|}\psi\,d\mu_o + \frac{1}{2m} e^{-m|u-t|}\int_{\mathbb{R}} \psi' N_{|t-s|}\theta\,d\mu_o \tag{6.3.2}$$

$$+ \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|u-v|}dv \int_{\mathbb{R}}(N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\chi)\,d\mu_o$$

$$- \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|u-v|}dv \int_{\mathbb{R}}(N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}Q)\,d\mu_o .$$

On pose ici,

$$\{a,b,c\} = |a \vee (b\wedge c) - a\wedge(b\vee c)| \text{ si } (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \;^{(3)}; \tag{6.3.3}$$

et on désigne par $C_b^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ qui sont bornées ainsi que leur dérivée ψ'. On note que, si $\gamma \in L^1(\mathbb{R},\mu_o)$, $(N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\gamma)$ appartient à $L^1(\mathbb{R},\mu_o)$ et $\int_{\mathbb{R}}(N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\gamma)\,d\mu_o$ est fonction continue et bornée

----

(1) Voir la remarque 3 ci-dessous.

(2) Voir 6.1.1.

(3) Voir la relation (6.3.4)

de $v \in \mathbb{R}$ d'après la proposition 6.1.1 ; ce qui fait que les intégrales intervenant dans l'équation (6.3.2) sont absolument convergentes en vertu de l'hypothèse (6.3.1). On note aussi que, si $\gamma \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R},\mu_o)$,

$$(6.3.4) \quad \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\gamma)\, d\mu_o$$

$$= E_\mu[(\theta \circ X_s)(\psi \circ X_t)(\gamma \circ X_v)]$$

quels que soient $(s,t,v) \in \mathbb{R}^3$, ainsi qu'il résulte de la propriété de Markov et de la propriété d'invariance Euclidienne de μ.

Afin d'établir cette proposition, on part de l'égalité de quasi-invariance (4.1.5) que la mesure μ est supposée satisfaire. En écrivant cette égalité avec $(\theta \circ X_s)(\psi \circ X_t)$ mis pour F et εf ($\varepsilon \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}$ (1)) mis pour f, on obtient,

$$(6.3.5) \quad \int_{\mathbb{W}} \theta(\omega(s)-\varepsilon f(s))\,\psi(\omega(t) - \varepsilon f(t))\,\mu(d\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{W}} \theta(\omega(s))\,\psi(\omega(t))\, e^{\Lambda(\varepsilon f,\omega)}\mu(d\omega).$$

Mais, pour chaque $f \in \mathcal{S}$ (1), les deux membres de cette égalité sont fonctions continûment dérivables de $\varepsilon \in \mathbb{R}$; et en égalant leurs dérivées calculées pour $\varepsilon = 0$, on obtient,

$$- f(s) \int_{\mathbb{W}} \theta'(\omega(s))\,\psi(\omega(t))\,\mu(d\omega) - f(t)\int_{\mathbb{W}} \theta(\omega(s))\,\psi'(\omega(t))\,\mu(d\omega)$$

$$(6.3.6) \quad = \int_{\mathbb{W}} \theta(\omega(s))\,\psi(\omega(t))\,\dot{\Lambda}(f,\omega)\,\mu(d\omega),$$

où,

$$(6.3.7) \quad \dot{\Lambda}(f,\omega) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big/_{\varepsilon=0} \Lambda(\varepsilon f,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \left[f''(v)\omega(v) - f(v)Q(\omega(v)) \right] dv$$

$(\omega \in \mathbb{W})$ (2) ;

------

(1) ou seulement $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; voir la remarque 3 ci-dessous.

(2) Voir à ce sujet en 5.2.2. la justification de (5.2.19).

l'intégrale écrite au second membre de (6.3.6) étant absolument convergente, car, en vertu de (6.3.7) et de l'hypothèse (6.3.1), on a,

$$(6.3.8) \qquad \int_{W} |\dot{\Lambda}(f,\omega)|\, \mu(d\omega) < +\infty .$$

[les dérivations sous le signe somme perpétrées pour passer de (6.3.5) à (6.3.6) peuvent être légitimées à partir du Lemme donné dans l'appendice E : cela est clair en ce qui concerne le premier membre de (6.3.5) puisque θ et ψ sont supposées appartenir à $C_b^1(\mathbb{R})$; et en ce qui concerne le second membre, il suffit de se reporter au Lemme 5.2.1 en tenant compte de (6.3.8)]. Et, en portant (6.3.7) dans (6.3.6) et en appliquant le Théorème de Fubini au second membre, il vient,

$$- f(t)\, E_\mu[(\theta' \circ X_s)(\psi \circ X_t)] - f(t)\, E_\mu[(\theta \circ X_s)(\psi' \circ X_t)]$$

$$(6.3.9) \qquad = \int_{\mathbb{R}} f''(v) E_\mu[(\theta \circ X_s)(\psi \circ X_t)(\chi \circ X_v)]dv$$

$$- \int_{\mathbb{R}} f(v) E_\mu[(\theta \circ X_s)(\psi \circ X_t)(Q \circ X_v)]dv \;;$$

ou encore, en retranchant $m^2 \int_{\mathbb{R}} f(v) E_\mu[(\theta \circ X_s)(\psi \circ X_t)(\chi \circ X_v)]dv$ aux deux membres, en réordonnant les termes et en tenant compte de (6.3.4),

$$\int_{\mathbb{R}} [-f''(v)+m^2 f(v)]dv \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\chi)\, d\mu_o$$

$$(6.3.10) \qquad = f(s) \int_{\mathbb{R}} \theta' N_{|t-s|} \psi\, d\mu_o + f(t) \int_{\mathbb{R}} \psi' N_{|t-s|} \theta\, d\mu_o$$

$$+ m^2 \int_{\mathbb{R}} f(v)dv \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\chi)\, d\mu_o$$

$$- \int_{\mathbb{R}} f(v)dv \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}Q)\, d\mu_o \;.$$

D'où on conclut à l'équation (6.3.2) annoncée par application de la proposition de l'appendice F, ce qui est licite puisque (6.3.10) a lieu pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que la fonction

$v \to \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,v\}}\theta)(N_{\{t,v,s\}}\psi)(N_{\{v,s,t\}}\gamma)\, d\mu_o$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ pour $\gamma = \chi$ ou $\gamma = Q$.

cqfd.

Remarque 1.- Le procédé de dérivation qui permet ci-dessus, en passant de (6.3.5) à (6.3.6), de déduire l'équation (6.3.2) satisfaite par le couple $(\mu_o, (N_t)_{t \geqslant 0})$ de l'équation de quasi-invariance (4.1.5) satisfaite par μ est essentiellement le même que celui qui permet de déduire de cette dernière équation, soit l'équation de Symanzik (voir 5.2.1 et 5.2.2), soit les équations de Schwinger (voir la remarque 5.3.3). En fait, ce procédé est le seul dont nous disposons pour exploiter la quasi-invariance de μ. On note qu'il ne fait pas intervenir de façon cruciale l'hypothèse selon laquelle Q est un polynôme (voir 1.7.5).

Remarque 2.- Il est naturel de se demander si, inversement, pour une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{W}, \mathfrak{F})$ possédant la propriété de Markov et la propriété d'invariance Euclidienne et telle que (6.3.1) soit satisfaite, la quasi-invariance en cause résulte de la propriété SG. A ce sujet, nous conjecturons que le couple $(\mu_o, (N_t)_{t \geqslant 0})$ spécifié par Q est le seul vérifiant (6.3.1) et la propriété SG dans l'ensemble des couples $(\mu_o, (N_t)_{t \geqslant 0})$ pour lesquels μ_o est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe d'opérateurs contractants dans $L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ possédant les propriétés (1) et (2) de la proposition 6.1.1. Cette conjecture sera établie ci-dessous (voir 6.3.3) en supposant de plus que les conditions RE1, RE2 et RE3 sont satisfaites.

Remarque 3.- La proposition ci-dessus reste valable si on remplace $\mathbb{W}$ par $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{F}$ par $\mathbb{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir la remarque 4 de (6.1.2).

6.3.2.- Seconde équation du semi-groupe de transition

On désigne ici par μ_o une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, par $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe d'opérateurs contractants dans $L^1(\mathbb{R}, \mu_o)$ possédant les propriétés (1) et (2) de la proposition 6.1.1, et par H l'unique opérateur auto-adjoint positif dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, l'opérateur e^{-tH} coïncide avec la restriction de N_t à $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$.

Dans ces conditions,

6.3.2

PROPOSITION.- On suppose que la valeur propre 0 de H est isolée et simple, et que,

(6.3.11) $$Q \in L^2(\mathbb{R},\mu_o).$$

Alors, si le couple $(\mu_o,(N_t)_{t\geqslant 0})$ possède la propriété SG [1], il possède aussi les propriétés SG1, SG2 , SG3 et SG4 ci-dessous :

(SG1) $(\Omega_o|Q) = 0$ [2]

(SG2) Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(6.3.12) $$(\Omega_o|\psi') = 2\int_o^{+\infty}(N_vQ\,\psi)dv.$$

(SG3) Pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(6.3.13) $$(\theta|\chi)-(\theta|\Omega_o)(\Omega_o|\chi) = \int_o^{+\infty} v(\theta\, N_vQ)dv.$$

(SG4) Pour tout $t \geqslant 0$, tout $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

(6.3.14) $$(\chi\theta|N_t\psi)-(N_t\theta|\chi\psi) = \int_o^t v(QN_v\theta|N_{t-v}\psi)dv + t\int_t^{+\infty}(N_t\theta|\psi N_{v-t}Q)dv - t(N_t\theta|\psi').$$

On note que les hypothèses faites ici sur le semi-groupe $(N_t)_{t\geqslant 0}$ entraînent comme en 6.3.1 que les intégrales figurant dans (6.3.2) [propriété SG] sont absolument convergentes. On note aussi que la condition spectrale imposée à H entraîne que, pour $\eta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, $\gamma \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ et $v \geqslant 0$,

(6.3.15) $$|(\eta|N_v\gamma)-(\eta|\Omega_o)(\Omega_o|\gamma)| \leqslant \|\eta\|_2\,\|\gamma\|_2\, e^{-\lambda_1 v}, \text{ où}$$

(6.3.16) $$\lambda_1 = \inf\,(\sigma(H)\setminus\{0\}) > 0 .$$

----

(1) Proposition 6.3.1.

(2) On désigne toujours par Ω_o la classe modulo μ_o de la constante 1.

En particulier, SG1 et (6.3.15) entraînent, compte tenu de l'hypothèse (6.3.11), que,

$$(6.3.17)\qquad \|N_v Q\|_2 \leqslant \|Q\|_2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 v} \qquad (v \geqslant 0)\ ;$$

d'où il résulte que les intégrales figurant aux seconds membres de (6.3.12), (6.3.13) et (6.3.14) sont absolument convergentes.

On commence par établir SG1 en faisant $s = t = u = 0$ et $\theta = \psi = \Omega_o$ dans (6.3.2) : puisque N_o est l'identité, cela donne,

$$(\Omega_o|\chi) = \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|v|}(\Omega_o|N_{|v|}\chi)\,dv - \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|v|}(\Omega_o|N_{|v|}Q)\,dv\ ;$$

d'où $(\Omega_o|Q) = 0$, puisque $(\Omega_o|N_{|v|}\gamma) = (\Omega_o|\gamma)$ pour $\gamma = Q$ ou $\gamma = \chi$ et que,

$$(6.3.18)\qquad \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|v|}\,dv = 1.$$

Soient ensuite θ et ψ des éléments de $C_b^1(\mathbb{R})$. Posant, pour $\gamma = \chi$ ou $\gamma = Q$,

$$(6.3.19)\qquad F_\gamma(s,t,u) = \int_{\mathbb{R}} (N_{\{s,t,u\}}\overline{\theta})(N_{\{t,u,s\}}\psi)N_{\{u,s,t\}}\gamma)\,d\mu_o,$$

on remarque que, puisque les opérateurs N_v sont contractants dans $L^\infty(\mathbb{R},\mu_o)$ et dans $L^1(\mathbb{R},\mu_o)$,

$$(6.3.20)\qquad |F_\chi(s,t,u)| \leqslant \|\theta\|_\infty\,\|\psi\|_\infty\,\|\chi\|_2 < +\infty\ ;$$

donc, d'après (6.3.18),

$$(6.3.21)\qquad \limsup_{m\downarrow 0}\left|\frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|u-v|}F_\chi(s,t,v)\,dv\right| < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$(6.3.22)\qquad \lim_{m\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|u-v|}F_Q(s,t,v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} F_Q(s,t,v)\,dv,$$

en vertu du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, car (6.3.17) entraîne que, si $\left|v - \frac{s+t}{2}\right| \geqslant |t-s|$,

$$(6.3.23) \qquad \left|F_Q(s,t,v)\right| \leqslant \|\theta\|_\infty \ \|\psi\|_\infty \ \|Q\|_2 \ e^{-\frac{1}{2}\lambda_1\left|v-\frac{s+t}{2}\right|} .$$

Multipliant alors par 2m les deux membres de (6.3.2) écrite avec $\overline{\theta}$ mis pour θ et faisant tendre m vers zéro, on obtient, d'après (6.3.21) et (6.3.22),

$$(6.3.24) \qquad (\theta' | N_{|t-s|}\psi) + (N_{|t-s|}\theta | \psi') = \int_{\mathbb{R}} F_Q(s,t,v)dv.$$

Et, en y faisant $s = t = 0$ et $\theta = \Omega_o$, cette relation se réduit à (6.3.12) ; ce qui établit la propriété SG2. Enfin, pour établir SG3 et SG4, on réécrit (6.3.2) (avec $\overline{\theta}$ mis pour θ) en y tenant compte de (6.3.24) ; ce qui donne,

$$\begin{aligned} 2F_\chi(s,t,u) = {} & \frac{1}{m}(e^{-m|u-s|}-1)(\theta'|N_{|t-s|}\psi) \\ (6.3.25) \qquad & +\frac{1}{m}(e^{-m|u-t|}-1)(N_{|t-s|}\theta|\psi') \\ & + m\int_{\mathbb{R}} e^{-m|u-v|}F_\chi(s,t,v)dv \\ & - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m}(e^{-m|u-v|}-1)F_Q(s,t,v)dv . \end{aligned}$$

Mais, (6.3.15) entraîne que, si $\left|v - \frac{s+t}{2}\right| \geqslant |t-s|$,

$$(6.3.26) \qquad \left|F_\chi(s,t,v) - (\theta|N_{|t-s|}\psi)(\Omega_o|\chi)\right| \leqslant \|\theta\|_\infty \|\psi\|_\infty \|\chi\|_2 \ e^{-\lambda_1\left|v-\frac{s+t}{2}\right|} ;$$

et cette majoration, la majoration (6.3.23) et la relation $\frac{1}{m}\left|e^{-m|u-v|}-1\right| \leqslant |u-v|$ permettent d'appliquer le Théorème de Lebesgue pour passer à la limite au second membre de (6 3.25) lorsque m tend vers zéro ; ce qui donne [(1)], compte tenu de (6.3.18),

$$\begin{aligned} 2F_\chi(s,t,u) = {} & -|u-s|(\theta'|N_{|t-s|}\psi) - |u-t|(N_{|t-s|}\theta|\psi') \\ (6.3.27) \qquad & + 2(\theta|N_{|t-s|}\psi)(\Omega_o|\chi) + \int_{\mathbb{R}} |u-v|F_Q(s,t,v)dv ; \end{aligned}$$

(Voir la remarque ci-dessous.)

ou encore, en tenant compte de la relation obtenue en multipliant les deux membres de (6.3.24) par $|u|$,

$$2\, F_\chi(s,t,u) = -(|u-s| - |u|)(\theta'|N_{|t-s|}\psi) - (|u-t| - |u|)(N_{|t-s|}\theta|\psi')$$

$$+\, 2(\theta|N_{|t-s|}\psi)(\Omega_o|\chi) + \int_{\mathbb{R}} (|u-v| - |u|)F_Q(s,t,v)\, dv. \tag{6.3.28}$$

Cela étant, d'une part (6.3.28) se réduit à (6.3.13) lorsqu'on y fait $s = t = u = 0$ et $\psi = \Omega_o$; et d'autre part, en retranchant membre à membre (6.3.28) écrite pour $s = 0$, $u = 0$, et (6.3.28) écrite pour $s = 0$, $u = t$, on obtient, pour $t \geqslant 0$,

$$F_\chi(0,t,0) - F_\chi(0,t,t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(|v| - |t-v| + t)F_Q(0,t,v)\,dv - t(N_t\theta|\psi'). \tag{6.3.29}$$

Et cette relation n'est autre que (6.3.14).

cqfd.

Remarque.- Dans la situation de la proposition 6.3.1, mais en faisant les mêmes hypothèses que dans la proposition 6.3.2, on pourrait déduire (6.3.24) et (6.3.27) de (6.3.9) en utilisant l'inversion de l'opérateur $-\Delta$ au lieu de celle de l'opérateur $-\Delta+m^2$ grâce à laquelle on a déduit (6.3.2) de (6.3.10). On a préféré ici introduire comme intermédiaire l'équation (6.3.2) car, contrairement à (6.3.24) et (6.3.27), cette équation ne réclame aucun condition préalable sur le spectre de H.

6.3.3.- Fin de la démonstration du Théorème 6.I

La situation étant celle de 6.3.2,

PROPOSITION.- On suppose que le couple $(\mu_o, (N_t)_{t \geqslant 0})$ satisfait, d'une part les conditions RE1, RE2 et RE3, et d'autre part les équations SG1, SG2, SG3 et SG4. Alors, μ_o coïncide avec la mesure quasi-invariante sur $\mathbb{R}$ spécifiée par Q, et H avec l'opérateur Hamiltonien engendré par μ_o.

On va s'appuyer sur le Théorème 6.II : puisque, d'une part l'hypothèse de régularité faite sur μ_o dans ce Théorème coïncide avec

RE3 et ($j^{\#}$) coïncide avec RE2, et d'autre part (jjj) est satisfaite en vertu du caractère Markovien des opérateurs N_t [relation (6.1.3)], il reste à établir que ($jj^{\#}$) et (jV) découlent des hypothèses faites. On déduit d'abord (jV) de SG1 et SG3 (ainsi que RE1 et RE3) : soit $E(\cdot)$ la mesure spectrale, définie sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ et à valeurs dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, qui décompose H [i.e $H = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda E(d\lambda)$], et E_o le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ orthogonal à Ω_o. En vertu de RE1, on a, d'une part, pour tout $\theta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$,

$$(\theta|\chi)-(\theta|\Omega_o)(\Omega_o|\chi) = (\theta|E_o\chi) \tag{6.3.30}$$

[on note que $\chi \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ d'après (6.1.6)] ; et d'autre part, en définissant $\lambda_1 > 0$ par (6.3.16),

$$E_o = E([\lambda_1,+\infty)) \quad ; \tag{6.3.31}$$

d'où il résulte que, en vertu de SG1, du Théorème de Fubini, et de ce que $\int_o^{+\infty} v\, e^{-\lambda v} dv = 1/\lambda^2$ $(\lambda > 0)$,

$$\int_o^{+\infty} v(\theta|N_v Q)dv = \int_{\mathbb{R}_+} \beta(\lambda)(\theta|E(d\lambda)Q) \quad , \tag{6.3.32}$$

où β est la fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$ définie par, $\beta(\lambda) = 0$ si $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$ et $\beta(\lambda) = 1/\lambda^2$ si $\lambda \geqslant \lambda_1$.
Ainsi, d'après (6.3.30) et (6.3.32), SG3 équivaut à,

$$E_o\chi = \int_{\mathbb{R}_+} \beta(\lambda)E(d\lambda)Q. \tag{6.2.33}$$

Mais, puisque $\lambda^2\beta(\lambda) = 1_{[\lambda_1,+\infty)}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et compte tenu de (6.3.31), on a, par calcul fonctionnel,

$$H^2\int_{\mathbb{R}_+} \beta(\lambda)E(d\lambda) = E_o \quad \text{(domaines y compris !).}$$

Et, en conjuguant cette relation avec (6.3.33), on obtient,

$$E_o\chi \in D(H^2) \quad \text{et} \quad H^2E_o\chi = E_oQ.$$

D'où (jV), puisque $HE_o = H$ d'après (jjj) et $E_oQ = Q$ d'après SG1. On peut alors établir ($jj^{\#}$) à partir de (jV), SG2 et SG4 (ainsi que RE1, RE2 et RE3) : on commence par remarquer que (jV) entraîne que,

(6.3.34) $$\chi \in D(H) \quad \text{et,}$$

(6.3.35) $$\int_0^{+\infty} (N_vQ|\psi)dv = (H\chi|\psi) \qquad (\psi \in \mathfrak{D}) \ ,$$

ainsi qu'on le voit par application du Théorème de Fubini et calcul fonctionnel ; et que SG2 et (6.3.35) entraînent que,

(6.3.36) $$H\chi = \zeta \qquad \text{avec} \qquad \zeta = -\tfrac{1}{2}\rho'/\rho$$

[on note que la régularité de ρ stipulée par RE3 intervient dans l'intégration par parties qui fournit (6.3.36)]. On exploite ensuite SG4 en calculant la dérivée en $t = 0$ des deux membres de (6.3.14) ; ce qui donne, pour $\theta \in \mathfrak{D}$ et $\psi \in \mathfrak{D}$,

(6.3.37) $$-(\chi\theta|H\psi) + (H\theta|\chi\psi) = \int_0^{+\infty} (\theta|\psi N_vQ)dv - (\theta|\psi').$$

La dérivation ainsi effectuée au premier membre de (6.3.14) est justifiée par RE2. Et, pour justifier celle effectuée au second membre $J(t)$, il suffit, puisque $J(0) = 0$, d'étudier la limite lorsque t tend vers zéro de $(J(t)/t$; ce qui n'offre aucune difficulté, compte tenu de (6.1.6), (6.3.17) et de ce que (N_t) est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs contractants dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Mais, compte tenu de (6.3.35) (écrite avec $\theta\overline{\psi}$ mis pour ψ), (6.3.37) s'écrit,

(6.3.38) $$(H\theta|\chi\psi) - (\chi\theta|H\psi) = (\theta|\psi H\chi) - (\theta|\psi').$$

Et, en retranchant membre à membre (6.3.38) écrite avec $\chi\psi$ mis pour ψ et (6.3.38) écrite avec $\chi\theta$ mis pour θ, on obtient, compte tenu de ce que $(\chi\theta|\psi H\chi) = (\theta|\chi\psi H\chi)$ et de ce que H est un opérateur symétrique,

(6.3.39) $$(\theta|H(\chi^2\psi)) - 2(\chi\theta|H(\chi\psi)) + (\chi^2\theta|H\psi) + (\theta|\psi) = 0 \quad (\theta\in\mathfrak{D},\psi\in\mathfrak{D})$$ (1)

----

(1) Formellement (6.3.39) s'écrit $(\theta|[[H,\Phi_o],\Phi_o]\psi) + (\theta|\psi) = 0.$

Cela étant, désignant par M l'application linéaire de $\mathfrak{D}$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ définie par,

(6.3.40) $$M\psi = i(H(\chi\psi) - \chi H\psi) - \pi_o\psi \quad (\psi \in \mathfrak{D}),$$

pour conclure à (jj$^{\#}$), il s'agit de montrer que,

(6.3.41) $$M\psi = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in \mathfrak{D}.$$

A cette fin, on remarque d'abord que (6.3.39) et la relation de commutation canonique $\pi_o(\chi\psi) - \chi\pi_o\psi = -i\psi$ ($\psi \in \mathfrak{D}$) entraînent que,

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{\theta}(M(\chi\psi) - \chi M\psi)d\mu_o = 0 \quad (\theta \in \mathfrak{D}\ ,\ \psi \in \mathfrak{D}).$$

Donc, l'opérateur M vérifie la condition (6.2.3) du Lemme 6.2.2 ; et comme M vérifie aussi la condition (6.2.4) [en vertu de ce que H, Φ_o et π_o sont des opérateurs symétriques dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$] ce Lemme entraîne l'existence de $\gamma \in L^2_{loc}(\mathbb{R},\mu_o)$ tel que (6.2.5) soit satisfaite. Finalement, afin de montrer que $\gamma = 0$, on multiplie scalairement par $\theta \in \mathfrak{D}$ les deux membres de (6.3.40) après y avoir substitué $\gamma\psi$ à $M\psi$; ce qui donne, compte tenu de ce que H et π_o sont des opérateurs symétriques,

$$(\theta\gamma|\psi) = i(H\theta|\chi\psi) - i(H(\chi\theta)|\psi) - (\pi_o\theta|\psi) \quad (\psi \in \mathfrak{D}).$$

D'où,

(6.3.42) $$\int_{\mathbb{R}} \bar{\theta}\gamma d\mu_o = i(H\theta|\chi) - i(H(\chi\theta)|\Omega_o) - (\pi_o\theta|\Omega_o),$$

ainsi qu'on le voit en considérant une suite (ψ_n) de fonctions de $\mathfrak{D}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \Omega_o$ et $\lim_{n\to\infty} \chi\psi_n = \chi$ dans $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$. Et d'après (jjj), (6.3.34), (6.3.36) et (A6.5), le second membre de (6.3.42) est nul. D'où $\gamma = 0$, (6.3.41) et la propriété (jj$^{\#}$).

cqfd.

6.4.- Compléments et remarques

6.4.1.- Dans le cas du champ libre de masse $m > 0$ (voir 1 7.2, 2.6.2 et 4.3.2), toutes les propriétés d'unicité souhaitées sont vraies. Désignant par $Q^{(m)}$ le polynôme m^2X, et par $\Lambda^{(m)}$ le cocycle correspondant [relation (4.3.5)], on peut énoncer,

> PROPOSITION.- (1) La mesure Euclidienne $\mu^{(m)}$ spécifiée par l'interaction $Q^{(m)}$ est la seule mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ avec $e^{\Lambda^{(m)}}$ comme module de quasi-invariance.
>
> (2) La transformée de Fourier $\mathcal{J}^{(m)}$ de $\mu^{(m)}$ est le seul élément $\mathcal{J}$ de $\mathfrak{B}^{\infty}(\mathfrak{S})$ vérifiant l'équation de Symanzik spécifiée par $Q^{(m)}$ et tel que $\mathcal{J}(0) = 1$ (1).
>
> (3) La suite $(S_n^{(m)})_{n\geq 0}$ des fonctions de Schwinger associées à $\mu^{(m)}$ est le seul élément $S = (S_n)_{n\geq 0}$ de $\mathfrak{G}$ vérifiant les équations de Schwinger spécifiées par $Q^{(m)}$ et tel que $S_o = 1$. (2)

En effet, soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ avec $e^{\Lambda^{(m)}}$ comme module de quasi-invariance. On a, en particulier, pour chaque $f \in \mathfrak{S}$,

$$\int_{\mathbb{W}} e^{\Lambda^{(m)}(f,\omega)}\mu(d\omega) = 1 \ ; \tag{6.4.1}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (4.3.5),

$$\int_{\mathbb{W}} e^{-\langle\omega,\Sigma_m f\rangle}\mu(d\omega) = e^{\frac{1}{2}\langle f,\Sigma_m f\rangle} .$$

Donc, en écrivant cette relation avec $-\lambda\Sigma_m^{-1}f$ mis pour f,

-----

(1) Voir 5.1.2.

(2) Voir 5.3.1.

$$(6.4.2) \qquad \int_W e^{\lambda<\omega,f>} \mu(d\omega) = e^{\frac{1}{2}\lambda^2<\Sigma_m^{-1}f,f>}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où on déduit que $e^{\lambda<\cdot,f>} \in \mathcal{L}^1(W,\mathcal{F},\mu)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; et la fonction $\lambda \to \int_W e^{\lambda<\omega,f>} \mu(d\omega)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ est alors entière ainsi qu'il résulte de la formule de Cauchy et du Théorème de Fubini. Ainsi, par prolongement analytique, la relation (6.4.2) est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; en particulier, en y faisant $\lambda = i$ et en tenant compte de (2.6.2), on voit que la transformée de Fourier $\mathcal{J}$ de μ coïncide avec celle de $\mu^{(m)}$. D'où $\mu = \mu^{(m)}$ en vertu de l'injectivité de la transformation de Fourier des mesures sur $\mathcal{S}'$ et de ce que $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ (proposition 2.5.1)(1).
Passant ensuite à la propriété (2), soit $\mathcal{J}$ un élément de $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$ vérifiant l'équation de Symanzik spécifiée par $Q^{(m)}$. Cette équation donne, pour chaque $g \in \mathcal{S}$,

$$(6.4.3) \qquad -\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=t} \partial_s \mathcal{J}(g) + m^2 \partial_t \mathcal{J}(g) = -g(t)\mathcal{J}(g) \qquad (t \in \mathbb{R}) ;$$

ou encore, en vertu de la proposition de l'appendice F et compte tenu de ce que la fonction $t \to \partial_t \mathcal{J}(g)$ est bornée par définition de $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$,

$$\partial_t \mathcal{J}(g) = -\Sigma_m^{-1} g(t)\mathcal{J}(g) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

D'où, par définition de l'opérateur ∂_t, pour tout $f \in \mathcal{S}$,

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \mathcal{J}(g+\alpha f) = -<f,\Sigma_m^{-1}g> \mathcal{J}(g).$$

Mais, en écrivant cette relation avec λf mis pour g, il vient,

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=\lambda} \mathcal{J}(\alpha f) = -\lambda<f,\Sigma_m^{-1}f>\mathcal{J}(\lambda f) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) ;$$

et, en intégrant cette équation différentielle en λ, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\lambda f) &= \mathcal{J}(0)\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2<f,\Sigma_m^{-1}f>} \\ &= \mathcal{J}(0)\,\mathcal{J}^{(m)}(\lambda f) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

------

(1) Cette démonstration nous a été communiquée par G. Royer (voir [35]).

D'où $\mathbb{J} = \mathbb{J}^{(m)}$ si on suppose de plus que $\mathbb{J}(0) = 1$. Enfin, en ce qui concerne la propriété (3), soit $(S_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathcal{G}$ vérifiant les équations de Schwinger spécifiées par $Q^{(m)}$. Prenant ces équations sous leur forme intégrale (5.3.17), (5.3.18) (proposition 5.3.4), elles se réduisent ici à,

$$(6.4.4) \qquad S_1(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \text{et,}$$

$$(6.4.5) \quad S_n(t_1,\ldots,t_n) = \frac{1}{2m} \sum_{j=2}^{n} e^{-m|t_1-t_j|} S_{n-2}(t_2,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)$$

$$(n \geq 2,\ (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n) \ ;$$

et il est clair que, une fois donné $S_o = 1$, ces équations permettent de déterminer tous les S_n de proche en proche ; d'où l'unicité annoncée.

cqfd.

Remarque.- L'unicité stipulée par la propriété (1) de la proposition précédente ne subsiste pas si on remplace $\mathbb{W}$ par $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathfrak{S}$ par $\mathbb{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, en ce sens qu'il existe une infinité de mesures de probabilité sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ quasi-invariantes par les translations de $\mathbb{D}$ avec $e^{\Lambda^{(m)}}$ comme module de quasi-invariance. Toutefois, parmi ces mesures, $\mu^{(m)}$ est la seule qui soit portée par $\mathbb{W}$ ou seulement par $\mathfrak{S}'$ et également la seule possédant la propriété d'invariance Euclidienne.

Dans le même ordre d'idées, on peut étudier l'équation de Symanzik dans l'espace $\mathcal{B}^{\infty}(\mathbb{D})$ défini à partir de $\mathbb{D}$ comme $\mathcal{B}^{\infty}(\mathfrak{S})$ l'est à partir de $\mathfrak{S}$, mais en omettant les diverses conditions de bornitude intervenant dans la définition de ce dernier espace. Et cette étude donne lieu à des remarques analogues à celles faites ci-dessus. En particulier, on peut montrer que, pour qu'une fonctionnelle $\mathbb{J} \in \mathcal{B}^{\infty}(\mathbb{D})$ soit solution de l'équation de Symanzik (6.4.3) (pour tout $g \in \mathbb{D}$), il faut et il suffit qu'elle soit de la forme,

$$(6.4.6) \quad \mathbb{J}(g) = \mathbb{J}^{(m)}(g) \cdot K(\mathbb{E}_+^{(m)}(g), \mathbb{E}_-^{(m)}(g)) \quad (g \in \mathbb{D}),$$

où K est une fonction complexe de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et où

$$(6.4.7)\qquad \mathbb{E}_+^{(m)}(g) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{mt}dt \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_-^{(m)}(g) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-mt}dt.$$

6.4.2.- Dans la perspective où, au-delà du Théorème 6.I, les mesures quasi-invariantes en cause sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ sont déterminées par leur module de quasi-invariance, il est naturel de se demander, pour ces mesures, à quelles propriétés du module de quasi-invariance correspond la propriété de Markov.

Pour étudier cette question, on se place ici dans la situation suivante : on désigne par μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{W},\mathfrak{F})$ quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ (1) ; et pour chaque $f \in \mathfrak{S}$, on désigne par $\underline{a}_\mu(f)$ l'élément de $L^1(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ qui est la densité par rapport à μ de la mesure translatée μ^f. Ainsi, l'égalité de quasi-invariance (1) s'écrit,

$$(6.4.8)\qquad E_\mu[T(f)Z] = E_\mu[\underline{a}_\mu(-f)Z] \quad (Z \in L^\infty(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu),\ f \in \mathfrak{S}),$$

où $T(f)$ désigne la transformation de $L^0(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$ induite par la transformation $\omega \to \omega - f$ de $\mathbb{W}$ [i.e, pour $Z \in L^0(\mathbb{W},\mathfrak{F},\mu)$, $T(f)Z$ désigne la classe modulo μ commune aux fonctions $F(\cdot + f)$ avec $F \in Z$] ; d'où résulte la relation de cocycle (2),

$$(6.4.9)\qquad \underline{a}_\mu(f+g) = \underline{a}_\mu(f)T(f)\underline{a}_\mu(g) \quad (f \in \mathfrak{S},\ g \in \mathfrak{S}).$$

Cela étant, on considère la <u>propriété de localité</u> suivante de μ :
$\underline{\mathrm{LC}}(\mu)$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathfrak{S}$ tels que supp $f \subset (-\infty,t]$,

$$(6.4.10)\qquad \underline{a}_\mu(f) \in L^1(\mathbb{W},\mathfrak{F}_{(-\infty,t]},\mu).$$

Et on aimerait pouvoir énoncer l'équivalence,

----

(1) On pourrait aussi prendre $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ au lieu de $\mathbb{W}$ et $\mathbb{D}$ au lieu de $\mathfrak{S}$ (voir la remarque 4 de 6.1.2).
(2) Voir A1.

(6.4.11) $$\underline{\underline{MK}}(\mu) \Longleftrightarrow \underline{\underline{LC}}(\mu)$$ (1)

En fait, sans autre hypothèse sur μ que la quasi-invariance supposée ci-dessus, on a $\underline{\underline{MK}}(\mu) \Longrightarrow \underline{\underline{LC}}(\mu)$, ainsi qu'on va d'abord le montrer ; et, la réciproque n'étant pas vraie en général (voir la remarque ci-dessous), on introduit ensuite une condition de régularité supplémentaire qui permet de conclure (la condition (*) ci-dessous).

On va s'appuyer sur le Lemme suivant,

<u>LEMME</u> (2) .- Pour chaque sous-ensemble J de $\mathbb{R}$ (3),

(1) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et tout $Z \in L^o(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_J, \mu)$,

(6.4.12) $$T(f)Z \in L^o(\mathbb{W}, \mathfrak{F}_J, \mu), \quad \text{et,}$$

(6.4.13) $$T(f)Z = Z \quad \text{si } f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in J.$$

(2) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et tout $g \in \mathfrak{S}$,

(6.4.14) $$E_\mu[\underline{a}_\mu(f+g)/\mathfrak{F}_J] = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathfrak{F}_J]T(f)E_\mu[\underline{a}_\mu(g)/\mathfrak{F}_J].$$

(3) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et tout $Z \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathfrak{F}, \mu)$,

(6.4.15) $$E_\mu[T(f)Z/\mathfrak{F}_J]T(f)E_\mu[\underline{a}_\mu(-f)/\mathfrak{F}_J] = T(f)E_\mu[Z\ \underline{a}_\mu(-f)/\mathfrak{F}_J].$$

En effet, on commence par vérifier que (6.4.12) et (6.4.13) sont vérifiées lorsque Z ne dépend que d'un ensemble fini de coordonnées X_t ($t \in \mathbb{R}$) ; puis on passe au cas général en utilisant le Théorème de prolongement par mesurabilité (4). D'où la propriété (1). Ensuite, en ce qui concerne la propriété (2), posant $\underline{a}_\mu^J(f) = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathfrak{F}_J]$ ($f \in \mathfrak{S}$), la relation (6.4.8) donne,

----

(1) en ce qui concerne $\underline{\underline{MK}}(\mu)$, voir 4.2.1.

(2) sous la seule hypothèse de quasi-invariance faite ci-dessus sur μ.

(3) avec les notations introduites en 2.1.1.

(4) voir Meyer [9], Théorème 1.20.

(6.4.16) $E_\mu[T(f)Z] = E_\mu[\underline{a}_\mu^J(-f)Z] \quad (f \in \mathfrak{S}, \; Z \in L^\infty(W, \mathcal{F}_J, \mu)).$

Et, en appliquant cette relation et en tenant compte de la propriété (1) déjà établie, on obtient (6.4.14) via les égalités suivantes où $Z \in L^\infty(W, \mathcal{F}_J, \mu)$ est arbitraire,

$$\begin{aligned} E_\mu[Z\underline{a}_\mu(f+g)] &= E_\mu[T(-f-g)Z] = E_\mu[T(-g)T(-f)Z] \\ &= E_\mu[\underline{a}_\mu^J(g)T(-f)Z] \\ &= E_\mu[T(-f)(ZT(f)\underline{a}_\mu^J(g))] \\ &= E_\mu[Z\underline{a}_\mu(f)T(f)\underline{a}_\mu^J(g)]^{(1)} . \end{aligned}$$

Enfin, en ce qui concerne la propriété (3), on remarque d'abord que (6.4.14) écrite pour $g = -f$ donne,

$$\Omega = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_J]T(f)E_\mu[\underline{a}_\mu(-f)/\mathcal{F}_J]^{(2)} \; ;$$

ce qui fait que (6.4.15) équivaut à,

(6.4.17) $E_\mu[T(f)Z/\mathcal{F}_J] = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_J]T(f)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathcal{F}_J].$

Mais, en supposant d'abord $Z \geqslant 0$, on a, en désignant par X le second membre de (6.4.17),

$$X = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)T(f)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathcal{F}_J]/\mathcal{F}_J], \qquad \text{puisque,}$$

$T(f)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathcal{F}_J] \in L^0(W, \mathcal{F}_J, \mu)$ d'après la propriété (1) (voir le nota à la fin de 4.2.1). Donc, si $Y \in L^\infty(W, \mathcal{F}_J, \mu)$, avec $Y \geqslant 0$, on a,

------

(1) En sortant du cadre adopté ici pour la quasi-invariance, on peut aussi dire que $\underline{a}_\mu^J$ est le module de quasi-invariance de la restriction de μ à $\mathcal{F}_J$ et que (6.4.14) est la relation de cocycle correspondante.
(2) En désignant toujours (voir 2.3) par Ω la classe modulo μ de la constante 1.

$$E_\mu[YX] = E_\mu[Y\underline{a}_\mu(f)T(f)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathfrak{S}_J]]$$

$$= E_\mu[\underline{a}_\mu(-f)(T(-f)\underline{a}_\mu(f))(T(-f)Y)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathfrak{S}_J]] ,$$

en vertu de (6.4.8) étendue aux fonctions mesurables à valeurs dans $[0,+\infty]$,

$$= E_\mu[(T(-f)Y)E_\mu[Z\underline{a}_\mu(-f)/\mathfrak{S}_J]]$$, d'après la relation de cocycle (6.4.9) écrite avec $g = -f$,

$$= E_\mu[(T(-f)Y)Z\underline{a}_\mu(-f)],$$ puisque $T(-f)Y \in L^\infty(W,\mathfrak{S}_J,\mu)$,

$$= E_\mu[\underline{a}_\mu(f)(T(f)\underline{a}_\mu(-f))YT(f)Z]$$ d'après (6.4.8)

$$= E_\mu[YT(f)Z],$$ encore d'après (6.4.9). Ainsi,

$$E_\mu[YX] = E_\mu[YE_\mu[T(f)Z/\mathfrak{S}_J]] ,$$

pour tout $Y \in L^\infty(W,\mathfrak{S}_J,\mu)$; d'où (6.4.17) d'abord pour $Z \geqslant 0$, puis pour tout $Z \in L^\infty(W,\mathfrak{S},\mu)$.

cqfd.

On peut alors montrer que $\underline{\underline{MK}}(\mu) \Longrightarrow \underline{\underline{LC}}(\mu)$:

Supposant que μ possède la propriété de Markov $\underline{\underline{MK}}(\mu)$, on désigne par f un élément de $\mathfrak{F}$ tel que Supp $f \subset (-\infty,t]$ et par Z un élément de $L^\infty(W,\mathfrak{S}_{[t,+\infty)},\mu)$. On a lors, d'après la propriété (1) du Lemme [relation (6.4.13) avec $(-\infty,t]$ mis pour J] et d'après l'hypothèse faite sur f,

(6.4.18) $$T(f)Z = Z.$$

Par ailleurs, d'apres la propriété de Markov,

(6.4.19) $$E_\mu[Z/\mathfrak{S}_{(-\infty,t]}] = E_\mu[Z/\mathfrak{S}_{\{t\}}] ;$$

mais, de nouveau d'après la propriété (1) du Lemme [relation (6.4.13) avec $\{t\}$ mis pour J], on a,

(6.4.20) $$T(f)E_\mu[Z/\mathcal{F}_{\{t\}}] = E_\mu[Z/\mathcal{F}_{\{t\}}]$$

Donc, en conjuguant (6.4.18), (6.4.19) et (6.4.20),

$$E_\mu[T(f)Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] = T(f)E_\mu[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}].$$

Et, en portant cette relation dans (6.4.15) écrite avec $(-\infty,t]$ mis pour J et -f mis pour f, on obtient, après avoir appliqué l'opérateur T(-f) aux deux membres ,

$$E_\mu[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]\, E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] = E_\mu[Z\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] \quad ;$$

ou encore, pour tout $Y \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{(-\infty,t]},\mu)$,

$$E_\mu[YZE_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]] = E_\mu[YZ\underline{a}_\mu(f)].$$

Mais, $Y \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{(-\infty,t]},\mu)$ et $Z \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)},\mu)$ étant arbitraires dans cette relation, le Théorème de prolongement par mesurabilité entraîne que,

$$E_\mu[XE_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]] = E_\mu[X\underline{a}_\mu(f)]$$

pour tout $X \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F},\mu)$. D'où $\underline{a}_\mu(f) = E_\mu[\underline{a}_\mu(f)/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]$ et la relation (6.4.10) à établir.

En ce qui concerne la réciproque, on peut procéder comme suit : supposant que la propriété $\underline{\underline{LC}}(\mu)$ est vérifiée, on remarque que la propriété (3) du Lemme entraîne dans ce cas (i.e avec $(-\infty,t]$ mis pour J) que,

(6.4.21) $$E_\mu[T(f)Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] = T(f)E_\mu[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}],$$

pour tout $Z \in L^\infty(\mathbb{W}, \mathcal{F},\mu)$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathfrak{F}$ tel que, (6.4.22) $\quad\quad \operatorname{supp} f \subset (-\infty, t]$.

En particulier, si $Z \in L^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)}, \mu)$, on a $T(f)Z = Z$ d'après la propriété (1) du Lemme ; donc (6 4.21) se réduit à,

(6.4.23) $\quad\quad E_{\mu}[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] = T(f)E_{\mu}[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]$.

Et, pour établir que μ possède la propriété de Markov, il s'agit de déduire de (6.4.23), valable pour tout $f \in \mathfrak{S}$ vérifiant (6.4.22), que,

(6.4.24) $\quad\quad E_{\mu}[Z/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}] \in L^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{\{t\}}, \mu)$;

cela, au moins pour tout $Z \in L^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)}, \mu)$ de la forme $\varphi \odot X_u$ avec $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ et $u \geqslant t$. A cette fin, on introduit la condition suivante :

> (*) Pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ et tous $t \leqslant u$, il existe un représentant F de la classe $E_{\mu}[\varphi \odot X_u/\mathcal{F}_{(-\infty,t]}]$ qui est une fonction bornée et continue sur $\mathbb{W}$ lorsque cet espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$ [(1)].

On note d'abord que, lorsque μ est la mesure Euclidienne spécifiée par le polynôme d'interaction standard Q, cette condition est satisfaite en prenant (avec les notations de 2.1.1), $F = N_{u-t}\varphi \circ X_t$ [en effet, $N_{u-t}\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ d'après la proposition 2.1.2]. Cela étant, on peut conclure comme suit à la propriété de Markov en utilisant la condition (*) : on vérifie d'abord que la propriété de quasi-invariance de μ entraîne que tout ouvert non vide de $\mathbb{W}$ a une μ mesure > 0 ; d'où il résulte que (6.4.23) (écrite avec $\varphi \odot X_u$ mis pour Z) entraîne que $F(\omega+f) = F(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{W}$ et pour tout $f \in \mathfrak{S}$ ayant son support contenu dans $(-\infty,t]$; et, puisque tout élément de $\mathbb{W}$ ayant son support contenu dans $(-\infty,t]$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions de $\mathfrak{S}$ (et même de $\mathbb{D}$) ayant leurs supports contenus dans $(-\infty,t]$, on a aussi, $F(\omega+\omega') = F(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{W}$ et tout $\omega' \in \mathbb{W}$ ayant son support contenu dans $(-\infty,t]$; autrement dit, on a,

----

(1) Cette condition nous a été suggérée par P. Priouret ; on préférerait une condition s'exprimant directement en termes du module de quasi-invariance....

(6.4.25) $F(\omega) = F(\omega')$ dès que $\omega(s) = \omega'(s)$ pour tout $s \in [t,+\infty)$.

Et de cette relation, il résulte que,

(6.4.26) $$F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{[t,+\infty)}).$$

Mais, par hypothèse, $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{(-\infty,t]})$; donc $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{(-\infty,t]} \cap \mathcal{F}_{[t,+\infty)})$. Et finalement, $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{W}, \mathcal{F}_{\{t\}})$. [d'où (6.4.24)], puisque,

(6.4.28) $$\mathcal{F}_{(-\infty,t]} \cap \mathcal{F}_{[t,+\infty)} = \mathcal{F}_{\{t\}}$$

(pour déduire (6.4.26) de (6.4.25) et montrer (6.4.28), on peut utiliser les méthodes introduites au §1 de [32]).

Remarque.- Si on prend pour μ la mesure induite sur $\mathbb{W}$ par la mesure Gaussienne de moyenne nulle et de covariance $(-\Delta+1)^{-r}$ avec r entier $\geqslant 2$, $\underline{LC}(\mu)$ est satisfaite mais non $\underline{MK}(\mu)$. Par contre, dans ce cas, la propriété de Markov et la propriété de localité ont lieu si on remplace les tribus $\mathcal{F}_{(-\infty,t]}$ par les tribus $\mathcal{O}_{(-\infty,t]}$ (voir 2.3) ; et nous conjecturons que l'équivalence (6.4.11) a lieu dans le cas général avec ce changement de tribus (on note que le Lemme ci-dessus demeure alors valable ainsi que la démonstration de la partie directe).

6.5.- Complainte et rêveries finales

6.5.1.- L'ensemble de ce travail est sous-tendu par le problème de l'existence et de l'unicité d'une mesure de probabilité μ sur l'espace $\mathbb{W}$, quasi-invariante par les translations de $\mathfrak{S}$ (1) et admettant le cocycle $e^{\wedge}$ [donné par (4.1.2) et (4.1.3)] comme module de quasi-invariance (2) : l'existence d'une telle mesure a été établie ci-dessus en se ramenant, grâce à la propriété de Markov due au caractère

----

(1) Voir 2.1.1 et 4.1.1.

(2) Voir A1 et A2.

local de Λ (voir 6.4.2) à la construction du semi-groupe de transition associé et de la mesure invariante de ce semi-groupe (voir 2.1 ; cette construction étant basée en fin de compte sur les propriétés de l'opérateur anharmonique) ; et le résultat d'unicité que constitue le Théorème 6.I concerne, en fait, ce même semi-groupe de transition (voir 6..2 et 6.3). Ainsi, sauf dans le cas du champ libre, on n'a pas attaqué le problème de front ; autrement dit, on n'a pas exploité la propriété de quasi-invariance directement, mais seulement via la propriété de Markov. Et on peut faire la même remarque à propos de l'approche de Priouret et Yor dans [27] , où la quasi-invariance n'apparaît qu'a posteriori, après la construction d'un processus de diffusion à partir dela donnée analytique que constitue la fonction ζ.

Voici quelques idées d'attaques de front[1] : on remarque d'abord que l'étude du problème dans le cas du champ libre (voir 2.6.2, 4.3.2, 6.4.1) constitue une telle attaque (la seule qui à notre connaissance ait été menée à bien !). Et notant le rôle fondamental que joue dans ce cas la transformation de Fourier, on peut envisager, dans le cas d'un polynôme d'interaction Q quelconque, de conjuguer une résolution directe de l'équation de Symanzik spécifiée par Q (avec unicité, au moins dans l'ensemble des transformées de Fourier des mesures de probabilité sur $\mathbb{W}$) avec un "procédé d'intégration" permettant de remonter de la quasi-invariance infinitésimale qu'exprime l'équation de Symanzik (voir 5.2.1) à la quasi-invariance elle-même de la mesure. Cartier suggère dans [5] (bas de la page 418-05) une démarche analogue, mais en remplaçant le procédé d'intégration par un passage aux fonctions de Schwinger grâce à la relation (5.3.7). Une autre approche (que Cartier veut éviter dans sa remarque précitée, car lorsque $d \geqslant 2$ les équations de Schwinger sont a priori mal définies) consiste à chercher une expression de la quasi-invariance de la mesure μ sous forme d'un système (infini) d'équations portant sur ses marginales. Un exemple de tel système est évidemment fourni par les équations de Schwinger (où n'interviennent que les moments des marginales) ; mais on peut aussi en écrire d'autres, au moins de façon heuristique, faisant intervenir, soit les densités des marginales, soit leur transformées de Fourier

----

(1) Voir aussi [35]

(sous forme différentielle, un tel système découle de l'équation de Symanzik). Enfin, on peut aussi envisager d'établir directement l'existence et l'unicité de la mesure μ en remplaçant les projections $X_J : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^J$ (J partie finie de $\mathbb{R}$; voir 2.2.3) par des applications non linéaires $X_J^{\#} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^J$ déterminées (en fonction du cocycle Λ donné, sans doute de façon implicite) de telle sorte que la quasi-invariance de μ se traduise, pour les pseudo-marginales $m_J^{\#} = X_J^{\#}(\mu)$, par une propriété de quasi-invariance (par des transformations des espaces $\mathbb{R}^J$ représentant les translations de $\mathbb{W}$) susceptibles de permettre de les déterminer. Après quoi, il resterait à déterminer μ à partir du système projectif non linéaire de ces pseudo-marginales.

6.5.2.- Quoi qu'il en soit, c'est surtout le problème dans le cas où $d > 1$ qu'il s'agit d'attaquer de front : en effet, si nous avons étudié en détail le cas où $d = 1$, c'est essentiellement parce que nous pensons, au-delà de ce que suggère Cartier pages 418-07 et 418-08 de [5] et dans la lignée des idées de Segal (voir, par exemple, [34]), que le problème de la <u>détermination des champs</u> (le champ quantique et le champ Euclidien) <u>à partir de l'équation d'interaction supposée posée d'avance</u> est étroitement lié au problème de l'existence et de l'unicité d'une mesure de probabilité sur certain sous-espace $\mathcal{W}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, quasi-invariante par les translations de $\mathcal{V} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ et admettant un module de quasi-invariance e^{Λ} donné (1) ; le sous-espace $\mathcal{W}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ (avec $k = d-1$ pour le champ quantique et $k = d$ pour le champ Euclidien) devant être choisis de façon à permettre - via la définition des sempiternelles pseudo-puissances de ses éléments - la détermination (sûrement implicite pour le champ quantique ; voir 1.7.3) du cocycle Λ en fonction du polynôme d'interaction donné.

En l'absence d'une attaque de front, la théorie constructive peut jouer par rapport à ce problème dans le cas où $d = 2$ (voir par exemple [33] à ce sujet) un rôle analogue à celui que joue la théorie de l'opérateur anharmonique par rapport à l'approche ci-dessus dans le cas où $d = 1$.

* * *

------

(1) Voir le second problème mentionné en A2.

APPENDICE A

MESURES QUASI-INVARIANTES

ET RELATIONS DE COMMUTATION CANONIQUES

A1.- Mise en place de la situation : définition des mesures quasi-invariantes en cause

On suppose donnés, d'une part deux espaces vectoriels $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}$ mis en dualité par une forme bilinéaire non dégénérée $<\omega,f>$ ($\omega \in \mathcal{W}$, $f \in \mathcal{V}$) ; et d'autre part une application linéaire $g \to \vec{g}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$ telle que la forme bilinéaire $(g,f) \to <\vec{g},f>$ sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ soit un produit scalaire [noté aussi $<g,f>$] sur l'espace $\mathcal{V}$.

L'exemple fondamental de cette situation est le suivant : on se donne l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, muni d'une topologie localement convexe séparée et d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ continu pour cette topologie ; pour chaque $g \in \mathcal{V}$, on note $\vec{g}$ la forme linéaire continue $f \to <g,f>$, et on suppose que $\mathcal{W}$ est un sous-espace du dual $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ tel que $\vec{g} \in \mathcal{W}$ pour tout $g \in \mathcal{V}$; la dualité $<\cdot,\cdot>$ étant alors induite par celle entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$.

On désigne par $\mathcal{A}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{W}$ rendant mesurables les fonctions numériques $\omega \to <\omega,f>$ sur $\mathcal{W}$ ($f \in \mathcal{V}$) ; et on note que, pour chaque $f \in \mathcal{V}$, la translation $\Gamma_f : \omega \to \omega+\vec{f}$ est mesurable de $\mathcal{W}$ muni de la tribu $\mathcal{A}$ dans lui-même.

Cela étant, on dira qu'une mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{W}.\mathcal{A})$ est quasi-invariante (par les translations de $\mathcal{V}$) si, pour tout $f \in \mathcal{V}$, la mesure $\mu^f = \Gamma_f^{-1}(\mu)$ est équivalente à μ. En vertu du théorème de Radon-Nikodym, pour que μ soit quasi-invariante, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $a : (f,\omega) \to a(f,\omega)$ de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ dans $]0,+\infty)$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{V}$, $a(f,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{W},\mathcal{A}\,\mu)$ et,

$$\text{(A1.1)} \qquad \int_{\mathcal{W}} F(\omega-\vec{f})\ \mu(d\omega) = \int_{\mathcal{W}} F(\omega)\ a(f,\omega)\ \mu(d\omega)$$

pour tout $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{W}, \mathfrak{A})$ [1].

Une telle fonction sera appelée un <u>module de quasi-invariance de μ</u>. Pour chaque $f \in \mathcal{V}$, la classe $\underline{a}(f)$ de $a(f,\cdot)$ modulo μ est déterminée de façon unique par μ.

Il résulte immédiatement de (A1.1) que, pour tous $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{V}$, on a,

(A1.2) $\quad a(f+g,\omega) = a(f,\omega)\, a(g,\omega+\vec{f})$ pour μ-presque tout $\omega \in \mathcal{W}$.

A2.- <u>Cocycles et mesures quasi-invariantes</u>

La relation (A1.2) ci-dessus introduit la définition suivante : on appellera <u>cocycle additif</u> toute application Λ de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ dans $\mathbb{R}$ telle que,

(A2.1) $\quad \Lambda(f+g,\omega) = \Lambda(f,\omega) + \Lambda(g,\omega+\vec{f})$, pour tous $f \in \mathcal{V}$, $g \in \mathcal{V}$ et $\omega \in \mathcal{W}$.

La donnée d'un cocycle additif Λ est évidemment équivalente à celle du <u>cocycle multiplicatif</u> a défini par,

(A2.2) $\quad a(f,\omega) = e^{\Lambda(f,\omega)} \quad (f \in \mathcal{V},\ \omega \in \mathcal{W})$.

Cela étant, <u>deux problèmes</u> se posent : <u>d'abord</u> dans quelles conditions [sur les données de base $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$] toute mesure quasi-invariante μ admet-elle pour module de quasi-invariance un cocycle multiplicatif ? <u>Ensuite</u>, et inversement, étant donné un cocycle multiplicatif a, dans quelles conditions existe-t-il une mesure quasi-invariante μ admettant ce cocycle comme module de quasi-invariance ; et dans quelles conditions une telle mesure est-elle unique ?

Lorsque l'espace $\mathcal{V}$ est de dimension finie [auquel cas $\mathcal{W}$ peut être identifié à $\mathcal{V}$ au moyen du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$], ces deux problèmes sont entièrement résolus : pour qu'une mesure μ (sur $\mathcal{W} = \mathcal{V}$)

---

(1) On désigne par $\mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{W}, \mathfrak{A})$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathcal{W}$ $\mathfrak{A}$-mesurables et bornées.

soit quasi-invariante, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{V}$: $\mu = \rho . \lambda$ avec $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}$ (voir par exemple [19], alinéa IV.5.1, théorème 2, p.352) ; et μ a alors pour module de quasi-invariance le cocycle multiplicatif a défini par,

$$\text{(A2.3)} \qquad a(z,x) = \rho(z+x)/\rho(x) \qquad (x \in \mathcal{V}\ ,\ z \in \mathcal{V}).$$

Lorsque les espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont de dimension infinie [par exemple $\mathcal{V} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ induit par $L^2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$], c'est essentiellement le deuxième problème qui va nous intéresser ici ; on va se donner explicitement un cocycle additif [voir la relation (I.16) de l'introduction, et les relations (4.1.2) et (4.1.3)] et chercher à construire une mesure μ sur $\mathcal{W}$ admettant le cocycle multiplicatif correspondant comme module de quasi-invariance. On note que le cocycle donné n'est explicite que sur un certain sous-espace de $\mathcal{V}'$; et c'est sur ce sous-espace, en l'occurence $\mathcal{W}$, que l'on cherche à construire μ, et que l'on espère son unicité. On voit ainsi l'intérêt d'introduire la donnée supplémentaire $\mathcal{W}$ au lieu de se limiter à $\mathcal{W} = \mathcal{V}'$ (1), et aussi le peu d'intérêt, dans cette perspective, d'un résultat établissant l'existence non constructive d'un cocycle multiplicatif (par exemple sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$) que μ (considérée comme mesure sur $\mathcal{V}'$) admettrait comme module de quasi-invariance (i.e le peu d'intérêt du premier problème ci-dessus).

A3.- Représentation de Weyl engendrée par une mesure quasi-invariante.

Etant donnés un espace préhilbertien réel $(\mathcal{V}, <\cdot,\cdot>)$ et un espace de Hilbert complexe $(\mathcal{H}, <\cdot|\cdot>)$, on appellera ici représentation de Weyl à valeurs dans $\mathcal{H}$ et de modèle $\mathcal{V}$ un couple (U,V), de représentations unitaires du groupe additif $\mathcal{V}$ dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ tel que,

----

(1) comme dans [19] ou dans [5].

(A3.1) $U(f)V(g) = e^{-i<f,g>} V(g)U(f)$ pour tous $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{V}$.

On dira que la représentation de Weyl (U,V) est régulière si, pour tout $f \in \mathcal{V}$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$, les applications $t \to U(tf)\psi$ et $t \to V(tf)\psi$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$ [i.e si $(U(tf))_{t \in \mathbb{R}}$ et $(V(tf))_{t \in \mathbb{R}}$ sont des groupes à un paramètre fortement continus]. Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel topologique sur lequel le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ est continu, on dira que la représentation de Weyl (U,V) est continue si, pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, les applications $f \to U(f)\psi$ et $f \to V(f)\psi$ sont continues de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{H}$. Toute représentation de Weyl continue est évidemment régulière.

Cela étant, on se place dans la situation générale introduite en A1, et on suppose donnée une mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{W}, \mathcal{A})$ quasi-invariante par les translations de $\mathcal{V}$ dont on désigne par a un module de quasi-invariance [en notant $\underline{a}(f)$ la classe modulo μ de la fonction > 0 $a(f,\cdot)$ $(f \in \mathcal{V})$]. Pour chaque $f \in \mathcal{V}$, on désigne par ψ_f la classe (modulo μ) de la fonction $e^{i<\cdot,f>}$; et on note Ω la classe de la fonction égale à 1 (i.e $\Omega = \psi_o$). On a alors,

PROPOSITION.- On définit une représentation de Weyl (U,V) à valeurs dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ et de modèle $\mathcal{V}$ en posant,

(A3.2) $U(f)\psi = \psi_f \psi$

(A3.3) $V(f)\psi = \underline{a}(f)^{1/2}(\psi \odot \Gamma_f)$ $(f \in \mathcal{V}, \psi \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu))$.

En outre, $\{U(f)\Omega \mid f \in \mathcal{V}\}$ est total dans $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ (1).

Pour chaque $\psi \in L^o(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$, on désigne ici par $\psi \odot \Gamma_f$ la classe modulo μ commune (d'après la quasi-invariance de μ) aux fonctions $F \circ \Gamma_f$ avec $F \in \psi$. La représentation de Weyl (U,V) ainsi définie sera appelée la représentation de Weyl engendrée par la mesure quasi-invariante μ.

----

(1) i.e, le vecteur Ω est cyclique pour la représentation U.

La démonstration de la proposition ci-dessus est une simple vérification : il est d'abord clair que U est une représentation unitaire, puisque $|\psi_f| = \Omega$ et $\psi_{f+g} = \psi_f \psi_g$. Ensuite (A3.3) écrite avec $\psi \in L^o(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ définit un isomorphisme algébrique V(f) de $L^o(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ sur lui-même, et on a $V(f+g) = V(f)V(g)$ (donc en particulier $V(f)^{-1} = V(-f)$) en vertu de la relation de cocycle (A1.2), laquelle peut aussi être écrite,

$$\text{(A3.4)} \quad \underline{a}(f+g) = \underline{a}(f) \cdot (\underline{a}(g) \circ \Gamma_f) \qquad (f \in \mathcal{V}, \ g \in \mathcal{V}) \ .$$

De plus, V(f) applique isométriquement $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ dans lui-même (donc sur lui-même puisque $V(f)^{-1} = V(-f)$) en vertu de l'équation de quasi-invariance (A1.1) écrite pour $F \in |\psi|^2$; et la relation de commutation (A3.1) est vérifiée puisque $(\psi_f \psi) \circ \Gamma_g = e^{i<f,g>} \psi_f (\psi \circ \Gamma_g)$. Enfin, Ω est cyclique pour la représentation U car, si $\psi \in L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ est tel que $< \psi | U(f) \Omega > = 0$ pour tout $f \in \mathcal{V}$, toutes les marginales de la mesure bornée $\nu = \psi \cdot \mu$ ont leurs transformées de Fourier nulles, donc $\nu = 0$ et aussi $\psi = 0$.

cqfd.

Diverses propriétés de la représentation de Weyl (U,V) ainsi obtenue sont étudiées au § 5 (voir 5.2.1, 5.4.1 et 5.4.2). En particulier, la proposition 5.4.1 fournit une condition suffisante pour que cette représentation soit régulière (voir aussi la proposition A6 à ce sujet).

La proposition ci-dessus admet une réciproque qui constitue le Théorème de Guelfand (voir [19], § IV.5.4, Théorèmes 5 et 6) ; ce Théorème n'intervient pas dans ce travail (1).

----

(1) Le Théorème 6 précité est vrai, bien que sa démonstration dans [19] présente une lacune grave : le passage de (26) (page 369) pour f de la forme (25) à (26) pour f quelconque dans L^2 réclame de montrer au préalable que μ est quasi-invariante ; ce qui n'est pas fait.

A4.- Mesures quasi-invariantes ergodiques et représentations de Weyl irréductibles.

Dans la situation de la proposition A3,

PROPOSITION.- Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) [irréductibilité de la représentation de Weyl (U,V)]. Tout opérateur borné de $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ dans lui-même commutant avec tous les opérateurs $U(f)$ et $V(f)$ $(f \in \mathcal{V})$ est un multiple de l'identité.

(2) [ergodicité de la mesure μ pour l'action de $\mathcal{V}$]. Tout élément ψ de $L^\infty(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ tel que $\psi \circ \Gamma_f = \psi$ pour tout $f \in \mathcal{V}$ est un multiple de Ω.

Cette proposition résulte immédiatement de ce que tout opérateur borné de $L^2(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$ dans lui-même commutant avec tous les opérateurs $U(f)$ $(f \in \mathcal{V})$ est un opérateur de multiplication par un élément de $L^\infty(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mu)$.

A5.- Systèmes de Heisenberg standards et mesures quasi-invariantes sur $\mathbb{R}$.

Désignant par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, on appellera système de Heisenberg standard sur $\mathcal{H}$, tout couple (Φ_o, π_o) d'opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$ tel que, si on pose,

$$(A5.1) \qquad U(t) = e^{it\Phi_o} \quad \text{et} \quad V(t) = e^{it\pi_o} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

le couple (U,V) constitue une représentation de Weyl iréductible de modèle $\mathbb{R}$ [(1)]. Ainsi, en vertu du théorème de Stone, la relation (A5.1) définit une correspondance biunivoque entre systèmes de Heisenberg standard et représentations de Weyl de modèle $\mathbb{R}$, régulières et irréductibles. Lorsque (A5.1) a lieu, on dira que le système (Φ_o, π_o) dérive de la représentation (U,V). On désignera par $C^\infty(\Phi_o, \pi_o)$ le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ contenu dans $D(\Phi_o) \cap D(\pi_o)$ et stable

----

(1) Cette représentation est régulière par définition (relation (A5.1)).

par les opérateurs Φ_o et π_o. De la relation de commutation (A3.1) (avec $\mathcal{V} = \mathbb{R}$) dérive la relation de Heisenberg :

(A5.2) $$[\Phi_o, \pi_o]\psi = i\psi \quad \text{pour tout } \psi \in C^{\infty}(\Phi_o, \pi_o).$$

L'exemple fondamental est fourni par la "représentation de Schrödinger" : dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ (1), les opérateurs $\psi \to \chi\psi$ (2) et $\psi \to \frac{1}{i}\psi'$ ($\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$) sont essentiellement auto-adjoints sur le domaine $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; désignant par $\underset{\sim}{\Phi}_o$ et $\underset{\sim}{\pi}_o$ les fermetures respectives de ces opérateurs dans $L^2(\mathbb{R})$, le couple $(\underset{\sim}{\Phi}_o, \underset{\sim}{\pi}_o)$ constitue un système de Heisenberg standard sur cet espace ; et on a,

(A5.3) $$C^{\infty}(\underset{\sim}{\Phi}_o, \underset{\sim}{\pi}_o) = \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En outre, la représentation de Weyl $(\underset{\sim}{U}, \underset{\sim}{V})$ de modèle $\mathbb{R}$ dont dérive le système $(\underset{\sim}{\Phi}_o, \underset{\sim}{\pi}_o)$ est donnée par les relations,

(A5.4) $$\underset{\sim}{U}(t)\psi = e^{it\chi}\psi$$

$$(t \in \mathbb{R},\ \psi \in L^2(\mathbb{R})) .$$

(A5.5) $$\underset{\sim}{V}(t)\psi = \psi(\cdot + t)$$

Le Théorème d'unicité de Von Neuman stipule que tout système de Heisenberg standard est unitairement équivalent au système $(\underset{\sim}{\Phi}_o, \underset{\sim}{\pi}_o)$ de la représentation de Schrödinger (3).

Compte tenu de (A5.3), on en déduit que, pour tout système de Heisenberg standard (Φ_o, π_o) sur $\mathcal{H}$, $C^{\infty}(\Phi_o, \pi_o)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ qui est un cœur pour Φ_o et pour π_o.

A6.- Le type de système de Heisenberg standard intervenant dans ce travail est introduit par la proposition suivante :

----

(1) $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(2) χ désigne l'application identique de $\mathbb{R}$.

(3) Tous ces résultats sont "bien connus".

PROPOSITION.- Soit μ_o une mesure de probabilité quasi-invariante sur $\mathbb{R}$. Alors la représentation de Weyl (de modèle $\mathbb{R}$) engendrée par μ_o est régulière et irréductible.

Le système de Heisenberg standard (Φ_o,π_o) sur $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ dérivant de la représentation de Weyl (U,V) engendrée par μ_o sera appelée le système de Heisenberg standard engendré par μ_o.

Cette proposition est immédiate en vertu de ce qui précède : désignant par ρ la densité de μ_o par rapport à la mesure de Lebesgue (voir A2), il est facile de vérifier que l'application $S : \varphi \rightarrow \rho^{-1/2}\varphi$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ qui transforme la représentation de Weyl $(\underset{\sim}{U},\underset{\sim}{V})$ en la représentation (U,V).

En particulier, lorsque la densité ρ de μ_o est de classe C^∞ et partout > 0, le système de Heisenberg standard (Φ_o,π_o) engendré par μ_o possède les propriétés suivantes : d'abord, $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\Phi_o,\pi_o)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour Φ_o et pour π_o, et on a,

$$\left.\begin{aligned} &(A6.1) && \Phi_o\psi = X\psi \\ &(A6.2) && \pi_o\psi = \frac{1}{i}(\psi'-\zeta\psi) \end{aligned}\right\} \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

où X désigne l'application identique de $\mathbb{R}$ (1) et où $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ est défini par,

$$\text{(A6.3)} \qquad \zeta = -\frac{1}{2}\rho'/\rho.$$

Ensuite,

(A6.4) $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$ si et seulement si $\Omega_o \in D(\pi_o)$;

et, si $\zeta \in L^2(\mathbb{R},\mu_o)$, on a,

$\Omega \in$

------

(1) identifiée à sa classe modulo μ_o.

(A6.5) $$\pi_o \Omega_o = i\zeta \ ,$$

où Ω_o désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ [1]. La première de ces propriétés s'obtient en transportant au système (Φ_o, π_o) la propriété correspondante du système $(\check{\Phi}_o, \hat{\pi}_o)$ (voir A5) par la transformation S ci-dessus [laquelle applique $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en vertu de l'hypothèse faite sur ρ]. Pour établir ensuite (A6.4) et (A6.5), on commence par déduire de (A6.2) que,

(A6.6) $$(\pi_o \theta | \psi) = -i(\theta | \psi') + i(\zeta\theta | \psi) \qquad (\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\ ,$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$. D'où il résulte que,

(A6.7) $$(\pi_o \theta | \Omega_o) = i(\zeta\theta | \Omega_o) \qquad (\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})),$$

ainsi qu'on le voit en considérant une suite (ψ_n) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n \to \infty} \psi_n = \Omega_o$ et $\lim_{n \to \infty} \psi'_n = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$. Cela étant, si $\zeta \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$, (A6.7) s'écrit :

(A6.8) $$(\pi_o \theta | \Omega_o) = i(\theta | \zeta) \qquad (\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\ ;$$

d'où il résulte, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un cœur pour π_o, que $\Omega_o \in D(\pi_o^*) = D(\pi_o)$. Et inversement, si $\Omega_o \in D(\pi_o)$, (A6.7) s'écrit ,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\theta}\, (\pi_o \Omega_o - i\zeta)\, d\mu_o = 0 \qquad (\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\ ;$$

d'où il résulte que $i\zeta = \pi_o \Omega_o$ [i.e (A6.5)] et $\zeta \in L^2(\mathbb{R}, \mu_o)$.

----

(1) identifiée à sa classe μ_o.

APPENDICE B

OPÉRATEUR ANHARMONIQUE

On a rassemblé ci-dessous, sans démonstrations ni références, les résultats concernant l'opérateur anharmonique qui interviennent dans ce travail. Ces résultats sont "bien connus" et peuvent être établis par les méthodes standards en Théorie Hilbertienne des opérateurs elliptiques et de leurs perturbations (chapitres IV, V et VI de Kato [2]).

B1.- Définition de l'opérateur anharmonique

Dans tout cet appendice, on désigne par P un polynôme réel, borné inférieurement et non-constant. Cela étant,

PROPOSITION.- L'opérateur non borné A dans $L^2(\mathbb{R})$ défini par,

(B1.1) $D(A) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}) \text{ et } -\frac{1}{2}\psi''+P.\psi \in L^2(\mathbb{R})\}$, et,

(B1.2) $A\psi = -\frac{1}{2}\psi'' + P.\psi \quad (\psi \in D(A))$,

est auto-adjoint et borné inférieurement. En outre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont des cœurs pour A, et A coïncide avec la fermeture de l'opérateur $\frac{1}{2}\underset{\sim}{\pi}_o^2 + P(\underset{\sim}{\Phi}_o)$ (1).

L'opérateur A défini par (B1.1) et (B1.2) sera appelé <u>l'opérateur anharmonique engendré par le polynôme P</u>.

B2.- Primitive centrée du polynôme Q et opérateur H

Soit Q un polynôme réel de degré impair dont le coefficient dominant est > 0. Il résulte immédiatement de la proposition B1 que,

----

(1) Voir A5 (Appendice A) en ce qui concerne $\underset{\sim}{\Phi}_o$ et $\underset{\sim}{\pi}_o$.

<u>LEMME</u>.- Il existe un polynôme réel P et un seul admettant Q comme dérivée et tel que, si A est l'opérateur anharmonique engendré par P [1], on a $0 \quad \inf \sigma(A)$ [2].

Le polynôme P caractérisé par ce lemme sera appelé la <u>primitive centrée de Q</u> et notée $\hat{Q}$; et on désignera par $\underset{\sim}{H}$ l'opérateur anharmonique engendré par ce polynôme P. Ainsi, H est un opérateur auto-adjoint $\geqslant 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a,

$$0 = \inf \sigma(\underset{\sim}{H}) \tag{B2.1}$$

B3.- <u>Spectre et régularité des vecteurs propres</u>

<u>PROPOSITION</u>.- (1) Le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur anharmonique A est constitué d'une suite croissant vers $+\infty$ de valeurs propres isolées de multiplicités finies.

(2) Pour toute valeur propre λ de A, les vecteurs propres de λ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(3) La plus petite valeur propre λ_o de A est de multiplicité 1, et il existe un vecteur propre φ de λ_o et un seul tel que,

$$\|\varphi\| = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{B3.1}$$

On désignera par φ_o l'unique élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que, $\underset{\sim}{H}\varphi_o = 0$, $\|\varphi_o\| = 1$ et $\varphi_o(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>COROLLAIRE</u>.- Le seul couple (λ, φ) pour lequel λ est valeur propre de H, φ est vecteur propre de λ et φ vérifie (B3.1) est le couple $(0, \varphi_o)$.

----

(1) En vertu de l'hypothèse faite sur Q, P' = Q entraîne que P est borné inférieurement et non constant.

(2) $\sigma(A)$ désigne le spectre de l'opérateur A.

(conséquence immédiate des propriétés (2) et (3) puisque, si $\lambda \neq 0$, toute fonction propre de λ est perpendiculaire à φ_o, donc doit s'annuler).

B4.- Autres propriétés de régularité de H

PROPOSITION.- (1) Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I + \underset{\sim}{H}$ applique $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.

(2) On a, $\bigcap_{n>0} D(H^n) \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

B5.- Relations de domination, avec les notations introduites en CO :

PROPOSITION.- (1) Pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant \deg(\hat{Q})$, on a,

(B5.1) $$|\underset{\sim}{\Phi}_o|^n \ll \underset{\sim}{H}\text{ , et,}$$

(B5.2) $$|\underset{\sim}{\Phi}_o|^{n/2} \ll \underset{\sim}{H}^{1/2}$$

(2) En particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $0 \leqslant n \leqslant \deg(\hat{Q})$,

(B5.3) $(\varphi \,|\, |\underset{\sim}{\Phi}_o|^n \varphi) \leqslant \alpha[(\varphi|\underset{\sim}{H}\varphi) + \|\varphi\|^2]$ pour tout $\varphi \in D(\underset{\sim}{H})$.

(3) $\underset{\sim}{\pi}_o \ll \underset{\sim}{H}$.

(4) $\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{\Phi}_o \ll \underset{\sim}{H}^2$ et $\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{\pi}_o \ll \underset{\sim}{H}^2$

(5) $\underset{\sim}{H}^{1/2}\,\underset{\sim}{\Phi}_o \ll H.$

APPENDICE C

QUELQUES RÉSULTATS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

C0.- Dans tout cet appendice, on désigne par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et séparable, par $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire (supposé anti-linéaire à gauche) et par $\|\cdot\|$ sa norme.

Un opérateur T dans $\mathcal{H}$ est toujours entendu avec un domaine D(T) dense dans $\mathcal{H}$ (1).

Soient T et B des opérateurs dans $\mathcal{H}$. On dit que B est dominé par T, et on note $B \ll T$, si, d'une part $D(T) \subset D(B)$ et, d'autre part il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que,

(C0.1) $$\|B\psi\| \leqslant a\|T\psi\| + b\|\psi\| \quad \text{pour tout } \psi \in D(T).$$

On dit que B est strictement dominé par T, et on note $B \lll T$, si, d'une part $D(T) \subset D(B)$ et, d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon > 0$ tel que,

(C0.2) $$\|B\psi\| \leqslant \varepsilon\|T\psi\| + b_\varepsilon\|\psi\| \quad \text{pour tout } \psi \in D(T).$$

C1.- Opérateurs quasi-accrétifs maximaux

On dira (2) qu'un opérateur T dans $\mathcal{H}$ est accrétif si,

(C1.1) $$\mathcal{R}e\,(T\psi|\psi) \geqslant 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{H}.$$

On dira que T est λ_o-accrétif ($\lambda_o \in \mathbb{R}$) si $\lambda_o I + T$ est accrétif, et que T est quasi-accrétif s'il existe $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tel que T soit λ_o-accrétif.

----

(1) Pour les manipulations usuelles concernant les opérateurs, on se réfère à Kato [2] (en particulier, § III.5 et § V.3).

(2) Voir Kato [2], alinéa V.3.10 p. 278-280.

Un tel opérateur est fermable.

On dira que l'opérateur T est quasi-accrétif maximal s'il n'existe pas d'opérateur quasi-accrétif prolongeant strictement T. Un tel opérateur est fermé.

Pour qu'un opérateur symétrique soit quasi-accrétif maximal, il faut et il suffit qu'il soit auto-adjoint et borné inférieurement.

Les opérateurs quasi-accrétifs maximaux donnent lieu à la forme suivante du Théorème de Hille-Yosida [(1)]:

THEOREME.- Soient T un opérateur dans $\mathcal{H}$ et $\lambda_o \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est λ_o-accrétif maximal.

(ii) T^* est λ_o-accrétif maximal.

(iii) T est λ_o-accrétif et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, \lambda > \lambda_o$ et $\lambda I + T$ applique D(T) sur $\mathcal{H}$.

(iV) T est λ_o-accrétif et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, \lambda > \lambda_o$, $\lambda I + T$ applique D(T) sur $\mathcal{H}$ et on a,

(C1.2) $\quad \|(\lambda I + T)\psi\| \geqslant (\mathcal{R}e\, \lambda - \lambda_o)\ \|\psi\|$ pour tout $\psi \in D(T)$.

(V) Il existe un semi-groupe fortement continu $(N_t)_{t \geqslant 0}$ d'opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ admettant $-T$ comme générateur infinitésimal et tel que,

(C1.3) $\quad \|N_t \psi\| \leqslant e^{\lambda_o t}\ \|\psi\|$ pour tous $t \geqslant 0$ et $\psi \in \mathcal{H}$.

En outre, le semi-groupe $(N_t)_{t \geqslant 0}$ introduit par la propriété (V) est unique, et $(N_t^*)_{t \geqslant 0}$ est le semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal $-T^*$.

----

(1) Voir Phillips [28], § 3, p.18 à 25, et Brezis [29], Théorème 1,p.29.

L'opérateur N_t $(t \geqslant 0)$ est noté e^{-tT}. Le semi-groupe $(e^{-tT})_{t\geqslant 0}$ est ainsi caractérisé par la propriété :

(C1.4) $D(T) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists\, \theta \in \mathcal{H},\ \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(e^{-tT} - I)\psi = \theta\}$, et,

(C1.5) $-T\psi = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(e^{-tT} - I)\psi$ pour tout $\psi \in D(T)$.

C2.-On obtient comme suit des opérateurs quasi-accrétifs maximaux par perturbation d'un opérateur auto-adjoint positif :

PROPOSITION.- Soient, dans $\mathcal{H}$, H un opérateur auto-adjoint positif et B un opérateur tel que,

(C2.1) $B \lll H$ et $H + B$ est quasi-accrétif.

Alors, $H + B$ est quasi-accrétif maximal et $H \ll H + B$.
De plus, $(H + B)^* = H + B^*$ dès que $B^* \lll H$.

En effet, soit $T = H + B$ [avec $D(T) = D(H)$ puisque $D(H) \subset D(B)$ d'après l'hypothèse $B \lll H$]. D'abord $H \ll T$ résulte de ce que, pour $\psi \in D(H)$ et $0 < \varepsilon < 1$, la relation de domination $\|B\psi\| \leqslant \varepsilon \|H\psi\| + b_\varepsilon \|\psi\|$ implique,

(C2.2) $\|(H+B)\psi\| \geqslant \|H\psi\| - \|B\psi\| \geqslant (1-\varepsilon)\|H\psi\| - b_\varepsilon \|\psi\|$.

Pour montrer que T est quasi-accrétif maximal, il suffit, d'après le Théorème C1 [relation (iii) $\Longrightarrow$ (i)], de vérifier que $\lambda I + T$ est inversible de $D(T)$ sur $\mathcal{H}$ pour tout $\lambda > 0$ assez grand ; ou encore, cherchant l'inverse de $\lambda I + T$ sous la forme $R_\lambda(I + BR_\lambda)^{-1}$ où $R_\lambda = (\lambda I + H)^{-1}$ (1), il suffit de vérifier que $\|BR_\lambda\| < 1$ pour tout $\lambda > 0$ assez grand. Or, d'après l'hypothèse $B \lll H$, on a, pour $\psi \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$,

$$\|BR_\lambda\psi\| \leqslant \varepsilon \|HR_\lambda\psi\| + b_\varepsilon \|R_\lambda\psi\|$$
$$\leqslant \varepsilon \|\psi\| + (\varepsilon\lambda + b_\varepsilon)\|R_\lambda\psi\| \leqslant (2\varepsilon + (b_\varepsilon/\lambda))\|\psi\|,$$

----

(1) c'est-à-dire en considérant la "seconde série de Neuman" ; voir dans Kato [2] la démonstration du Théorème V.4.11 p.291.

puisque $HR_\lambda\psi = \psi - \lambda R_\lambda\psi$ et $\|R_\lambda\psi\| \leqslant (1/\lambda)\|\psi\|$.

D'où $\|BR_\lambda\| < 1$ dès que $\varepsilon < ½$ et $\lambda > b_\varepsilon/(1-2\varepsilon)$.

Enfin, pour montrer que $T^* = H + B^*$ si $B^* \lll H$, on commence par remarquer que, si $\psi \in D(H)$, on a

$$\mathcal{Re}((H+B^*)\psi|\psi) = (H\psi|\psi) + \mathcal{Re}\,(B^*\psi|\psi)$$

$$= (H\psi|\psi) + \mathcal{Re}\,(\psi|B\psi) = \mathcal{Re}\,((H+B)\psi|\psi) \;;$$

donc $H+B^*$ est quasi-accrétif en même temps que T. Ainsi, d'après ce qui précède avec B^* mis pour B, $H+B^*$ est quasi-accrétif maximal. D'où $T^* = H+B^*$, puisque T^* est aussi quasi-accrétif maximal [Théorème C1, relation (i) $\Longrightarrow$ (ii)] puisque $T^* \supset H + B^*$. cqfd.

C3.- Opérateurs m-sectoriels.

On dit qu'un opérateur T dans $\mathcal{H}$ est m-sectoriel [(1)] s'il est quasi-accrétif maximal (voir C1 ci-dessus) et sectoriel en ce sens qu'il existe $c > 0$ et $\lambda_o \in \mathbb{R}$, tels que,

(C3.1) $$|\mathcal{I}m\,(T\psi|\psi)| \leqslant c[\mathcal{Re}\,(T\psi|\psi) + \lambda_o\|\psi\|^2]$$

pour tout $\psi \in D(T)$.

[On note que (C3.1) implique que T est λ_o-accrétif].

Les semi-groupes engendrés par les opérateurs m-sectoriels sont holomorphes. En particulier,

THEOREME.- Soit T un opérateur m-sectoriel :
(1) Pour tout $t > 0$, l'opérateur borné e^{-tT} applique $\mathcal{H}$ dans D(T).
(2) Si $\lambda_o \in \mathbb{R}$ est tel que (C3.1) est vérifiée pour une valeur au

----

(1) Voir Kato [2] alinéa V.3.10 p. 280.

moins de $c > 0$, alors, il existe $c' > 0$ tel que,

(C3.2) $$\|Te^{-tT}\psi\| \leqslant \left(\frac{c'}{t} + |\lambda_o|\right) e^{\lambda_o t} \|\psi\|$$

pour tout $t > 0$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$.

En outre, on peut prendre $c' = 1/e$.

On peut obtenir cet énoncé en conjuguant le Théorème IX.1.24 de Kato [2] (p. 490) avec la théorie des semi-groupes holomorphes faite par Yosida dans [3], § IV.10 (p. 254).

C4.- Formule de Trotter

THEOREME.- Soient T et S des opérateurs quasi-accrétifs maximaux. Si $D(T) \cap D(S)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et si la fermeture $(T+S)^-$ de $T+S$ est un opérateur quasi-accrétif maximal, alors,

(C4.1) $$e^{-t(T+S)^-}\psi = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}T} e^{-\frac{t}{n}S}\right)^n \psi \quad \text{(limite dans } \mathcal{H})$$

pour tous $t \geqslant 0$ et $\psi \in \mathcal{H}$.

[Voir Nelson [25], Théorème 9 (p.343)].

C5.- Formule de Duhamel

PROPOSITION.- Soient, dans $\mathcal{H}$, H un opérateur auto-adjoint positif et B_1, B_2 des opérateurs tels que,

(C5.1) $B_j \lll H$ et $H+B_j$ est quasi-accrétif $(j = 1,2)$.

Alors, pour tout $\psi \in D(H)$,

(1) Pour tout $s \geqslant 0$, $e^{-s(H+B_2)}\psi \in D(B_2-B_1)$; et l'application $s \to (B_2-B_1)\, e^{-s(H+B_2)}\psi$ est continue de $[0,+\infty)$ dans $\mathcal{H}$.

(2) Pour tout $t \geqslant 0$, on a,

$$\text{(C5.2)} \quad e^{-t(H+B_1)}\psi = e^{-t(H+B_2)}\psi + \int_0^t e^{-(t-s)(H+B_1)}(B_2-B_1)e^{-s(H+B_2)}\psi\, ds.$$

On note que les opérateurs $H+B_1$ et $H+B_2$ sont quasi-accrétifs maximaux en vertu de l'hypothèse (C5.1) et de la proposition C2 ; et que la fonction intégrée au second membre de (C5.2) est continue en vertu de la propriété (1).

En effet, soient $T_j = H+B_j$ et $N_t^{(j)} = e^{-tT_j}$ ($j = 1,2$; $t \geqslant 0$). Si $\psi \in D(H)$, on a $e^{-sT_j}\psi \in D(H)$, puisque $D(H) = D(T_j)$; donc aussi $e^{-sT_j}\psi \in D(B_2-B_1)$, puisque $D(H) \subset D(B_2-B_1)$. Pour établir ensuite la continuité de l'application $s \to (B_2-B_1)e^{-sT_j}\psi$, on remarque que l'hypothèse C5.1 entraîne que $H \ll T_2$ (proposition C2) ; donc aussi que $B_2-B_1 \ll T_2$; d'où, $\|(B_2-B_1)N_u^{(2)}\psi - (B_2-B_1)N_v^{(2)}\psi\|$

$$\leqslant \text{cte}(\|T_2(N_u^{(2)}\psi - N_v^{(2)}\psi\| + \|N_u^{(2)}\psi - N_v^{(2)}\psi\|) \ ;$$

et la continuité cherchée puisque $\psi \in D(T_2)$ entraîne que $T_2N_s^{(2)}\psi = N_s^{(2)}T_2\psi$ ($s \geqslant 0$). Cela étant, pour établir la formule (C5.2), il suffit de montrer, puisque $D(T_1^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$, que, pour tout $\theta \in D(T_1^*)$,

$$\text{(C5.3)} \quad (\theta | N_t^{(1)}\psi - N_t^{(2)}\psi) = \int_0^t (\theta | N_{t-s}^{(1)}(B_2-B_1)N_s^{(2)}\psi)\, ds.$$

Pour cela, on considère la fonction complexe h sur $[0,t]$ définie par $h(s) = (N_{t-s}^{(1)*}\theta | N_s^{(2)}\psi)$ ($s \in [0,t]$). En vertu de la dernière assertion du Théorème C1, et compte tenu de ce que $\theta \in D(T_1^*)$ et $\psi \in D(T_2)$, on vérifie sans difficulté que la fonction h est continûment dérivable sur $[0,t]$, et que l'on a, pour tout $s \in [0,t]$,

$$h'(s) = (T_1^*N_{t-s}^{(1)*}\theta | N_s^{(2)}\psi) - (N_{t-s}^{(1)*}\theta | T_2N_s^{(2)}\psi) \ ;$$

ou encore, puisque $N_s^{(2)}\psi \in D(T_2) = D(H)$ et $D(T_1) = D(H)$,

$$h'(s) = (\theta | N^{(1)}_{t-s}(T_1-T_2)N^{(2)}_s \psi) = (\theta | N^{(1)}_{t-s}(B_1-B_2)N^{(2)}_s \psi).$$

Et on obtient (C5.3) en portant cette expression de h' au second membre de la relation $h(0)-h(t) = -\int_0^t h'(s)ds$.

cqfd.

APPENDICE D

UNICITÉ DES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON STATIONNAIRES

DO.- La situation étant la même que dans l'appendice C (voir CO), on suppose donnés ici $\tau > 0$ et, pour chaque $t \in [0,\tau]$, un opérateur fermé A_t dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Et on s'intéresse à l'unicité de la solution W du problème de Cauchy :

(DO.1) $\qquad W'(t) = - A_t\, W(t) \qquad (0 < t \leqslant \tau)$

(DO.2) $\qquad W(0) = \psi \qquad$ avec $\psi \in \mathcal{H}$.

D1.- Unicité forte

S'inspirant du Lemme donné par Yosida dans [3], § XIV.4, page 426, on suppose ici qu'il existe $\lambda_o > 0$ tel que,

(U) Pour tout $t \in]0,\tau[$, il existe $\delta_t > 0$ tel que, pour tout $h \in [0,\delta_t[$, $I+hA_t$ applique $D(A_t)$ sur $\mathcal{H}$ et vérifie,

(D1.1) $\qquad \|(I+hA_t)\psi\| \geqslant (1-h\lambda_o)\ \|\psi\| \qquad$ pour tout $\psi \in D(A_t)$.

On note que la condition U est impliquée par la condition suivante :

(UO) Pour tout $t \in [0,\tau]$, l'opérateur A_t est λ_o-accrétif maximal.

[cela résulte de la relation (C1.2) (Théorème C1) en prenant $A_t = T$ et $\delta_t = 1/\lambda_o$ pour tout t].

Le résultat en vue s'énonce alors :

LEMME D'UNICITE FORTE (1).- Soit $W : t \to W(t)$ une application continue de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{H}$ telle que, pour tout $t \in]0,\tau[$, W admet (fortement)

----

(1) sous l'hypothèse U ci-dessus.

en t une dérivée à droite $\left.\frac{d^+}{ds}\right/_{s=t} W(s)$ et vérifie,

(D1.2) $\qquad W(t) \in D(A_t) \quad$ et $\quad \left.\frac{d^+}{ds}\right/_{s=t} W(s) = - A_t\, W(t).$

Alors,

(D1.3) $\qquad \|W(t)\| \leq e^{t\lambda_o}\|W(0)\| \quad$ pour tout $t \in [0,\tau]$.

En particulier, $W(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\tau]$ dès que $W(0) = 0$.

En effet, l'hypothèse faite sur W entraîne que, pour $0 < t < \tau$ et $0 \leq h < (\tau-t) \wedge \delta_t$, on a,

$$W(t+h) = W(t) - h\, A_t\, W(t) + W_1(t,h), \qquad \text{avec}$$

$\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \|W_1(t,h)\| = 0$; ou encore, en désignant par $J_{h,t}$ l'inverse de l'opérateur $I+hA_t$ (condition U),

$$W(t+h) = (I-hA_t)\, J_{h,t}(I+hA_t)\, W(t) + W_1(t,h) \quad ;$$

ce qui donne en développant,

$$W(t+h) = J_{h,t}\, W(t) - h^2 A_t\, J_{h,t}\, A_t\, W(t) + W_1(t,h)$$

puisque $A_t J_{h,t}\, W(t) = J_{h,t} A_t\, W(t)$. D'où; compte tenu de ce que $\|J_{h,t} W(t)\| \leq (1/(1-h\lambda_o))\|W(t)\|$ d'après (D1.1),

$$\|W(t+h) \leq (1/(1-h\lambda_o))\, \|W(t)\| + O(t,h)$$

avec $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\, O(t,h) = 0$

Et la majoration (D1.3) cherchée résulte alors de la variante suivante du Lemme de Gronwall appliquée à la fonction $t \to \|W(t)\|$:

<u>LEMME</u>.- Soit f une fonction numérique continue sur $[0,\tau]$ telle que,

(D1.4) $\qquad D^+f(t) \leqslant \lambda_o f(t) \quad$ pour tout $t \in]0,\tau[$.

Alors,

(D1.5) $\qquad f(t) \leqslant e^{t\lambda_o} f(0) \quad$ pour tout $t \in [0,\tau]$.

On pose ici $D^+f(t) = \overline{\lim\limits_{h \downarrow 0}} \frac{1}{h} (f(t+h)-f(t))$ [nombre dérivé supérieur à droite en t].

On peut établir ce Lemme comme suit (1) : (α) Si $g : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ est continue et si $g(0) = g(\tau) = 0$, alors il existe $s \in]0,\tau[$ tel que $D^+g(s) \geqslant 0$. En effet, si g atteint son minimum en un point $t \in]0,\tau[$, on peut prendre $s = t$. Dans le cas contraire, g est positive et il existe $t \in]0,\tau[$ tel que $g(t) = \sup g > 0$. Alors, ou bien g a un minimum relatif en $t_1 \in]0,t[$, et on peut prendre $s = t_1$; ou bien g est croissante sur l'intervalle $[0,t]$, et tout $s \in]0,t[$ répond à la question. (β) Si $k : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ est continue, si $k(0) = 0$ et si $\sup k > 0$, alors il existe $s \in]0,\tau[$ tel que $D^+k(s) > 0$. En effet, soit $t \in]0,\tau]$ tel que $k(t) = \sup k$. Sur l'intervalle $[0,t]$ la fonction $g : u \to k(u) - \frac{u}{t} k(t)$ satisfait à l'hypothèse faite en (α) ; il existe donc $s \in]0,t[$ tel que $D^+g(s) \geqslant 0$; or, on a $D^+k(s) = D^+g(s) + \frac{1}{t}k(t)$; d'où $D^+k(s) > 0$. (γ) Supposant alors que f satisfait aux hypothèses du Lemme, on considère la fonction $k : t \to f(t)-f(0) - \lambda_o \int_o^t f(s)\,ds$ sur $[0,\tau]$. Cette fonction est continue et on a $k(0) = 0$. Si on avait $\sup k > 0$, il existerait donc, d'après (β), un nombre $s \in]0,\tau[$ tel que $D^+k(s) > 0$; c'est-à-dire, $D^+f(s) - \lambda_o f(s) > 0$; ce qui contredirait en s l'hypothèse (D1.4). Ainsi k est positive ; ou encore

$f(t) \leqslant f(0) + \lambda_o \int_o^t f(s)\,ds$ pour tout $t \in [0,\tau]$; d'où résulte la majoration (D1.5) en vertu du Lemme de Gronwall classique [voir par exemple Bourbaki [24], §1, N°4, Lemme 2].

cqfd.

----

(1) cette démonstration nous a été communiquée par P. Priouret.

D2.- Unicité faible

On suppose d'abord que les conditions U1, U2 et U3 ci-dessous sont satisfaites :

Tous les opérateurs A_t [resp A_t^*] $(0 \leqslant t \leqslant T)$ ont même domaine. On désigne par $\mathcal{X}$ [resp $\mathcal{X}_*$] l'espace de Fréchet Banachisable constitué par l'un quelconque des espaces $D(A_t)$ [resp $D(A_t^*)$] $(0 \leqslant t \leqslant T)$ muni de la topologie associée à la norme du graphe (1), et par $|||\cdot|||$ [resp $|||\cdot|||_*$] une norme définissant cette topologie.

(U2) Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$,

(D2.1) $\frac{1}{c}|||\psi||| \leqslant \|A_t\psi\| + \|\psi\| \leqslant c\,|||\psi|||$ pour tout $\psi \in \mathcal{X}$, et,

(D2.2) $\frac{1}{c}|||\psi|||_* \leqslant \|A_t^*\psi\| + \|\psi\| \leqslant c\,|||\psi|||_*$ pour tout $\psi \in \mathcal{X}_*$.

(U3) Pour tout $\psi \in \mathcal{X}$ [resp $\psi \in \mathcal{X}_*$], l'application $t \to A_t\psi$ [resp $t \to A_t^*\psi$] de $[0,T]$ dans $\mathcal{H}$ est continûment dérivable.

Pour chaque $t \in [0,T]$, on désigne par $\dot{A}_t$ l'opérateur de domaine $\mathcal{X}$ défini par $\dot{A}_t\psi = \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} A_s\psi$ $(\psi \in \mathcal{X})$. On a alors,

(D2.3) $\mathcal{X}_* \subset D(\dot{A}_t^*)$ et $\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} A_s^*\psi = \dot{A}_t^*\psi$ pour tous $t \in [0,T]$ et $\psi \in \mathcal{X}_*$.

On suppose par ailleurs, qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que la condition U0 soit satisfaite (voir D1). Alors, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{Re}\ \lambda > \lambda_0$ et chaque $t \in [0,T]$, $\lambda I + A_t$ [resp. $\bar{\lambda} I + A_t^*$] est un opérateur inversible de $\mathcal{X}$ [resp $\mathcal{X}_*$] sur $\mathcal{H}$, et son inverse $R_{\lambda,t}$ vérifie,

----

(1) Voir Kato [2] alinéa IV.1.1, Remarque 1.4, page 191. Ces diverses topologies coïncident en vertu du Théorème du graphe fermé puisque les opérateurs A_t sont supposés fermés.

(D2.4) $\|R_{\lambda,t}\psi\| \leqslant (1/(\mathcal{R}e\ \lambda-\lambda_o))\ \|\psi\|$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ [1].

En outre, $R^*_{\lambda,t}$ est l'inverse de $\overline{\lambda}I+A^*_t$, et on a aussi,

(D2.5) $\|R^*_{\lambda,t}\psi\| \leqslant (1/(\mathcal{R}e\ \lambda-\lambda_o))\ \|\psi\|$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ [1].

On suppose enfin qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}e\ \lambda > \lambda_o$, tel que,

(U4) Il existe $c' > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,\tau]$,

$$\|\dot{A}^*_t R^*_{\lambda,t}\psi\| \leqslant c'\|\psi\| \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{H} .$$

(U5) Pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, l'application $t \to \dot{A}^*_t R^*_{\lambda,t}\psi$ est continue de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{H}$ [2].

Cela étant,

<u>LEMME D'UNICITE FAIBLE</u> [2][3].- Soit $W : t \to W(t)$ une application continue de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{H}$ telle que,

(SF1) Pour tout $\psi \in \mathcal{K}_*$ et tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nulle au voisinage de τ, on a,

(D2.6) $$\int_0^\tau f'(t)(\psi|W(t))dt = \int_0^\tau f(t)(A^*_t\psi|W(t))dt - f(0)(\psi|W(0)).$$

Alors, $W(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\tau]$ dès que $W(0) = 0$.
En outre, si $\mathcal{C}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{K}_*$ [4], l'application continue W vérifie SF1 dès qu'elle vérifie,

(SFO) Pour tout $\psi \in \mathcal{C}$ et tout $t \in]0,\tau[$, la fonction complexe

----

(1) Voir le Théorème C1.

(2) Voir la remarque 1 ci-dessus.

(3) Sous les hypothèses U0, U1, U2, U3, U4 et U5 ci-dessus.

(4) i.e si $\mathcal{C}$ est un cœur commun aux opérateurs A^*_t $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$.

$s \to (\psi | W(s))$ est dérivable en t et on a,

(D2.7) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} (\psi | W(s)) = -(A_t^* \psi | W(t)) .$$

Tout d'abord, SFO implique SF1 car, si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est nulle en τ, en multipliant les deux membres de (D2.7) par f(t) et intégrant par parties au premier membre, on obtient (D2.6) pour tout $\psi \in \mathscr{C}$; donc aussi pour tout $\psi \in \mathscr{K}_*$, puisque les deux membres de (D2.6) sont fonctions continues de ψ sur $\mathscr{K}_*$ en vertu de la seconde inégalité (D2.2).

Pour établir la première partie de l'énoncé, on peut procéder comme suit [(1)] : soit W une application continue de $[0,\tau]$ dans $\mathscr{H}$ vérifiant SF1. Désignant par $\mathscr{F}$ le sous-espace de $C^1([0,\tau], \mathscr{K}_*)$ formé des fonctions nulles au voisinage de τ, on va d'abord montrer que SF1 entraîne que, (SF2) Pour tout $F \in \mathscr{F}$,

(D2.8) $$\int_0^\tau (F'(t) | W(t))\,dt = \int_0^\tau (A_t^* F(t) | W(t))\,dt - (F(0) | W(0)) .$$

[on note que la fonction $t \to (A_t^* F(t) | W(t))$ est continue en vertu de la continuité de F, de celle de l'application $t \to A_t^*$ (condition U3) et de l'équicontinuité de $\{A_t^* | 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ (relation (D2.2))]. En effet, SF1 entraîne que (D2.8) a lieu pour tout $F \in \mathscr{F}$ de la forme,

(D2.9) $$F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)\psi_i \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau) \text{ où } \psi_i \in \mathscr{K}_* \text{ et } f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$$

(i = 1,2,...,n). Mais les fonctions de la forme (D2.9) forment un sous-espace dense de $C^1([0,\tau], \mathscr{K}_*)$ [on peut approcher dans $C^1([0,\tau], \mathscr{K}_*)$ une fonction quelconque en commençant par approcher uniformément sa dérivée[(2)]] D'où (D2.8) pour tout $F \in \mathscr{F}$ puisque les deux membres sont fonctions continues de F.

L'idée essentielle de la démonstration est alors de se ramener au cas où W applique $[0,\tau]$ dans $\mathscr{K}_*$, en prenant, dans (D2.8), F de

------

(1) Les idées de cette démonstration nous ont été communiquées par C. Bardos.
(2) voir la note (1) page suivante.

la forme,

(D2.10) $\quad F(t) = R_t^* G(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau)$, où $G \in C^1([0,\tau], \mathscr{H})$.

[on note désormais R_t au lieu de $R_{\lambda,t}$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$]. Il faut d'abord montrer que la fonction F définie par (D2.10) appartient à $C^1([0,\tau], \mathscr{X}_*)$. Pour cela, on commence par remarquer que la première inégalité (D2.2) jointe à la relation $A_t^* R_t^* = I - \overline{\lambda}\, R_t^*$ et à la relation (D2.5) entraîne que,

(D2.11) $\quad |||R_t^*\psi|||_* \leqslant \text{cte } \|\psi\|$ pour tous $\psi \in \mathscr{H}$ et $t \in [0,\tau]$.

D'où on déduit que, pour tous $\psi \in \mathscr{H}$ et $t \in [0,\tau]$, l'application $s \to R_s^*\psi$ est dérivable en t et vérifie,

(D2.12) $$\frac{d}{ds}\Big/_{s=t} R_s^*\psi = - R_t^* \dot{A}_t^* R_t^* \psi$$

[cela résulte de la relation $\frac{1}{h}(R_{t+h}^*\psi - R_t^*\psi) = R_{t+h}^*(\frac{1}{h}(A_t^* R_t^*\psi - A_{t+h}^* R_t^*\psi))$ et de la dérivabilité de l'application $s \to A_s^* R_t^*\psi$ stipulée par la condition U3 et la relation (D2.3)]. Mais d'après (D2.11) et (D2.12), l'application $(t_1,t_2) \to R_{t_1}^* G(t_2)$ de $[0,\tau] \times [0,\tau]$ dans $\mathscr{X}_*$ admet des dérivées partielles données par,

$$\frac{d}{dt}\Big/_{t=t_1} R_t^* G(t_2) = - R_{t_1}^* \dot{A}_{t_1}^* R_{t_1}^* G(t_2) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\Big/_{t=t_2} R_{t_1}^* G(t) = R_{t_1}^* G'(t_2) \;;$$

et ces dérivées partielles sont fonctions continues de (t_1,t_2) à valeurs dans $\mathscr{X}_*$ en vertu de (D2.11), de la continuité de l'application $t \to R_t^*\psi$ $(\psi \in \mathscr{H})$ et des hypothèses U4 et U5. D'où $F \in C^1([0,\tau], \mathscr{X}_*)$ et,

(D2.13) $\quad F'(t) = - R_t^* \dot{A}_t^* R_t^* G(t) + R_t^* G'(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau)$.

----

(1) Voir à ce sujet dans Lions [22] la fin de la démonstration du Lemme 1.2, pages 45 et 46.

Cela étant, pour $F \in \mathcal{F}$ de la forme (D2.10), (D2.8) donne,

$$\text{(D2.14)} \quad \int_0^\tau (R_t^* G'(t) | W(t))\,dt = \int_0^\tau (A_t^* R_t^* G(t) | W(t))\,dt + \int_0^\tau (R_t^* \dot{A}_t^* R_t^* G(t) | W(t))\,dt - (R_0^* G(0) | W(0)).$$

Ainsi, compte tenu de ce que $A_t^* R_t^* = I - \bar{\lambda} R_t^*$ et $A_t R_t = I - \lambda R_t$, on obtient,

$$\text{(D2.15)} \quad \int_0^\tau (G'(t) | \widetilde{W}(t))\,dt = \int_0^\tau (G(t) | \widetilde{A}_t \widetilde{W}(t))\,dt - (G(0) | \widetilde{W}(0))$$

pour tout $G \in C^1([0,\tau], \mathcal{H})$ nulle au voisinage de τ, en posant,

$$\text{(D2.16)} \quad \widetilde{A}_t = A_t + R_t \dot{A}_t \quad \text{et} \quad \widetilde{W}(t) = R_t W(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

On note que l'application $\widetilde{W} : t \to \widetilde{W}(t)$ et l'application $t \to \widetilde{A}_t \widetilde{W}(t)$ sont continues de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{H}$ respectivement. En effet, la première inégalité (D2.1), jointe à la relation $A_t R_t = I - \lambda R_t$ et à la relation (D2.4), entraîne que,

$$\text{(D2.17)} \quad |||R_t \psi||| \leqslant \text{cte}\ \|\psi\| \quad \text{pour tous } \psi \in \mathcal{H} \text{ et } t \in [0,\tau].$$

D'où on déduit que l'application $t \to R_t \psi$ appartient à $C([0,\tau], \mathcal{X})$ pour chaque $\psi \in \mathcal{H}$ et que $\widetilde{W} \in C([0,\tau], \mathcal{X})$. Et la continuité de $\widetilde{W}$ entraîne celle de l'application $t \to A_t \widetilde{W}(t)$ [en vertu de la seconde inégalité (D2.1) et de la continuité de l'application $t \to A_t \psi$ stipulée par U3 pour chaque $\psi \in \mathcal{X}$] et celle de l'application $t \to R_t \dot{A}_t \widetilde{W}(t)$ en vertu de la continuité de l'application $t \to R_t \dot{A}_t \psi$ pour chaque $\psi \in \mathcal{X}$ [condition U3, relation (D2.17) et continuité de l'application $t \to R_t \psi$ pour chaque $\psi \in \mathcal{H}$] et de la relation,

$$\text{(D2.18)} \quad \|R_t \dot{A}_t \psi\| \leqslant c' \|\psi\| \quad \text{pour tous } \psi \in \mathcal{X} \text{ et } t \in [0,\tau],$$

laquelle résulte de l'hypothèse U4 et de ce que l'opérateur borné $(\dot{A}_t^* R_t^*)^*$ prolonge l'opérateur $R_t \dot{A}_t$.

Pour conclure, on va s'appuyer sur la conséquence suivante de la "formule de Green" (1) :

LEMME.- Soient Z et L des applications continues de $[0,\tau]$ dans $\mathcal{H}$ telles que,

(D2.19) $$\int_0^\tau (G'(t)|Z(t))dt + \int_0^\tau (G(t)|L(t))dt + (G(0)|Z(0)) = 0$$

pour tout $G \in C^1([0,\tau],\mathcal{H})$ nulle au voisinage de τ.
Alors, on a, pour tout $t \in [0,\tau]$,

(D2.20) $$\|Z(t)\|^2 - \|Z(0)\|^2 = 2\int_0^t \mathcal{R}e\,(Z(s)|L(s))ds\,.$$

Avec $Z(t) = \tilde{W}(t)$ et $L(t) = -\tilde{A}_t\tilde{W}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$, (D2.19) coïncide avec (D2.15) établie ci-dessus ; et (D2.20) donne,

(D2.21) $$\|\tilde{W}(t)\|^2 - \|\tilde{W}(0)\|^2 = -2\int_0^t \mathcal{R}e\,(\tilde{W}(s)|\tilde{A}_s\tilde{W}(s))ds \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

Mais, en vertu de (D2.18) et de l'hypothèse UO, on a, pour tous $\psi \in \mathcal{X}$ et $s \in [0,\tau]$,

$$\mathcal{R}e\,(\psi|\tilde{A}_s\psi) \geqslant (\lambda_o - c')\|\psi\|^2.$$

Donc, en portant dans (D2.21),

(D2.22) $$\|\tilde{W}(t)\|^2 - \|\tilde{W}(0)\|^2 \leqslant -2(\lambda_o - c')\int_0^\tau \|\tilde{W}(s)\|^2 ds \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau)\ ;$$

D'où, d'après le Lemme de Gronwall [voir par exemple Bourbaki [24], § 1 N°4, lemme 2],

(D2.23) $$\|\tilde{W}(t)\| \leqslant e^{(c'-\lambda_o)t}\|\tilde{W}(0)\| \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

Finalement, si $W(0) = 0$, on a $\tilde{W}(0) = R_o W(0) = 0$; donc, pour tout $t \in [0,\tau]$, $\tilde{W}(t) = 0$ d'après (D2.23) ; et aussi $W(t) = 0$, puisque $W(t) = (\lambda I + A_t)\tilde{W}(t)$ par définition de $\tilde{W}$.

cqfd.

----

(1) Voir Lions [23] alinéa I.5.3 et la remarque 2 ci-dessous.

Remarque 1.- La conclusion du Lemme d'uncité faible subsiste en fait sans l'hypothèse U5 : cela résulte en particulier de ce que la formule de Green (D2.20) est valable dès que Z et L sont dans $\mathcal{L}^2([0,T],\mathcal{H})$ (voir Lions [24], alinéa I.5.3) ; et on peut affaiblir dans le même sens l'hypothèse U3.

Remarque 2.- On peut établir (D2.20) [Lemme ci-dessus] de façon élémentaire comme suit : de la formule (D2.19) écrite pour G de la forme $\rho * K$ avec $K \in \mathcal{D}(]0,T[,\mathcal{H})$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support assez voisin de 0, on déduit, par un changement de variable linéaire, que les restrictions à $[0,T]$ des régularisées de Z admettent comme dérivées celles de L ; d'où (D2.20) par passage à la limite dans les relations correspondantes écrites pour les régularisées.

APPENDICE E

DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME

LEMME.- Soient $(Z, \mathcal{Z})$ un espace mesurable, ν une mesure positive σ-finie sur $(Z, \mathcal{Z})$ et J l'intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ pourvu de sa tribu borélienne $\mathcal{J}$. On considère deux fonctions complexes F et G sur $J \times Z$, $\mathcal{J} \otimes \mathcal{Z}$-mesurables et vérifiant les conditions suivantes :

$$(\delta) \qquad \int_a^b ds \int_Z |G(s,z)|\nu(dz) < +\infty \cdot$$

$(\delta\delta)$ Pour ν-presque partout $z \in Z$ tel que $\int_a^b G(s,z)\, ds < +\infty$,

$$(E.1) \qquad F(t,z) - F(a,z) = \int_a^t G(s,z)ds \quad \text{pour tout } t \in J \cdot$$

$(\delta\delta\delta)$ La fonction $s \to \int_Z G(s,z)\nu(dz)$ [définie presque partout sur J d'après (δ)] se prolonge en une fonction continue g sur J.

$$(\delta V) \qquad F(a,\cdot) \in \mathcal{L}^1(Z, \mathcal{Z}, \nu).$$

Alors, pour tout $s \in J$, $F(s,\cdot) \in \mathcal{L}^1(Z, \mathcal{Z}, \nu)$, la fonction $s \to \int_Z F(s,z)\nu(dz)$ $(s \in J)$ est dérivable en tout point de J, et on a,

$$(E.2) \qquad \frac{d}{ds}\Big/_{s=t} \int_Z F(s,z)\nu(dz) = g(t) \quad \text{pour tout } t \in J.$$

En effet, pour chaque $t \in J$, on a, d'après (δ), $(\delta\delta)$ et (δV), $F(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(Z, \mathcal{Z}, \nu)$; et, en intégrant par rapport à ν les deux membres de (E.1), on obtient,

$$\int_Z F(t,z)\nu(dz) = \int_Z F(a,z)\nu(dz) + \int_Z \nu(dz) \int_a^t G(s,z)ds.$$

Donc, d'après $(\delta\delta\delta)$ et le Théorème de Fubini,

$$\int_Z F(t,z)\nu(dz) = \int_Z F(a,z)\nu(dz) + \int_a^t g(s)ds.$$

d'où la dérivabilité annoncée puisque g est supposée continue. cqfd.

APPENDICE F

A PROPOS DE L'ÉQUATION $-u'' + m^2 u = T$

PROPOSITION.- Soient, sur $\mathbb{R}$, W une fonction continue bornée, et ξ une mesure bornée ; et soit $m > 0$. Alors,

(1) Si u est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\text{(F1)} \qquad \int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + m^2 f(t))\, u(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)W(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\xi(dt).$$

(II) pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{(F2)} \qquad u(t) = \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|}\, W(s)\,ds + \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|}\,\xi(ds).$$

(2) La fonction $t \to \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|}W(s)\,ds$ est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$.

La démonstration est élémentaire : on vérifie d'abord que la fonction $u_o : t \to \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} e^{-m|t-s|}\, W(s)\,ds$ est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a,

$$\text{(F3)} \qquad - u_o''(t) + m^2 u_o(t) = W(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \;;$$

puis on vérifie que,

$$\text{(F4)} \qquad \frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + m^2 f(t))\, e^{-m|t-s|}\,dt = f(s) \qquad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ s \in \mathbb{R}).$$

Cela étant, on voit que (II) $\Longrightarrow$ (I) en portant au premier membre de (F1) l'expression de u(t) fournie par (F2) et en calculant le premier terme ainsi obtenu grâce à (F3) et à deux intégrations par parties, et le second terme grâce à (F4) et au théorème de Fubini. Inversement, (I) $\Longrightarrow$ (II) car, si u_ξ désigne la fonction définie par le second membre de (F2) et si u vérifie (I), alors, d'après ce que l'on vient de voir,

$$\int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + m^2 f(t))(u(t) - u_\xi(t))dt = 0 \qquad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}));$$

d'où il résulte que $u = u_\xi$, puisque u et u_ξ sont bornés (u par hypothèse et u_ξ par construction).

cqfd.

<u>COROLLAIRE</u>.- Soient u et W des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ telles que,

(F5) $$-\int_{\mathbb{R}} f''(t)u(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)W(t)dt \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Alors, u est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ et on a,

(F6) $$-u''(t) = W(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

* * *

Bibliographie

[1] R.F. STREATER & A.S. WIGHTMAN - PCT, Spin, statistics, and all that. Benjamin, 1964.

[2] T. KATO - Perturbation Theory of linear operators - Springer,1966.

[3] K. YOSIDA - Functional Analysis - Springer, 1966.

[4] F. TREVES - Topological vector spaces, distributions and kernels - Acad. press, 1967.

[5] P. CARTIER - Problèmes mathématiques de la Théorie Quantique des champs II : prolongement analytique - Séminaire Bourbaki, 25ème année (1972-73) exposé 418.

[6] E. NELSON - Construction of Quantum fields from Markov fields - Journ. Funct. Anal. 12 (1973) p. 97.

[7] E. NELSON - The free Markov field - Journ. Funct. Anal. 12 (1973) p. 211.

[8] J. NEVEU - Bases Mathématiques du Calcul des probabilités - 2ème édition, Masson, 1970.

[9] P.A. MEYER - Probabilités et potentiel - Herman, 1966.

[10] R.M. BLUMENTHAL & R.K. GETOOR - Markov processes and potential Theory - Acad. press, 1968.

[11] E.B. DYNKIN - Markov processes - Springer 1965.

[12] P. COURREGE - Le processus stochastique du mouvement brownien - Centre de documentation universitaire, Paris, 1963.

[13] P. PRIOURET - Ecole d'été de Calcul des probabilités, Saint-Flour 1973, Lectures notes in Math. N° 390 (1974).

[14] H.P. Mc KEAN - Stochastic integral - Acad. press ; 1969.

[15] P. A. MEYER - Le théorème de continuité de Paul Levy sur les espaces nucléaires - Séminaire Bourbaki, 18ème année (1965.66) exposé 311.

[16] H.J. ARAKI - Hamiltonian formalism and the canonical commutation Relations in Quantum field Theory - Journ. Math. Phys. 1 (1960) p. 492.

[17] L. GROSS - Logarithmic sobolev inequalities - Preprint (1973).

[18] J.T. CANNON - Continuous sample paths in Quantum Field Theory - com. Math. Phys. 35 (1974) p. 215.

[19] I.M. GUELFAND & N.Y. VILENKIN - Generalized Functions - Vol 4 - Acad press, 1964.

[20] M. KAC - On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc Second Berkeley symposium on Math. Statistics and Probability, Berkelet 1951, p. 189.

[21] E. NELSON - Quantuum fields and Markov fields - Am. Math. soc. Summer institute on partial differential equations - Berkeley 1971.

[22] J.L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles - Springer 1961.

[23] J.L. LIONS - Equazioni differenziale astratte. Centre Int. Math. Estivo, 1963.

[24] N. BOURBAKI - Livre IV (fonctions d'une variable réelle), chap.IV - Herman, 1951.

[25] E. NELSON - Feynman integral and the schrödinger equation - J. Math. Phys. 5 (1964) p. 332.

[26] Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY(Théorie du potentiel), 5ème année (1960/61).

[27] P. PRIOURET & M. YOR - Processus de diffusion sur $\mathbb{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Article suivant dans ce numéro.

[28] R.S. PHILLIPS - Semi-groups of contraction operators - Centre Int. Math. Estivo, 1963.

[29] H. BREZIS - On some degenerate Non linear Parabolic equations - Proc. Symp. Pure Math, Vol 18, AMS 1970.

[30] B. SIMON & R. HOEGH-KROHN - Hypercontractive semi-groups and two dimensional self coupled Bose-fields - J. Funct. Anal. V 9 (1972) p.121.

[31] F. GUERA, L. ROSEN & B. SIMON - The $P(\varphi)_2$ Euclidian Quantum Field Theory as classical statistical mechanics - Ann. Math. A paraître.

[32] P. COURREGE & P. PRIOURET - Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition - Publ. inst. statis. Univ. Paris 14 (1966) p. 245.

[33] J. FRÖLICH - Schwinger Functions and their generating functionnals Harvard Univ. Preprint, 1974. A paraître dans Hel. Phys. acta.

[34] I. SEGAL - Non linear Functions of weak processes, I & II - Journ. Funct. Anal. 4 (1969) p. 404 & 6 (1970) p. 29.

[35] G. ROYER - Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - Ann. ENS - A paraître.

***

Philippe COURRÈGE et Pierre RENOUARD
Centre de Physique Théorique
Ecole Polytechnique
91120 Palaiseau